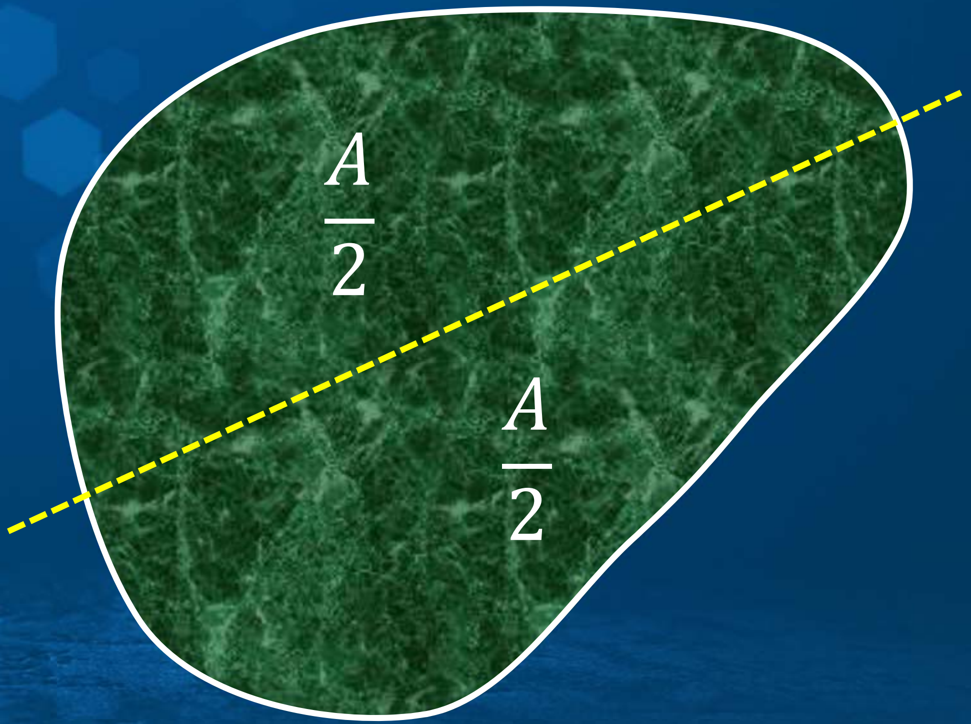
《高等数学》全程教学视频课

第20讲 闭区间上连续函数的性质

从直观上我们知道，任给一块面积为 A 的大理石，一定可以将其用锯子以直线锯口将其分割成面积相等的两块.



试问你能从数学上给予证明吗？

最值定理

零值定理与介值定理

定理应用

最大值与最小值

对于在区间 I 上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$, 都有

$$f(x) \le f(x_0)\ ,$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间 I 上的最大值，记作

