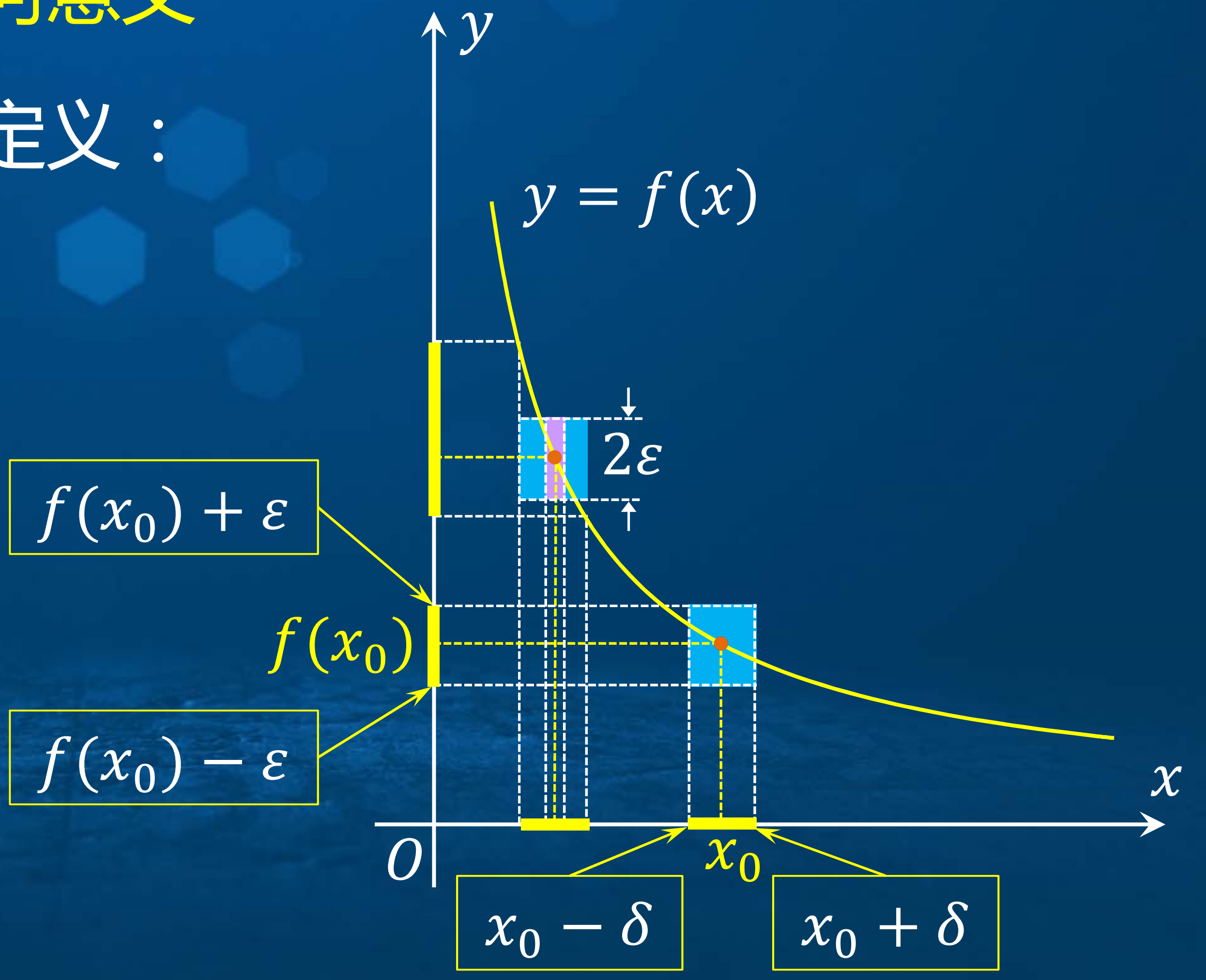
第21讲 函数的一致连续性

函数在一点连续的定义及几何意义

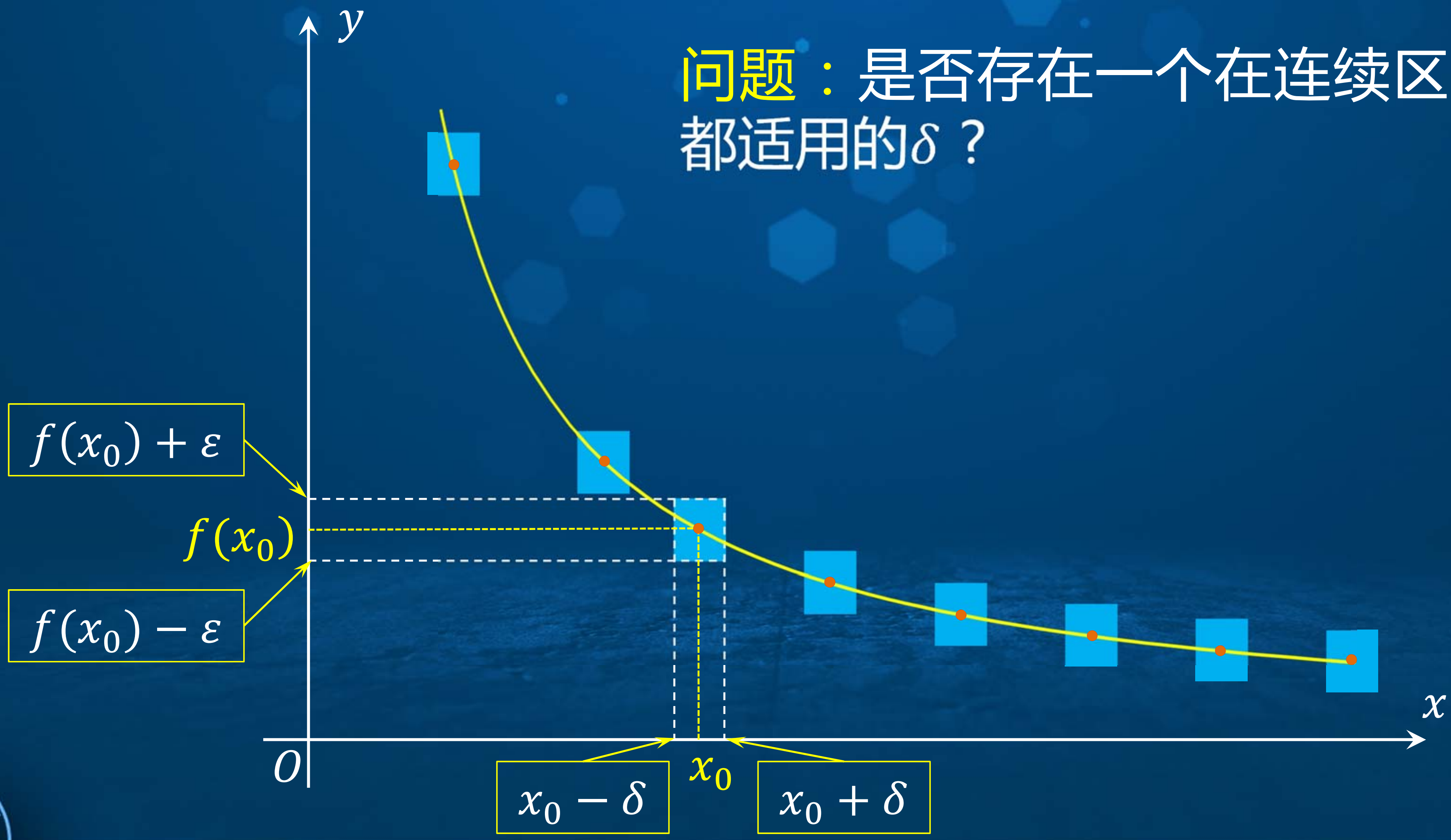
函数$f(x)$在x_0连续的"$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，
当$|x-x_0|<\delta$时，恒有
$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

注：通常δ与ε和x_0有关，
所以记为$\delta=\delta(\varepsilon,x_0).$



问题：是否存在一个在连续区间上都适用的δ？



- 一致连续的定义
- 一致连续的几何解释
- 一致连续性定理

