第16讲 函数极限存在性的判定准则

- 数列极限存在性判定准则
  - 夹逼定理
  - 单调有界原理
  - 柯西收敛准则
- 数列极限与函数极限关系

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$　　函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

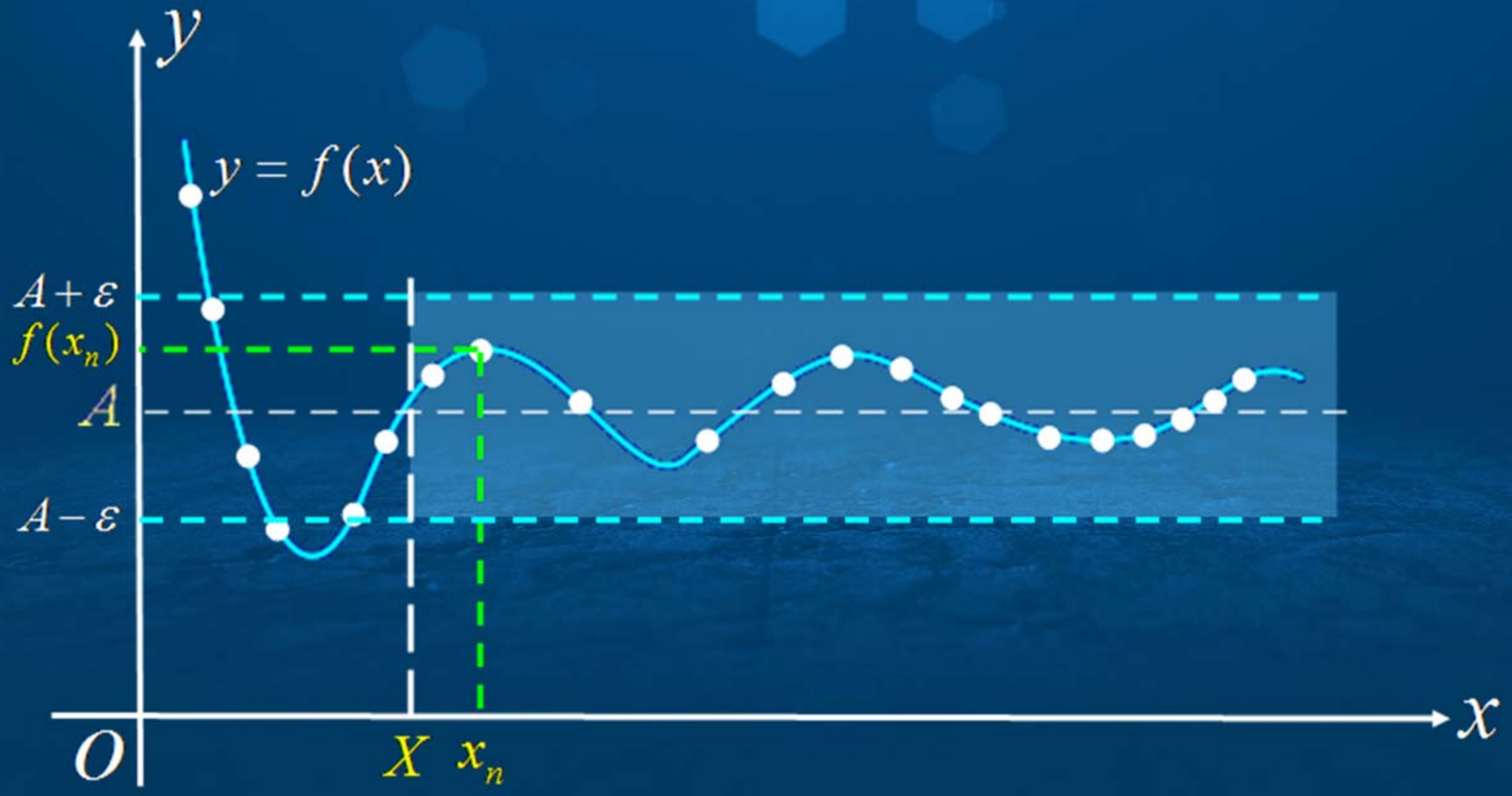
- 函数极限与数列极限的关系
- 夹逼定理
- 两个重要极限及应用

定理1 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$，则对于任何满足$x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$的数列$\{x_n\}$，均有$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