$$M = \max_{x \in I} f(x) \text{ 或 } M = f_{max}.$$

最大值与最小值

对于在区间 I 上有定义的函数$f(x)$，如果有$x_0 \in I$，使得对于任一$x \in I$, 都有

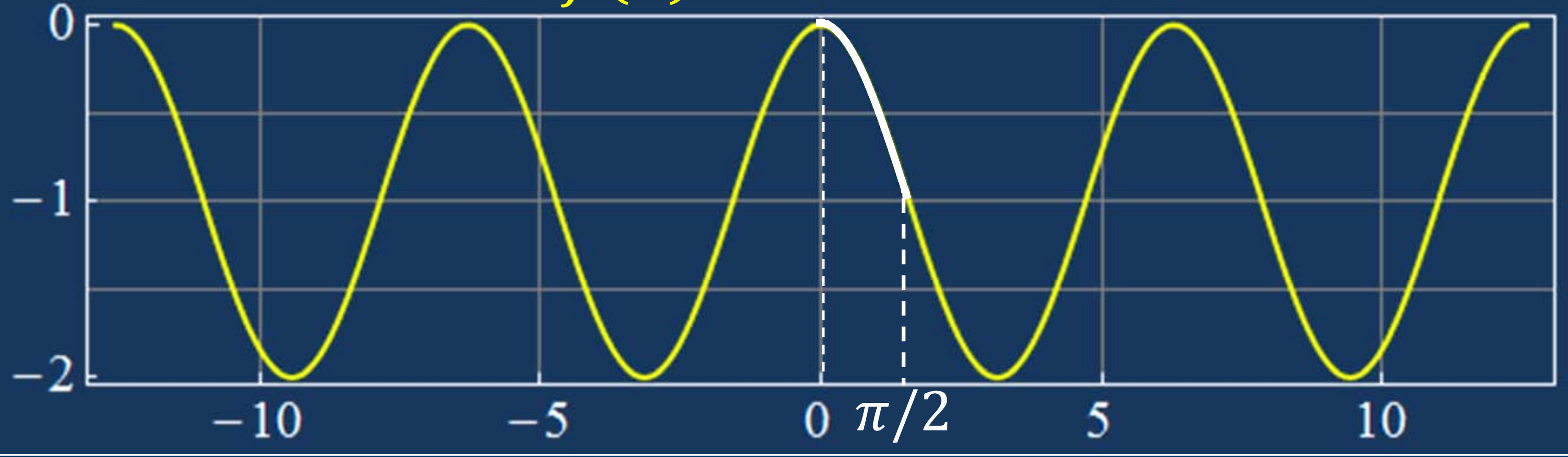
$$f(x) \geq f(x_0),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间 I 上的最小值，记作

