第19讲 连续函数的运算

- 连续函数对函数运算的封闭性

有理数 → 四则运算 → 有理数

连续函数 → 四则运算 / 复合运算 / 求逆运算 →? 连续函数

连续函数的运算法则

初等函数的连续性

压缩映像原理

第19讲 连续函数的运算——主要内容

定理1(连续函数的四则运算) 设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数

$$f(x) \pm g(x),\ f(x) \cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x_0) \neq 0)$$

在点 x_0 处连续．(连续函数对四则运算是封闭的)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x\text{在}x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\,(k \in \mathbb{Z})\text{处连续}.$$

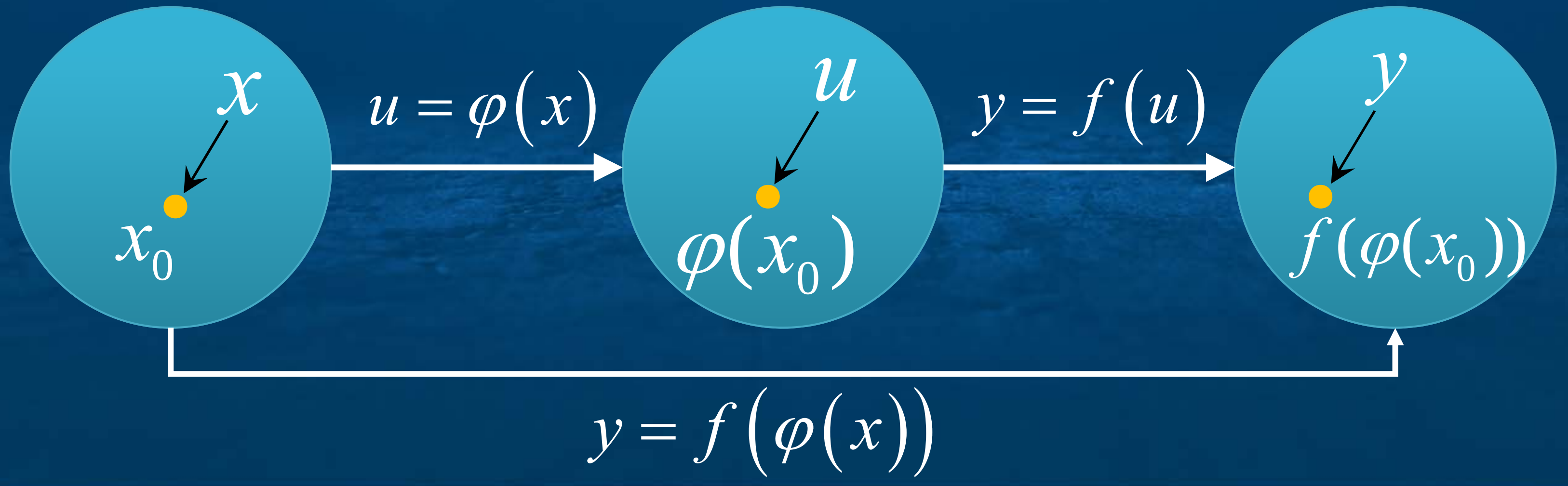
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot x\text{在}x \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\text{处连续}.$$

$$\text{双曲正弦函数}\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh x\text{在}(-\infty, +\infty)\text{上连续}.$$

定理2 (连续函数的复合运算) 设复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 有意义，$u_0=\varphi(x_0)$，若 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$y=f(u)$在u_0处连续，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续．

例如，$y=x^a=e^{a\ln x}$ 视为函数$u=a\ln x$和$y=e^u$的复合

$\Rightarrow y=x^a$当$x>0$时连续.



由连续函数复合运算法则知，极限运算与连续函数运算可以交换顺序，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right].$$

注：由复合函数的求极限法则，即使$\varphi(x)$在x_0处不连续，只要极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$ 存在，且$f(u)$在u_0处连续，上述结论依然成立.

