第十讲 子数列与聚点原理

- 数列收敛的必要条件 —— 有界

若数列 $\{a_n\}$ 存在极限，则该数列一定有界，即存在正常数 M，使得 $|a_n| \le M \ (n=1,2,\cdots)$.

- 数列收敛的充分条件 —— 单调有界

设数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界，即

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_n \le \cdots$$

且存在常数 M 使得 $a_n \le M \ (n=1,2,\cdots)$, 则数列 $\{a_n\}$ 存在极限.

- 数列收敛的充分必要条件？ —— 柯西收敛原理

- 子数列的概念
- 数列收敛的归并性
- 聚点原理
- 柯西收敛原理

第10讲 子数列与聚点原理——主要内容

原数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n}, \cdots$

新数列 $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$: $\cdots, \quad \cdots$

定义1（子数列）从数列 $\{a_n\}: a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 中选取无穷多项，并按原来的先后顺序组成新的数列，称新数列为原数列的子数列，记为

$$\{a_{n_k}\}: a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

其中下标 $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$ 为正整数，且满足

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots.$$

定理1 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子数列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且

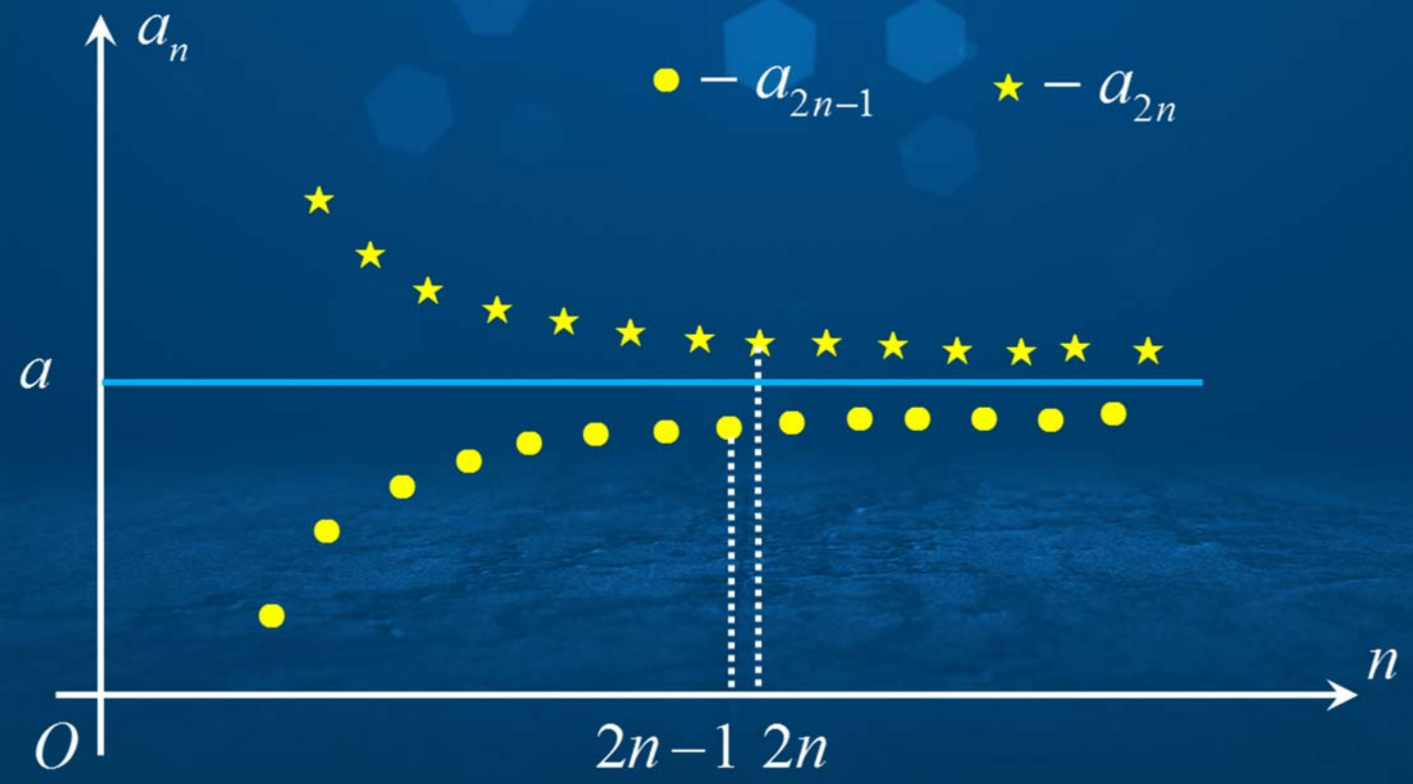
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

判断数列发散的方法：

- 数列存在一个发散的子数列，则该数列一定发散；
- 数列存在极限不等的子数列，则该数列一定发散.

