介绍

闭区间上连续函数的性质

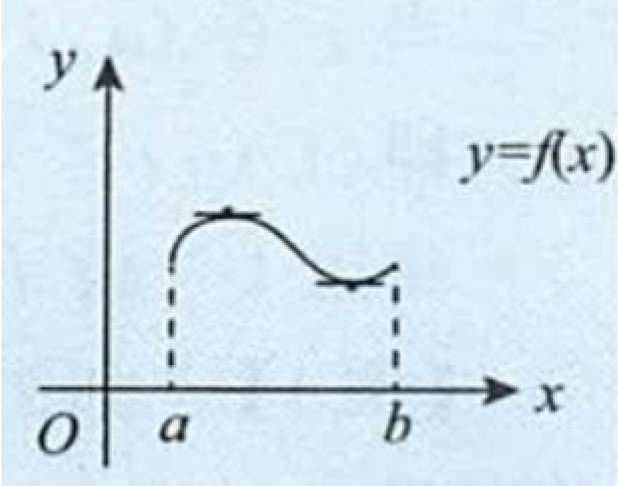
有界定理：若 $f(x)\in C[a,b]$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有界。
最值定理：若 $f(x)\in C[a,b]$ ，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最小值和最大值。
零点定理：若 $f(x)\in C[a,b]$ ，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$
介值定理：若 $f(x)\in C[a,b]$ ，对任意的 $\eta\in[m,M]$ ，存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\eta$

设 $f(x)\in C[a,b]$ ，证明关于 $\xi\in(a,b)$ 的命题时，一般使用零点定理。
设 $f(x)\in C[a,b]$ ，证明关于 $\xi\in[a,b]$ 的命题时，一般使用介值定理。
设 $f(x)\in C[a,b]$ ，若出现函数值相加的条件时，一般使用介值定理。

极值

$$\begin{aligned} f(x)\text{在 } x=a\text{处取极值} &\implies f'(a)=0\text{或 } f'(a)\text{不存在} \\ f(x)\text{可导且 } x=a\text{为 } f(x)\text{的极值点} &\implies f'(a)=0 \end{aligned}$$

罗尔中值定理

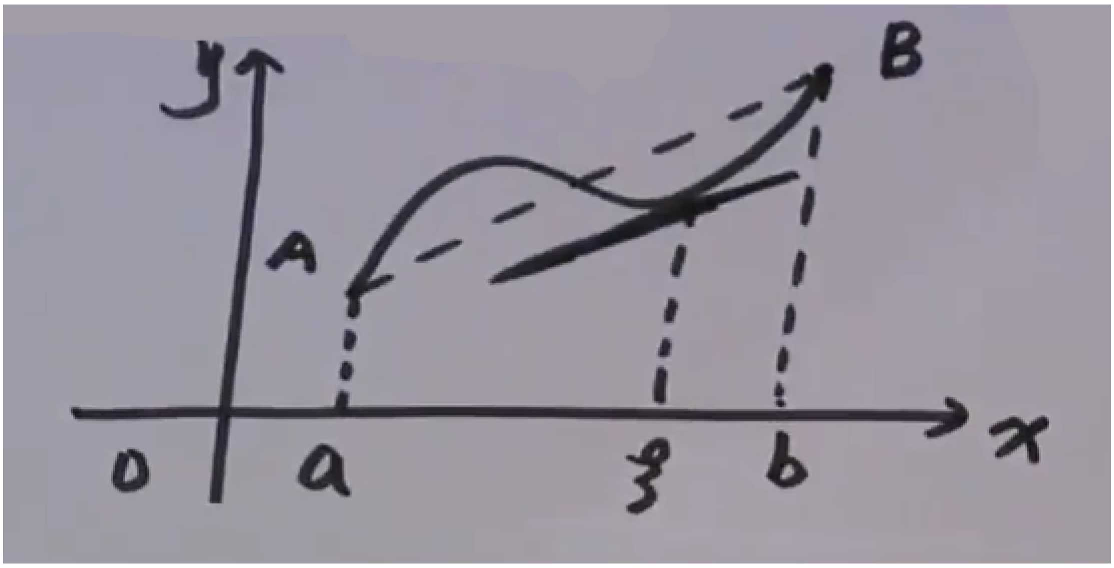


$$Rolle = \begin{cases} f(x) & \in & C[a,b] \\ f(x) & \text{在} & (a,b)\text{内可导} \\ f(a) & = & f(b) \end{cases} \Rightarrow \text{存在}\ \xi \in (a,b)\text{，使得}\, f'(\xi) = 0$$

