第13讲 变号级数收敛性判别方法

- 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$ 的收敛性

是否存在一般的判别收敛性的方法?

- 收敛级数满足结合律. 那么，收敛级数满足交换律吗？

$$\left\{\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots=a\\&0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+\cdots=\frac{a}{2}\end{aligned}\right.$$

相加

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$$

什么条件能确保收敛级数满足交换律?

- 交错级数
- 绝对收敛与条件收敛
- 级数收敛性判定一般方法

第13讲 变号级数收敛性判别方法——主要内容

交错级数——正负项交错出现的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \cdots (-1)^{n-1}a_n + \cdots \quad (a_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$$

定理2（拉链定理）数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是它的两个子数列$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n-1}\}$收敛且极限相同.

定理1（莱布尼兹判别法）对于交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，若满足

（1）$\{a_n\}$单调减少，即$a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge \cdots$；

（2）$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，

则级数收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \le a_1$.

例1 证明交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\ =\ln 2$$

收敛 .

（1）$a_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 单调下降　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

例2 考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$ 的敛散性 .

级数为交错级数，但 $a_n=\dfrac{n}{n+1}\to 1\,(n\to\infty)$

级数不满足收敛的必要条件，所以发散.

变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\longrightarrow$ 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$

利用比值或根值法判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散 $\longrightarrow$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散

例3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 当 $|x|>1$ 时均发散.

定理2 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

定义1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为绝对收敛．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为条件收敛．

- 绝对收敛的级数一定收敛，反之则不然．

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 **条件收敛**

当 $|x|<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n}{n}$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛 **绝对收敛**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{2k-1} + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} \cdots$$

交换项的前后位置

$$a_3 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_4 + \cdots + a_{2k+1} + a_{2k} + a_{2k+2} + a_{2k+4} \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \overset{\Delta}{=} \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5 + \tilde{a}_6 + \cdots + \tilde{a}_{2k-1} + \tilde{a}_{2k} + \tilde{a}_{2k+1} + \tilde{a}_{2k+2} \cdots$$

定理3（交换律）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为绝对收敛的级数，则任意交换级数项的前后位置，得到的新级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$仍然绝对收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n .$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n + \cdots)$$

级数相乘的结果 $\sum_{i,\,j=1}^{\infty} a_i b_j \overset{\Delta}{=} \begin{array}{l} a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \cdots + a_1b_n + \cdots \\ a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_2b_n + \cdots \\ a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_3b_n + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$

定理4（级数的乘积）设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为绝对收敛的级数，则它们的乘积 $\sum_{i,\,j=1}^{\infty} a_i b_j$ 仍为绝对收敛，且

$$\sum_{i,\,j=1}^{\infty} a_i b_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n .$$

两级数相乘的结果写成如下形式：

$$
\begin{array}{l}
a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \cdots + a_1b_n + \cdots \\
a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_2b_n + \cdots \\
a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_3b_n + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_nb_1 + a_nb_2 + a_nb_3 + \cdots + a_nb_n + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

柯西乘积 在绝对收敛的条件下，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \cdots + a_1b_n)$$

