第八讲 数列极限的性质

- 实数的性质

有序性　　稠密性　　可数与不可数性

- 数学上的许多著名问题也与数有关
- 实数的运算法则（运算律）

$a+b=b+a$　　$a+(b+c)=(a+b)+c$　　$a(b+c)=ab+ac$

交换律　　结合律　　分配律

数列极限的基本性质

- 惟一性
- 有界性
- 保号性

数列极限的运算法则

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 定义的回顾

定义 对于数列 $\{a_n\}$，若存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，均存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

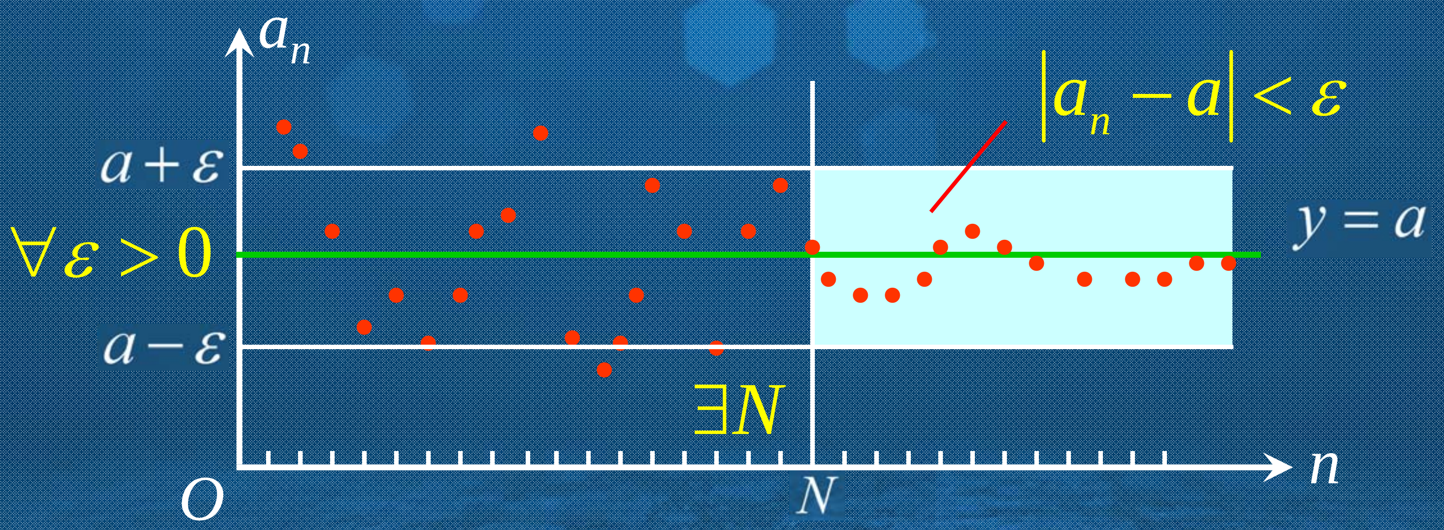
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立，则称数列 $\{a_n\}$ **存在极限**（或**收敛**），常数 a 称为该数列的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad 或 \quad a_n \to a\,(n\to\infty).$$

