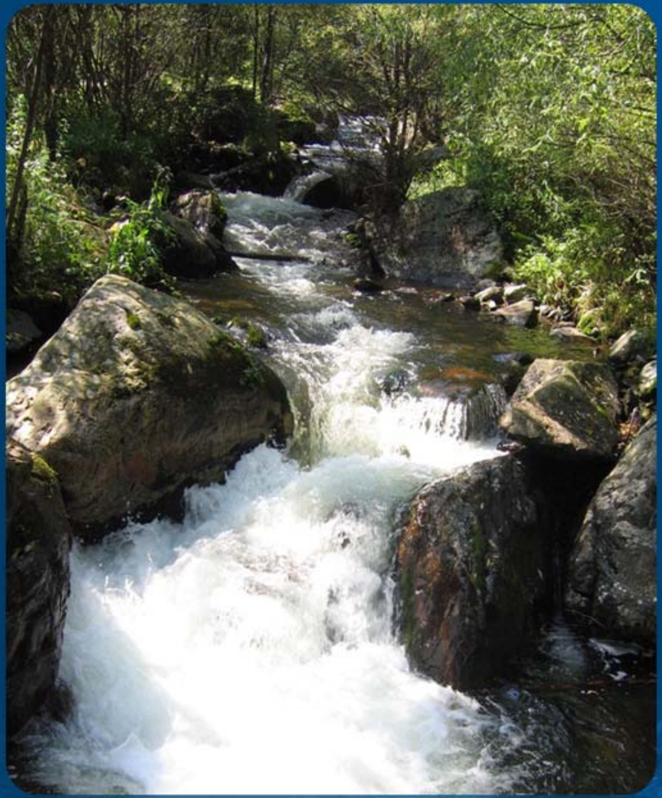
第18讲 函数连续的概念



流水潺潺

树木葱葱

"自然界中，一切都是连续的"

温度的变化

身高的增长

- 连续函数的概念
- 连续性的等价刻画
- 间断点及其类型

定义1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若当 $x\to x_0$ 时$f(x)$存在极限，且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0处**连续**，并称点x_0为函数$f(x)$的**连续点**．

增量形式: $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

$\varepsilon-\delta$形式: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$|x-x_0|=|\Delta x|<\delta$时，有

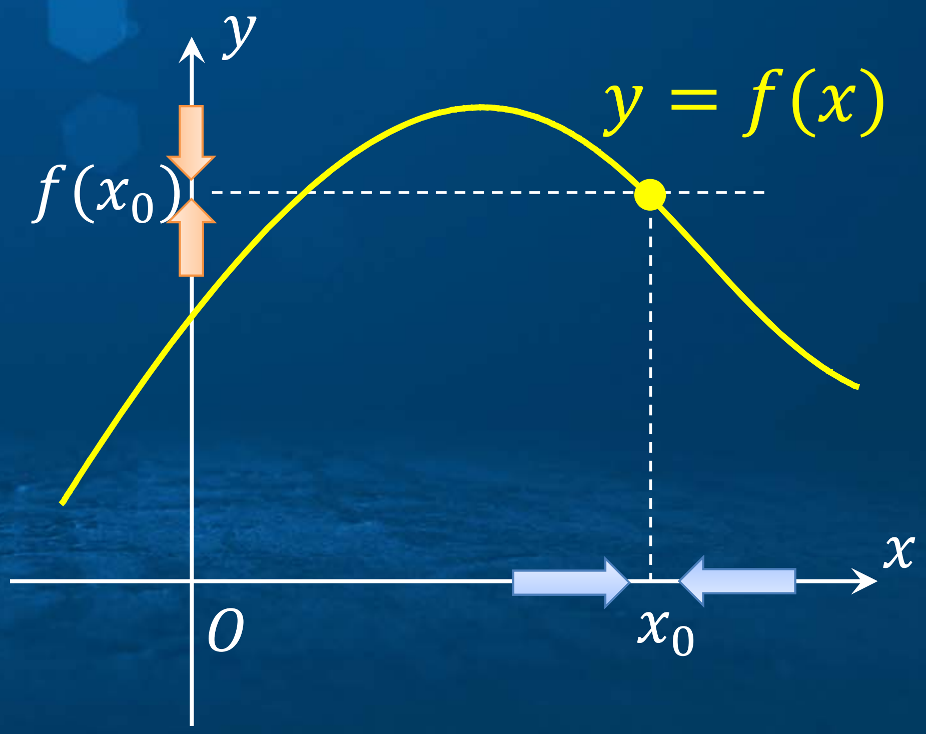
$$|f(x)-f(x_0)|=|\Delta y|<\varepsilon$$