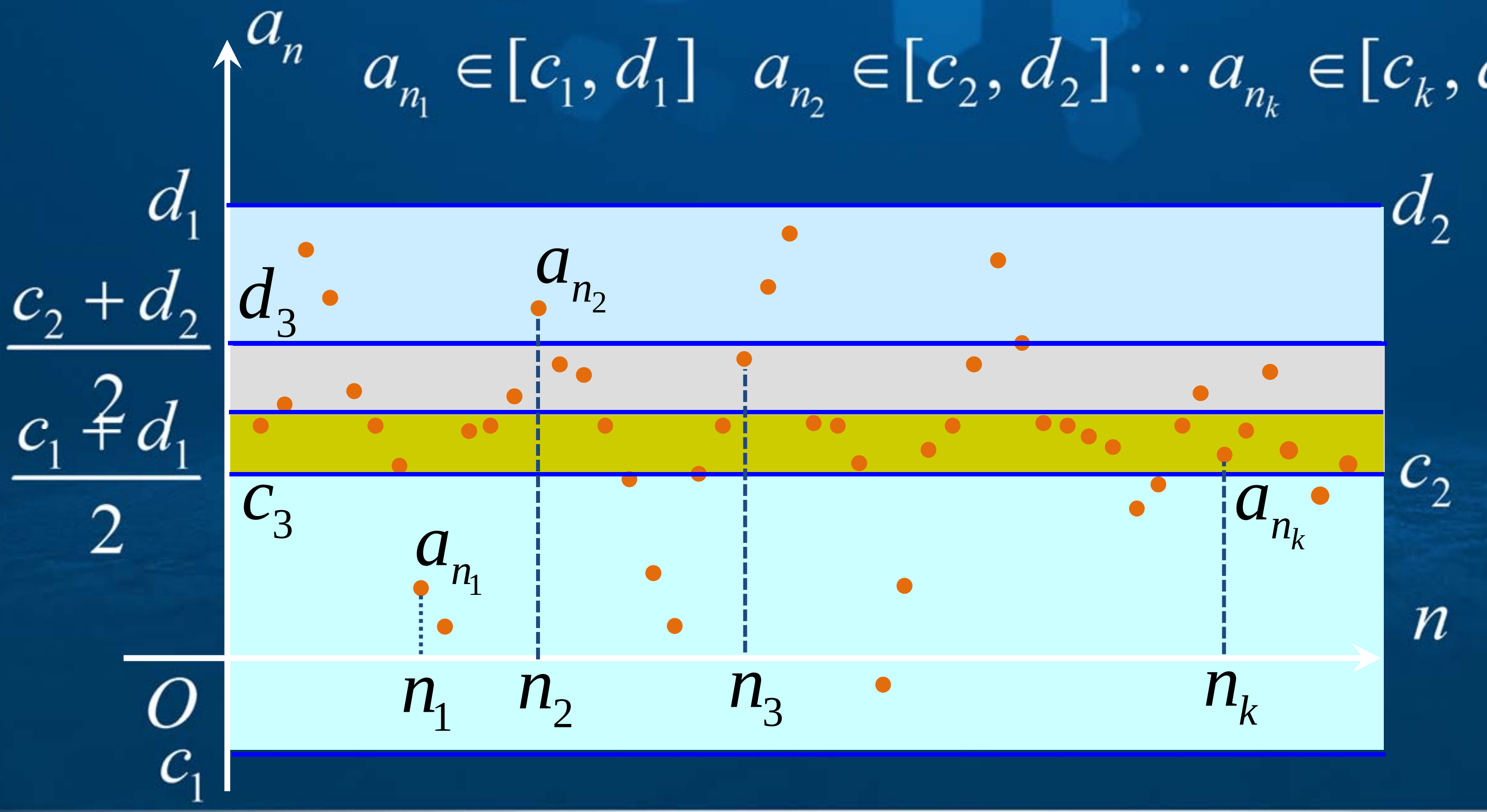
例1 证明数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 不存在极限 .