定义 设 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的函数，如果对任给的正数 ε，总存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得对任意 $x_1,x_2\in I$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

"函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续"定义的简洁形式：

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

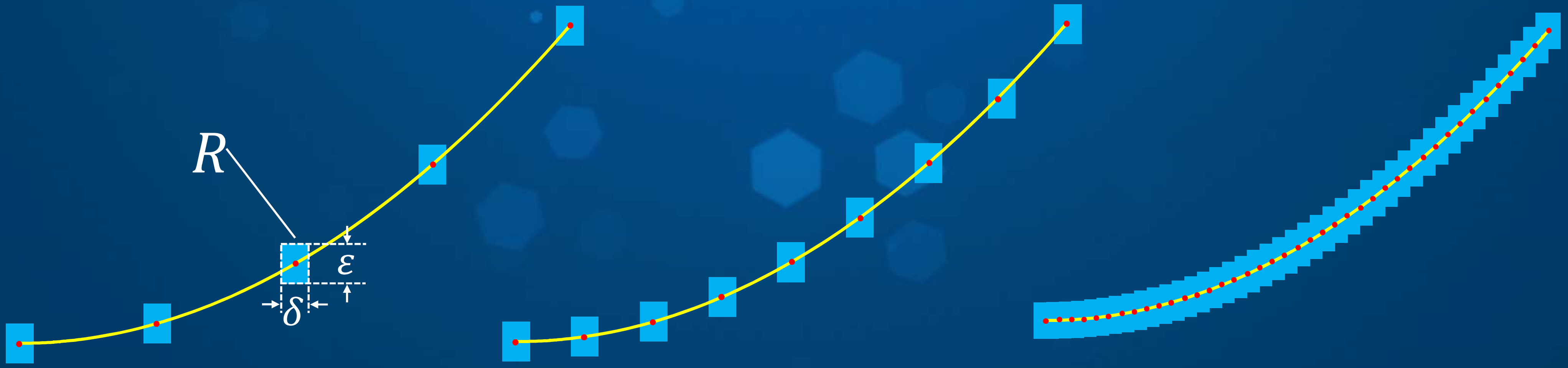
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

例1 证明函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[1,\ +\infty)$ 上一致连续.