例如，$\lim\limits_{x\to 1}\ln\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}\right) = \ln 2$

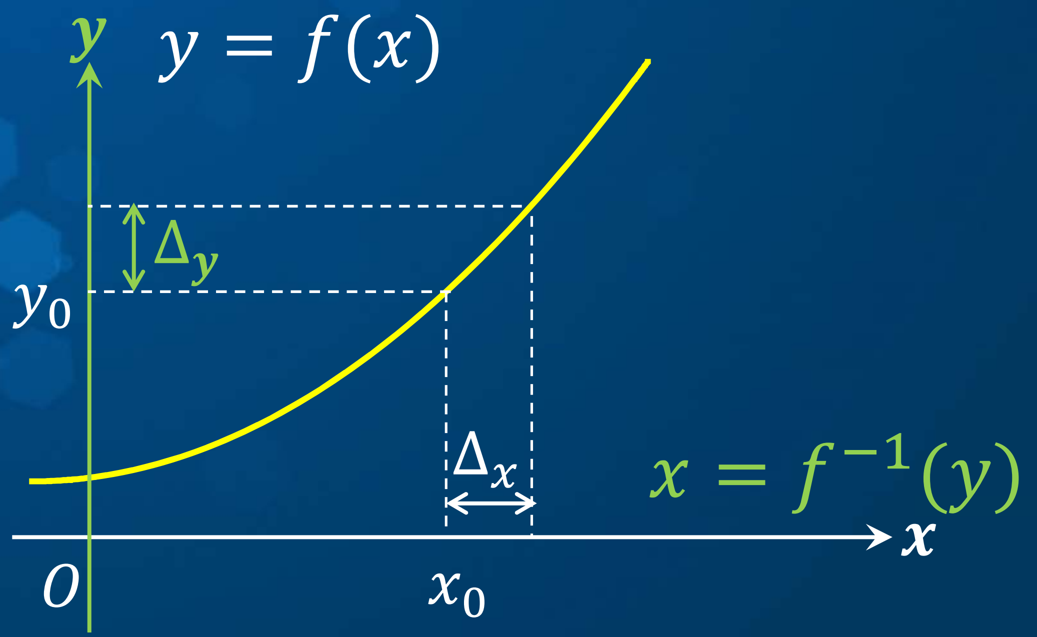
幂指函数：$y = u(x)^{v(x)}$

若有 $\lim_{x\to x^*} u(x) = A,\ \lim_{x\to x^*} v(x) = B$，且$A > 0$，则有

$$\lim_{x\to x^*} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x^*} u(x)^{\lim_{x\to x^*} v(x)} = A^B.$$

例1 求函数极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

定理3(连续函数的求逆运算) 设函数 $y=f(x)$ 在区间Δ_x上连续且递增(递减)， Δ_y 是函数的值域，则 Δ_y 也为一区间，且$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$在区间Δ_y上连续且递增(递减) .



➢ 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x$ 及 $y=\arctan x$ 等在其定义域中连续.

基本初等函数包括下面五种函数：

(1) 幂函数：$y = x^{\mu}$ (μ为常数)；

(2) 指数函数：$y = a^{x}$(a为常数,$a > 0, a \neq 1$)；

(3) 对数函数：$y = \log_{a}x$(a为常数,$a > 0, a \neq 1$)；

(4) 三角函数：$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \tan x,\ y = \sec x$等；

(5) 反三角函数：$y = \arcsin x,\ y = \arctan x$等．

➢ 所有基本初等函数在其定义域上连续.

基本初等函数在其定义域内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

一切初等函数在定义区间内连续

定义域？

➢ 若初等函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义，则它在该区间内连续.

例如，$y=\sqrt{\sin x-1}$ 的定义域是离散点 $\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

