

《高等数学》全程教学视频课

第七讲 数列极限的概念

- 庄子《天下篇》



庄子，战国（宋）
（公元前369 - 公元前286）

一尺之锤，日取其半，万世不竭



● 庄子《天下篇》



一尺之锤，日取其半，万世不竭



庄子，战国（宋）
(公元前369 - 公元前286)



● 刘徽 “割圆术”



刘徽，魏晋
(约公元225—295)

“割之弥细，
所失弥少，割
之又割，以至
于不可割，则
与圆合体，而
无所失矣。”



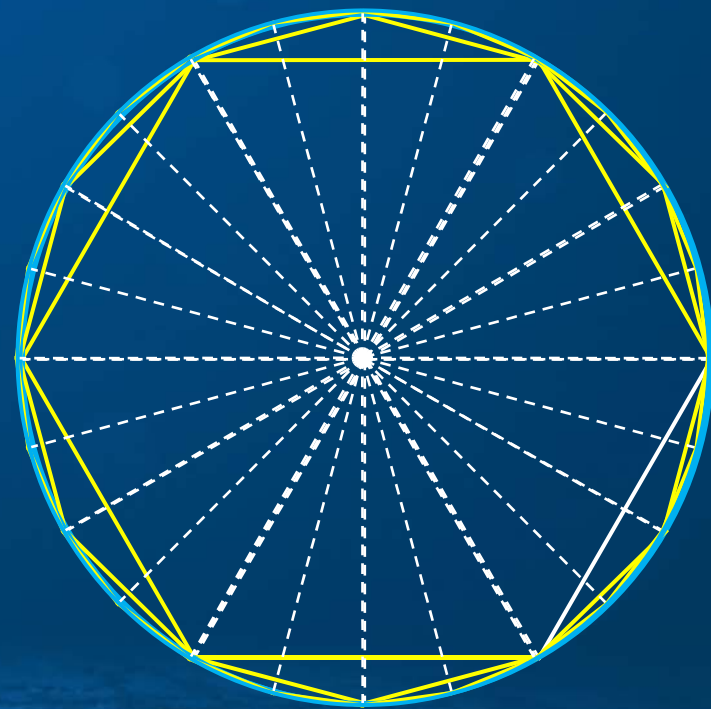
● 刘徽 “割圆术”



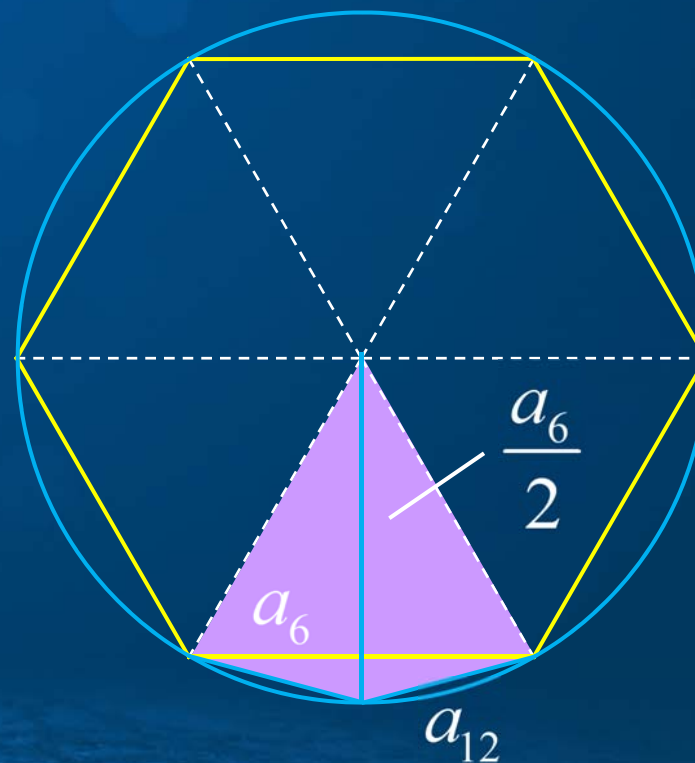
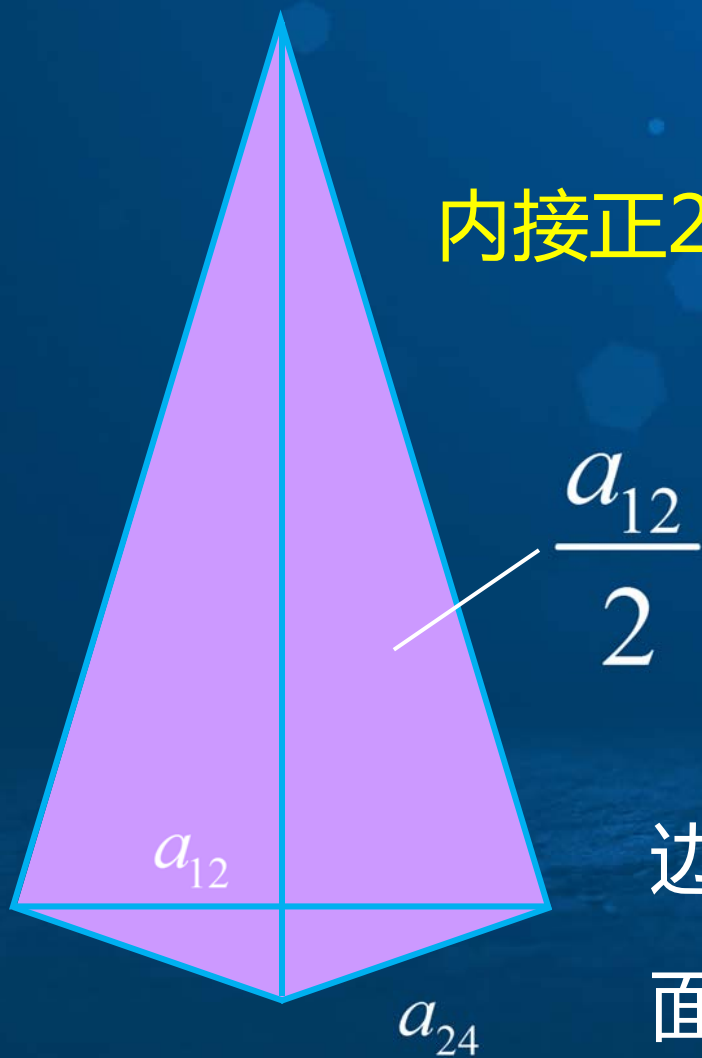
刘徽，魏晋
(约公元225—295)