性质（一致连续与连续的关系）若函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内一致连续，则$f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内连续.

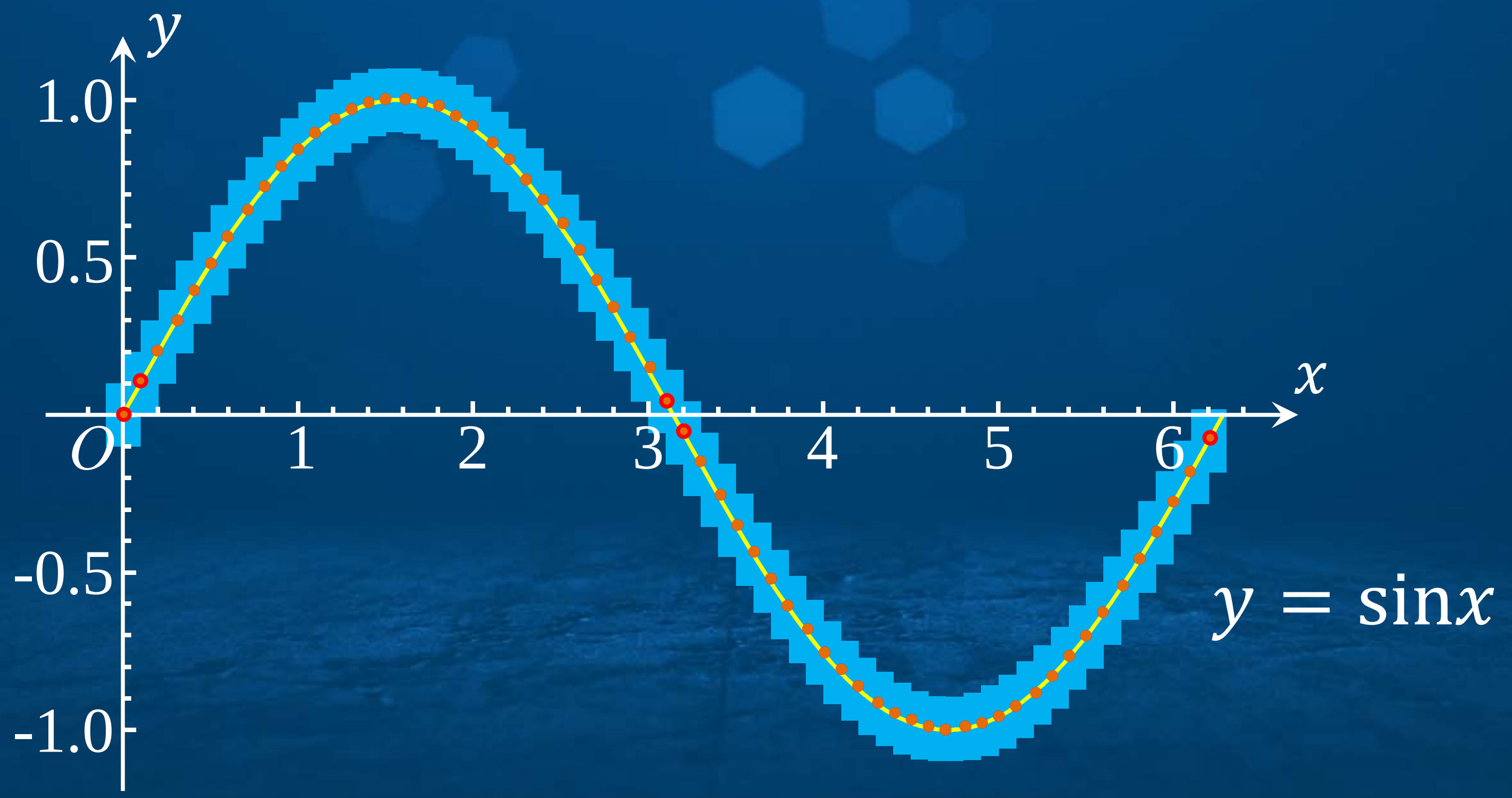
例2 证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(0,\ 1)$ 内不一致连续.

一致连续的几何解释 $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$



若 $f(x)$ 为区间 I 上的一致连续函数，曲线 $C: y = f(x)\ (x \in I)$ 为其图形，则$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，作以曲线上任何一点
$M(x, f(x))$
为中心，边与坐标轴平行，且底为 δ、高为 ε 的矩形R，曲线C 一定从矩形R 的左右两侧穿过矩形.

一致连续的几何解释 —— 正弦函数的一致连续性



定理（康托尔） 若函数$f(x)$在闭区间$[a,\ b]$上连续，则$f(x)$在$[a,\ b]$上一致连续.

聚点原理 任何有界数列均存在收敛的子数列，即若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| \le M$（其中M>0为常数），则 $\{a_n\}$ 存在收敛的子数列 $\{a_{n_k}\}$.

例3 若函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内一致连续的充要条件是 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在.