国防科学技术大学
National University of Defense Technology

高等数学（一）综合练习

练习三： 函数极限与连续函数

理学院 朱健民教授

主要内容

1. 函数极限的概念与性质；
2. 函数极限的四则运算与复合运算；
3. 极限存在定理与两个重要极限；
4. 无穷小比较与函数极限计算；
5. 连续函数的概念；
6. 间断点及其类型；
7. 初等函数的连续性；
8. 有界闭区间上连续函数性质及应用.

例题讲解

1. 由极限定义证明：$\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{2x-1}=1.$

2. 由极限定义证明：$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x_0^2}(x_0\neq0).$

3. 证明：若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，且$f(x)>0$，则$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}$.

4. 设$f(x)$是定义在$0<|x|<\delta$上的正值函数，且$\lim\limits_{x\to0}[f(x)+\frac{1}{f(x)}]=2$，证明：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1.$

5. 求下列极限值：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^x$

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$

（5）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\tan x\right)$

（6）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^3}$

6. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[xf(x)]}{x}=a.$

7. 设a,b为正常数，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

8. 设$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx$，且$|f(x)|\le|\sin x|$，证明：$|\sum_{k=1}^{n}ka_k|\le1$.

9. 设函数$f(x)$ 在$x=0$处连续，且对每一个$x\in\mathbb{R}$成立$f(x)=f(2x)$，证明$f(x)$为常值函数.

10.求函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \ln(1+x)+\sin\dfrac{1}{x^2-1}, & x\ge0\end{cases}$的间断点，并指出其类型.

高等数学（一）综合练习—— 函数极限与连续函数

11. 设f，g是$\mathbb{R}$上的连续函数，在所有有理点x上有$f(x)=g(x)$，证明：$f\equiv g$.

12. 设a_1,a_2,a_3均为正常数，$b_1<b_2<b_3$，证明方程

$$\frac{a_1}{x-b_1}+\frac{a_2}{x-b_2}+\frac{a_3}{x-b_3}=0$$

在区间$(b_1,\ b_2)$和$(b_2,\ b_3)$内各有一个根.

13. 证明奇次多项式方程至少存在一个实根.

14.设$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$x_i\in[a,b],t_i>0(i=1,2,\cdots,n),\sum_{i=1}^n t_i=1$，证明至少存在一点$\xi\in[a,b]$ 使$f(\xi)=\sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$.