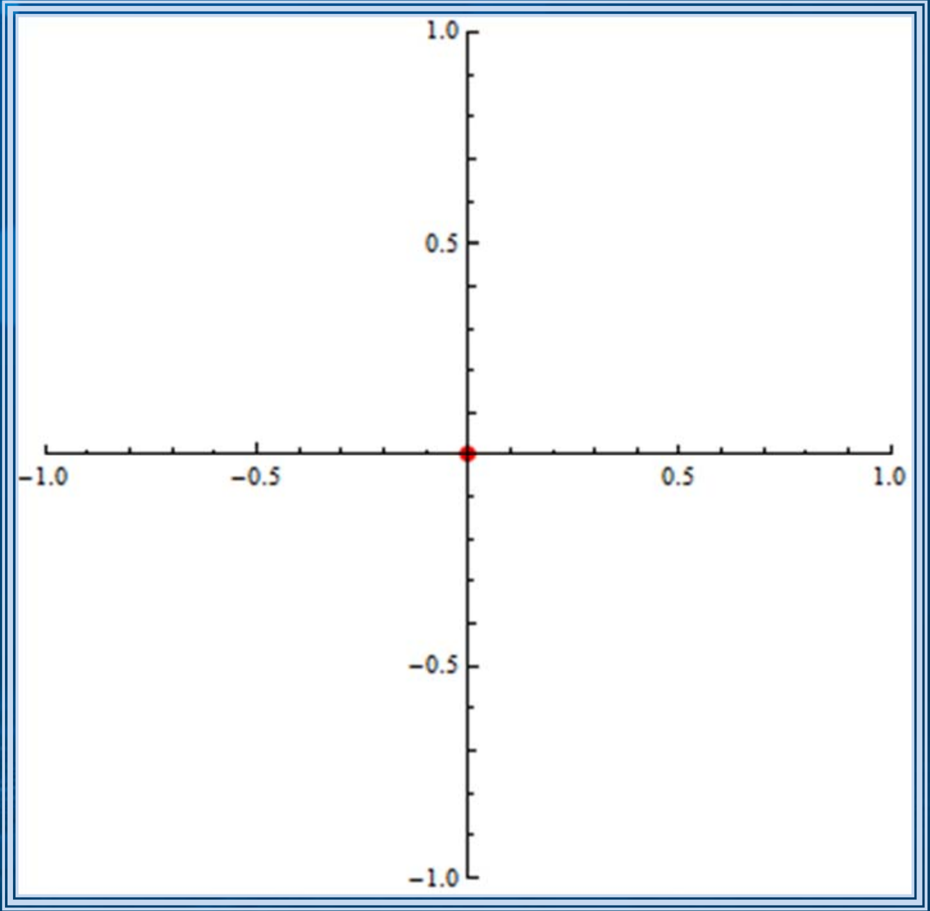
第六讲 参数方程与极坐标

第6讲 参数方程与极坐标——问题引入

留声机与唱片

留声机与唱片

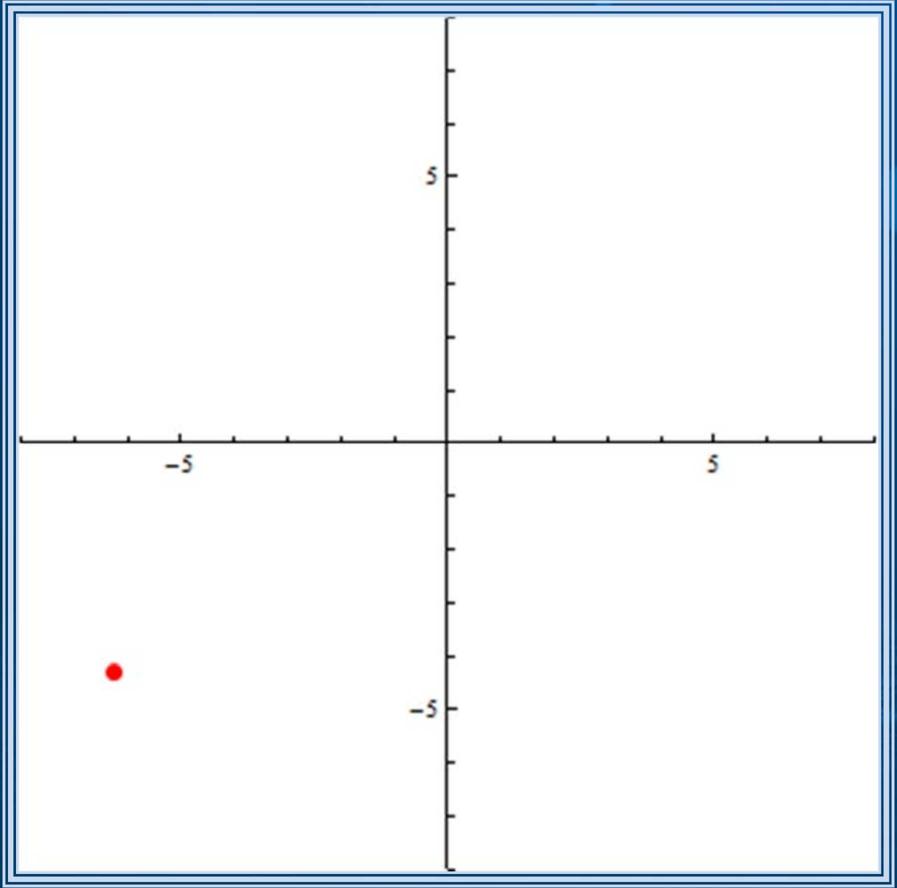
留声机与唱片

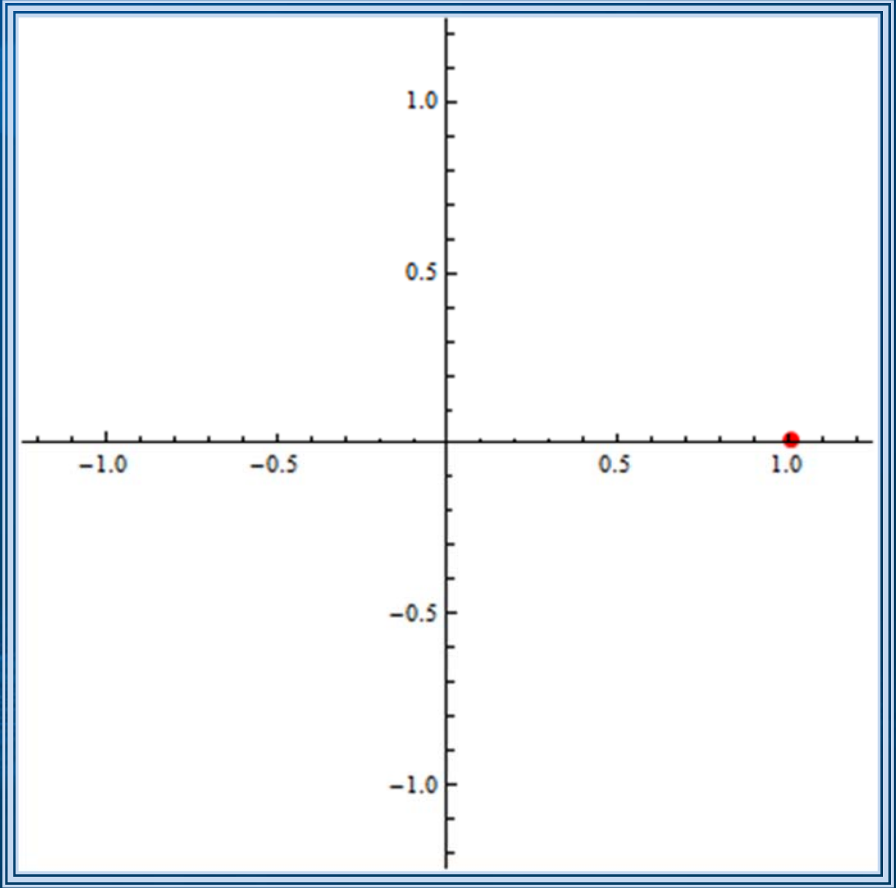


阿基米德螺旋线

$x = t + 2\sin 2t,\ y = t + 2\cos 5t$

- 如何用数学的方法来描述动点运动的轨迹（曲线）？





$x = t + 2\sin 2t,\ y = t + 2\cos 5t$

- 如何用数学的方法来描述动点运动的轨迹（曲线）？

$$\begin{cases} x = t + 2\sin 2t, \\ y = t + 2\cos 5t \end{cases} \quad (-2\pi \le t \le 2\pi)$$

参数方程

$$\rho = 1 + \frac{1}{10}\sin(10\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