$$m = \min_{x \in I} f(x) \text{ 或 } m = f_{min}.$$

最大值与最小值

$f(x) = \cos x - 1$

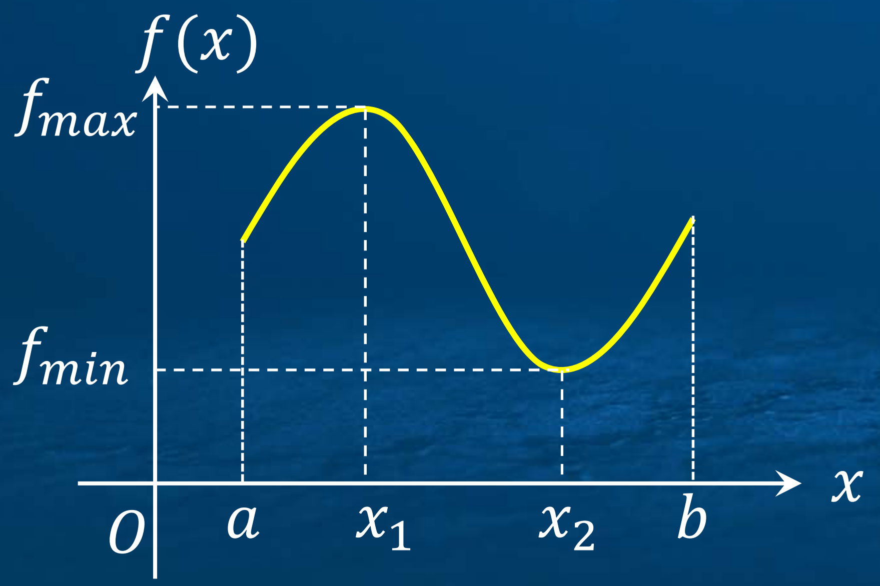


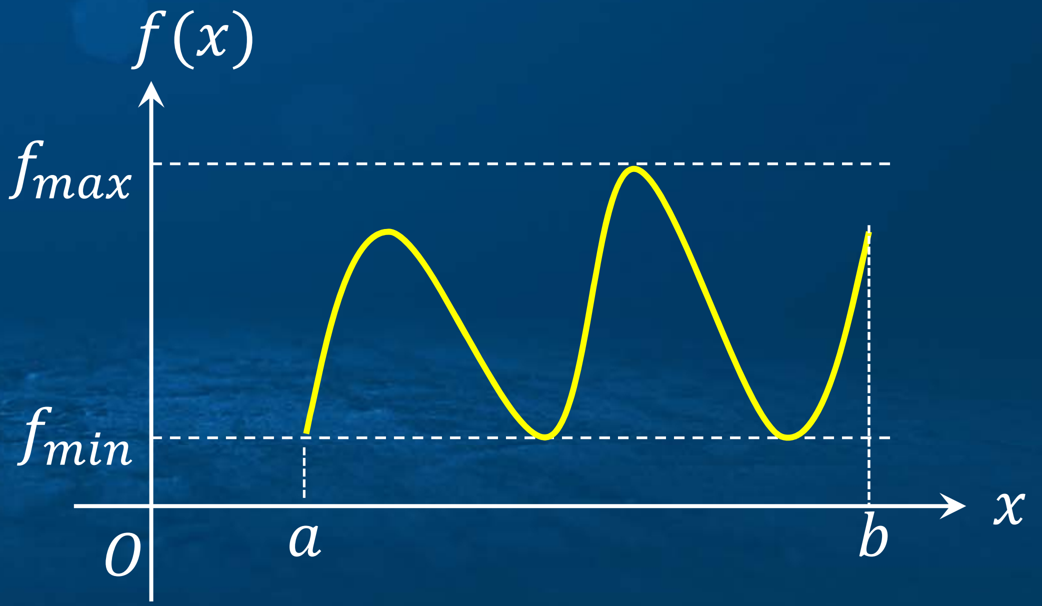
在$(-\infty,+\infty)$上，$f_{max} = 0$，$f_{min} = -2$

在$[0,\pi/2]$上，$f_{max} = 0$，$f_{min} = -1$

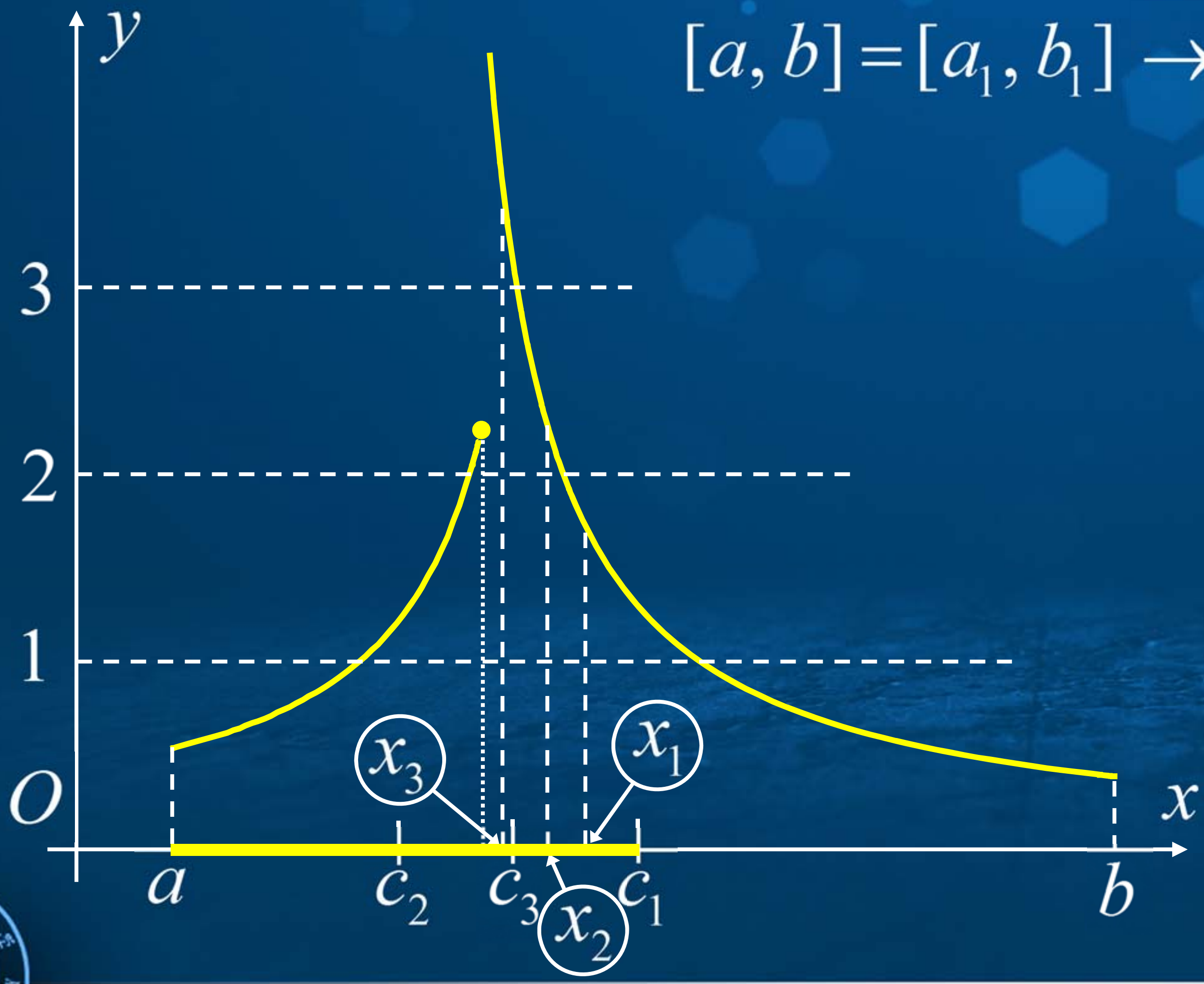
定理1(最值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$，使