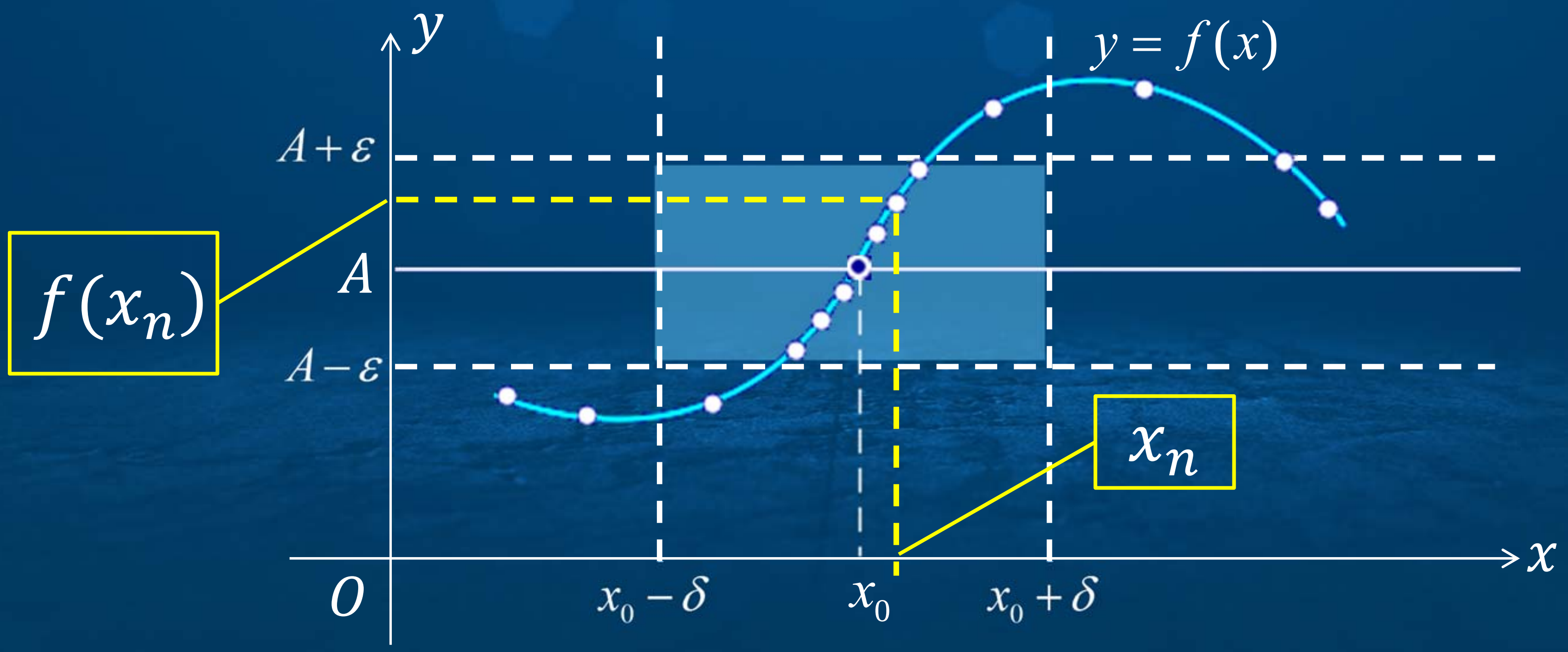
n	1	2	3	4	…	n	…
x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	…
$f(x_n)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	…	$f(x_n)$	…

函数值数列

定理1 设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则对于任何满足$x_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ 的数列$\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.



定理2 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则对于任何满足$x_n \to x_0 (n \to \infty)$且 $x_n \neq x_0\ (n = 1,2,\cdots)$的数列$\{x_n\}$，均有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.



海涅定理（极限的归一性）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \rightleftarrows \forall\{x_n\}: x_n\neq x_0,\ f(x_n)\text{ 有定义}$$

$(x\to\infty)$

$$\text{且 } x_n\to x_0\ (n\to\infty),\ \text{有} \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$(x_n\to\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

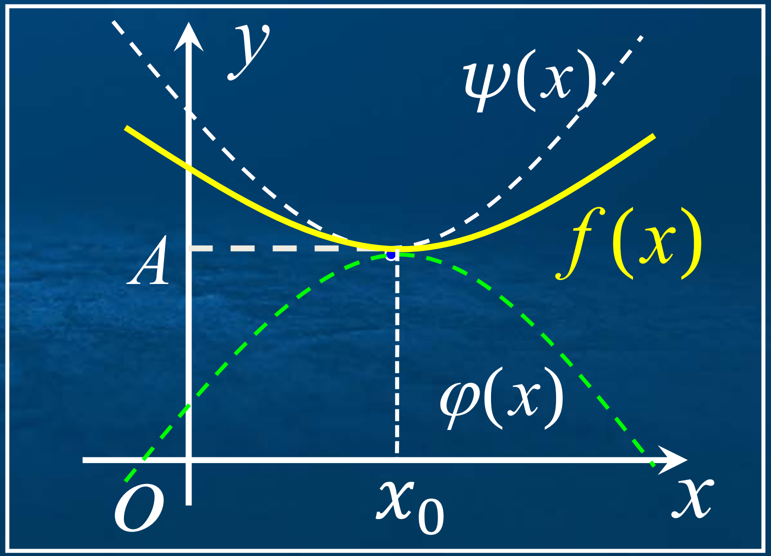
例1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

