国防科学技术大学
National University of Defense Technology

《高等数学（一）》习题解析

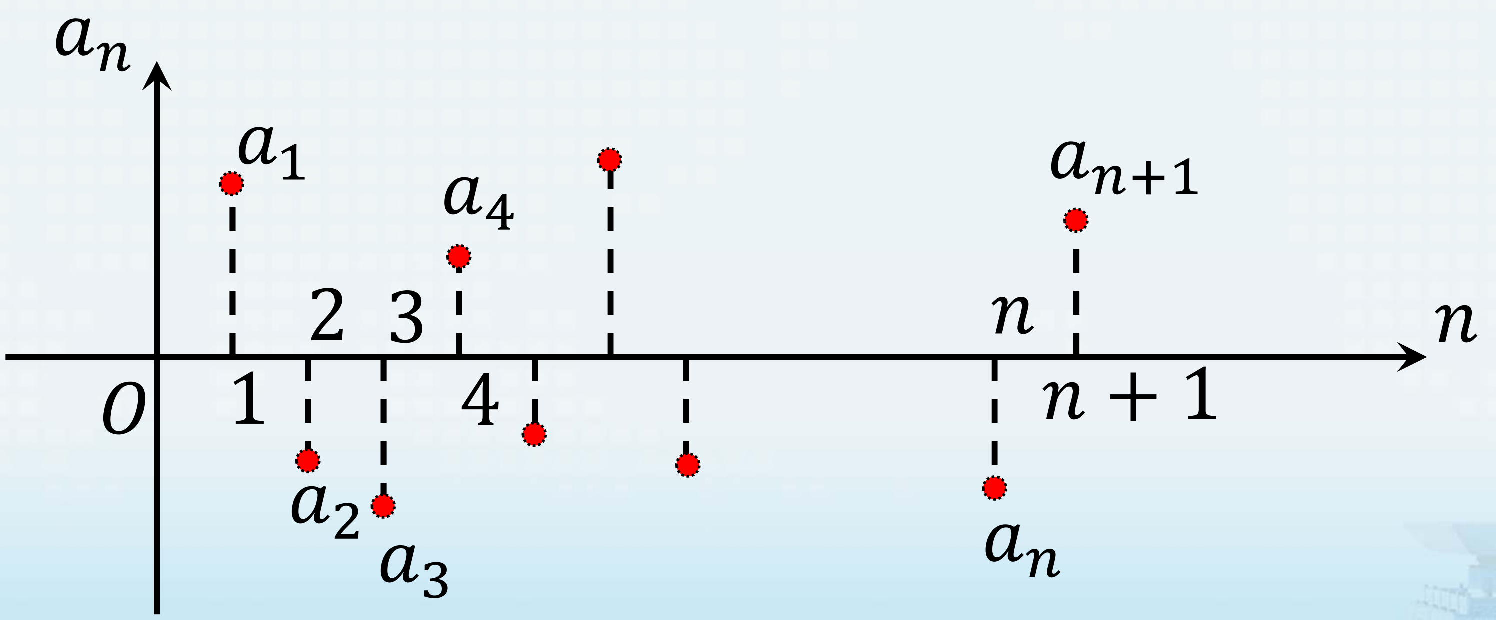
第七讲　数列极限的概念

朱健民 教授

主要内容回顾：

- 数列$\{a_n\}$的散点图

数列的项 a_n可以用平面上的点列$(n, a_n)(n = 1,2,\cdots)$来表示



主要内容回顾：

- 数列极限的“$\varepsilon-N$”定义

对于数列$\{a_n\}$，若存在常数a，对于任意给定的正数ε，均存在正整数N，当$n>N$时，恒有