“割之弥细，
所失弥少，割
之又割，以至
于不可割，则
与圆合体，而
无所失矣。”

边数 : $6, 12, 24, \dots, 2^n \cdot 6, \dots$



内接正24边形部分



边数 : $6, 12, 24, \dots, 2^n \cdot 6, \dots$

面积 : $6 \cdot \frac{a_6}{2}, 12 \cdot \frac{a_{12}}{2}, \dots \rightarrow \pi$



数列极限的直观描述

数列极限的算术定义

数列极限的几何解释

割圆术与圆周率



1. 数列的定义

定义 按一定规律排列的无穷多个（相同或不相同的）数称为**数列**.
记为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

也可简记 $\{a_n\}$ ，其中 a_n 为数列的第 n 项，称为**通项**或**一般项**.

例 a_2 —— 数列的第2项

a_{101} —— 数列的第101项



自然数 $1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \quad \cdots$

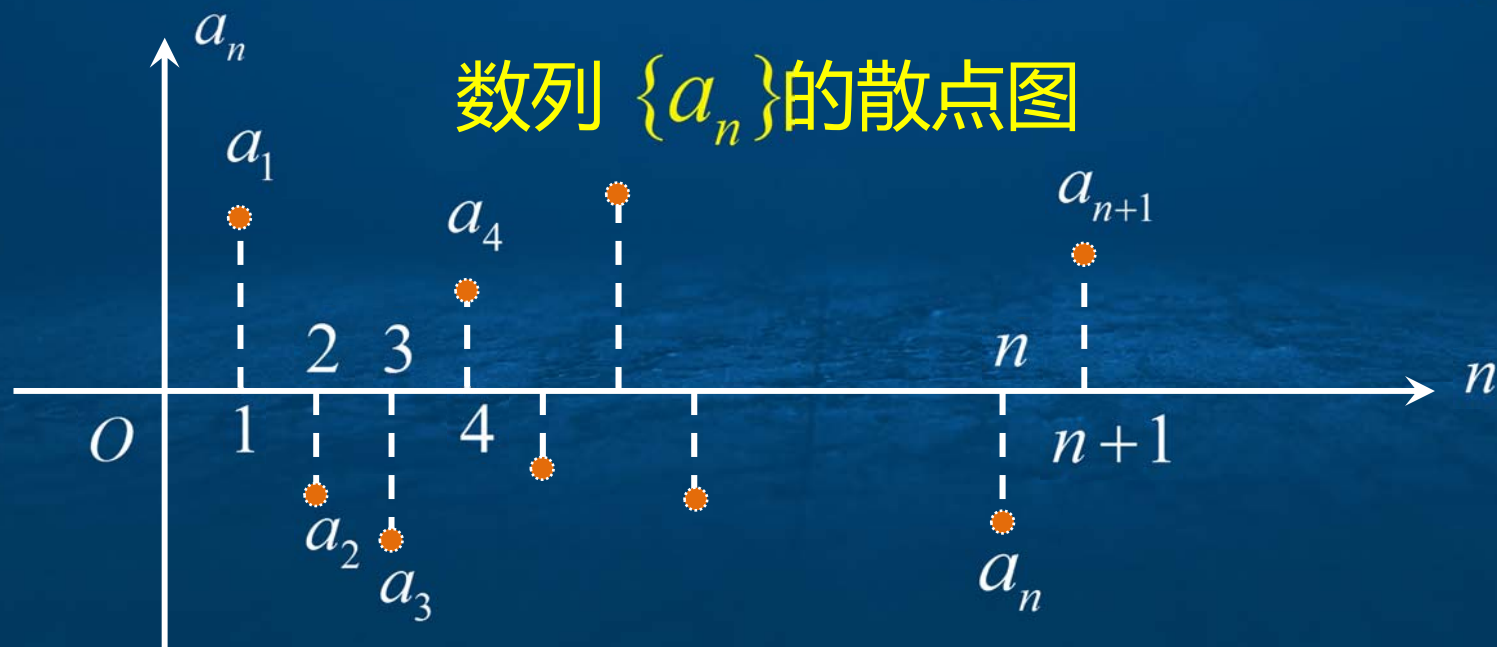
↓ ↓ ↓ ↓

数列 $a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad \cdots$

整标函数

$$a_n = f(n), n = 1, 2, \cdots$$

- 在几何上数列的项 a_n 可以用平面上的点列 $(n, a_n) (n = 1, 2, \cdots)$



2. 数列的表示方法

● 列表法

$$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\} : \frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \dots, \frac{\ln n}{n}, \dots$$

n	10	30	50	70	90
lnn n	0.2303	0.1134	0.07824	0.06069	0.05000
n	120	140	160	180	200
lnn n	0.03990	0.03530	0.03172	0.02885	0.02649

$$\{\sin n\} : \sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \dots, \sin n, \dots$$

n	1	2	3	4	5
Sin [n]	0.8415	0.9093	0.1411	-0.7568	-0.9589
n	6	7	8	9	10
Sin [n]	-0.2794	0.6570	0.9894	0.4121	-0.5440