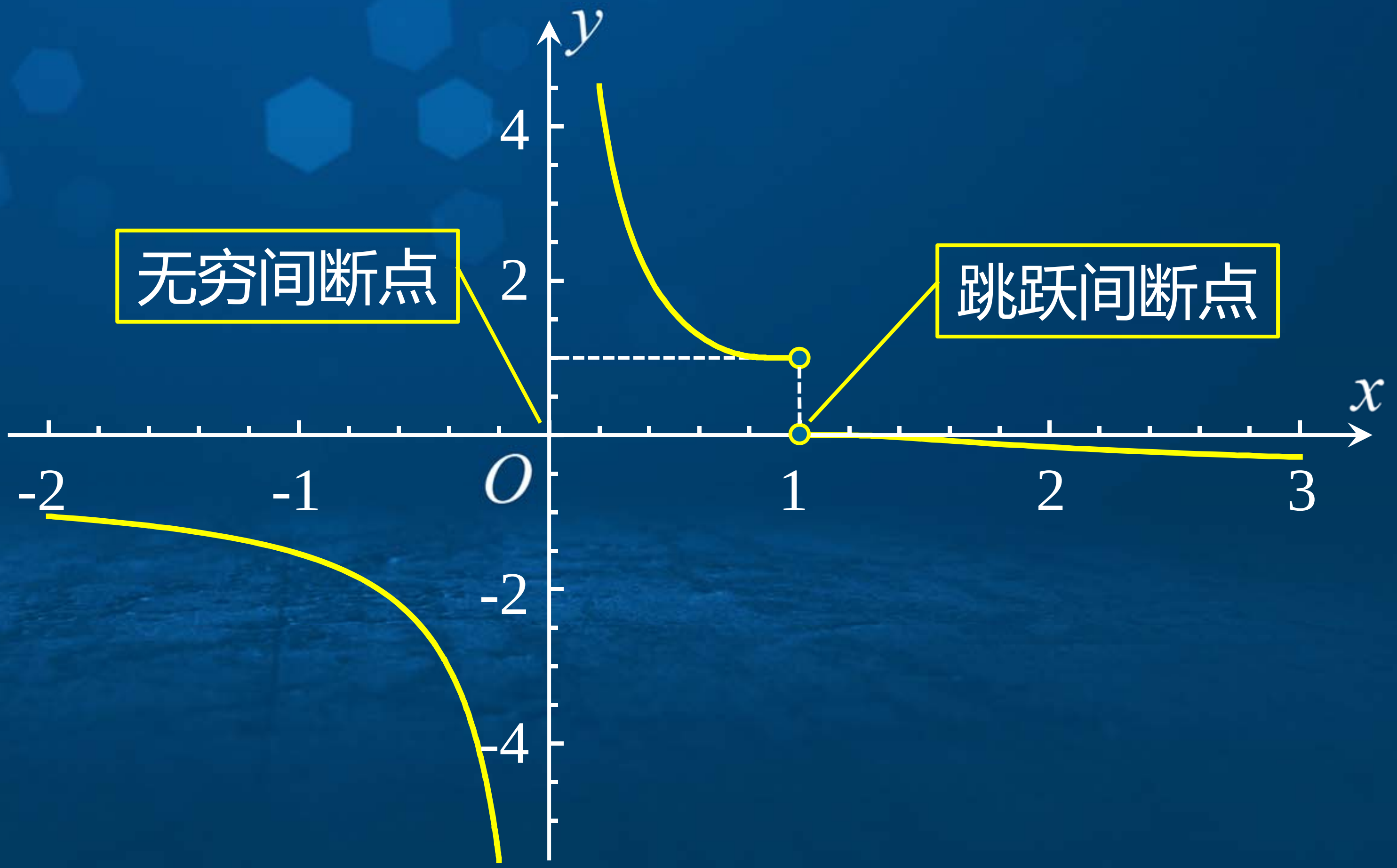
所以该函数没有连续点.

例2 问函数$f(x)=\dfrac{\ln x+\arctan x}{x^2-1}$在哪些点处连续？

例3 求函数

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$$

的连续区间与间断点，并指出间断点的类型.



连续函数与数列极限的关系

函数 $f(x)$ 在x_0 连续的充要条件是：$\forall\{x_n\}$: $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$, 均有 $f(x_n) \to f(x_0) \ (n \to \infty)$.

递推数列极限的存在性

数列$\{x_n\}$：$x_{n+1} = f(x_n) \ (n = 1,2,\cdots)$ 是否收敛？$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ?$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 存在，且 $f(x)$ 在x_0 处连续，则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \Rightarrow x_0 = f(x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

定理4 设函数 f: $[a, b] \to [a, b]$连续，若存在常数$\alpha \in (0, 1)$使得对于任何$x, y \in [a, b]$，均有

$$|f(x) - f(y)| \le \alpha|x - y|,$$

则一定存在惟一的ξ，使得$f(\xi) = \xi$.

注：(1) 称满足 $f(\xi) = \xi$ 的 ξ 为函数 $f(x)$ 的不动点.

(2) 称满足定理条件的函数 $f(x)$ 为区间$[a, b]$上的压缩映射.

- 定理4称为压缩映像原理或Banach不动点定理.

例3 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$$f(x)=\frac{1}{2+x} \qquad f:[0,\ 1]\to[0,\ 1]$$

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2+y}\right|=\frac{|x-y|}{|(2+x)(2+y)|}\le\frac{1}{4}|x-y|$$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$ 存在

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+x_n}\Rightarrow\xi=\frac{1}{2+\xi}\Rightarrow\xi=-1\pm\sqrt{2}$$

因此，所求数列极限为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{2}-1.$