定理2（拉链定理）数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是它的两个子数列 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 收敛且极限相同 .



定理3（聚点原理）任何有界数列均存在收敛的子数列，即若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| \le M$ （其中$M>0$为常数），则 $\{a_n\}$ 存在收敛的子数列 $\{a_{n_k}\}$.

$a_{n_1} \in [c_1, d_1]$ $a_{n_2} \in [c_2, d_2] \cdots a_{n_k} \in [c_k, d_k]$ $\cdots$

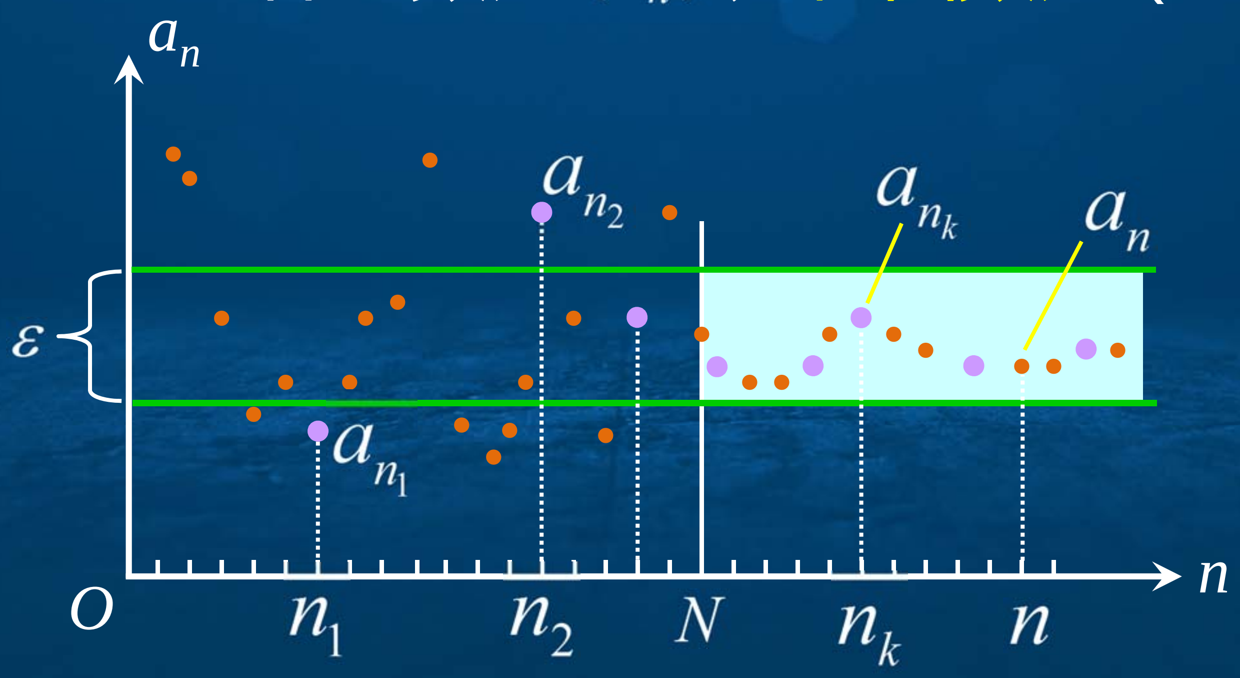


收敛子数列$\{a_{n_k}\}$

定理4（柯西收敛原理）数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对于任意正数 ε，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时恒有

$$\left|a_n-a_m\right|<\varepsilon$$

- 称满足上述条件的数列 $\{a_n\}$ 为柯西数列（基本数列）



柯西收敛原理等价形式 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对于任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，

$$\left|a_n - a_{n+p}\right| < \varepsilon$$

对一切 $p = 1, 2, \cdots$ 成立．

例2 设

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例3 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

n	a_n	n	a_n
10	2.92897	10^4	9.78761
10^2	5.18738	10^5	12.0901
10^3	7.48547	10^6	14.3927

- 如何快速计算 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ (n = 1, 2, \cdots)$?