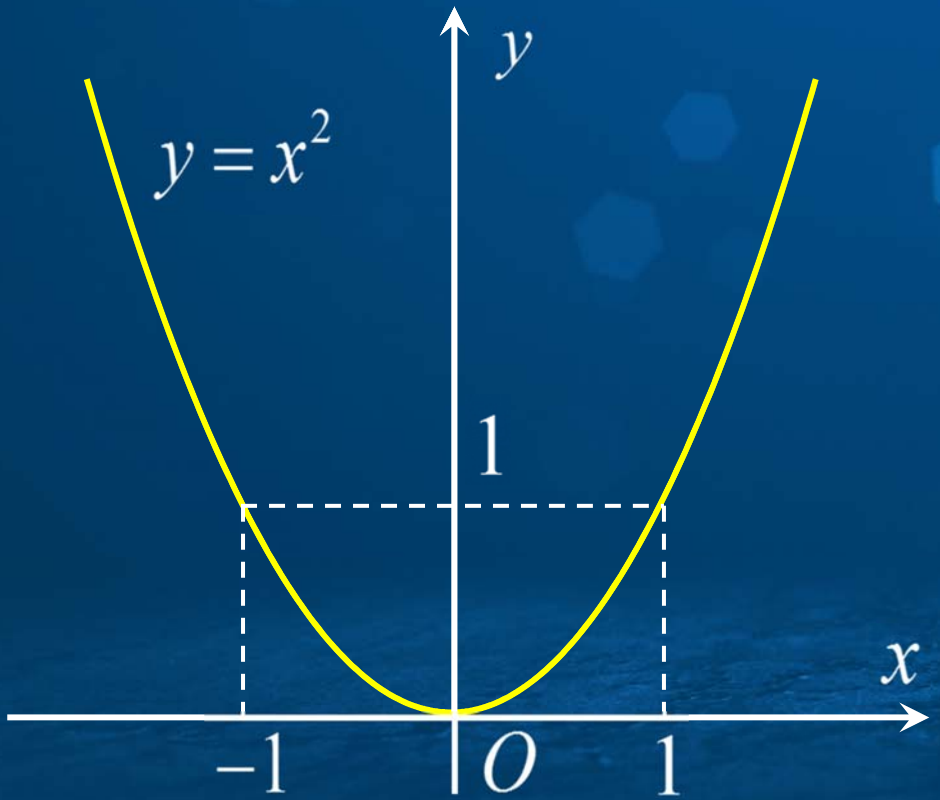
极坐标方程

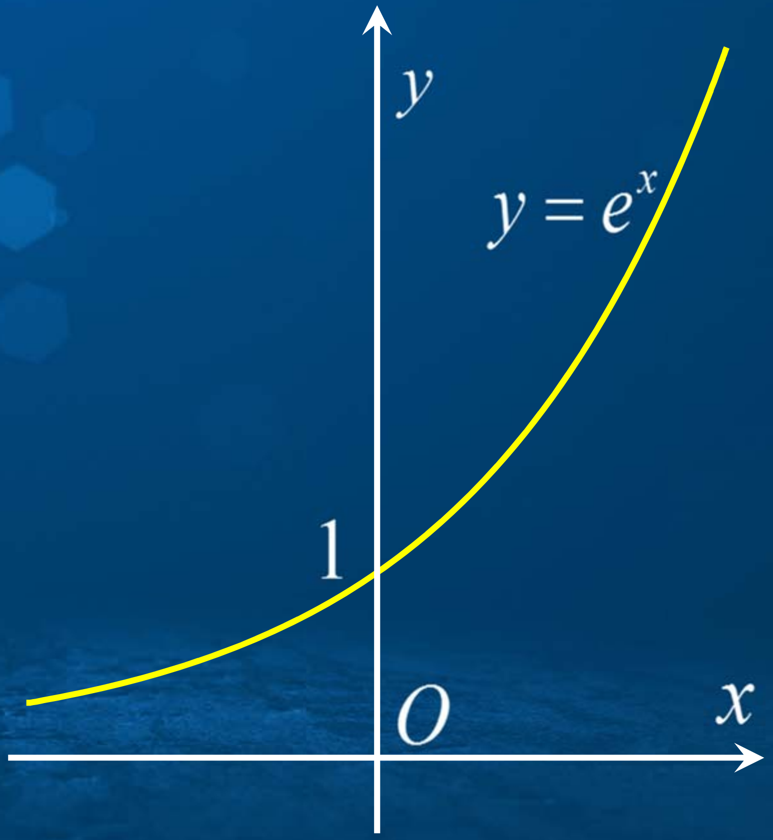
曲线的参数方程

极坐标与极坐标方程

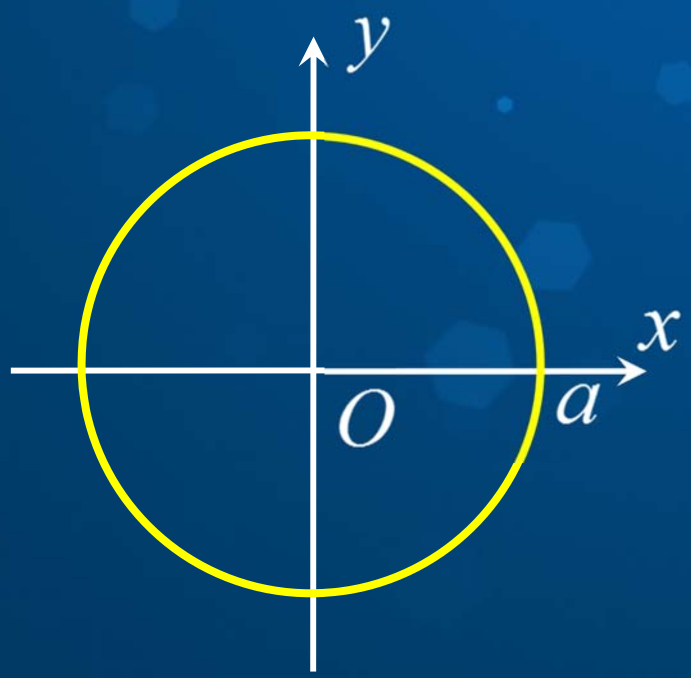
圆锥曲线

1. 参数方程的概念

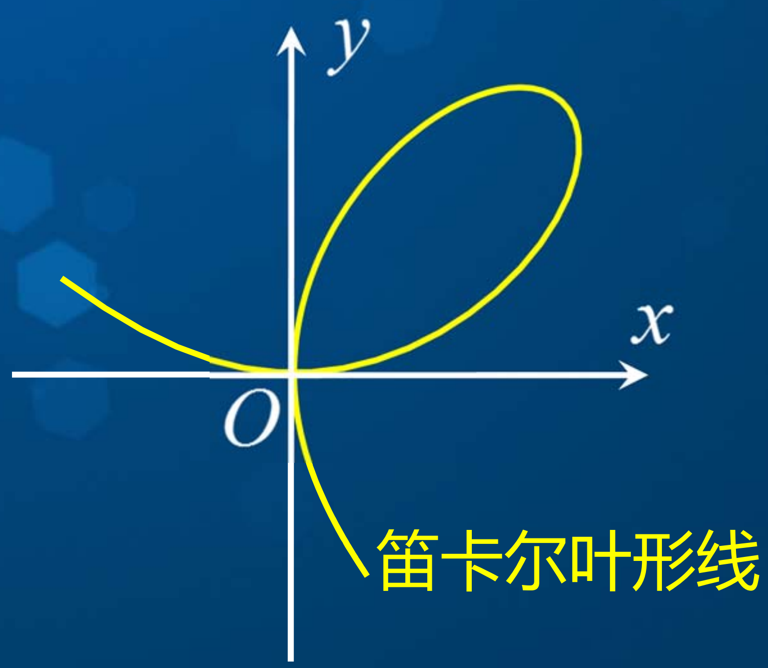




- 一元函数 $y=f(x)$ 的图形通常为平面曲线

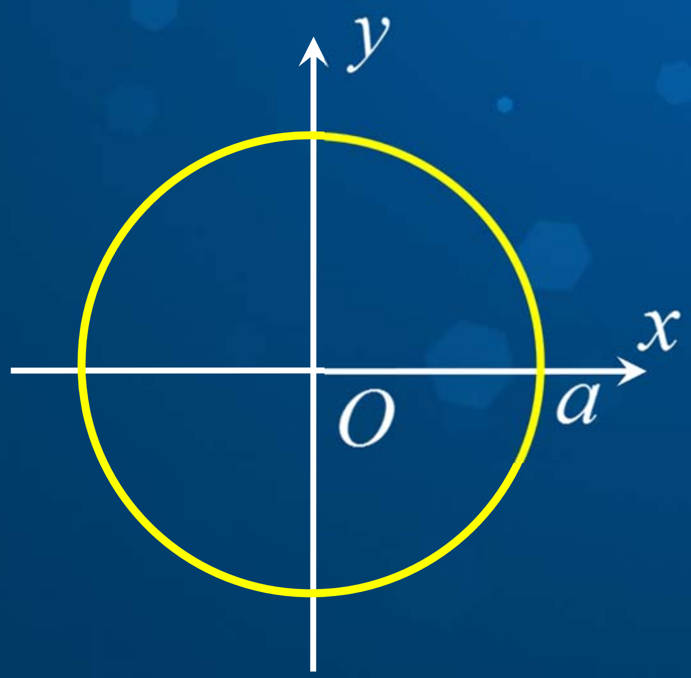


$$x^2+y^2-a^2=0$$

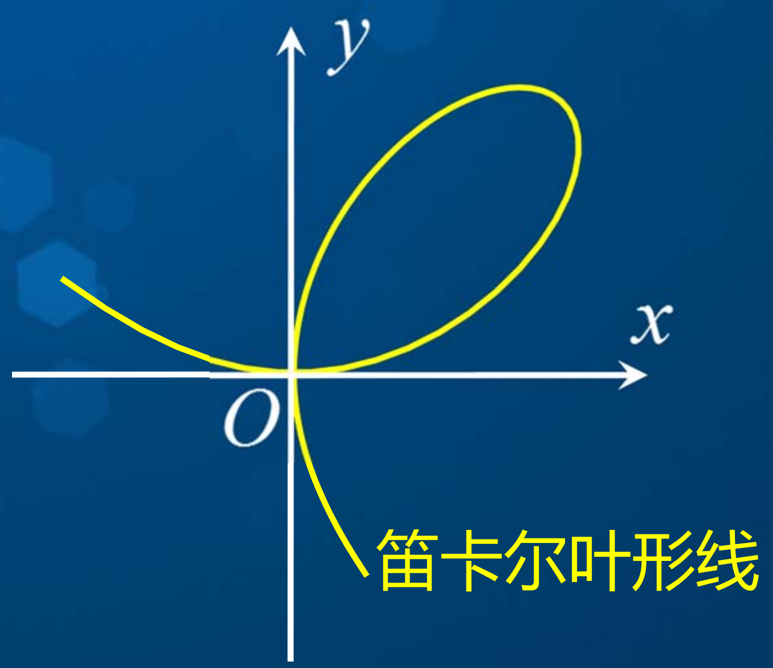


$$x^3+y^3-3xy=0$$

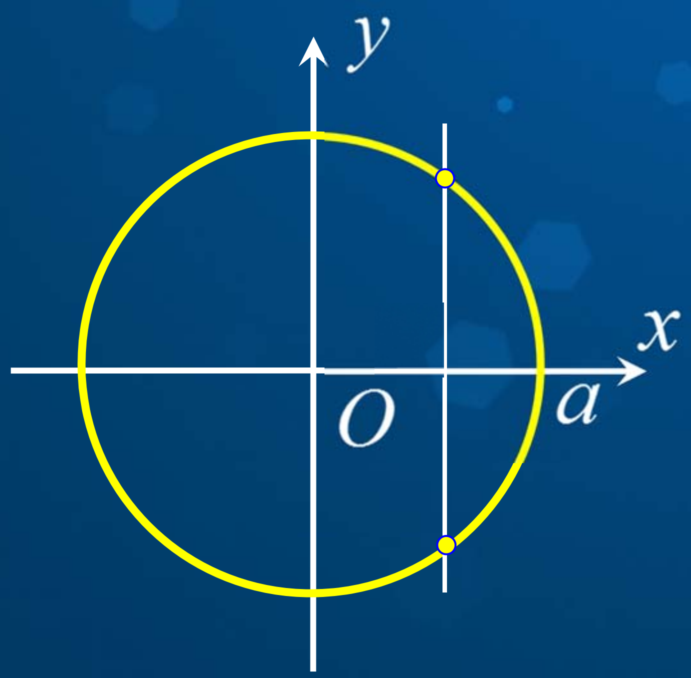
- 平面上满足方程$F(x, y)=0$的点(x, y)的集合通常表示一条平面曲线



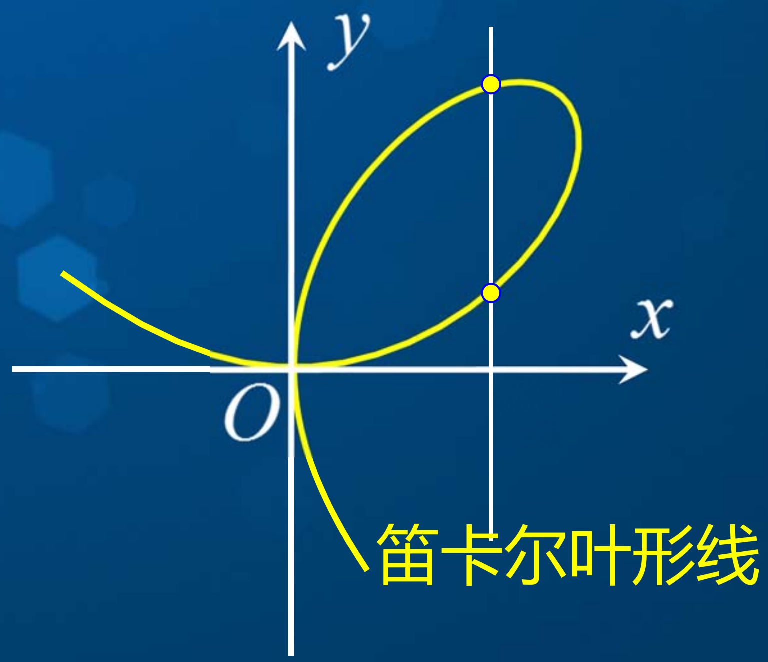
$$x^2+y^2-a^2=0$$



$$x^3+y^3-3xy=0$$



$$x^2+y^2-a^2=0$$