$$|a_n-a|<\varepsilon$$

成立．则称数列$\{a_n\}$**存在极限**（或**收敛**），常数a称为该数列的**极限**，记为

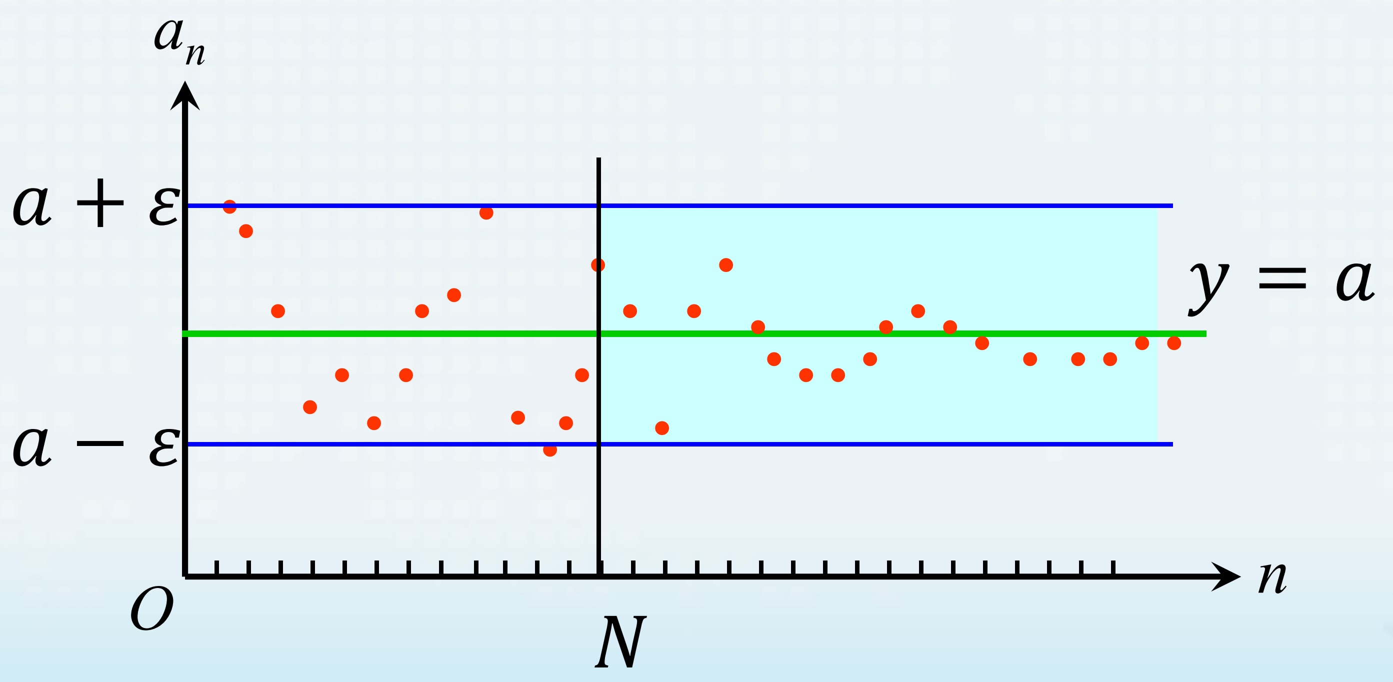
$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\text{或 }a_n\to a\ \ (n\to\infty)\quad .$$

简洁形式：$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，恒有$|a_n-a|<\varepsilon.$