$f(x)$在点x_0连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

(1) $f(x)$在某$U(x_0)$有定义；

(2) 极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.



定义2 (1) 设函数$f(x)$在区间$[x_0, x_0+\delta)$内有定义，若

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$处右连续．

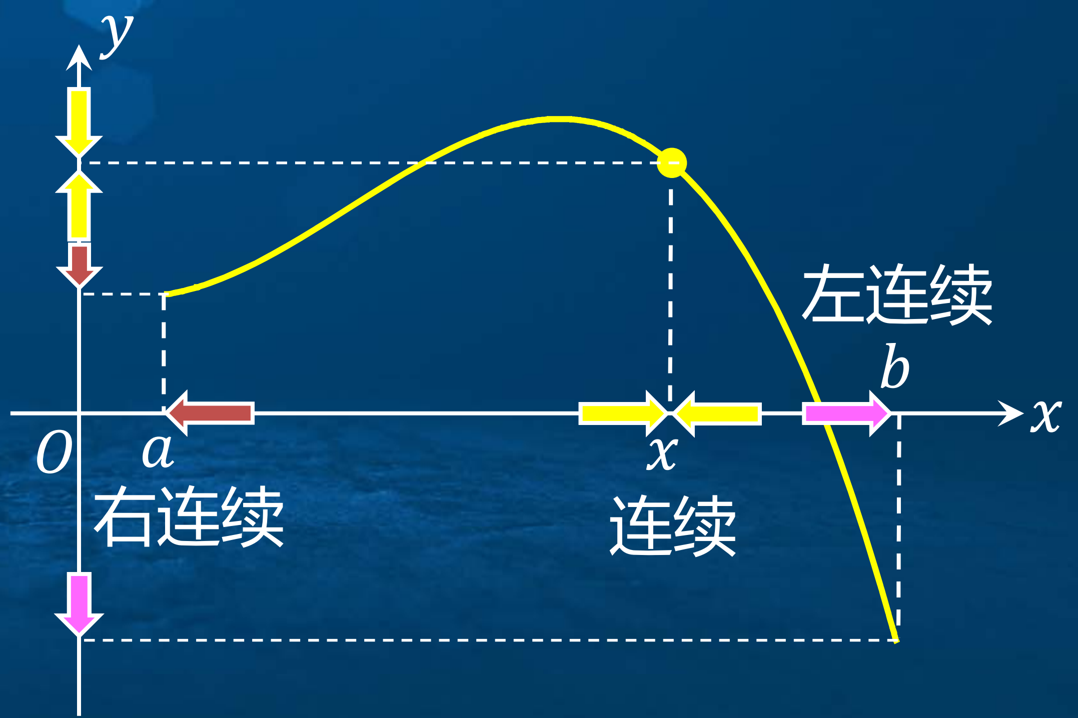
(2) 设函数$f(x)$在区间$(x_0-\delta, x_0]$内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，

则称函数$f(x)$在x_0处左连续．

函数$f(x)$在x_0处连续，当且仅当它在x_0处左连续和右连续．

定义3 (1) 若函数$f(x)$在开区间 (a,b) 内每一点连续，则称该函数在区间(a,b)内连续, 记为 $f(x)\in C(a,b)$.