证明:

$$\begin{aligned} & f(x) \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, m, M \\ & 1.m = M, f(x) \equiv C_0 \\ & \forall \xi \in (a,b)\text{，有}\, f'(\xi) = 0 \\ & \\ & 2.m < M, \\ & \because f(a) = f(b) \\ & \therefore m, M\text{至少一个在}\,(a,b)\text{内取到} \\ & \text{设}\,\exists\, \xi \in (a,b), f(\xi) = M \\ & \Rightarrow f'(\xi) = 0 \end{aligned}$$

拉格朗日中值定理



$$Lagrange = \begin{cases} f(x) & \in & C[a,b] \\ f(x) & \text{在} & (a,b)\text{内可导} \end{cases} \Rightarrow \text{存在}\,\xi \in (a,b)\text{，使得}\, f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$if[f(a) = f(b)] \Rightarrow$ 拉格朗日就变为罗尔，因此可以将罗尔看作拉格朗日的特殊情况。

分析:

$$
\begin{aligned}
&\text{曲线}L: \ y=f(x)\\
&\text{直线}L_{AB}: \ y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\\
&\text{即} \ y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\\
&\text{令} \ \varphi(x)=\text{曲线}-\text{直线。}\\
&\text{则} \ \varphi(a)=0,\varphi(b)=0
\end{aligned}
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\text{令} \ \varphi(x)=\text{曲线}-\text{直线}=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\\
\because \varphi(a)=\varphi(b)=0\\
\therefore \exists\xi\in(a,b),\text{使} \ \varphi'(\xi)=0\\
\text{而} \ \varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\\
\therefore f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}
\end{aligned}
$$

等价形式:

$$
\begin{gathered}
f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\\
\Updownarrow\\
f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\\
\Updownarrow\\
f(b)-f(a)=f'[a+\theta(b-a)](b-a)\\
(0<\theta<1)\text{且} \ \theta\text{与}\xi\text{是一对一的}
\end{gathered}
$$

柯西中值定理

$$
Cauchy=\begin{cases} f(x)\text{、}g(x) & \in & C[a,b]\\ f(x)\text{、}g(x) & \text{在} & (a,b)\text{内可导}\\ g'(x) & \neq & 0\ (a<x<b)\end{cases} \Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b),\text{使得} \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}
$$

$$
g'(x)\neq0\Rightarrow\begin{cases} g'(\xi) & \neq 0\\ g(b)-g(a) & \neq 0\ (\text{若}\,g(b)=g(a)\text{那就是罗尔了，矛盾})\end{cases}
$$

$if\ [g(x)=x]\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\xi)}{1}$ 柯西变拉格朗日。

分析:

$$
\begin{gathered}
\text{拉格朗日中辅助函数：}L=\varphi(x)=\text{曲线}-\text{直线}=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\\
\text{因为}\,g(x)=x\text{时，柯西变拉格朗日，所有这里将}\,x\,\text{变为}\,g(x)\\
\text{柯西辅助函数：}\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]
\end{gathered}
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\text{令 } \varphi(x) &= f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \\
&\because \varphi(a)=0, \varphi(b)=0 \\
&\therefore \exists\, \xi \in (a,b), \text{使}\, \varphi'(\xi)=0 \\
\text{而 } \varphi'(x) &= f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x) \\
&\therefore f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)=0 \\
&\because g'(\xi) \neq 0 \\
&\therefore \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}
\end{aligned}
$$

题型

1. $f^{(n)}(\xi)=0$ (Rolle 型)

例题：P54 L3
想证：

$$
\begin{aligned}
f'(\xi)=0 \text{ 证：} &\{ f(a)=f(b) \\
f''(\xi)=0 \text{ 证：} &\begin{cases} f(a)=f(b)=f(c) \\ f'(\xi_1)=f'(\xi_2) \end{cases}
\end{aligned}
$$

函数值相加：介质定理

函数值相等：罗尔

函数值不等：拉格朗日

三个点：两次拉格朗日

2. 结论中仅有 ξ 无其他字母

2.1 两项且导数差一阶

例题：P56 L1 L2，P57 L4。
用还原法：

$$
\frac{f'(x)}{f(x)}=[lnf(x)]', \quad \frac{f''(x)}{f'(x)}=[lnf'(x)]'
$$

分析：

0.待证明的用 ξ 表达的式子，改用 x 表达

1.移项改写成含 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 或 $\frac{f''(x)}{f'(x)}$ 的式子

2.写成两个 ln 求导相加等于 0 的形式

3.合并两个相加为乘，即 $ln(a)+ln(b)=ln(ab)$

4.$ln(ab)$中 ab 做为辅助函数，记作 $\varphi(x)$

证明：

1.找到两个 $\varphi(x)$ 值相同的点 a,b，由罗尔定理得 $\varphi'(\xi)=0$

2.对 $\varphi(x)$ 求导，得到 $\varphi'(\xi)$

3.说明某些元素 $\neq 0$，再移向化简，结束。

2.2 导数差距非一阶，或大于两项：

例题：P58 L6

用分组法：

Case2. 分组法.