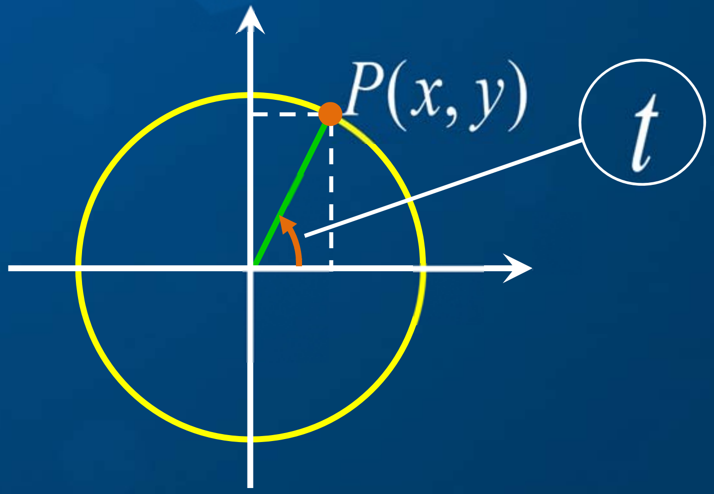
$$x^3+y^3-3xy=0$$

竖直判别法

函数的图形与任何一条平行于 y 轴直线不能有一个以上交点

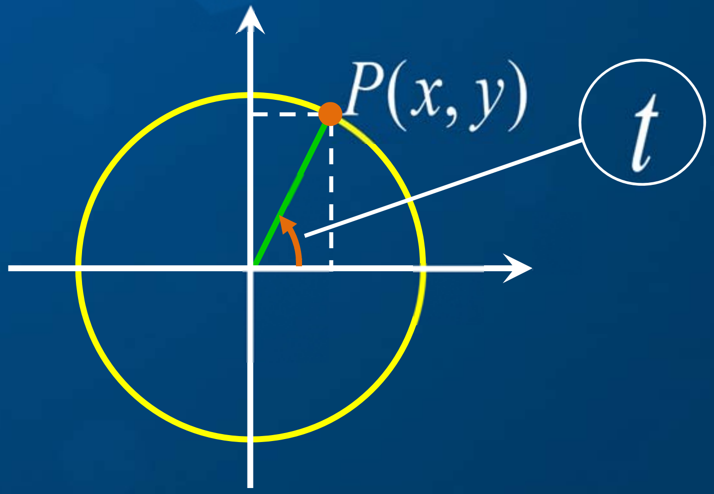
曲线的参数方程

$$x^2 + y^2 = a^2 (a > 0) \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

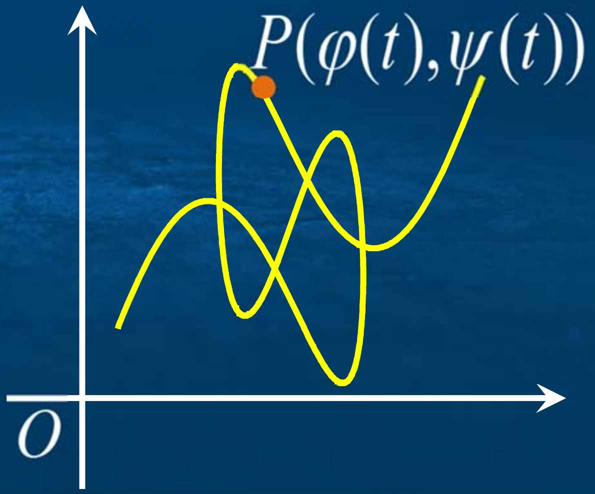


曲线的参数方程

$$x^2+y^2=a^2\,(a>0) \Rightarrow \begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$$

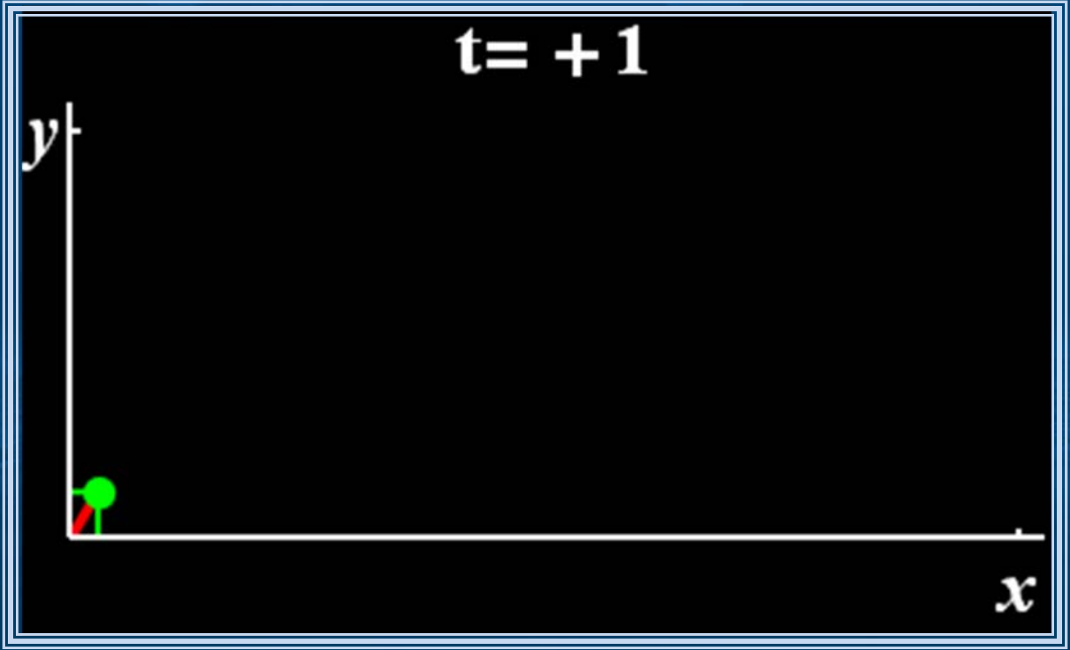


$$C:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a\le t\le b)$$



参数 t 可以是角度、时间、弧长等，其取值范围可以是全体实数，也可以是某个实数区间 .