● 几何法

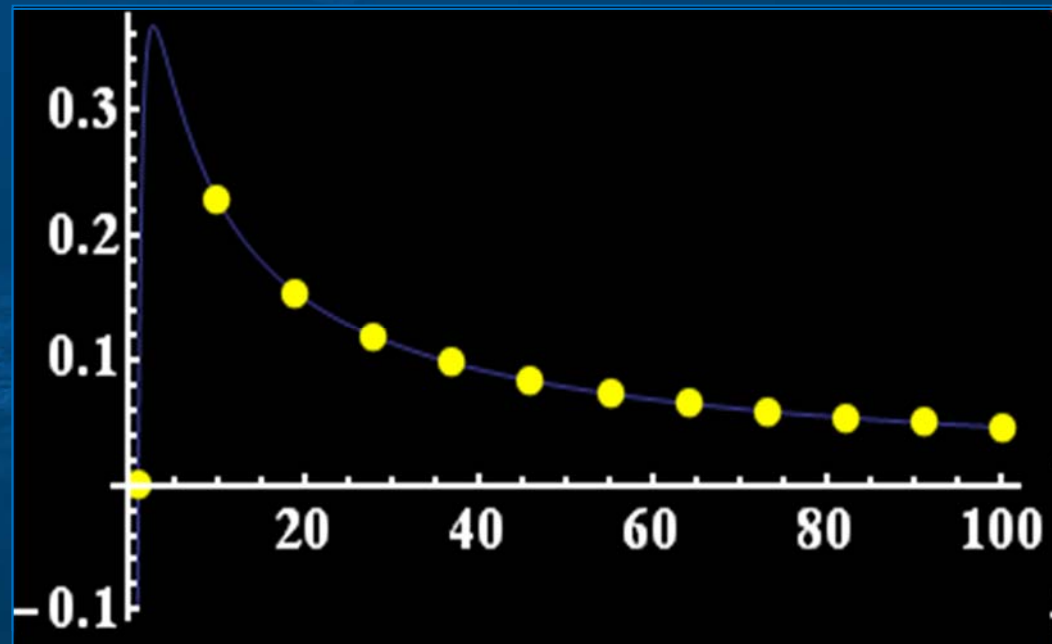
方法一 将数列 $\{a_n\}$ 的项所对应数值表示在数轴上



方法二 散点图

$$a_n = \frac{\ln n}{\sin n}$$

$(n = 1, 2, \dots, 100)$



3. 数列的例子

$$(a) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \quad \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$$

$$(b) \left\{ \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n} \right\} \quad \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \dots, \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}, \dots \right\}$$

$$(c) \left\{ n^{(-1)^n} \right\} \quad \left\{ 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots, n^{(-1)^n}, \dots \right\}$$

$$(d) \left\{ \cos \frac{n\pi}{6} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{n\pi}{6}, \cos \frac{n\pi}{6}, \dots \right\}$$

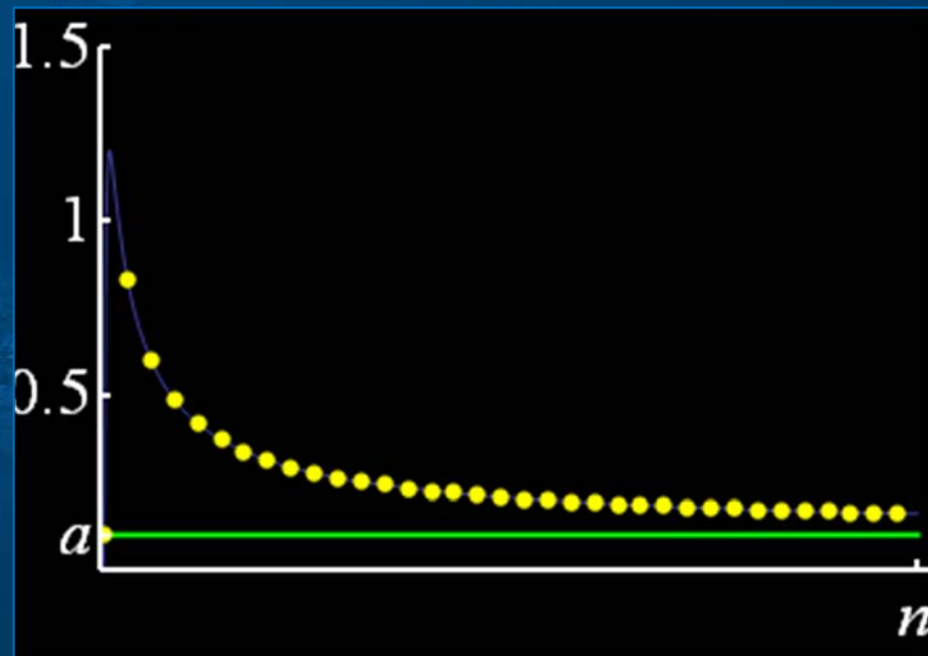


4. 数列极限的描述性的定义

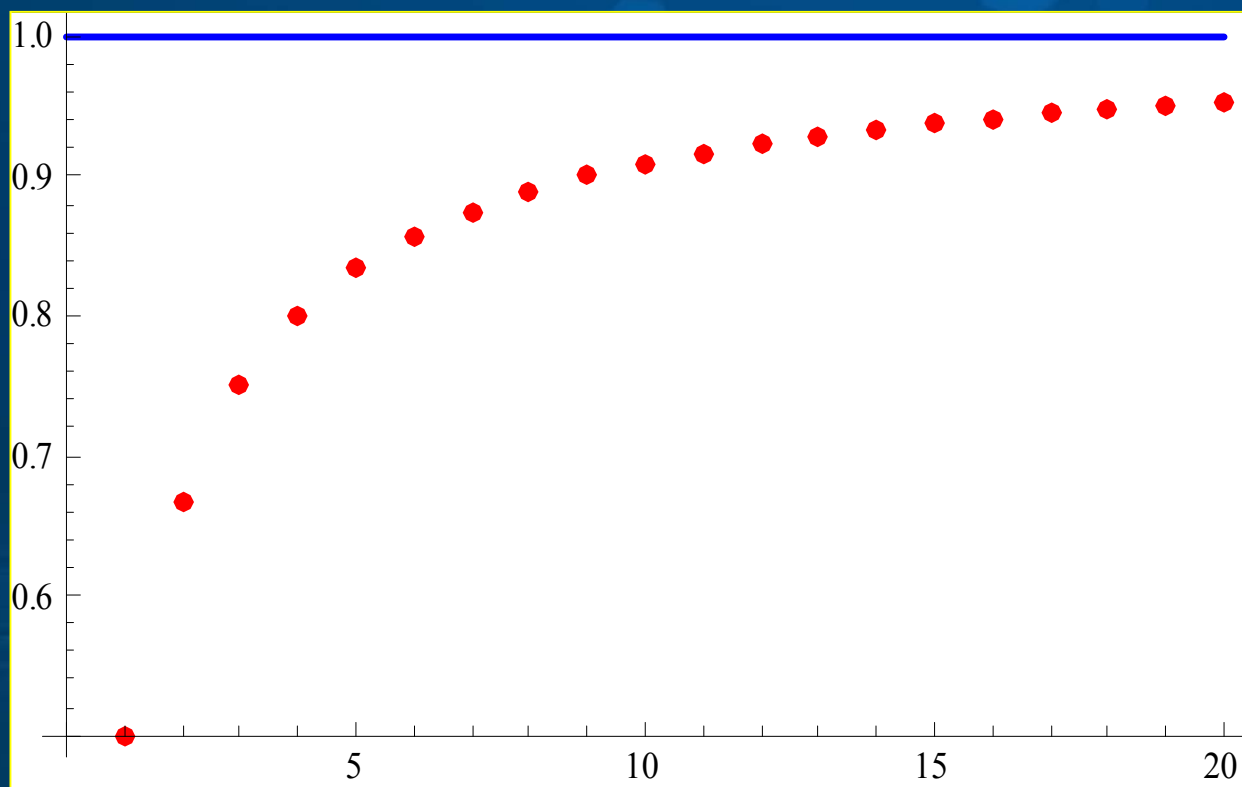
“对于数列 $\{a_n\}$ ，如果存在一个常数 a ，当 n 无限增大时（记为 $n \rightarrow \infty$ ）， a_n 与常数 a 无限接近，则称常数 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 。”