$$f(x_1)=\max_{a\le x\le b} f(x),\quad f(x_2)=\min_{a\le x\le b} f(x).$$





引理(有界性) 设$f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.



$$[a,b]=[a_1,b_1]\to[a_1,c_1]+[c_1,b_1]$$

$$[a_2,b_2]\to[a_2,c_2]+[c_2,b_2]$$

$$[a_n,b_n]\leftarrow\cdots\leftarrow[a_3,b_3]$$

$$x_1\in[a_1,b_1],\ f(x_1)>1$$

$$x_2\in[a_2,b_2],\ f(x_2)>2$$

$$x_3\in[a_3,b_3],\ f(x_3)>3$$

$$\vdots$$

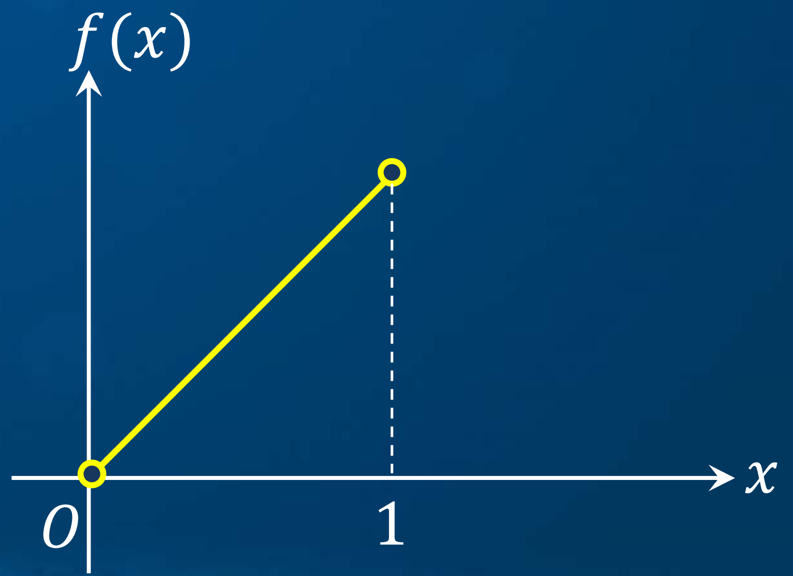
$$x_n\in[a_n,b_n],\ f(x_n)>n$$

例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值 .

