第九讲 数列收敛的判定方法

顾客向银行存入本金 p 元，t 年后他在银行的存款是本金与利息之和. 设银行规定年复利率为r，考虑下列不同结算方式 t 年后的最终存款额.

- 每年结算一次 $p(t)=p(1+r)^t$
- 每月结算一次 $p(t)=p(1+\frac{r}{12})^{12t}$
- 每年结算 m 次 $p(t)=p(1+\frac{r}{m})^{mt}$

数列 $p(1+r)^t, p(1+\frac{r}{2})^{2t}, p(1+\frac{r}{3})^{3t}, \cdots, p(1+\frac{r}{m})^{mt}, \cdots$

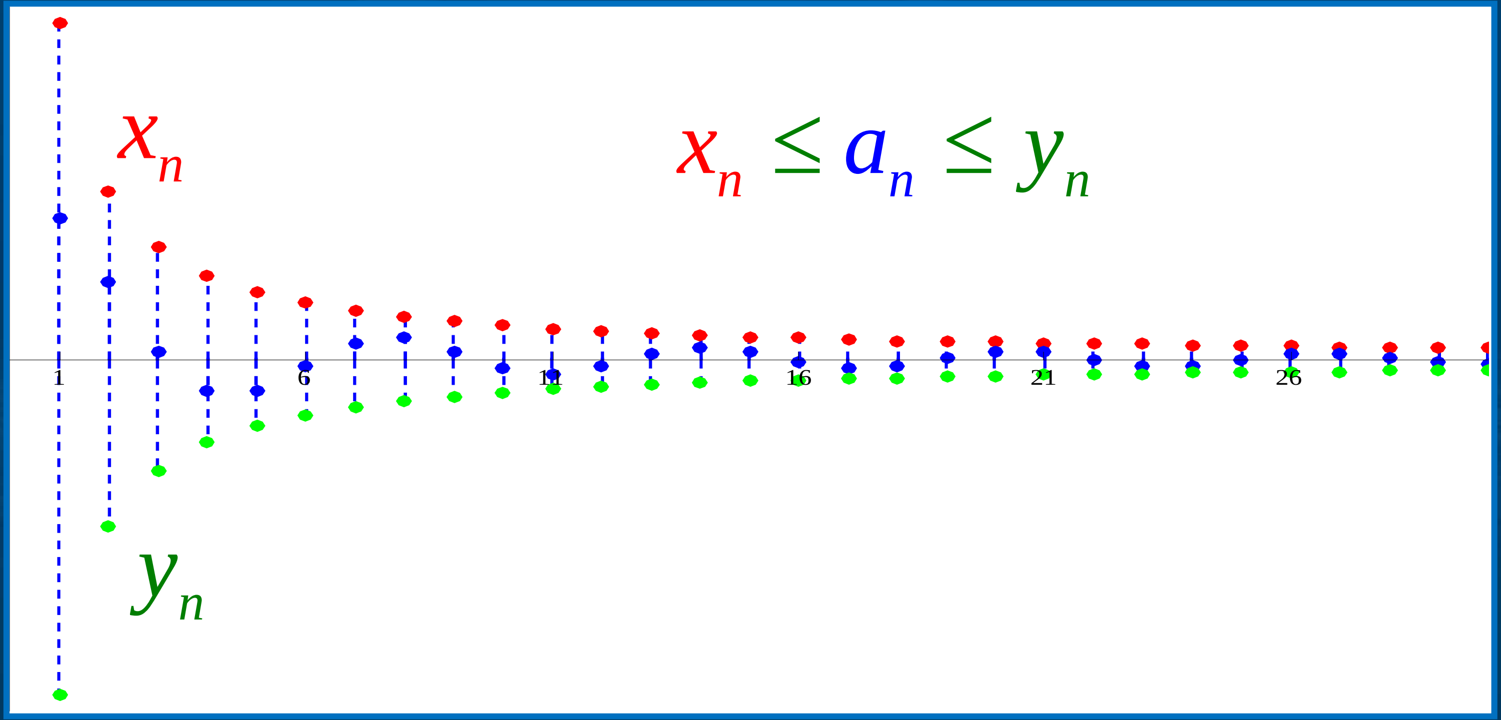
夹逼定理

单调有界原理

区间套定理

定理1（夹逼定理）设 $x_n \le a_n \le y_n\ (n=1,2,\cdots)$，且数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛到相同极限，则数列 $\{a_n\}$ 收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n .$$