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 几何意义：

点列 $\{(n, a_n) | n = 1, 2, \dots\}$
随 n 无限增大而无限
接近水平直线 $y = a$ 。



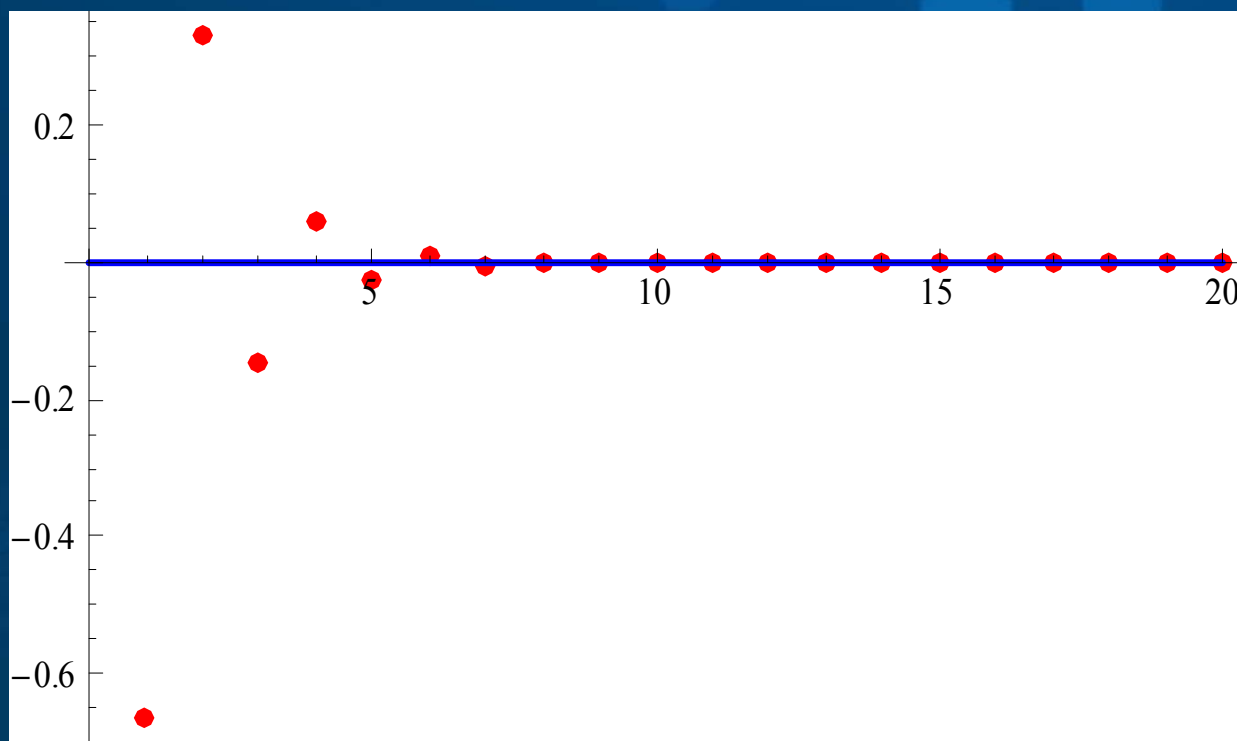
$$(a) \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} \quad \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$



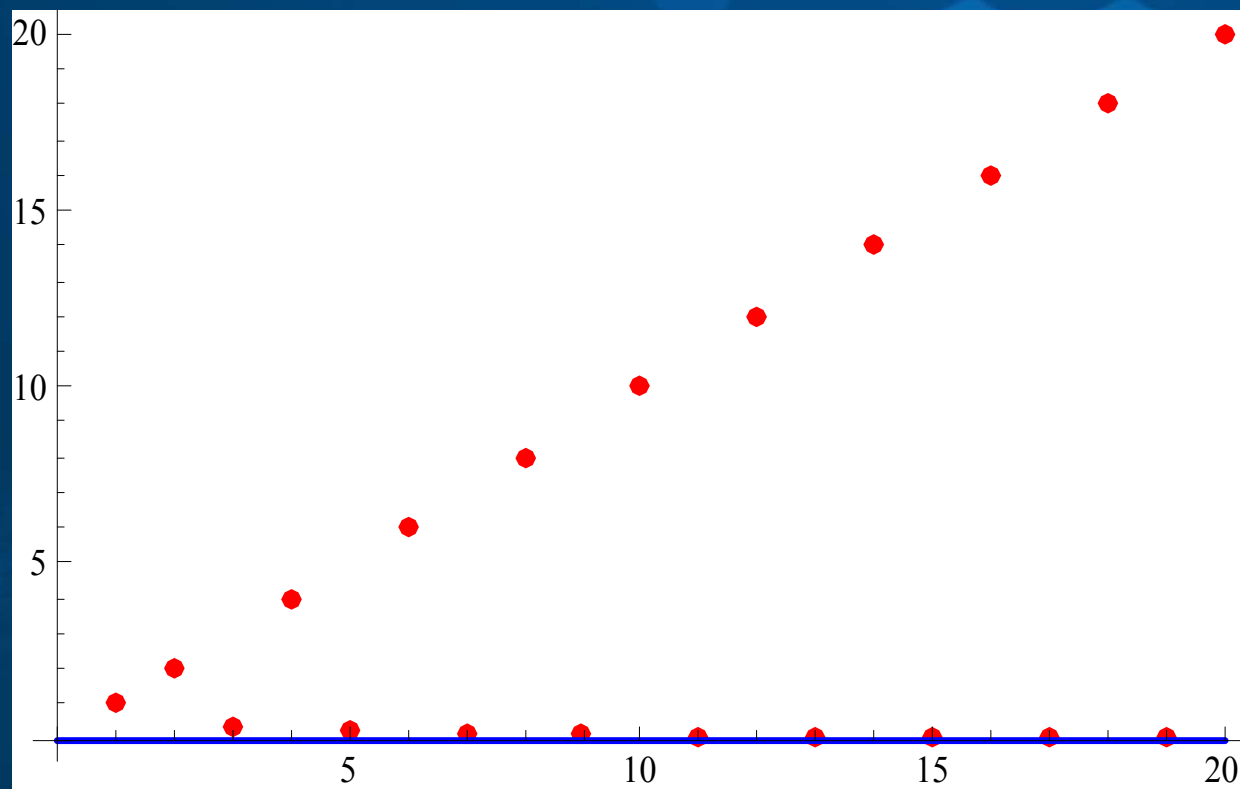
$$(b) \left\{ \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n} \right\} \left\{ -\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, \dots, \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n}, \dots \right\}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n} = 0$$