(2) 若函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在$x=a$和$x=b$处分别右连续和左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 记为 $f(x)\in C[a,b]$.



例1　设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对$(-\infty,+\infty)$内的任何x,y满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

证明：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续的充要条件是该函数在$x=0$处连续．

容易验证：

- 多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在$\mathbb{R}$中任何点处都连续．
- 正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 在$\mathbb{R}$中的任何点处都连续．
- 对数函数 $\ln x$ 在$\mathbb{R}^+$中的任何点处连续．

例2 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$在点$x=0$处及其附近点的连续性．

设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域有定义，若下列情形至少有一成立，则$f(x)$在x_0点不连续.

(1) 函数$f(x)$在x_0点无定义；

(2) 函数$f(x)$在x_0点有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

(3) 函数$f(x)$在x_0点有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

则称x_0为$f(x)$的间断点.

定义4（间断点分类） 设x_0为$f(x)$的间断点.

第Ⅰ类: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$均存在,

$$\delta = \left|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right|$$

跳跃度

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，称$x_0$为可去间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，称$x_0$为跳跃间断点.

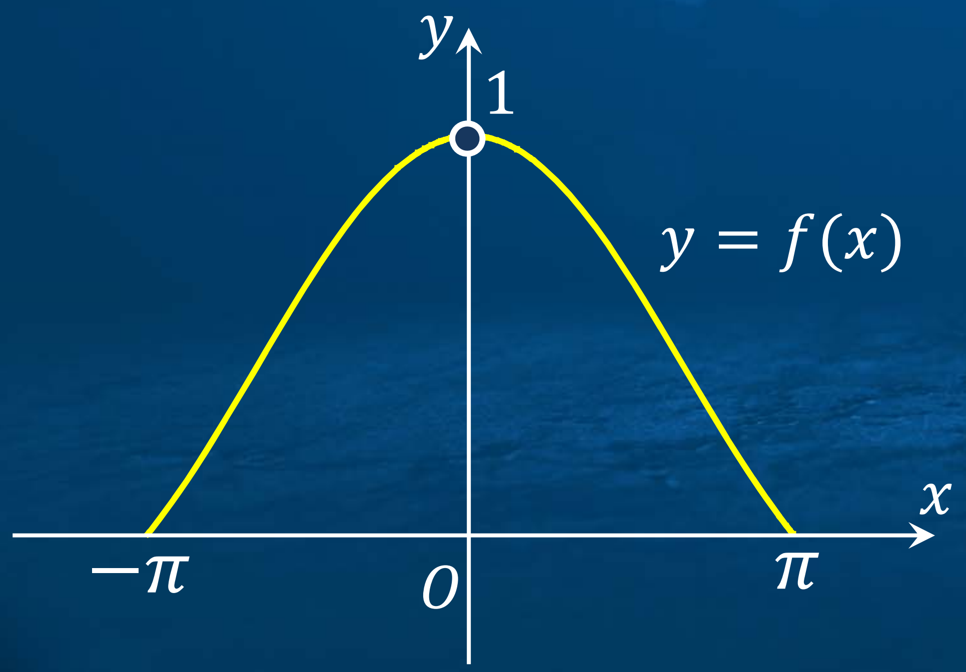
第Ⅱ类: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$至少一个不存在,