习题解析：第七讲 数列极限的概念

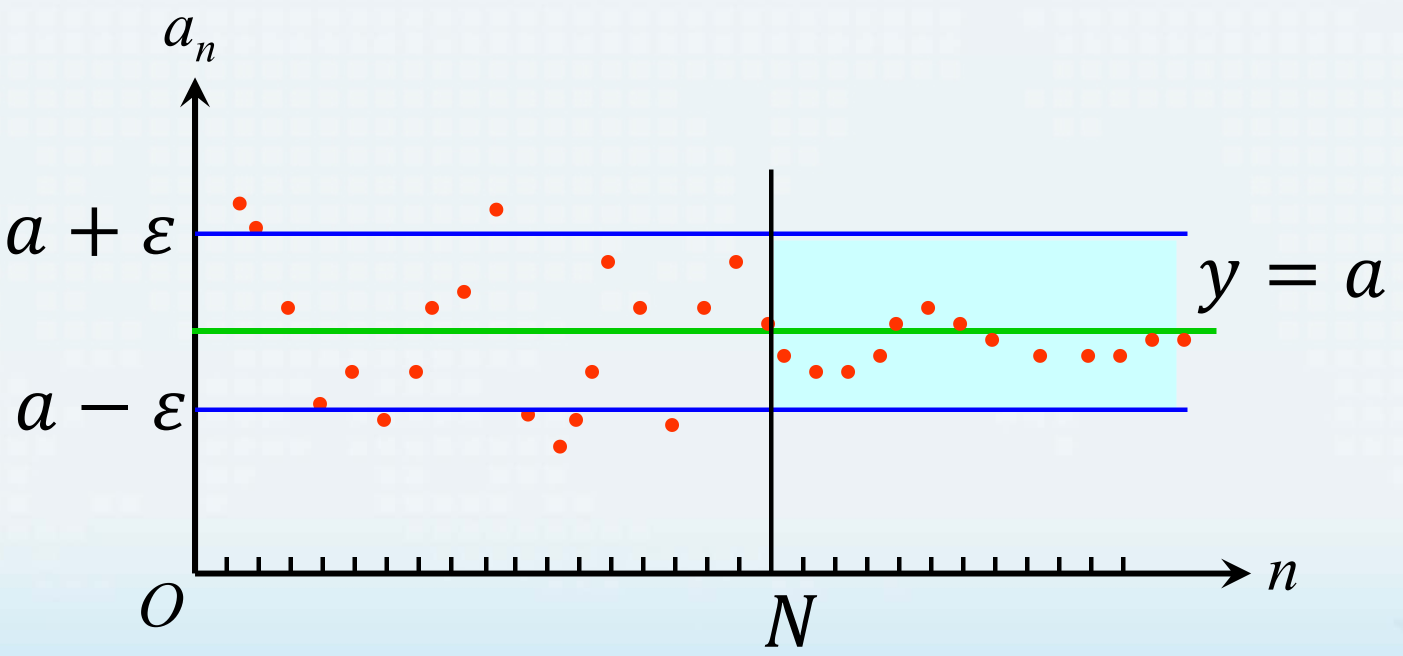
主要内容回顾：

- 数列极限的几何解释



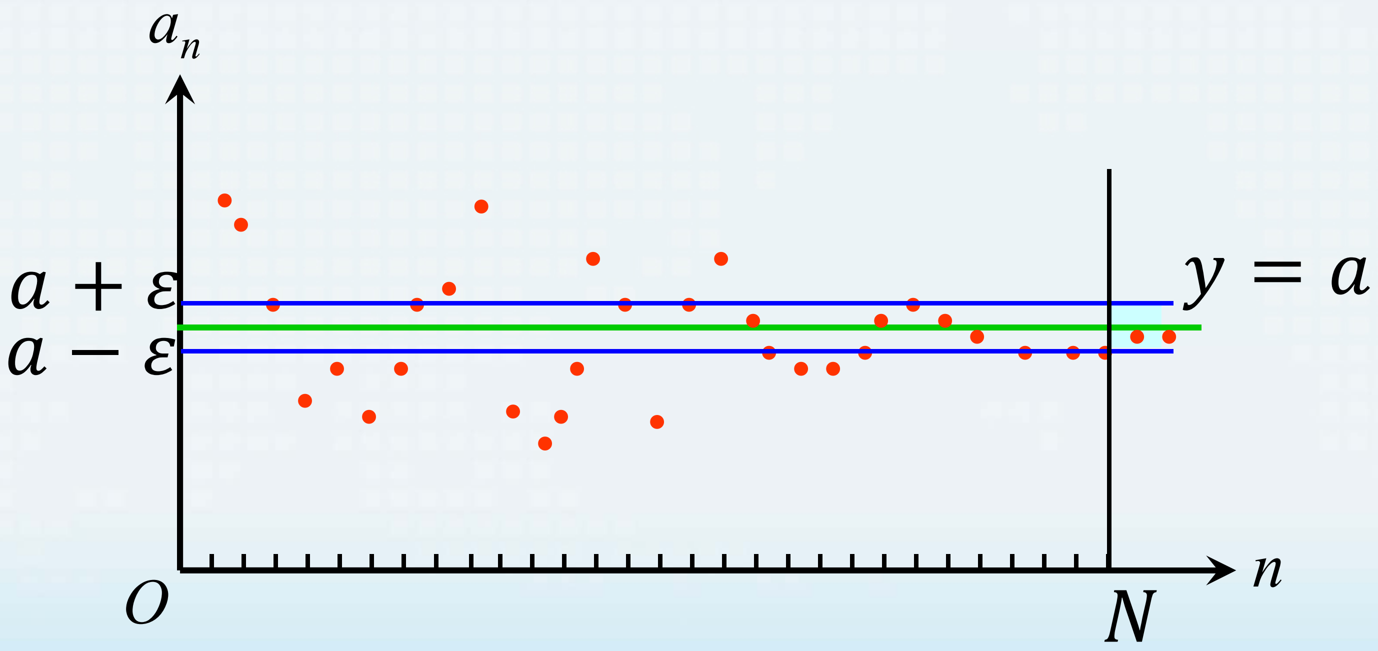
主要内容回顾：

- 数列极限的几何解释



主要内容回顾：

- 数列极限的几何解释



习题解析——判断题

1. 从集合的观点来看，数列 可以看作是某一集合. （ × ）

【解析】集合元素互异、无序，数列项可以相同、有序

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n=\pm 1.$ （ × ）

【解析】 数列极限唯一

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$ （ √ ）

习题解析：第七讲 数列极限的概念

4. “$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$” 等价于

“$\forall\varepsilon > 0$，$\{a_n\}$ 仅有有限项使得$|a_n - a| \geq \varepsilon$.” （√）

【解析】 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，恒有$|a_n - a| < \varepsilon$.

5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. （×）

【解析】 例如 $a_n = (-1)^n$. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

6. 在数列极限的$\varepsilon - N$定义中，正整数N是ε的函数. （×）

【解析】 对每一个ε存在无穷多个满足定义要求的正整数N.

7. 用$\varepsilon-N$语言证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$时，对$\forall\varepsilon>0$，可取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$.（√ ）

【解析】当$n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$时，有

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}<\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

8. 数列$\{a_n\}$以a为极限的几何意义：对实数轴上点a的每一个邻域，在$\{a_n\}$中最多只有有限项落在这个邻域之外. （√ ）

【解析】$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$，当$n>N$时，恒有$|a_n-a|<\varepsilon$.

9. “$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$” 是指
“数列的项a_n随着n的增大越来越接近于a.” （ × ）

【解析】 极限的纯算术定义为极限的严格定义

10. “ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ” 的等价说法是 “对每一个正数ε ，存在正整数N ，当$n > N$ 时，恒有$|a_n - a| < 2\varepsilon$. ” （ √ ）

【解析】

习题解析：第七讲 数列极限的概念

11. “$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$”的等价说法是“$\exists \varepsilon_0 > 0$，对任意的$N \in \mathbb{Z}^+$，$\exists n_0 > N$，使得$|a_{n_0} - a| \geq \varepsilon_0$.”　　（√）

【解析】 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$，当$n > N$时，恒有$|a_n - a| < \varepsilon$.