例1 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

思考 问 k 为何值时有

$$\lim_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0 \ ?$$

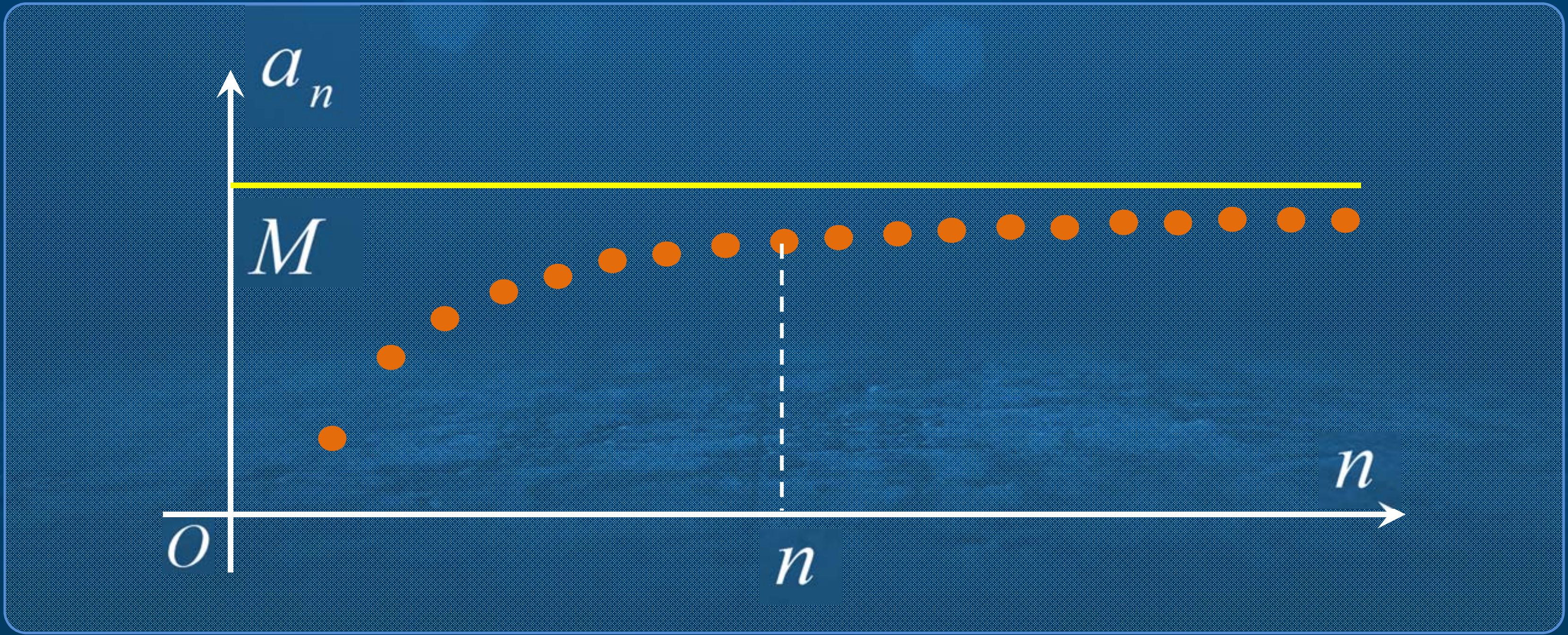
例2 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n})$.