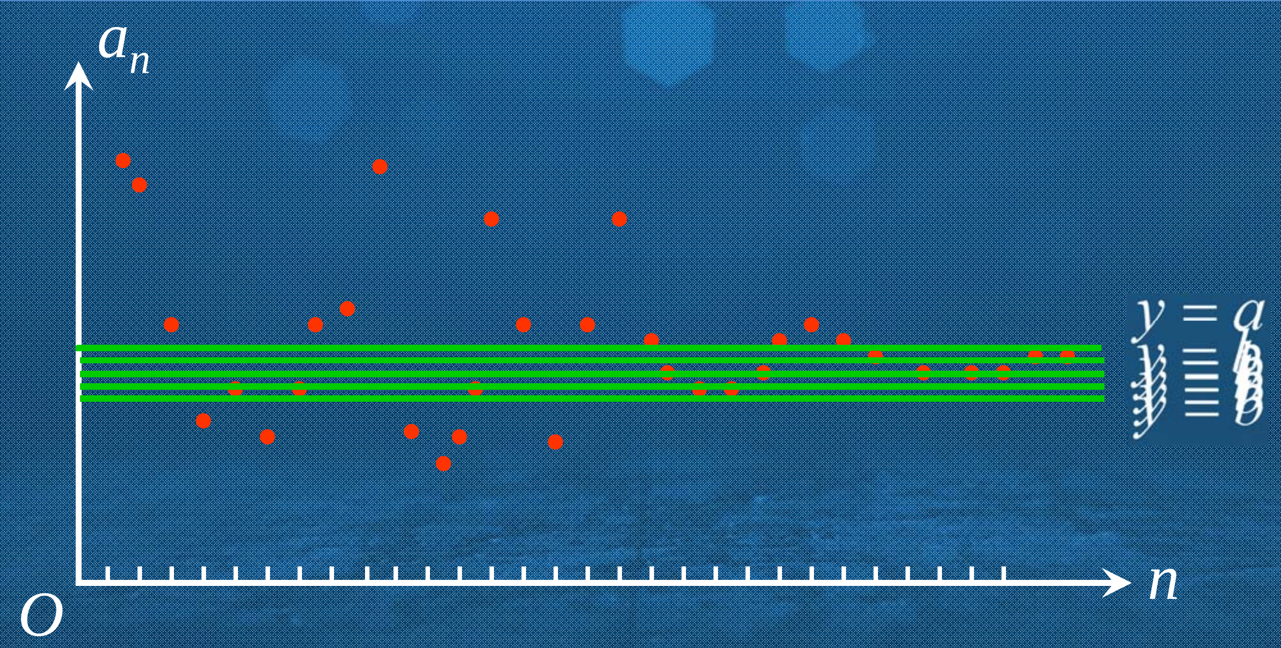
若上述常数不存在，则称数列**不存在极限**（或**发散**）.

数列极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的几何意义



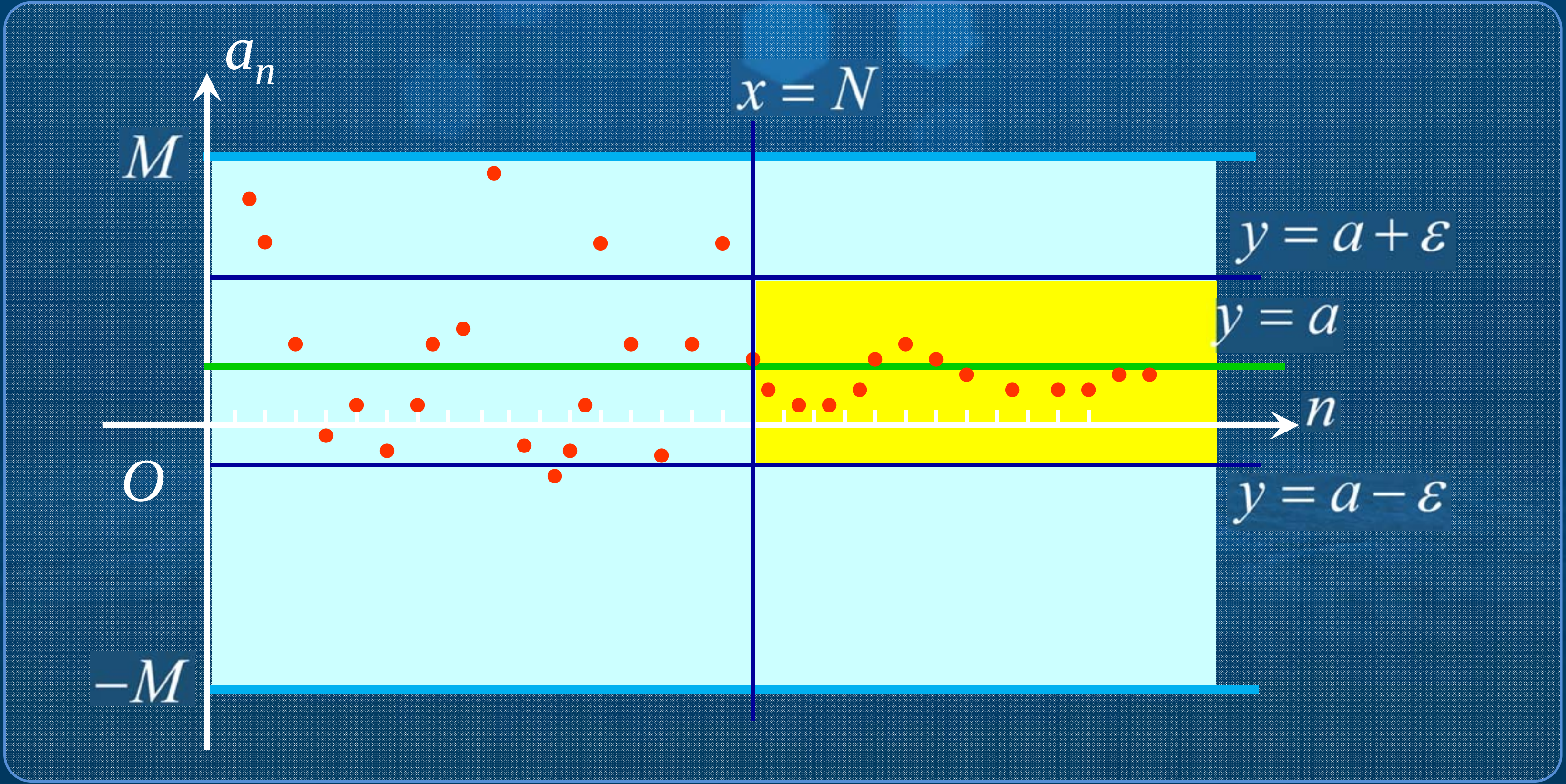
定理1（惟一性）设数列$\{a_n\}$存在极限，则极限唯一 .