理解 可以将参数 t 视为时间，点 $P(\varphi(t),\psi(t))$ 视为动点在时刻 t 的位置坐标. 当 t 遍历其取值范围时，动点 $P(\varphi(t),\psi(t))$ 便描绘一条从端点 $A(\varphi(a),\psi(a))$ 到端点 $B(\varphi(b),\psi(b))$ 的曲线.



2. 直角坐标方程化为参数方程

2. 直角坐标方程化为参数方程

- 直接将横坐标或者纵坐标作为参数

$$xy=1 \Rightarrow x=t\,,\, y=\frac{1}{t}\left(\Rightarrow y=t\,,\, x=\frac{1}{t}\right)$$

- 令 $y=tx$，代入直角坐标方程解 x 为 t 的关系式得

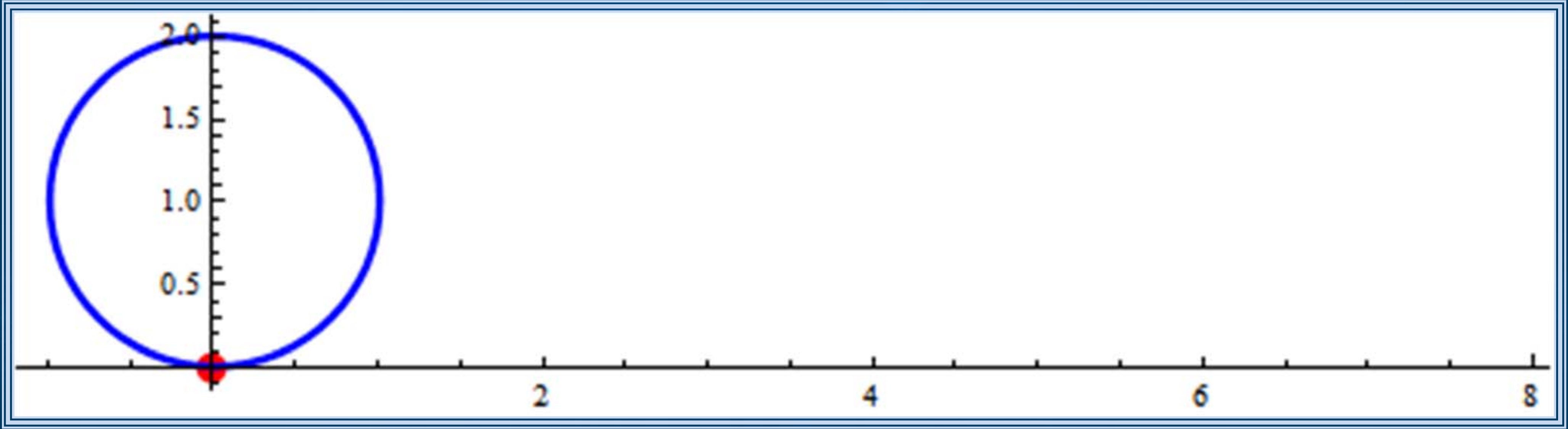
$$x^3+y^3-3axy=0 \xrightarrow{y=tx} x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

- 利用三角恒等式
- 由几何意义或者问题的实际背景

例1 写出曲线 $x^2+y^2-xy-1=0$ 的一个参数方程．

例1 写出曲线 $x^2+y^2-xy-1=0$ 的一个参数方程．

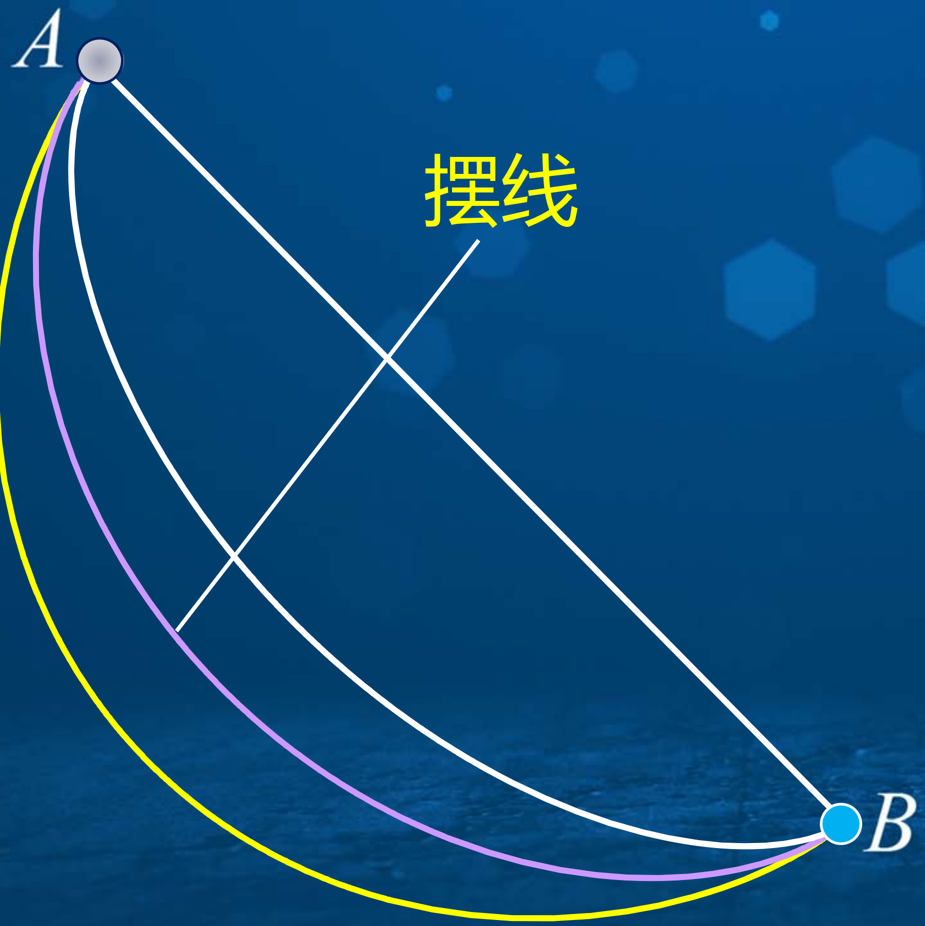
例2 当一个圆沿直线滚动时，圆周上的一个点所画出的轨线被称为一条圆滚线（又称摆线）.若圆的半径为 a 且沿 x 轴滚动，原点作为圆上点 P 的初始位置，求圆滚线的参数方程．



例1 写出曲线 $x^2+y^2-xy-1=0$ 的一个参数方程．

例2 当一个圆沿直线滚动时，圆周上的一个点所画出的轨线被称为一条圆滚线（又称摆线）.若圆的半径为 a 且沿 x 轴滚动，原点作为圆上点 P 的初始位置，求圆滚线的参数方程．

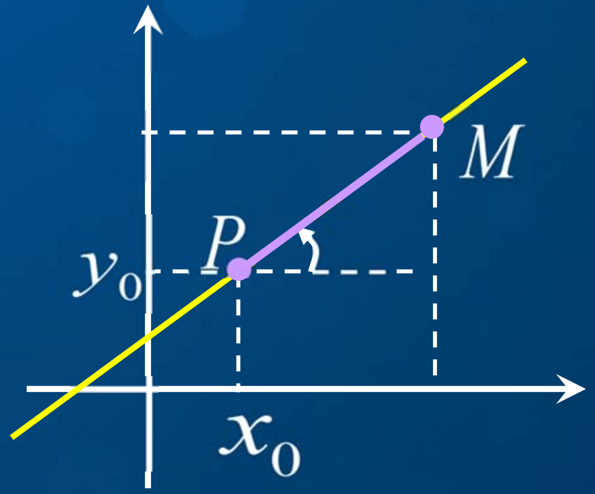
$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta)$$