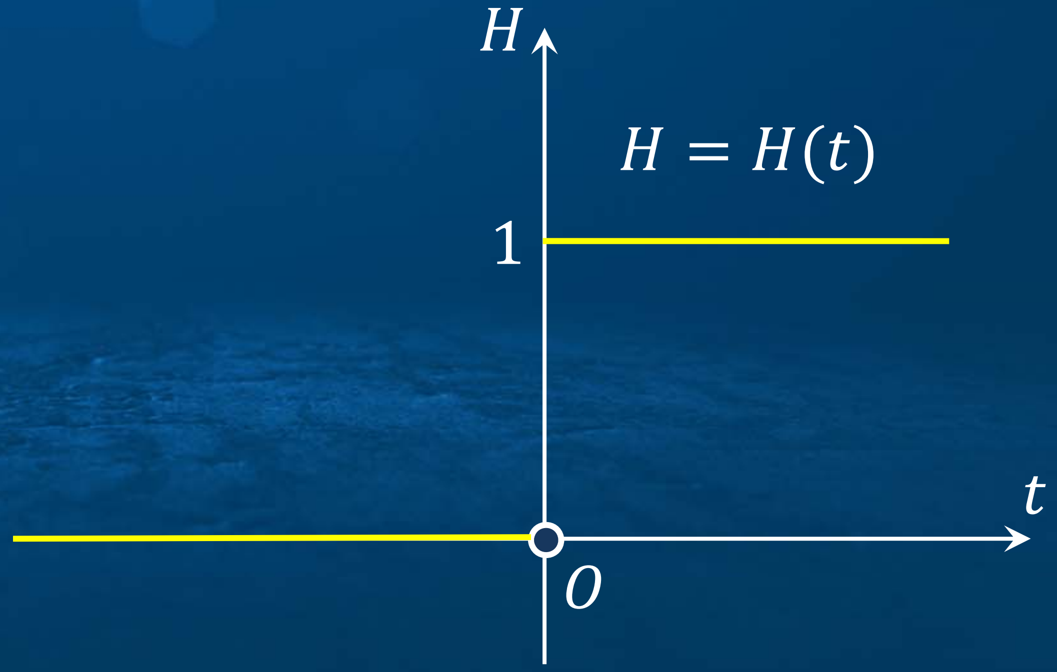
若其中有一个为∞，称x_0为无穷间断点.

若其中有一个为振荡，称x_0为振荡间断点.

例3 指出函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的间断点及其类型.

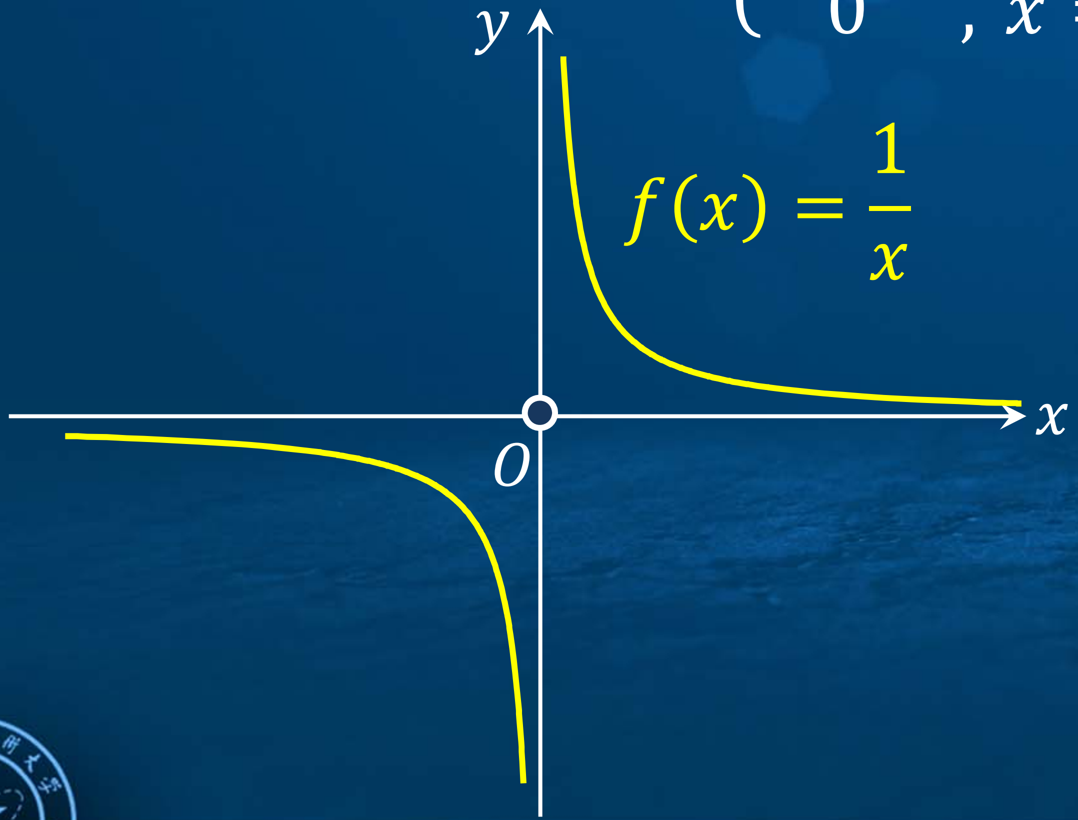
例4 单位阶梯函数(赫维赛德函数) $H(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0,\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的间断点及其类型.

