



國防科學技術大學
National University of Defense Technology

高等数学 (一) 综合练习

练习一：函数

理学院 朱健民教授



高等数学（一）综合练习——函数

主要内容

1. 函数的概念，定义域和值域；
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；
3. 函数的四则运算、求逆运算及复合运算；
4. 基本初等函数的性质与图形；
5. 分段函数，隐函数，参数方程确定函数.



高等数学（一）综合练习——函数

例题讲解

1 . 设函数 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf(\frac{1}{x}) = \frac{c}{x}$ ($|a| \neq |b|$) , 试求函数 $f(x)$.

2 . 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & |x| \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2, & |x| > 1, \\ 2 - x^2, & |x| \leq 1 \end{cases},$$

求 $f \circ g(x)$ 和 $g \circ f(x)$.

3 . 设 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求复合函数 $\overbrace{(f \circ \cdots \circ f)}^n(x)$.



高等数学（一）综合练习——函数

4. 求函数 $y = \begin{cases} x - 2, & x \leq 0, \\ -\sqrt{4 - x^2}, & 0 < x < 2, \\ \ln x - \ln 2, & x \geq 2 \end{cases}$ 的反函数.

5. 设 a, b 为常数, 证明函数

$$f(x) = |x - a| - |x - b|$$

在 $(-\infty, \infty)$ 上有界.

6. 设 $f(x), g(x)$ 为定义在 (a, b) 上的增函数,

$$\varphi(x) = \max_{x \in (a, b)} \{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min_{x \in (a, b)} \{f(x), g(x)\},$$

证明 $\varphi(x), \psi(x)$ 亦为 (a, b) 上的增函数.



高等数学（一）综合练习——函数

7. 设 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, \infty)$ 上递减，证明：

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad (0 < x, y < \infty).$$

8. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty, \infty)$ 上，且存在 $T \neq 0$ 使得

$$f(x+T) = -f(x), \quad x \in (-\infty, \infty),$$

证明 $f(x)$ 为周期函数.

9. 证明 $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上不是周期函数.

10. 证明任何整系数多项式 $p(x)$ 不可能满足

$$p(7) = 5, \quad p(15) = 9.$$