约翰·伯努利 [瑞士]
(Johann Bernoulli)
1667年～1748年

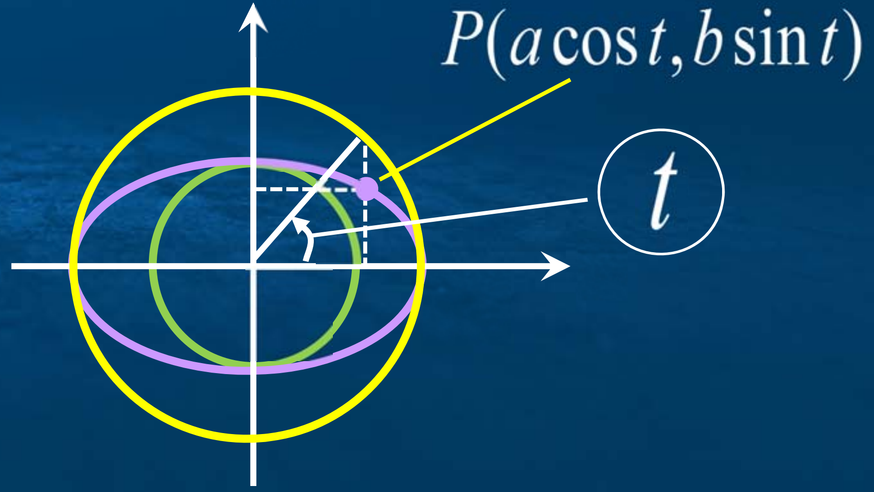
3. 常见曲线的参数方程

- 过定点 (x_0,y_0) 倾斜角为 的直线的参数方程



$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\sin\alpha \end{cases}$$

- 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程



$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

- 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程

$$\begin{cases} x = a\sec t \\ y = b\tan t \end{cases}$$

- 焦点在 x 轴正半轴的抛物线参数方程

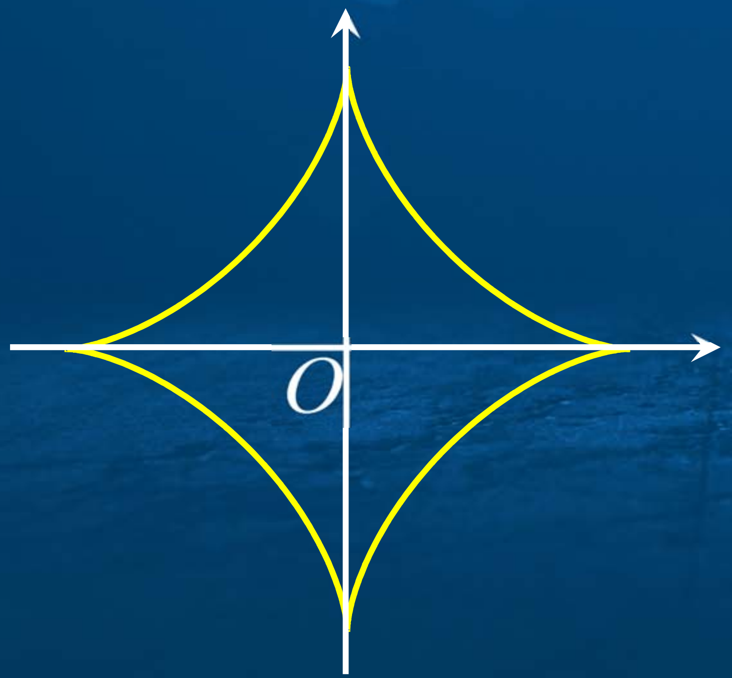
$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

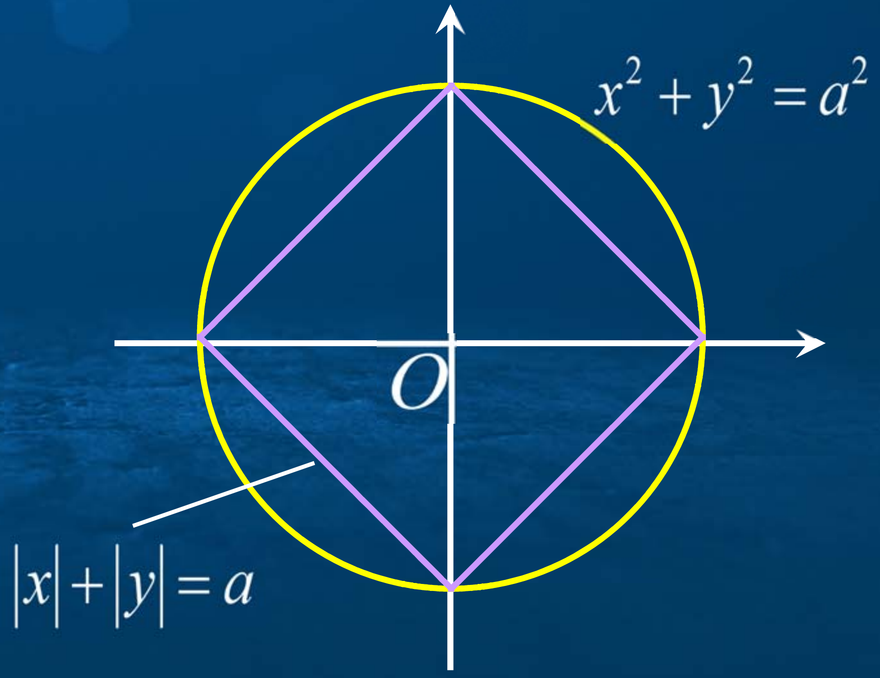
例3 将曲线的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 化为直角坐标方程.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

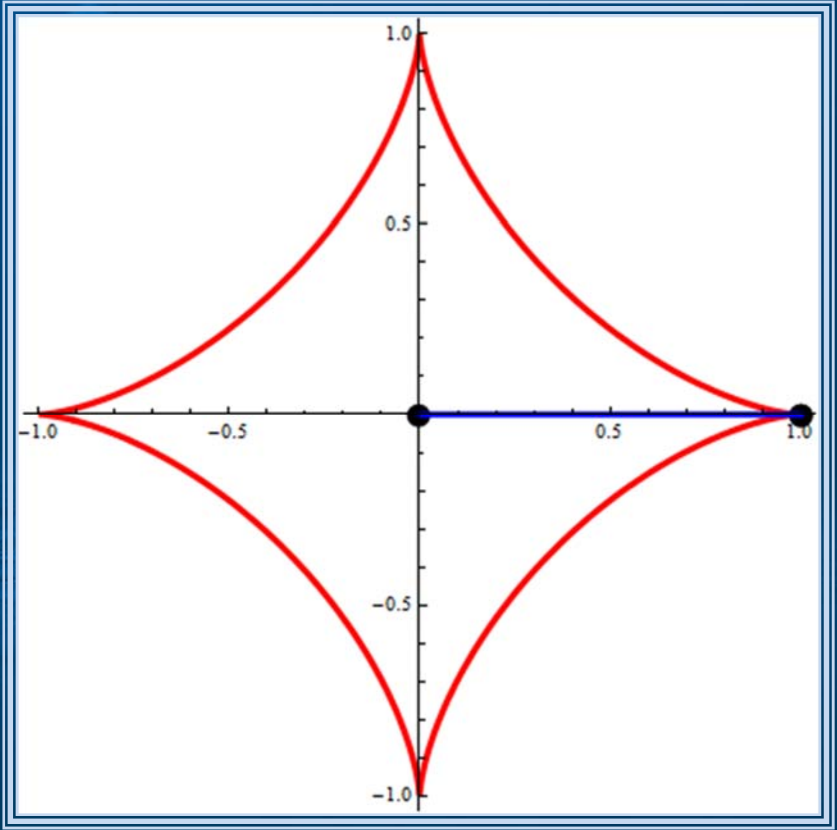
例3 将曲线的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 化为直角坐标方程.

星型线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

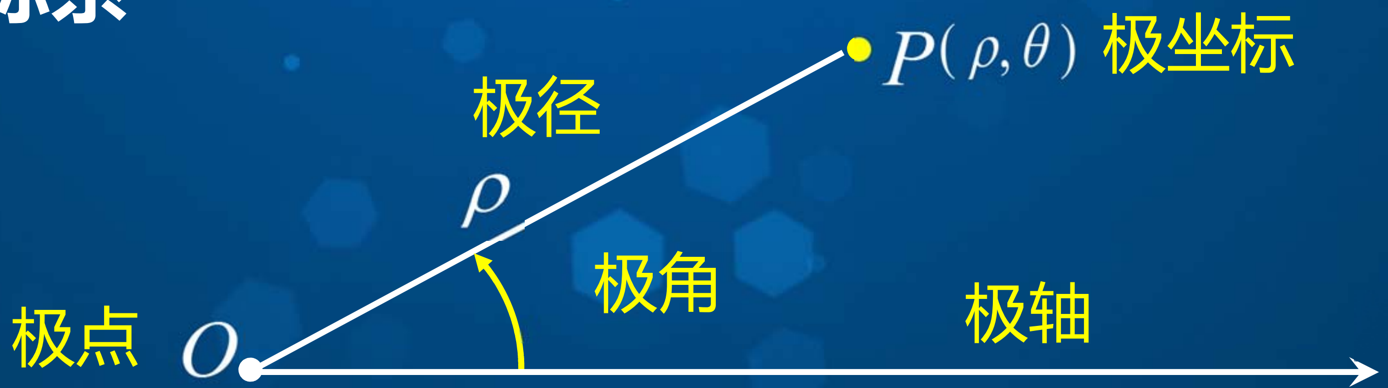




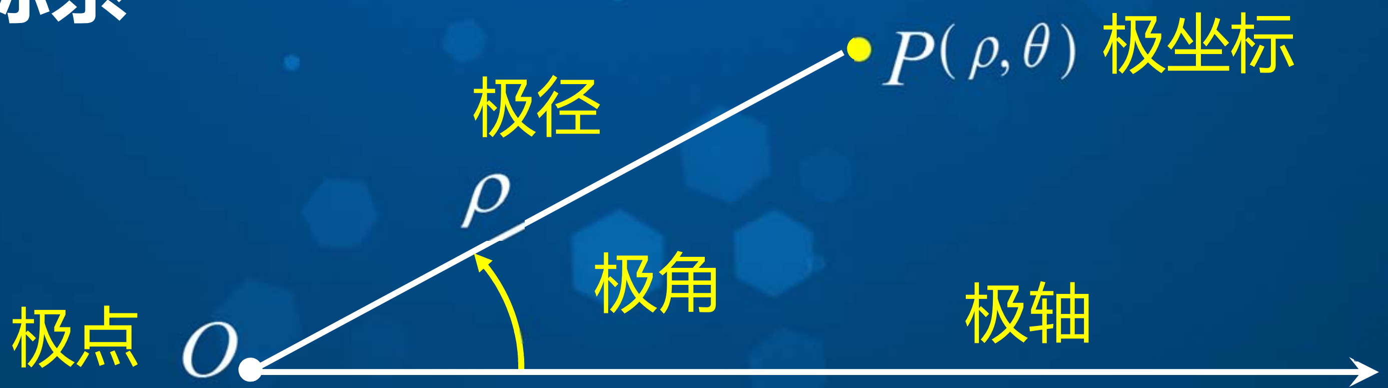
例3 将曲线的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (0 \le t \le 2\pi)$ 化为直角坐标方程.