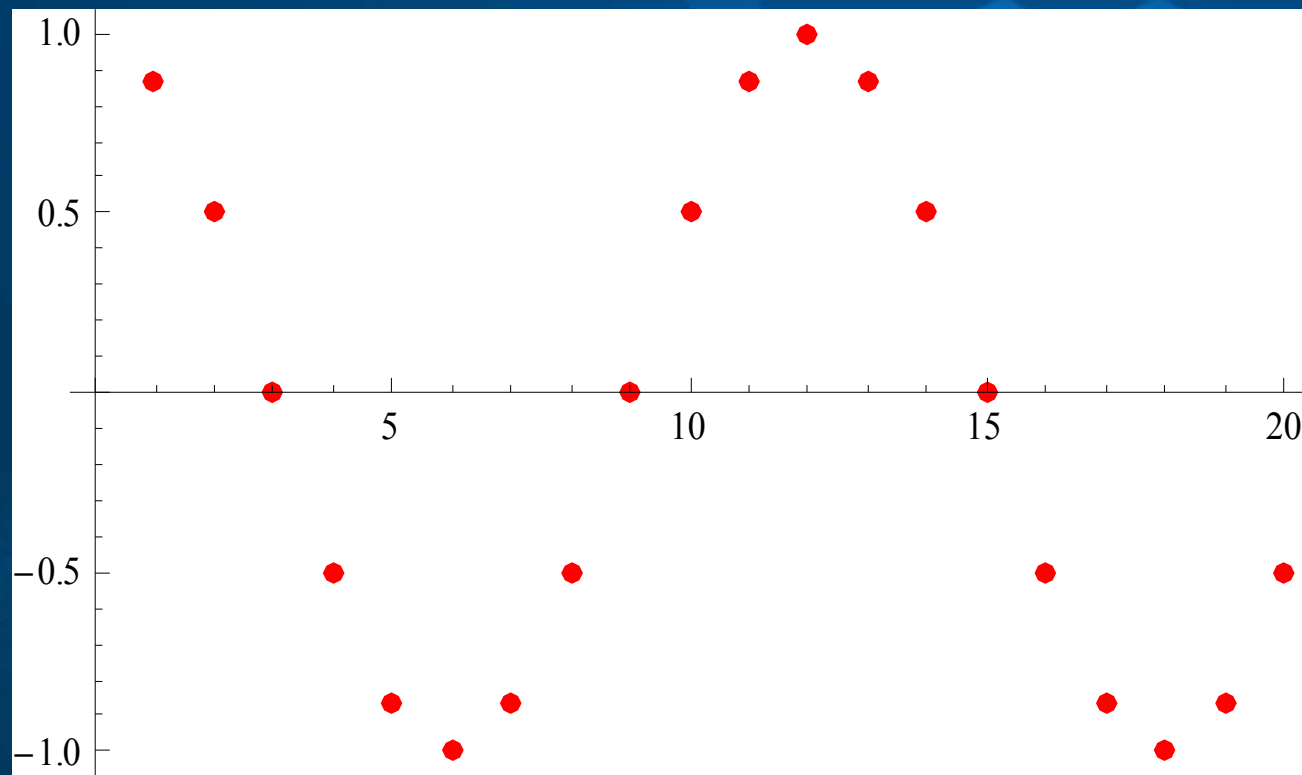
$$(c) \left\{ n^{(-1)^n} \right\} \quad \left\{ 1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, n^{(-1)^n}, \dots \right\}$$



数列不存在极限！



$$(d) \left\{ \cos \frac{n\pi}{6} \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \cos \frac{n\pi}{6}, \dots \right\}$$



数列不存在极限！



定义 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε 均存在正整数 N , 当 $n > N$ 时 , 恒有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立 , 则称数列 $\{a_n\}$ **存在极限** (或**收敛**) , 常数 a 称为数列的**极限** , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

若上述常数不存在 , 则称数列**不存在极限** (或**发散**) .

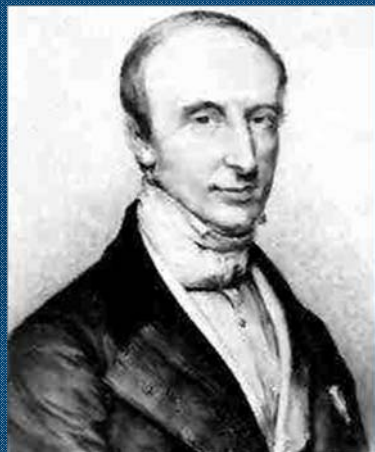
- 称上述定义数列极限的语言为 “ ε - N ” 语言 .

数列极限的定义称为 “ ε - N ” 定义.