(1) $y = x\ ,\ \ x \in (0,1)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} -x+1\ , & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3\ , & 1 < x \le 2; \end{cases}$

(3) $f(x) = \sin x, x \in (-1,6)$.

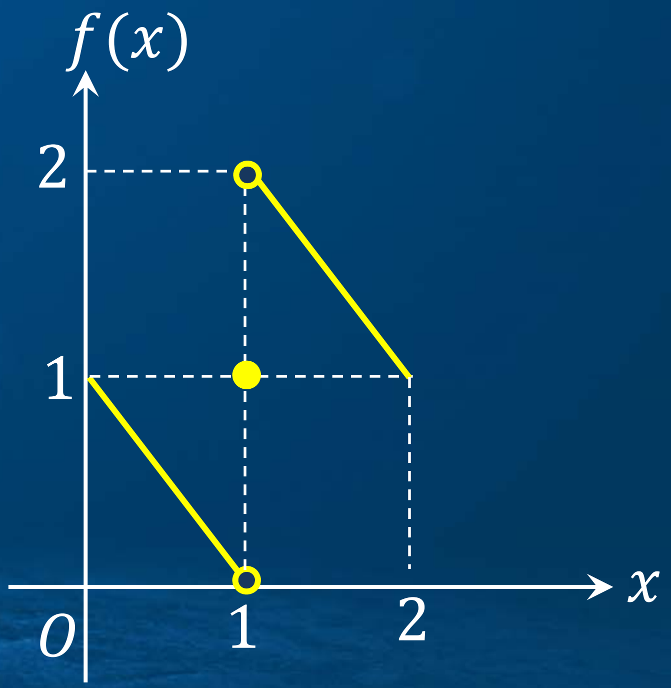


例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值 .

(1) $y = x$ ， $x \in (0,1)$;

(2) $f(x) = \begin{cases} -x+1\ , & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3\ , & 1 < x \le 2; \end{cases}$

(3) $f(x) = \sin x, x \in (-1,6)$.

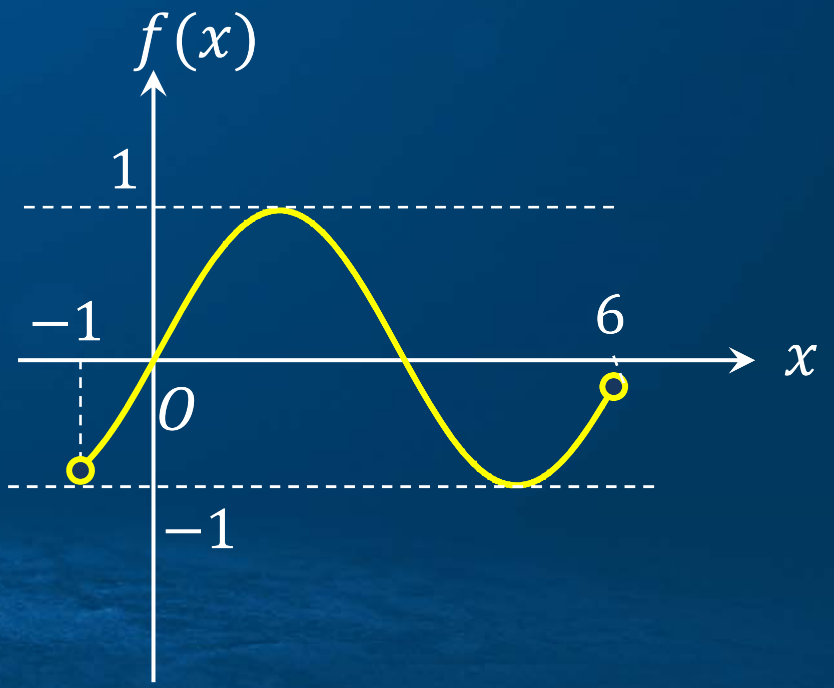


例1 试判断下列函数是否在指定区间内存在最大值和最小值．

(1) $y = x$， $x \in (0,1)$;