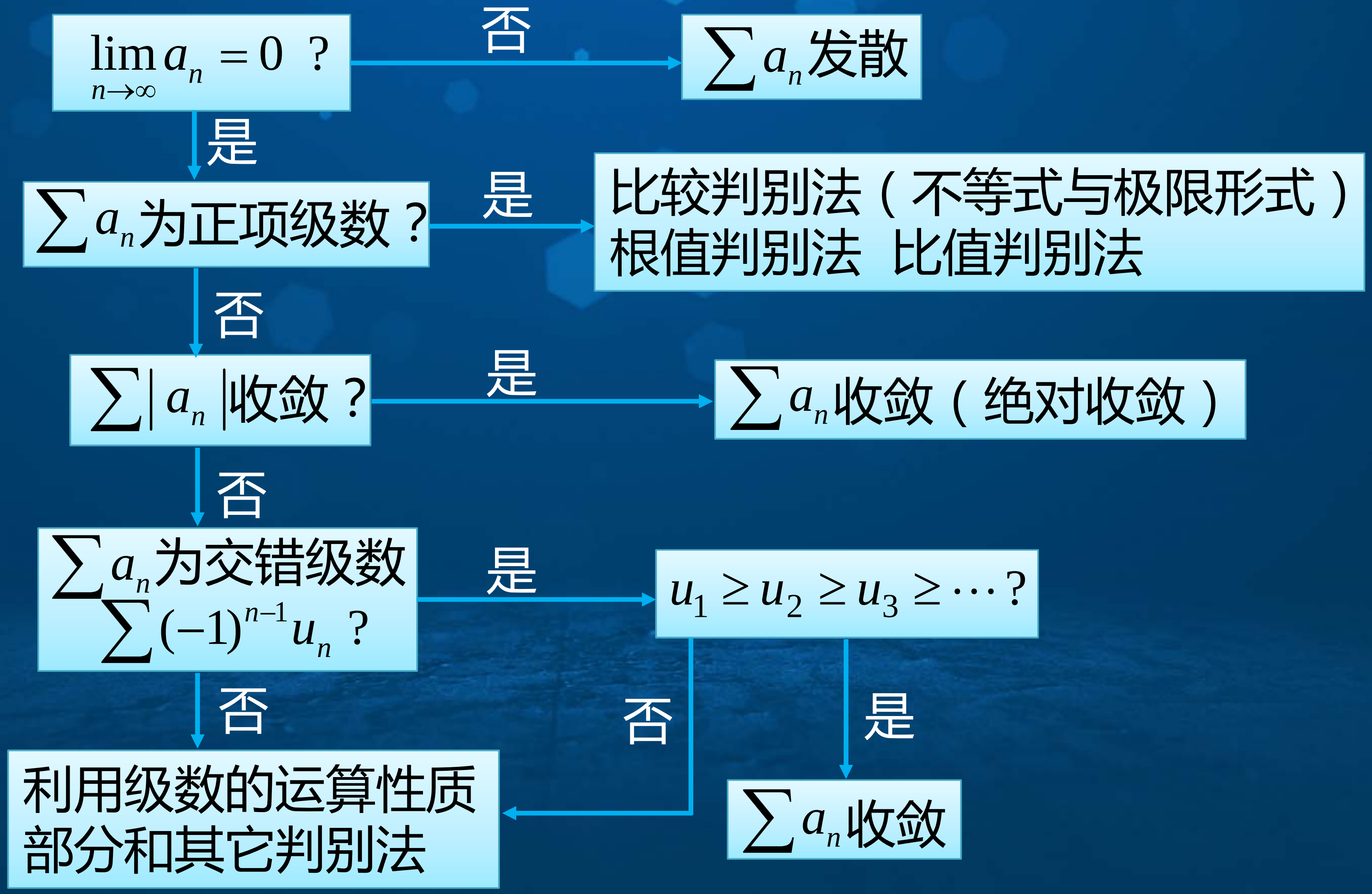
柯西乘积应用

当 $|q|<1$ 时，几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对数收敛

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(1\cdot 1+1\cdot 1+\cdots+1\cdot 1)}^{(n+1)\text{项}} q^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \Longrightarrow \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n$$

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性的过程

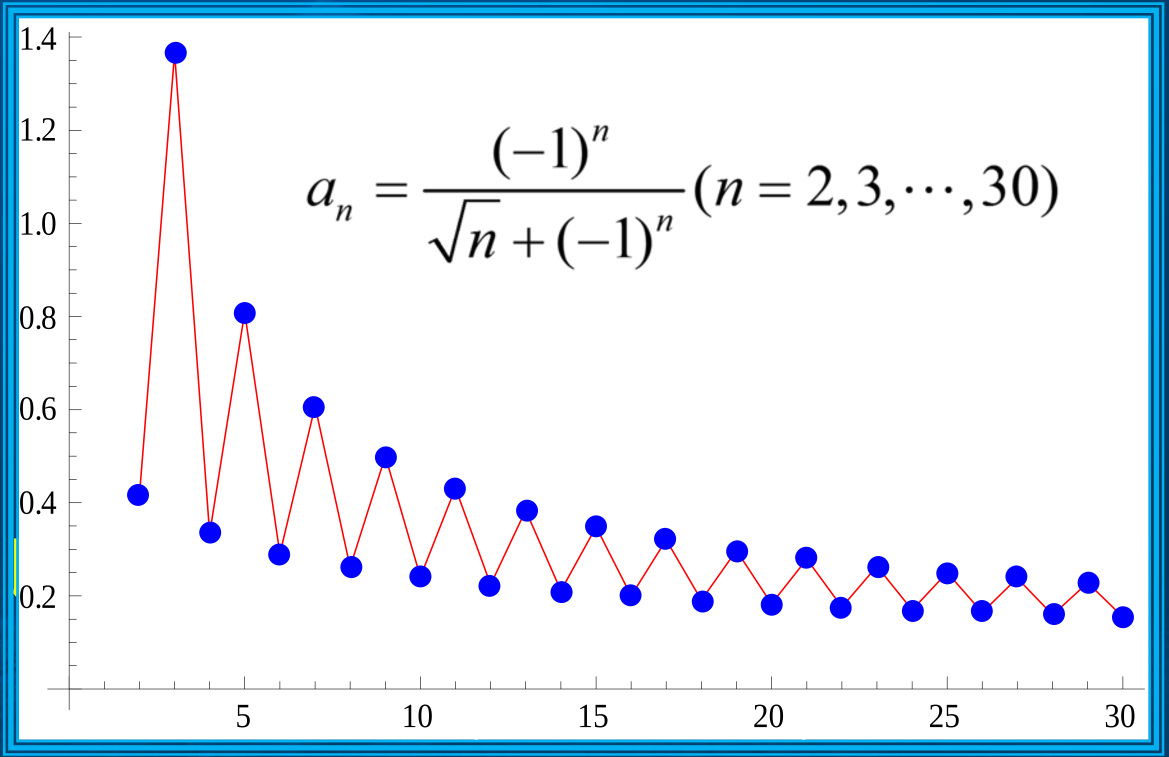


例4 研究级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性．

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\to 0\ (n\to\infty)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right| \text{收敛吗？}$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right|\ge\frac{1}{2\sqrt{n}}$$



$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是交错级数 $\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}(n=2,3,\cdots)$ 非单调减少

判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性的过程