国防科学技术大学
National University of Defense Technology

高等数学（一）综合练习

练习二： 数列与数值级数

理学院 朱健民教授

主要内容

1. 数列极限的算术定义；
2. 数列极限的性质（唯一性、有界性、保号性）；
3. 数列极限存在性定理（夹逼定理、单调有界定理）；
4. 数值级数收敛概念；
5. 收敛级数的运算性质；
6. 正项级数收敛性判别方法；
7. 变号级数收敛性判别方法．

例题讲解

1. 用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+n-4}{2n^3-3}=\frac{5}{2}$.

2. 用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

3. 设$\{a_n\}$ 为不减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，试证明$a_n\le l$.

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n-2\sqrt{n}}\right)$.

5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]\ \ (0<k<1)$.

6. 已知数列$\{x_n\}$满足$x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，证明极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求之 .

7. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=4$，$x_n=\sqrt{x_{n-1}+6}$ $(n=2,3,\cdots)$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求之.

8.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1})$.

9.求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{1\cdot 3})(1+\frac{1}{2\cdot 4})\cdots(1+\frac{1}{n(n+2)})]$.

10. 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{k})$； (2) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!}{3^k k!}$； (3) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^k}(a>0)$ ； (4) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\pi)}{\sqrt{k^3+k}}$.

11. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$为绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为条件收敛，证明：

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$为条件收敛.

12. 设$a_n>0$ 且$\{a_n\}$ 为单调减少的，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试证明

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{1+a_n})^n$ 收敛..

13. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}\right)$.

15. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\cdots+\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.