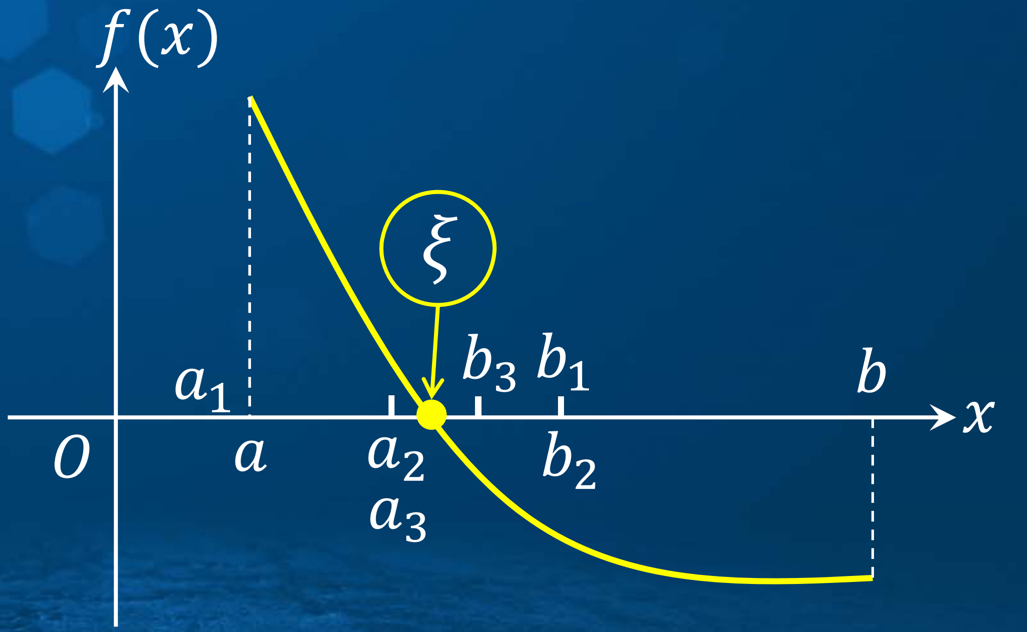
(2) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x+3, & 1 < x \le 2; \end{cases}$

(3) $f(x) = \sin x, x \in (-1,6)$.



定理2(零值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点$\xi\in[a,\ b]$，使$f(\xi)=0$.

$$|b_n-a_n|=\frac{1}{2}|b_{n-1}-a_{n-1}|$$
$$=\frac{1}{2^2}|b_{n-2}-a_{n-2}|=\cdots=\frac{1}{2^n}|b-a|$$



由区间套定理，存在

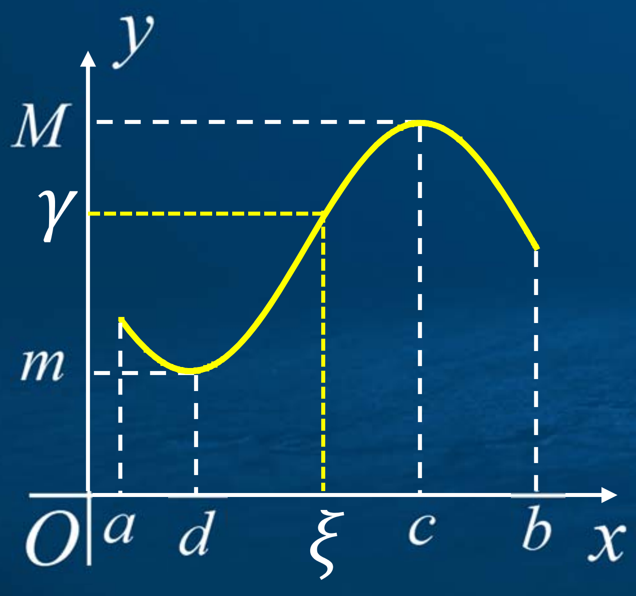
$$\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\ \cdots)$$