即若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ ，则一定有 $a = b$.



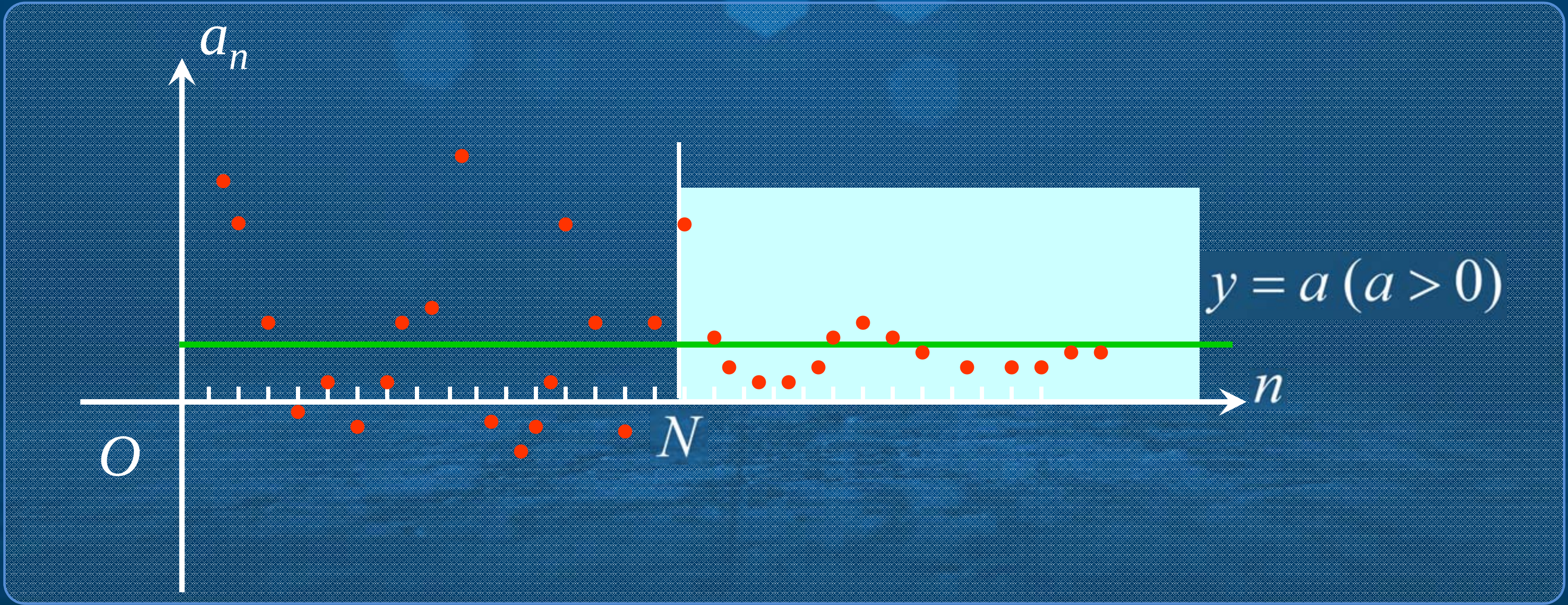
证明思路：$|a_n - a| < \varepsilon, |a_n - b| < \varepsilon \Longrightarrow a = b$