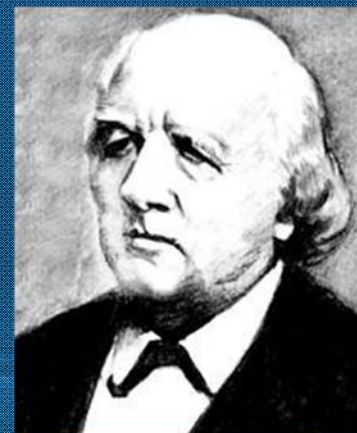
柯西关于极限的定义

“当一个变量逐次取的值无限趋近一个定值时，如果最终变量的值与该定值的差要多小就有多小，那么，这一定值就称为所有其它值的极限。”



柯西 [法]
(1789-1857)

极限定义的算术化



魏尔斯特拉斯[德]
(1815 ~ 1897)



例1 用数列极限定义验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

\forall — 对任意 (For Any) \exists — 存在 (Exist)

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的 “ ε - N ” 定义 (简洁形式) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 恒有 } |a_n - a| < \varepsilon.$$

【证】 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \quad \text{所以 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$



例2 设 α 为正常数, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

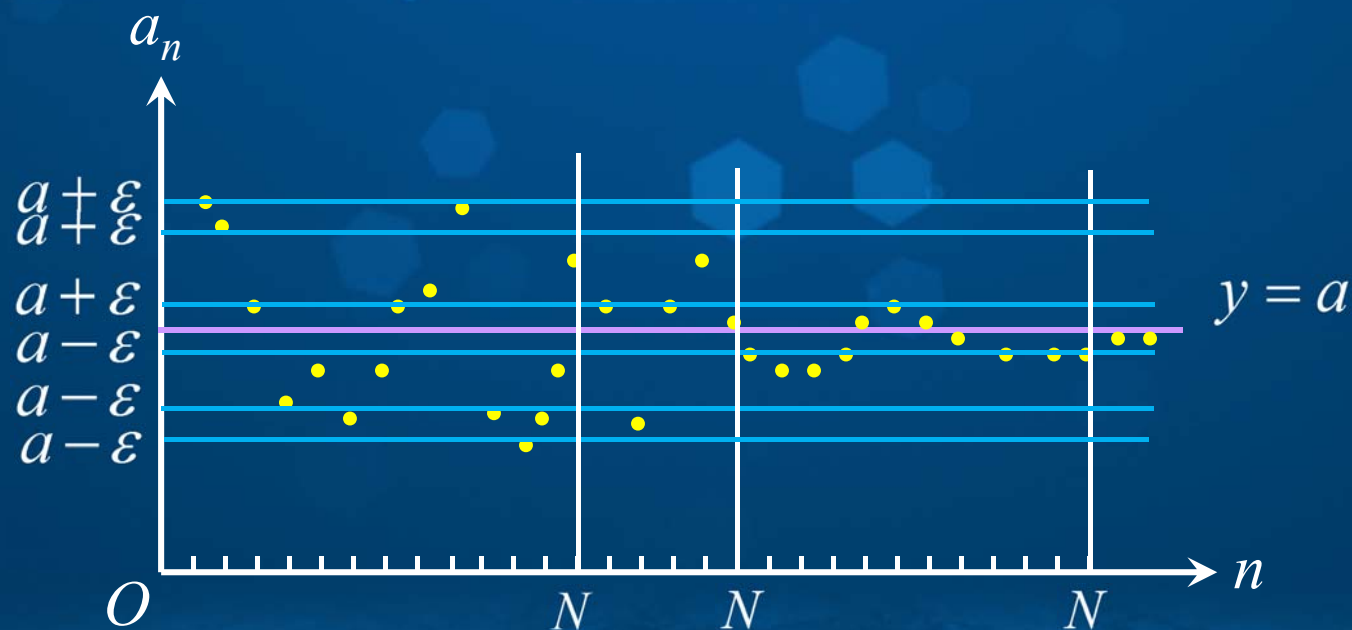
0.999999999999999999999999... $\begin{matrix} = 1 \\ < 1 \end{matrix}$ 

例3 设 $a_n = \overbrace{0.9 \cdots 9}^{n \uparrow}$ ($n = 1, 2, \cdots$) , 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

例4 设 $a_n = (-1)^n (n=1, 2, \cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 发散.



● 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的几何解释：



对于任意给定的两平行线 $y = a + \varepsilon$ 与 $y = a - \varepsilon$ ，一定可以找到正整数 N ，对于 $n > N$ 的所有点 (n, a_n) 均落在这两条平行线之间.