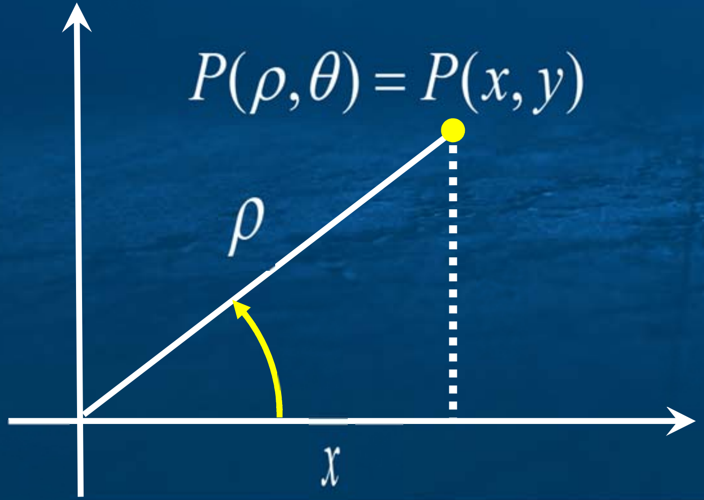
1. 极坐标系



1. 极坐标系



- 直角坐标系与极坐标系的关系



$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$$

$$\rho\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\ (-\pi\leq\theta\leq\pi).$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \tan\theta=\frac{y}{x}.$$

例1 (1)将极坐标系中的点 $P\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 转换成直角坐标.

(2) 用极表示直角坐标系中的点 $Q(1,-1)$.

【解】 （1）由 P 极坐标 $P\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 知 $\rho=2,\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

于是 $x=\rho\cos\theta=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=2(-\dfrac{1}{2})=-1$

$$y=\rho\sin\theta=2\sin\frac{2\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

所以P 的直角坐标为 $P\left(-1,\sqrt{3}\right)$.

例1 (1)将极坐标系中的点 $P\left(2,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 转换成直角坐标.

(2) 用极表示直角坐标系中的点 $Q(1,-1)$.

【解】 （2）因为 Q 的直角坐标为 $Q(1,-1)$

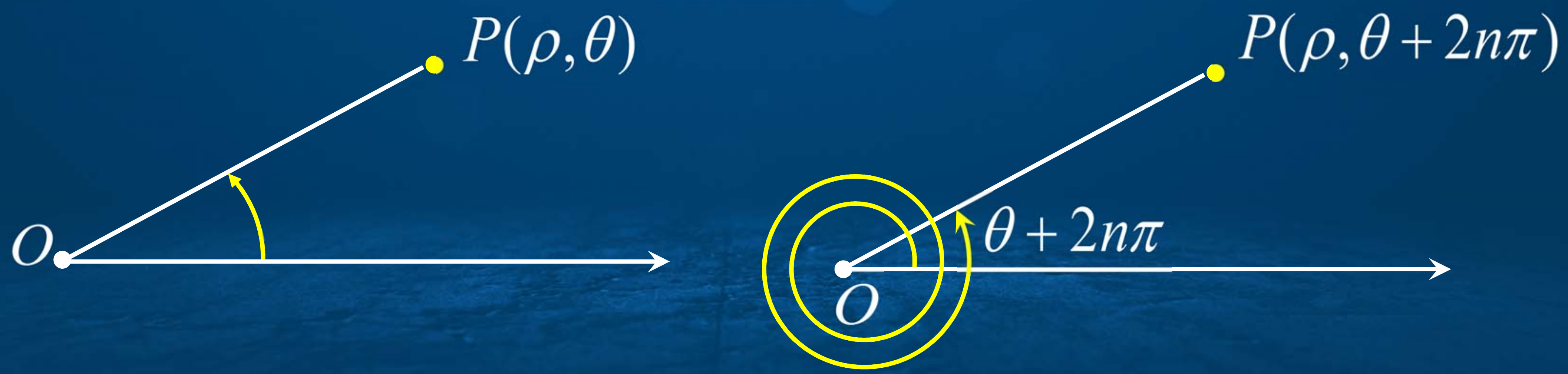
所以 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ $\quad \tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{-1}{1}=-1$

注意 $Q(1,-1)$为第四象限中的点，所以 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}$

因此 Q 的极坐标为 $Q(\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{4})$.

- 在极坐标系中下 $P(\rho,\theta)$ 可由下列坐标表示

$$P(\rho,\theta)=P(\rho,\theta+2n\pi)\ (n\in\mathbb{Z})$$



对数螺旋线

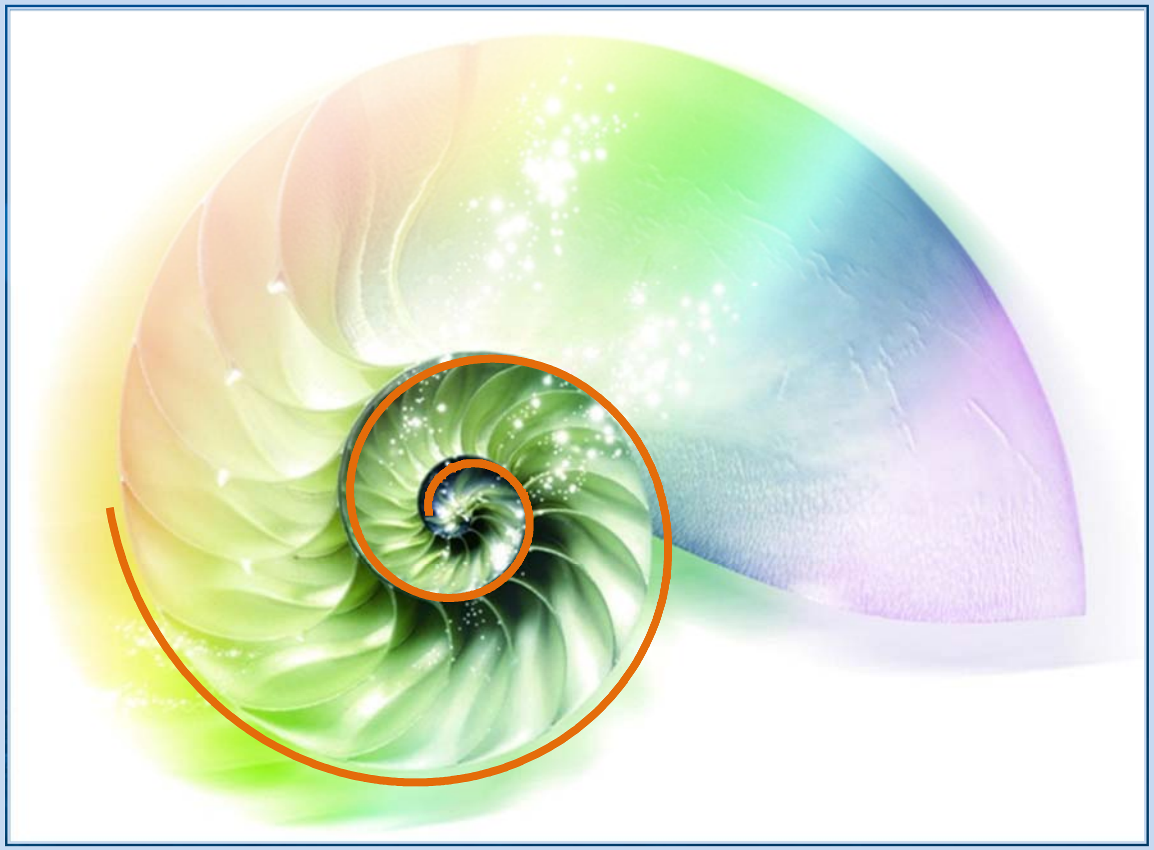
$$\rho = ca^{\theta} \ (c>0)$$

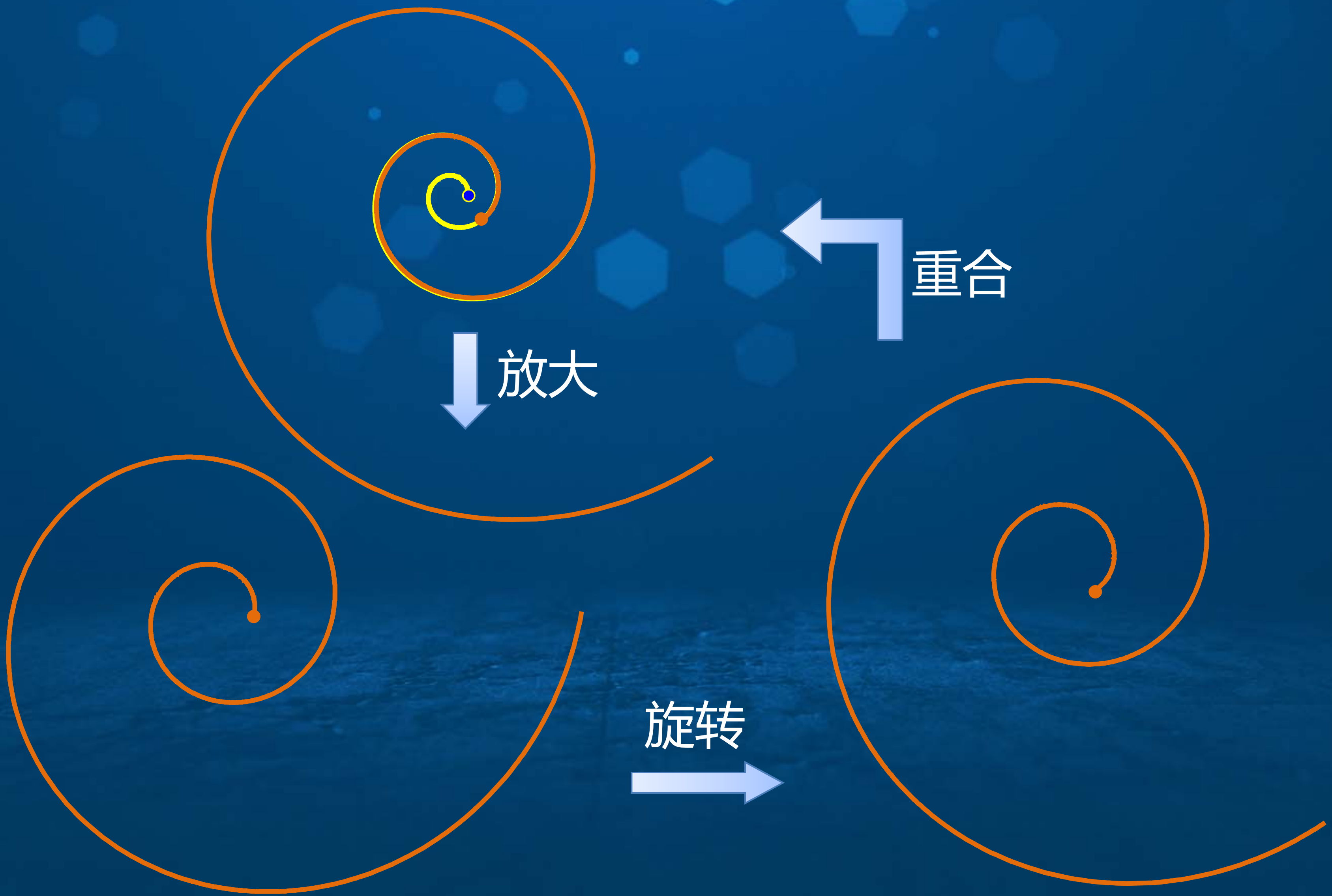
$$\rho = rca^{\theta} = ce^{\theta+\log_a r}$$