12. 用$\varepsilon - N$语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$时，对$\forall \varepsilon > 0$，可取$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.（×）

【解析】 这里的N不一定为正整数

习题解析——选择题

1. 下列数列中不存在极限的是（ **B** ）.

（A）$\left\{\frac{1}{2n+(-1)^n}\right\}$ （B）$\left\{\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

（C）$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ （D）$\left\{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+(-1)^n}=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

$\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n$ $\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0$

2. 在用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ 时，对于任意的正数ε，相应的正整数N可取为（ **C** ）.

（A）$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$　（B）$\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$　（C）$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$　（D）$\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$

【解析】 A和B的答案不一定为正整数，对于D的答案$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$

取$\varepsilon=0.1$，则$N=\left[\frac{1}{0.2}\right]+1=6$，对于$n=7>N=6$，有

$$\left|\frac{1}{n+1}-0\right|=\frac{1}{n+1}=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}=0.1$$

所以不满足定义要求.

2. 在用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ 时，对于任意的正数ε，相应的正整数N可取为（ C ）.

（A）$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ （B）$\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$ （C）$\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ （D）$\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$

【解析】

3. 在用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+n^2}=0$ 时，对 $\left|\frac{1}{n+n^2}-0\right|$ 放大正确的是（ C ）.

（A） $\left|\frac{1}{n+n^2}-0\right|<\frac{1}{2n^2}$

（B） $\left|\frac{1}{n+n^2}-0\right|<1$

（C） $\left|\frac{1}{n+n^2}-0\right|<\frac{1}{n}$

（D） $\left|\frac{1}{n+n^2}-0\right|<\frac{n+1}{n}$

【解析】　答案A不等式不成立， 答案B和D为无效放大