例3 设 $a>1$ 为常数，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

定理2 设数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界，即

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{n-1} \le a_n \le \cdots$$

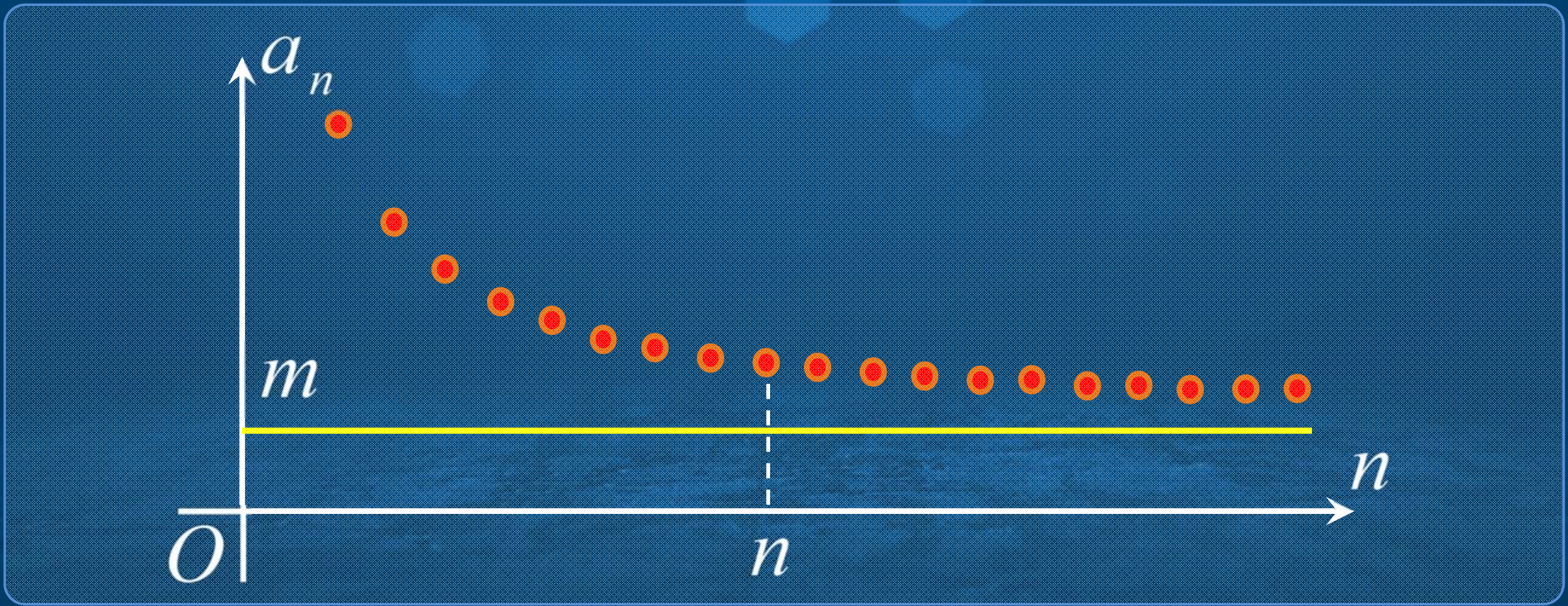
且存在常数 M 使得 $a_n \le M \ (n=1,2,\cdots)$ 则数列 $\{a_n\}$ 存在极限.



推论　设数列$\{a_n\}$单调增加且有上界，即

$$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_{n-1} \ge a_n \ge \cdots$$

且存在常数 m 使得 $a_n \ge m\,(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\{a_n\}$ 存在极限.



单调有界原理　任何单调有界数列一定存在极限.