$$f(a_n)>0,\ f(b_n)<0$$

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=0$$

$$[a,b]\to[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]\to\cdots$$
$$\to[a_n,b_n]\to\cdots$$

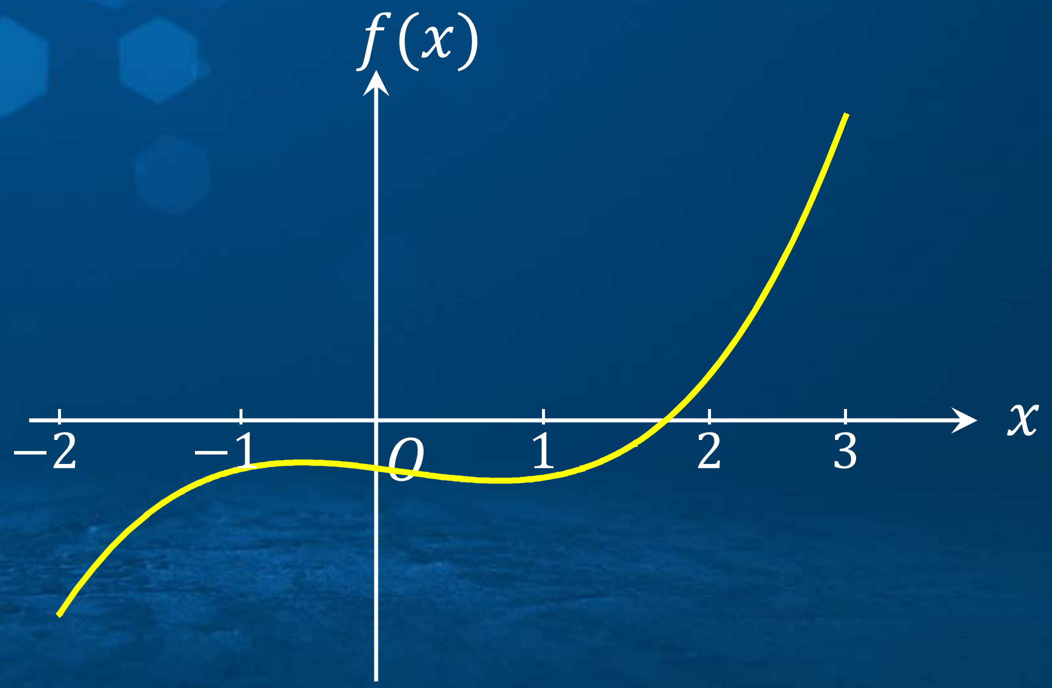
定理3(介值定理) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，m和M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，则对于任何常数$\gamma: m\le\gamma\le M$，至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使$f(\xi)=\gamma$.



例2 证明方程$x^3 - x - 2 = 0$至少存在一实根．

例2可以推广到一般形式：

任何一个奇数次的代数方程一定存在实根．



建立坐标系如图.

则可构造面积函数：

$S(\theta) \in C[\alpha, \beta]$,

且有

$S(\alpha) = 0, S(\beta) = A.$

故由介值定理可知:

$\exists\, \theta_0 \in (\alpha, \beta)$,

使得 $S(\theta_0) = \dfrac{A}{2}.$