定理3(夹逼定理) 设 $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 在 x_0 的去心邻域 $U_0(x_0)$ 中满足$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$和 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$存在且相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\psi(x).$$

$U_0(x_0) \Rightarrow |x| > X > 0$

$x \to x_0 \Rightarrow x \to \infty$

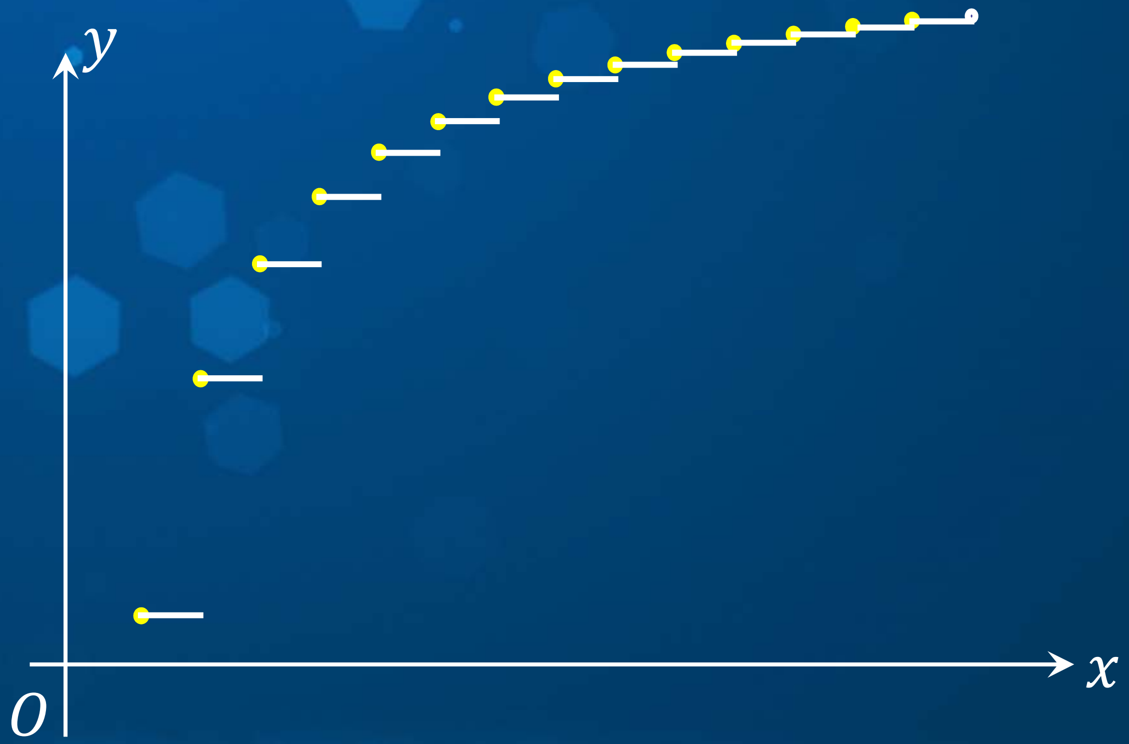


例2 (重要极限之一)