例4（重要极限）设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 存在极限.

n	a_n	n	a_n
10	2.59374246	10^5	2.71826824
10^2	2.70481383	10^6	2.71828047
10^3	2.71692393	10^7	2.71828169
10^4	2.71814593	10^8	2.71828179

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e=2.7182818284\cdots$ 纳皮尔常数（欧拉数）

例5 设

$$a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$$

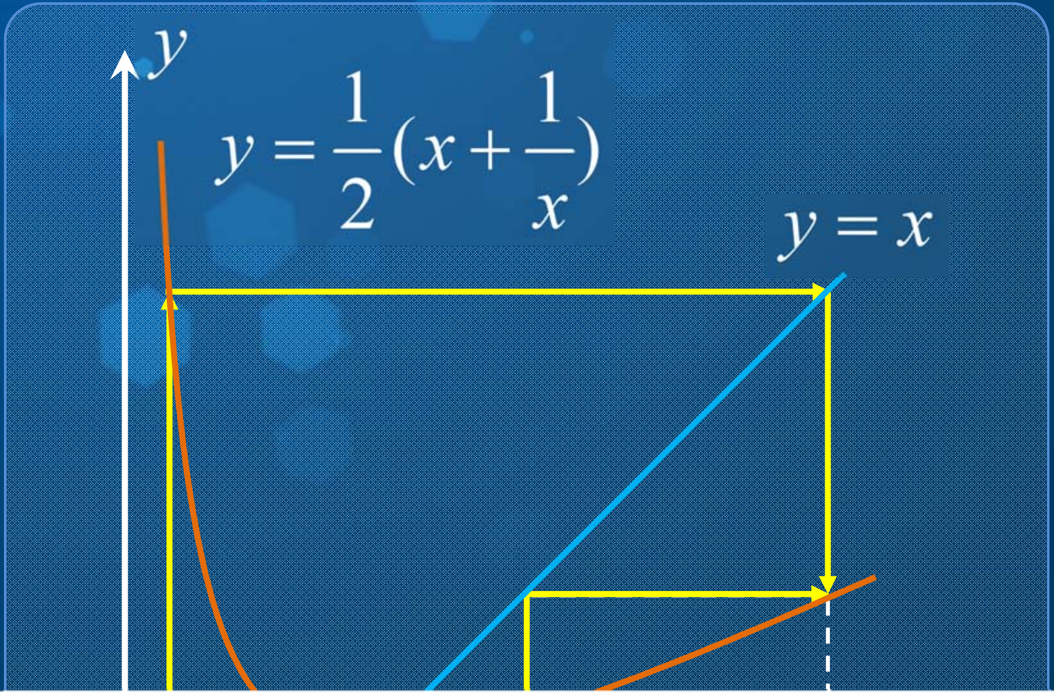
$$(n = 1, 2, \cdots)$$

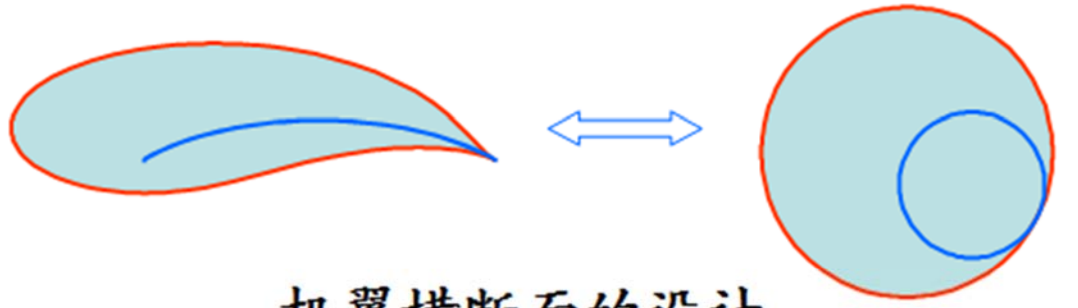
证明数列$\{a_n\}$存在极限，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