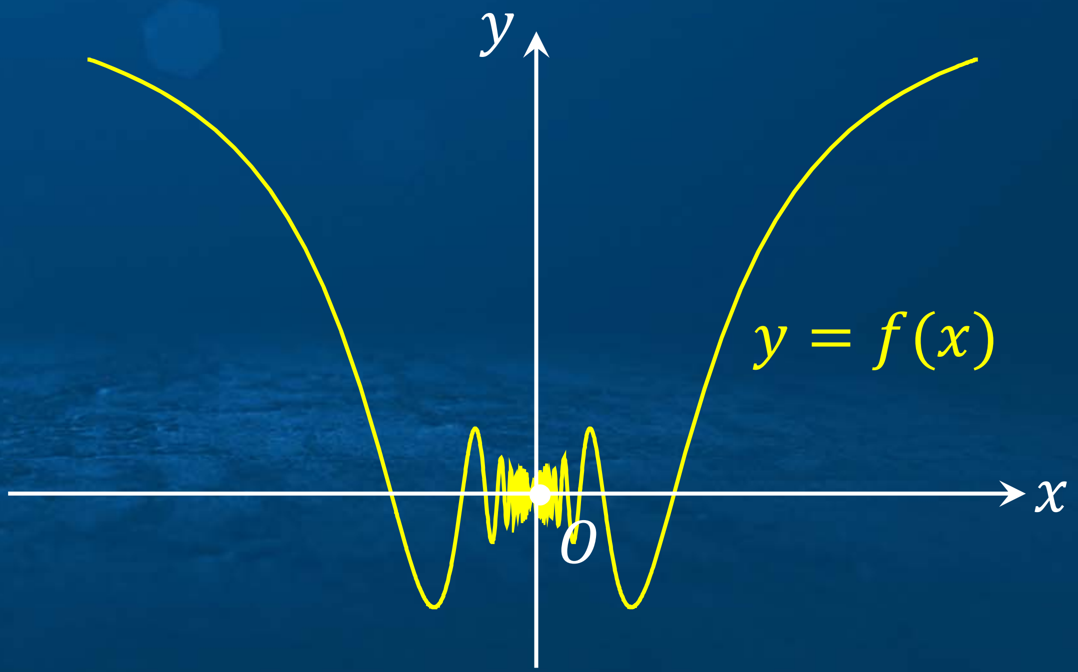




例5 指出函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的间断点及其类型.

例6 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 证明函数在 $x=0$ 处连续 .





例7 设$f(x)=\begin{cases} x+a, & x<x_0, \\ 3, & x=x_0, \\ 2x+1, & x>x_0, \end{cases}$ 当常数a和x_0取何值时函数在$(-\infty, +\infty)$上连续？