$$\theta \geq \alpha$$

$$\Updownarrow$$

$$\theta + \log_a r \geq \alpha + \log_a r$$



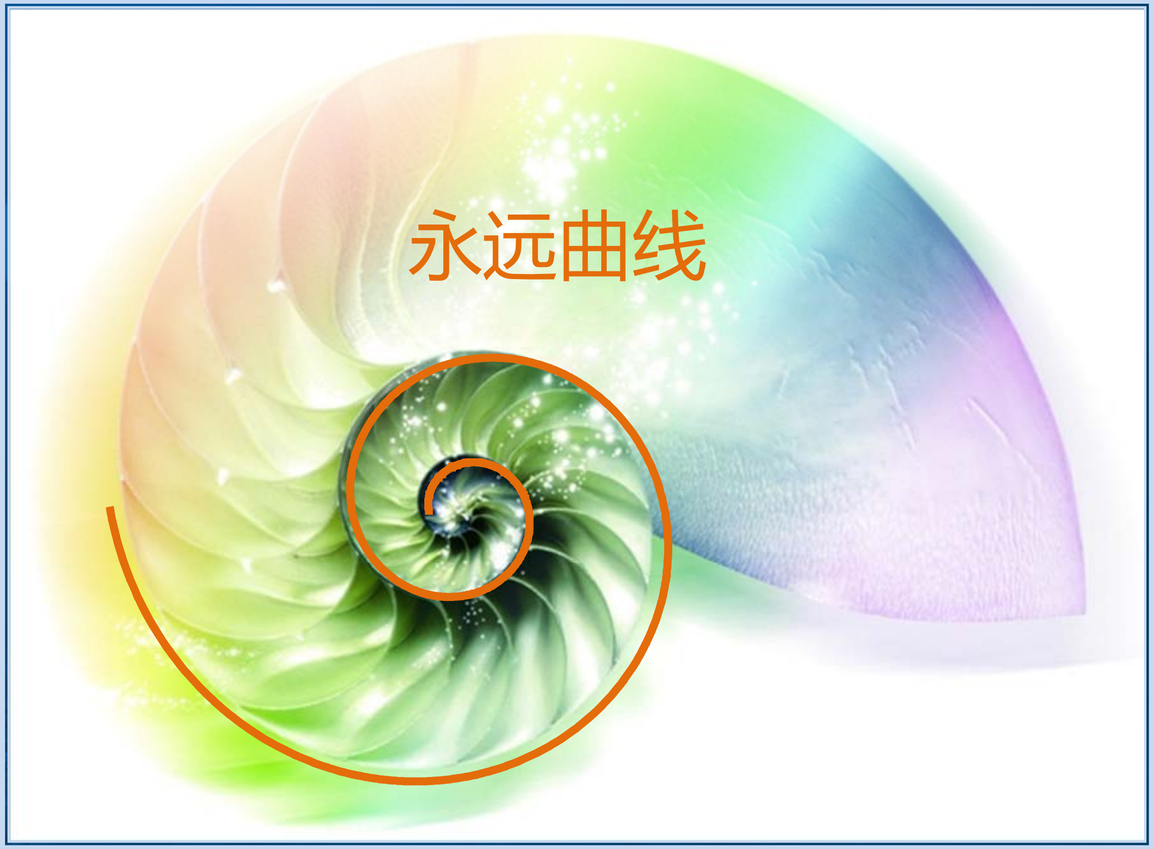

重合
放大
旋转

对数螺旋线

$$\rho = ca^{\theta}\ (c>0)$$

$$\rho = rca^{\theta} = ce^{\theta+\log_a r}$$

将对数螺线做相似放大或缩小，均能与原曲线重合.



“不论有多大变化，我将按原样复活” 雅各布 伯努利

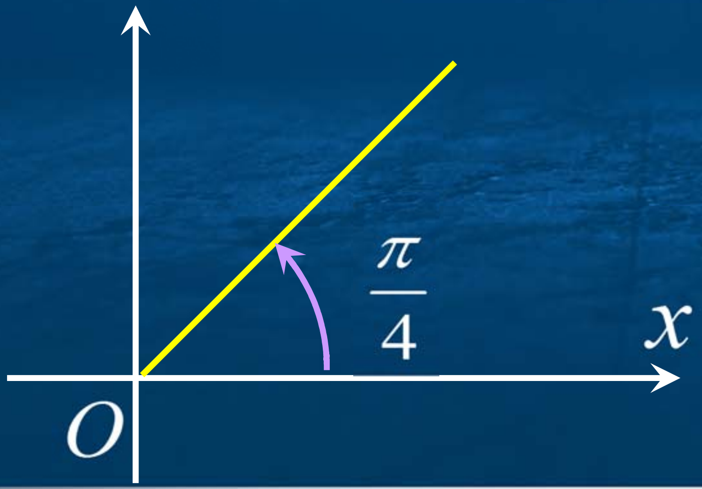
2. 曲线的极坐标表示

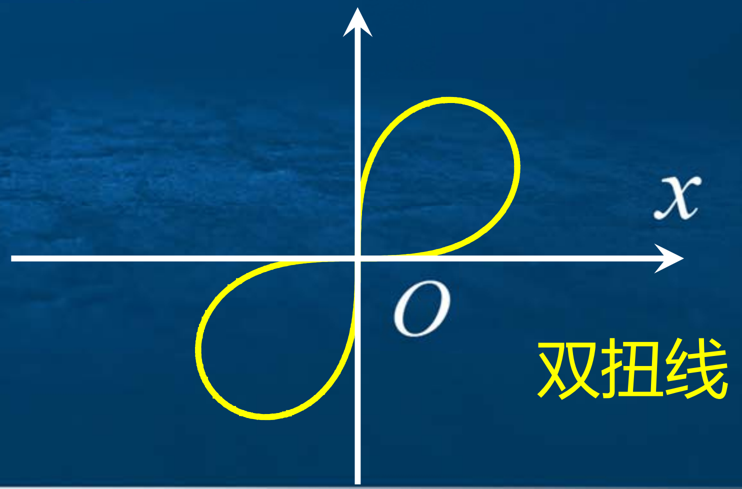
例2（1）圆 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 的极坐标方程.

（2）直线 $x+y=1$ 的极坐标方程.

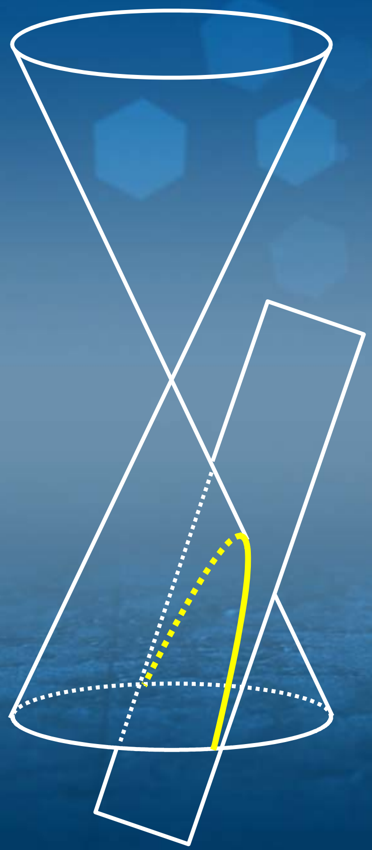
（3）画出极坐标方程 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 所表示的曲线.

（4）双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 的极坐标方程.