证明：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

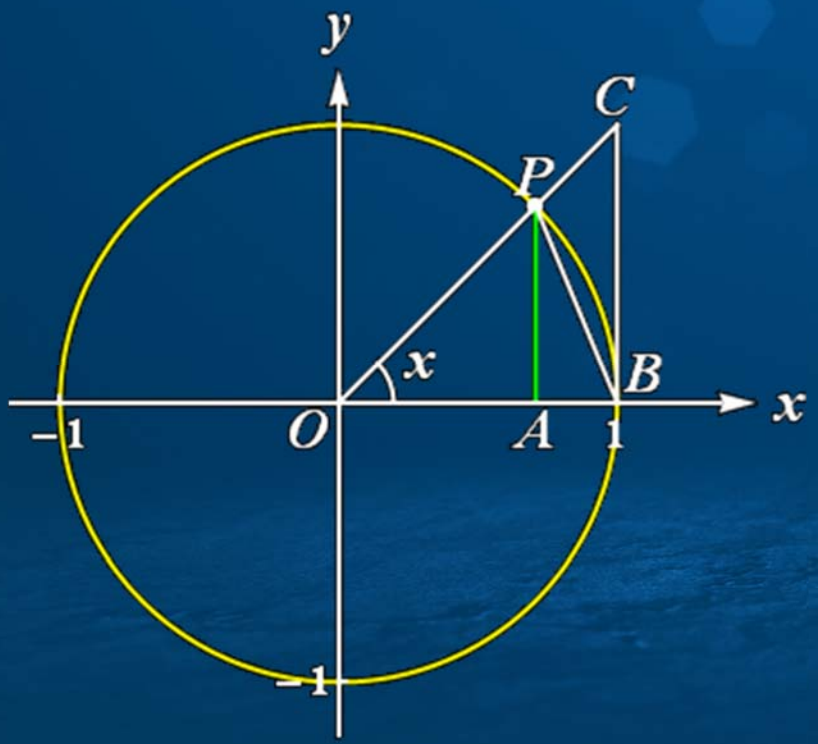
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

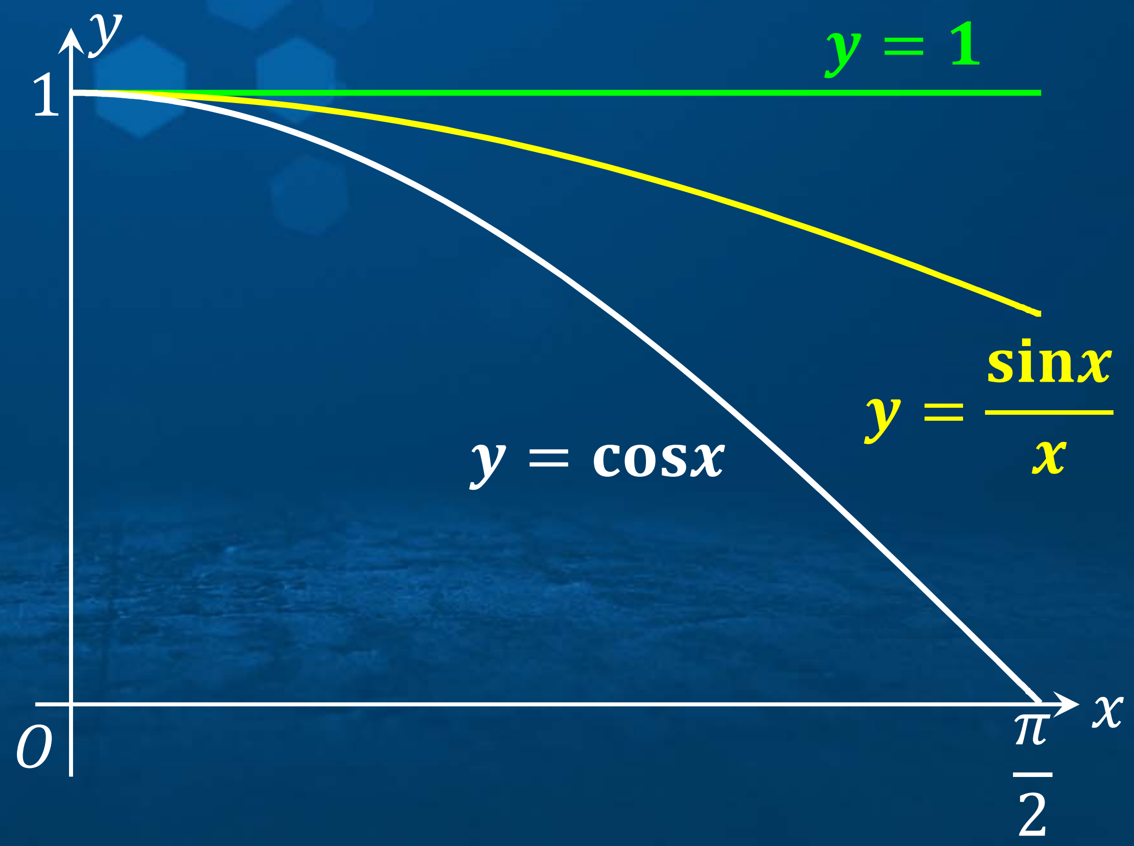


例3 证明以下结论：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

例4 (重要极限之二） 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$





$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1\text{（其中}a\text{为非零常数）}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+a}\right)^{x+a}=e$$

例5 计算下列极限 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

例6 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{x}$.