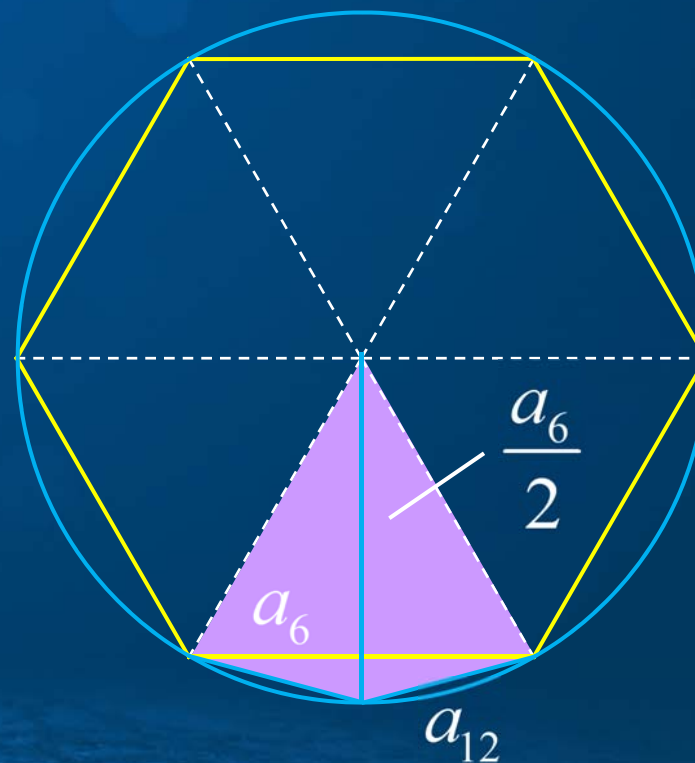
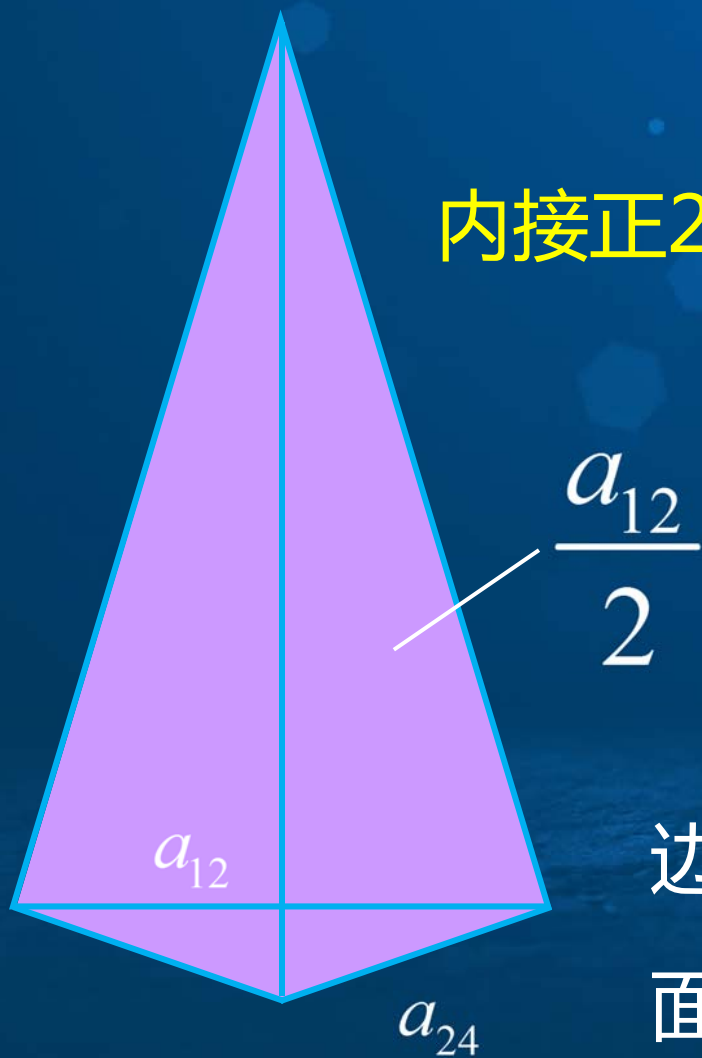


祖冲之,南北朝
(429-500)

在南北朝（429-500）时期，祖冲之利用极限的思想计算圆周率，取得了很大的成功。他利用圆内接多边形的面积逼近圆的面积，即所谓“**割圆术**”，该方法被写入他与儿子祖恒合著的《**缀术**》中。不幸的是，该书在北宋中期失传。



内接正24边形部分



边数 : $6, 12, 24, \dots, 2^n \cdot 6, \dots$

面积 : $6 \cdot \frac{a_6}{2}, 12 \cdot \frac{a_{12}}{2}, \dots \rightarrow \pi$



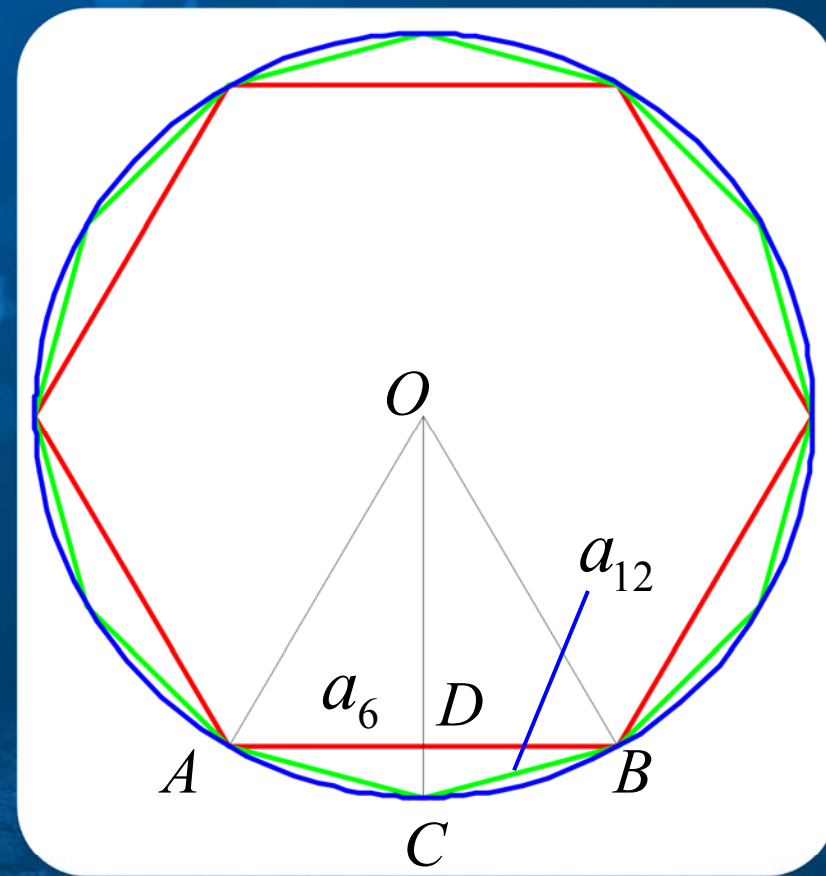
在 $\text{Rt } \triangle BCD$ 中

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (1 - OD)^2}$$

$$OD = \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} \quad (\text{Rt } \triangle BDO)$$

$$BC_{12} = \sqrt{\left(\frac{a_6 AB}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_6 AB}{2}\right)^2}\right)^2}$$