茹科夫斯基变换

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$



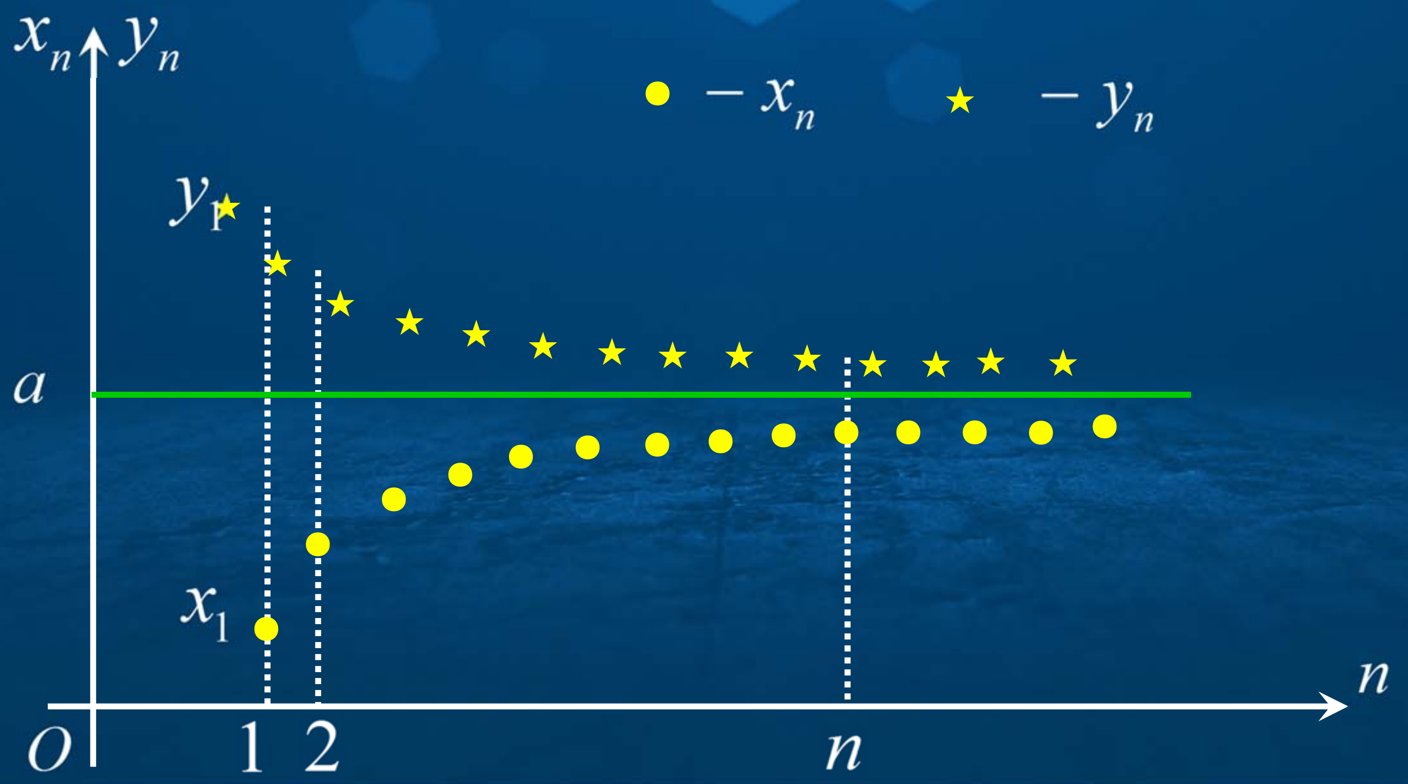


机翼横断面的设计

定理3 设 $\{x_n\}$ 为递增数列，$\{y_n\}$ 为递减数列，且

$$x_n < y_n \ (n = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均收敛，且极限相同，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.



定理4（区间套定理）设有区间序列 $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 满足

(1) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\,(n=1,2,\cdots)$ ；

(2) $b_n-a_n\to 0\,(n\to\infty)$ ，

则存在惟一的 $x_0\in[a_n,b_n]\,(n=1,2,\cdots)$.