定理2（有界性）若数列$\{a_n\}$存在极限，则该数列一定有界，即存在正常数 M，使得$|a_n| \le M \ (n=1,2,\cdots).$



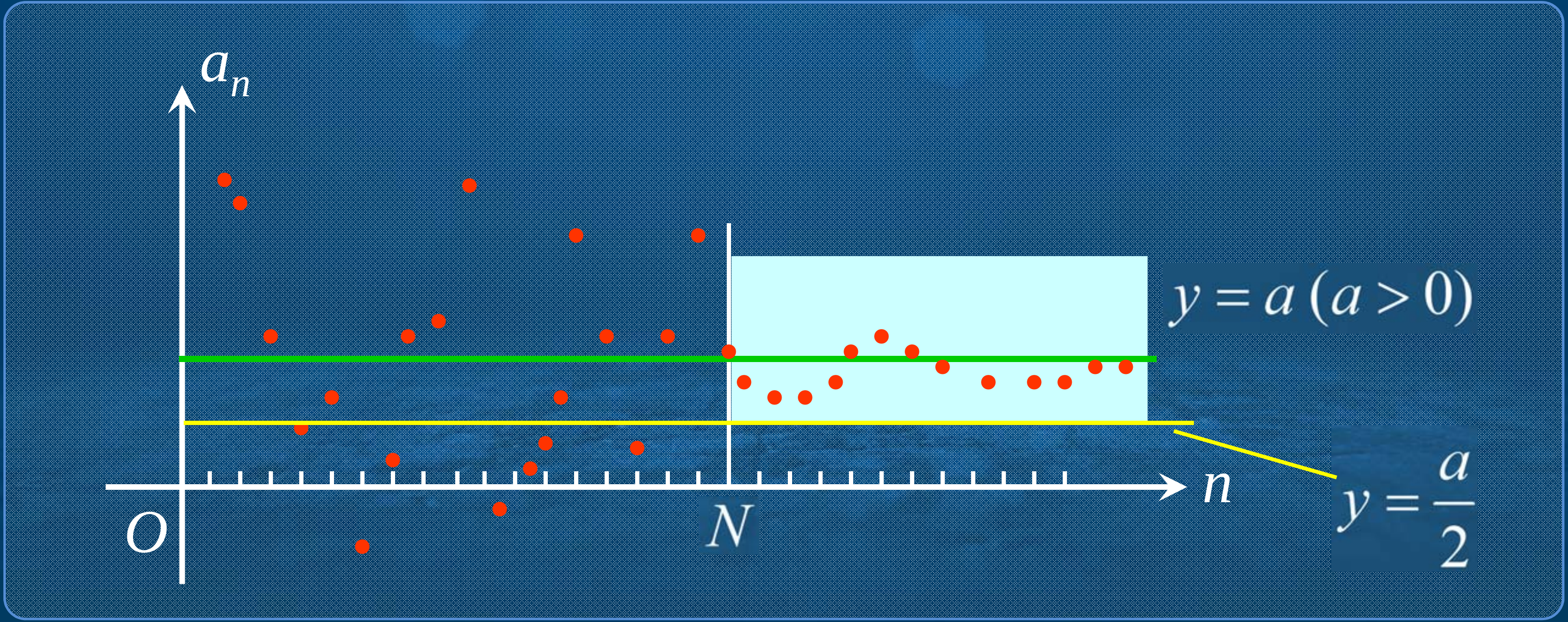
定理3（保号性）设数列$\{a_n\}$存在极限 a，且 $a>0$，则存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $a_n>0$.

- 对 $a<0$ 的情形也有相应结论.



推论1 设 $a_n\ge 0\,(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则 $a\ge 0$.

定理4 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.



极限的四则运算法则

若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为收敛的数列， c 为常数，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

特别 $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ； $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = [\lim\limits_{n\to\infty} a_n]^p,\ p = 1, 2, \cdots$

例1 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^6+3n^4-n+10}{n^6+n^4+1}$.

思考 在什么条件下能保证极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}\quad(a_0b_0\neq 0)$$

存在？

例2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1, \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$ ，证明$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 极限存在，并求出它们的极限值.

思考 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在，是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在？