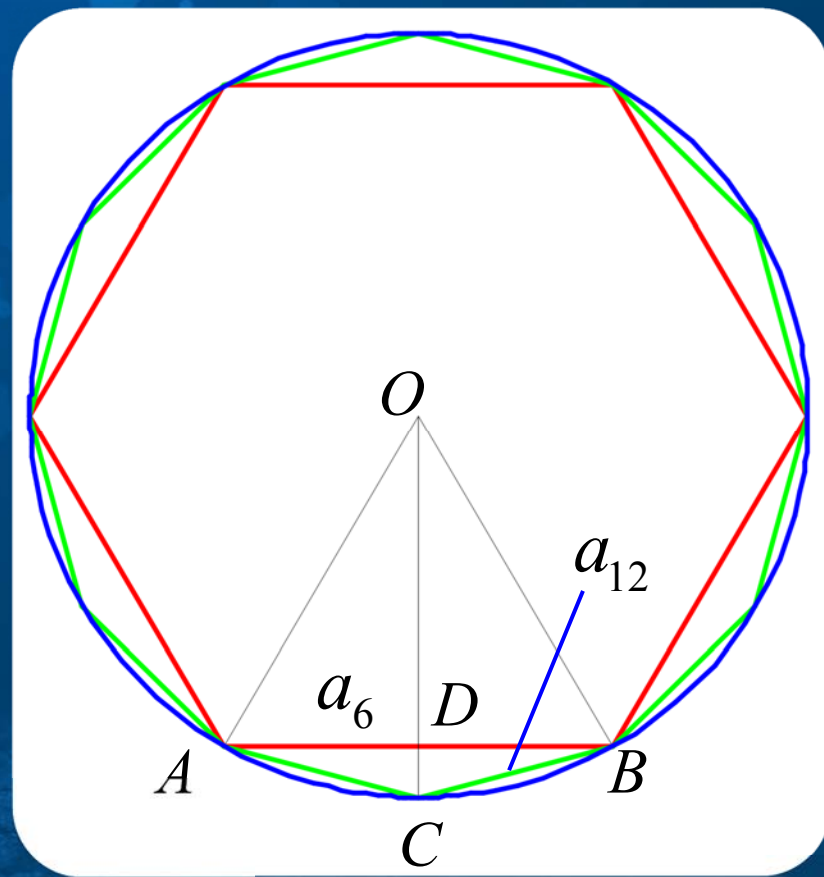


$$a_{12} = \sqrt{\left(\frac{a_6}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_6}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$a_{24} = \sqrt{\left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{12}}{2}\right)^2}\right)^2}$$



$$a_{6 \cdot 2^{n+1}} = \sqrt{\left(\frac{a_{6 \cdot 2^n}}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a_{6 \cdot 2^n}}{2}\right)^2}\right)^2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$



正 $6 \cdot 2^{n+1}$ 边形的面积为

$$S_{6 \cdot 2^{n+1}} = 6 \cdot 2^n \cdot \frac{a_{6 \cdot 2^n}}{2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

与单位圆面积的比较

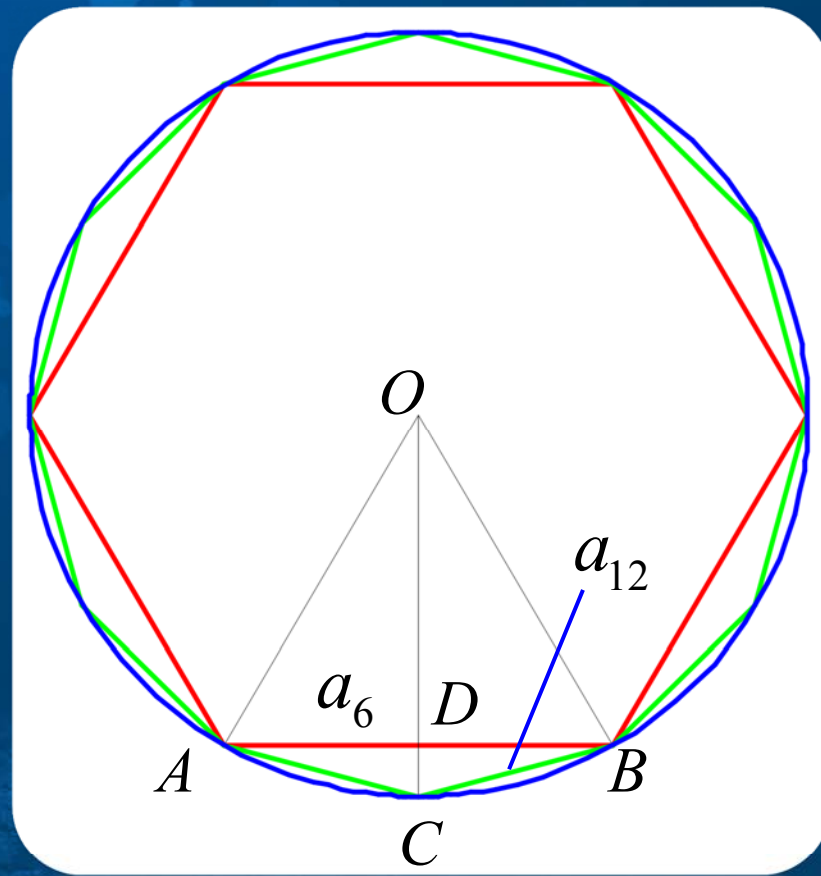
$$S_{12} < \pi < S_{12} + (S_{12} - S_6)$$

$$S_{24} < \pi < S_{24} + (S_{24} - S_{12})$$

$$S_{6 \cdot 2^{n+1}} < \pi < S_{6 \cdot 2^{n+1}} + (S_{6 \cdot 2^{n+1}} - S_{6 \cdot 2^n})$$

下界

上界



n	边数	下界	上界
1	24	3.105828541	3.211657082
2	48	3.132628613	3.159428685
3	96	3.139350203	3.146071793
4	192	3.141031951	3.142713699
5	384	3.141452472	3.141872994
6	768	3.141557608	3.141662744
7	1536	3.141583892	3.141610176
8	3072	3.141590463	3.141597034
9	6144	3.141592106	3.141593749
10	12288	3.141592517	3.141592927
11	24576	3.141592619	3.141592722



正 $6 \cdot 2^{n+1}$ 边形的面积为

$$S_{6 \cdot 2^{n+1}} = 6 \cdot 2^n \cdot \frac{a_{6 \cdot 2^n}}{2} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

与单位圆面积的比较

$$S_{12} < \pi < S_{12} + (S_{12} - S_6)$$

$$S_{24} < \pi < S_{24} + (S_{24} - S_{12})$$

$$S_{6 \cdot 2^{n+1}} < \pi < S_{6 \cdot 2^{n+1}} + (S_{6 \cdot 2^{n+1}} - S_{6 \cdot 2^n})$$

当 $n=11$ 时得到

$$3.14159261 < \pi < 3.14159272$$

