第十一讲 级数的概念与性质

二项式定理的推广

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!}x^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

杨辉三角（帕斯卡三角）

- 二项式定理的推广

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^{n}+\cdots\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

- 无穷个数相加减带来的困惑

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=?$$

答案： $0\quad 1\quad \frac{1}{2}$

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

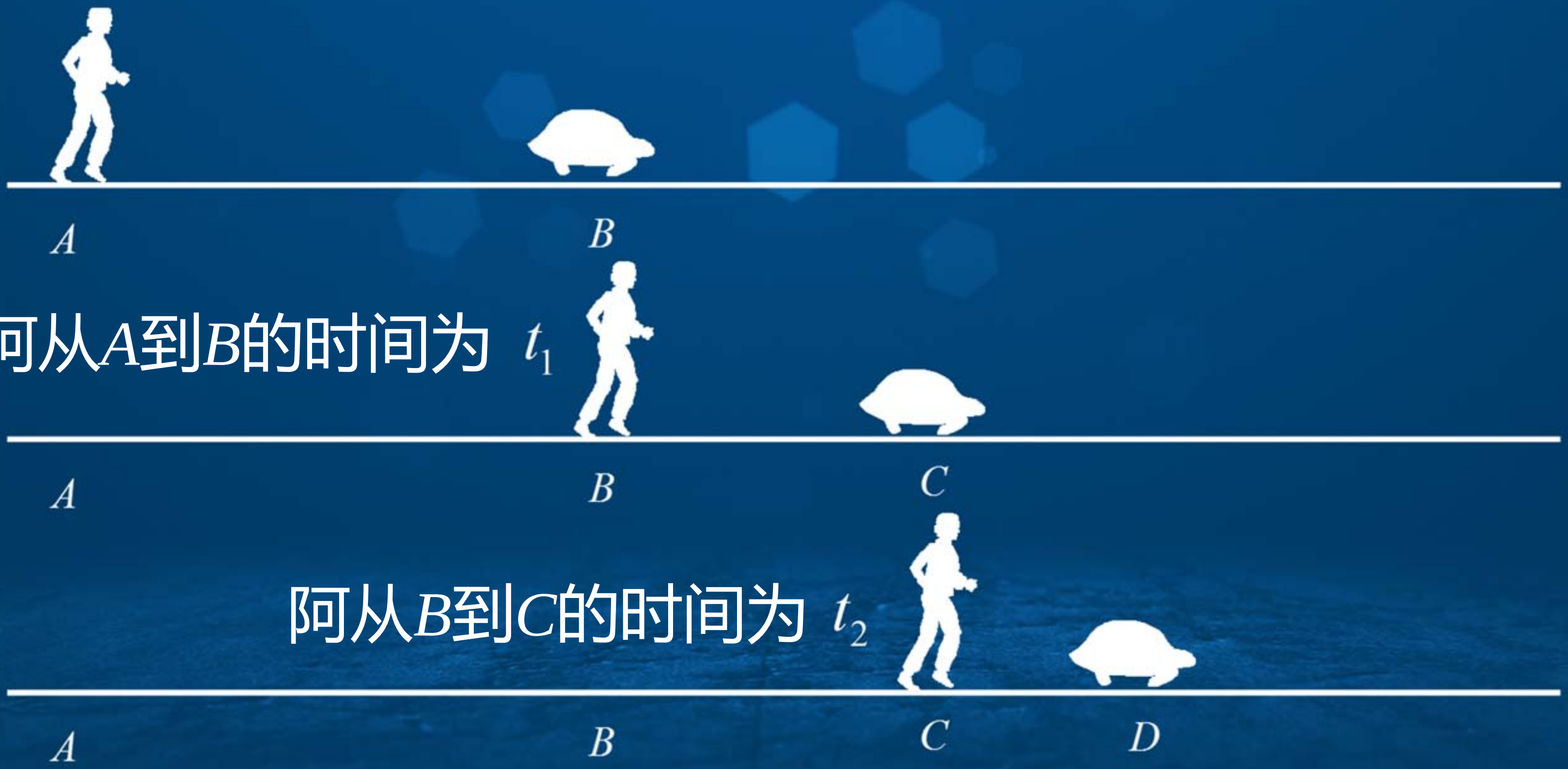
$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$$

$$a=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-a\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

- 级数的由来
- 级数收敛的概念
- 收敛级数的性质
- 聚点原理

第11讲 级数的概念与性质——主要内容

引例1　古希腊哲学家芝诺的阿齐尔斯和龟的问题



阿从A到B的时间为 t_1

阿从B到C的时间为 t_2

阿齐尔斯追上龟的时间　$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots \quad = \infty\,?$

引例2 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 $3\times 2^n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 边形，设 a_0 表示内接正三角形面积，a_k 表示边数增加时增加的面积，则圆内接正 3×2^n 边形面积为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

当 $n\to\infty$ 时这个和逼近于圆的面积 A .

即

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=A$$

引例3 等比数列的求和问题 $1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots$

前有限项的和 $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}\ (q\neq 1)$

当 $|q|<1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}\ (|q|<1)$$

因此得到等比数列的求和公式

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q}\ (|q|<1)$$

无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$

前 n 项部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

定义1 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若其部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，且极限为 S，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，S 称为该级数的和，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$

若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 .

例 1 称等比数列的和，即 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots$ 为**几何级数**．证明：当 $|q| < 1$ 时级数收敛，当 $|q| \geq 1$ 时发散．

前n项部分和 $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1)$

$$S_n = 1+1+1+\cdots+1 = n \qquad (q = 1)$$

$$S_n = 1-1+1-\cdots+(-1)^{n-1} = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2} \qquad (q = -1)$$

- 几何级数的应用：无限循环小数的分数表示

$$0.333333333\cdots = 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \cdots = \frac{3}{10}\frac{1}{1-10^{-1}} = \frac{1}{3}$$

例2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

例3 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛 .

例4 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散 .

定理1（级数收敛的必要条件）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

定理2 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

- 定理2 表明收敛级数可将对应项相加减 .
- 收敛级数与发散级数对应项相加减所得级数一定发散.

定理3 设 λ 为非零常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ 有相同的敛散性．

定理4 增加或减少级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的有限项不改变原级数的收敛性，

即，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性与前有限项无关．

定理5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则在不改变级数项前后位置的条件下，任意结合级数的有限项得到新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$，则新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k'$ 也收敛，且和不变．

定理5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则在不改变级数项前后位置的条件下，任意结合级数的有限项得到新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$，则新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ 也收敛，且和不变．

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = & \ (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) && \text{———} \ a'_1 \\
& + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) && \text{———} \ a'_2 \\
& + (a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \cdots + a_{n_3}) && \text{———} \ a'_3 \\
& + \cdots \\
& + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) && \text{———} \ a'_k \\
& + \cdots
\end{aligned}
$$

定理6（柯西收敛原理） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是：对于任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，不等式

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

对一切 $p = 1, 2, \cdots$ 成立.

推论 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

例5 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ 收敛.