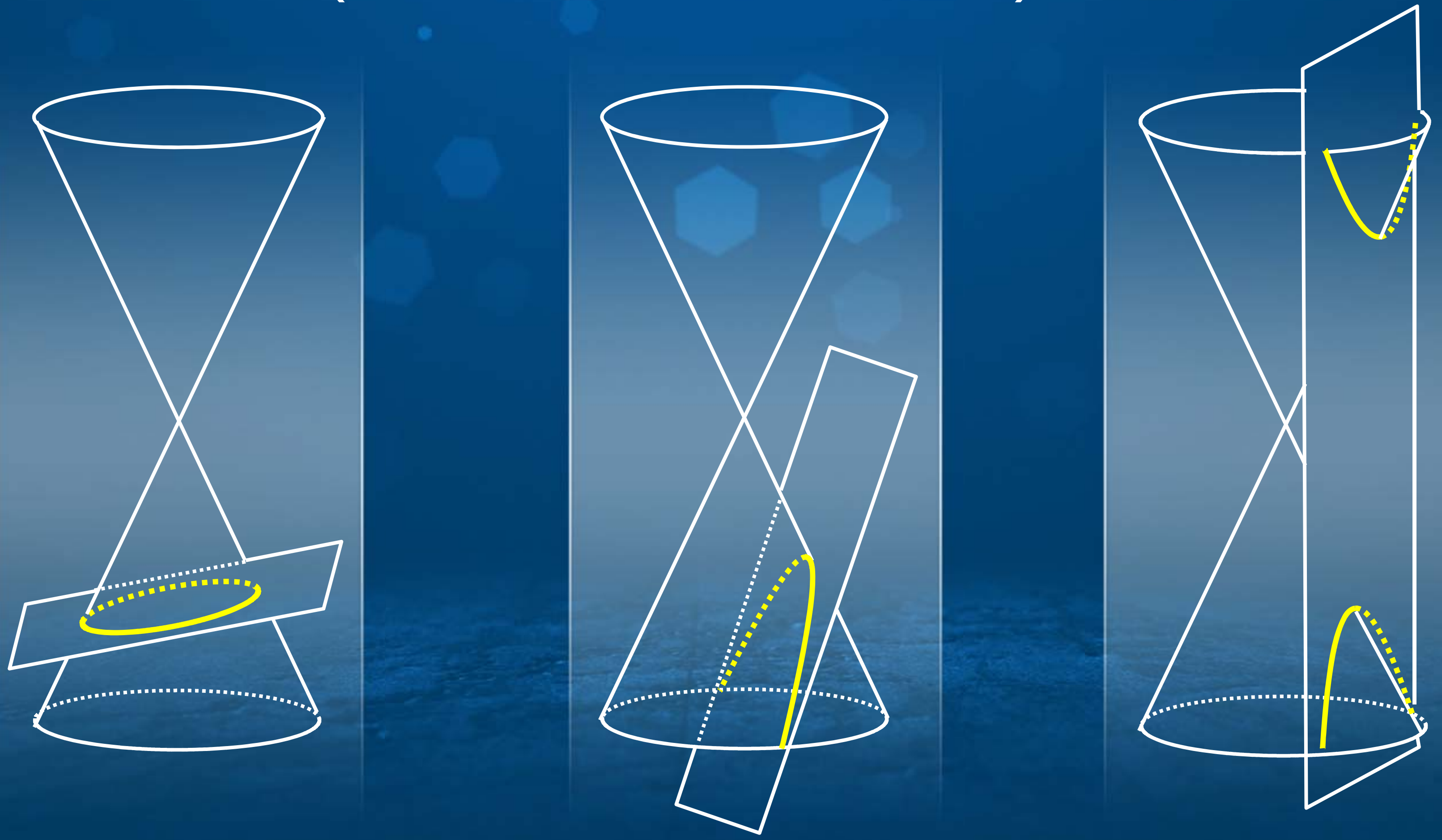


圆锥曲线(椭圆、抛物线、双曲线)的几何定义

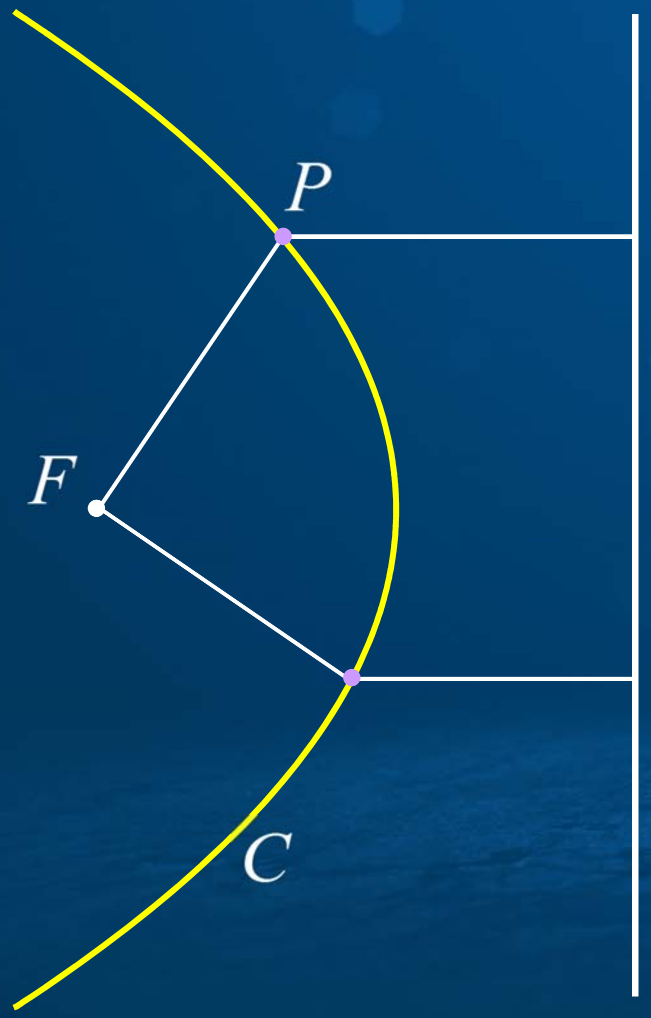


椭圆　　抛物线　　双曲线

圆锥曲线(椭圆、抛物线、双曲线)的几何定义



椭圆　　抛物线　　双曲线



定义（圆锥曲线）

设 F 为定点，l 为定直线，e 为正常数.称满足

$$\frac{|PF|}{|Pl|}=e$$

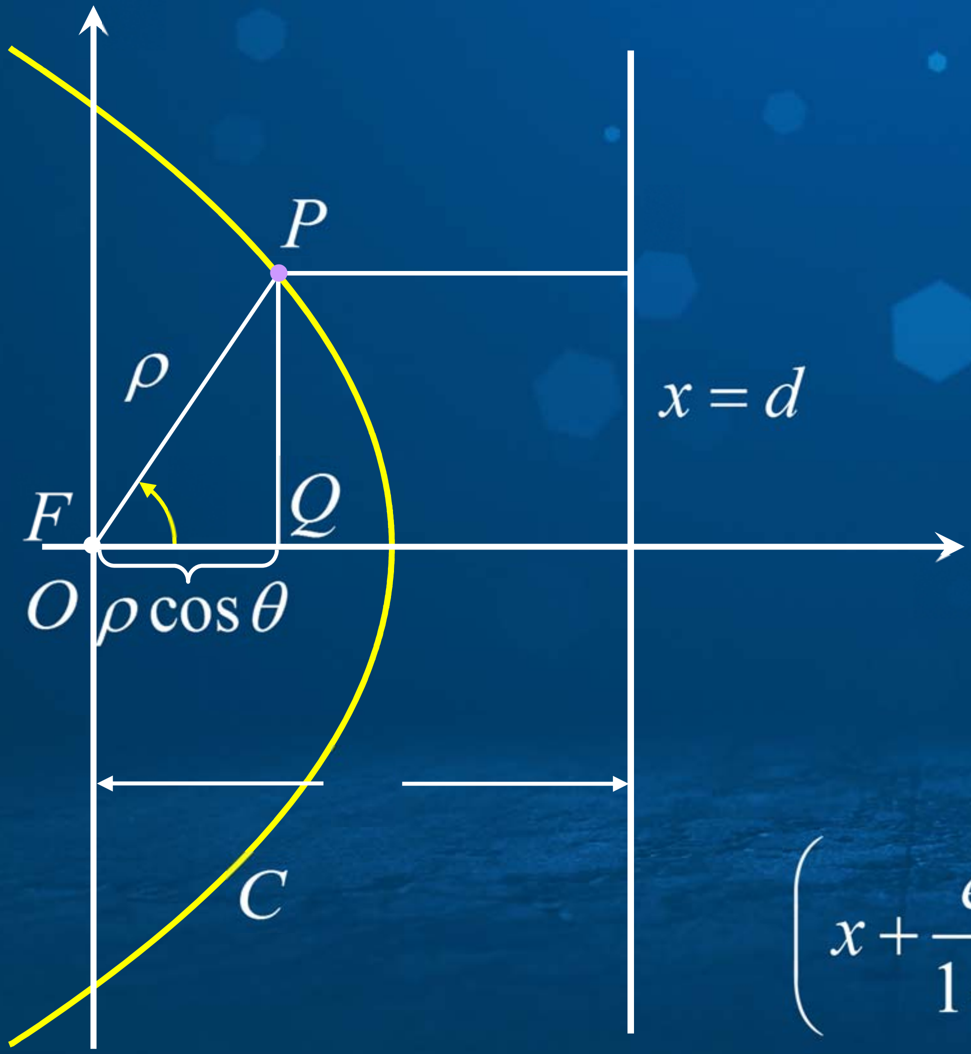
的动点 P 的轨迹为圆锥曲线.

F —焦点

l —准线

e —离心率

圆锥曲线的极坐标方程



$$\boxed{\rho=\frac{ed}{1\pm e\cos\theta}}$$

$$\rho=e(d-\rho\cos\theta)$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x=\rho\cos\theta$$

$$\left(x+\frac{e^2d}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}\ (e\neq 1)$$

$e<1, e=1, e>1$ $\Longleftrightarrow$ 椭圆、抛物线、双曲线