1、$f(x)$ 二阶可导. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. $f(1)=1$.

证：$\exists\, \xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)-f'(\xi)+1=0$.

分析：$f''(x)-f'(x)+1=0$

$\Rightarrow [f'(x)-1]'-[f'(x)-1]=0$

$g'-g=0 \Rightarrow \frac{g'}{g}-1=0 \Rightarrow (\ln g)'+(\ln e^{-x})'=0$

$\Rightarrow [\ln e^{-x}\cdot(f'(x)-1)]'=0$

证：令 $\varphi(x)=e^{-x}[f'(x)-1]$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1 \Rightarrow f(0)=0$，$f'(0)=1$.

$\exists\, c\in(0,1)$，使 $f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$

$\therefore \varphi(0)=0=\varphi(c)=0$

$\therefore \exists\, \xi\in(0,c)\subset(0,1)$，使 $\varphi'(\xi)=0$.

而 $\varphi'(x)=-e^{-x}(f'-1)+e^{-x}\cdot f''=e^{-x}[f''(x)-f'(x)+1]$

且 $e^{-x}\neq 0$.

$\therefore f''(\xi)-f'(\xi)+1=0$.

分析：

$0.$待证明的用 ξ 表达的式子，改用 x 表达
$1.$将表达式分组为 $[g]'+a[g]=0$的形式
$2.$按还原法，写成含 $\frac{g'(x)}{g(x)}$或 $\frac{g''(x)}{g'(x)}$的式子
$3.$写成两个 ln 求导相加等于 0 的形式
$4.$合并两个相加为乘，即 $ln(a)+ln(b)=ln(ab)$
$5.ln(ab)$中 ab 做为辅助函数，记作 $\varphi(x)$

证明：

$1.$找到两个 $\varphi(x)$ 值相同的点 a,b，由罗尔定理得 $\varphi'(\xi)=0$
$2.$对 $\varphi(x)$ 求导，得到 $\varphi'(\xi)$
$3.$说明某些元素 $\neq 0$，再移向化简，结束。

3. 结论中含有 ξ、a、b

3.1 ξ 与 a，b 可分

将结论化简后，等式一边仅有 ξ 另一边仅有 a,b。操作步骤如下，例题：P59 L2

$0.$化简整理待证式子，将 ξ 和 a,b 分别放至等号两边
$1.$整理移项后的式子，写成 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$或 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$2.$检查放a,b的一侧若为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$则使用拉格朗日
$2.$或者放a,b的一侧为 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$则使用柯西

3.2 ξ 与 a，b 不可分

例题：L1 P60

$0.$将待证式子中ξ改成x
$1.$有分母去分母，再移项，写成$(\ldots)=0,$再写成$(\ldots)'=0$
如：$f'g+fg'=0\Rightarrow(fg)'=0$
如：$f'g-fg'=0\Rightarrow\frac{f'g-fg'}{g^2}=0\Rightarrow[\frac{f(x)}{g(x)}]'=0$
$2.$括号中求导的部分就设为$\varphi(x)$
$3.$后续使用罗尔即可

4. 结论至少含有 ξ、η 甚至更多

4.1 仅有 $f'(\xi)$、$f'(\eta)$

找三个点，使用两次拉格朗日。P61 L2

4.2 ξ、η 项的复杂程度不同

例题：P62 L2

$0.$移项化简待证式$,$将复杂的一边写成$(\ldots)'$$,$再用拉格朗日

$0.$若无法写成整个求导，则写成$\dfrac{(\ldots)'}{(\ldots)'}$的形式$,$再用柯西

如：$e^{2\xi}[f'(\xi)+2f(\xi)] \Rightarrow (e^{2x}f(x))'$$,$再用拉格朗日

如：$e^{\eta}f'(\eta)=\dfrac{f'(\eta)}{e^{-\eta}}$$,$再用柯西$,$分子对标$f(x)$，分母对标$-e^{-x}$

复杂的一边使用柯西解决后，另一边一般使用拉格朗日

5. 拉格朗日中值定理的惯性思维

例题：L1 P65

出现：

$1.f(b)-f(a)$、$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$用拉格朗日

$2.f(a)$、$f(b)$、$f(c)$用两次拉格朗日

$3.f'(a)$、$f'(b)$、$f'(c)$用两次拉格朗日

$4.f'(x)$变成$f(x)$用拉格朗日