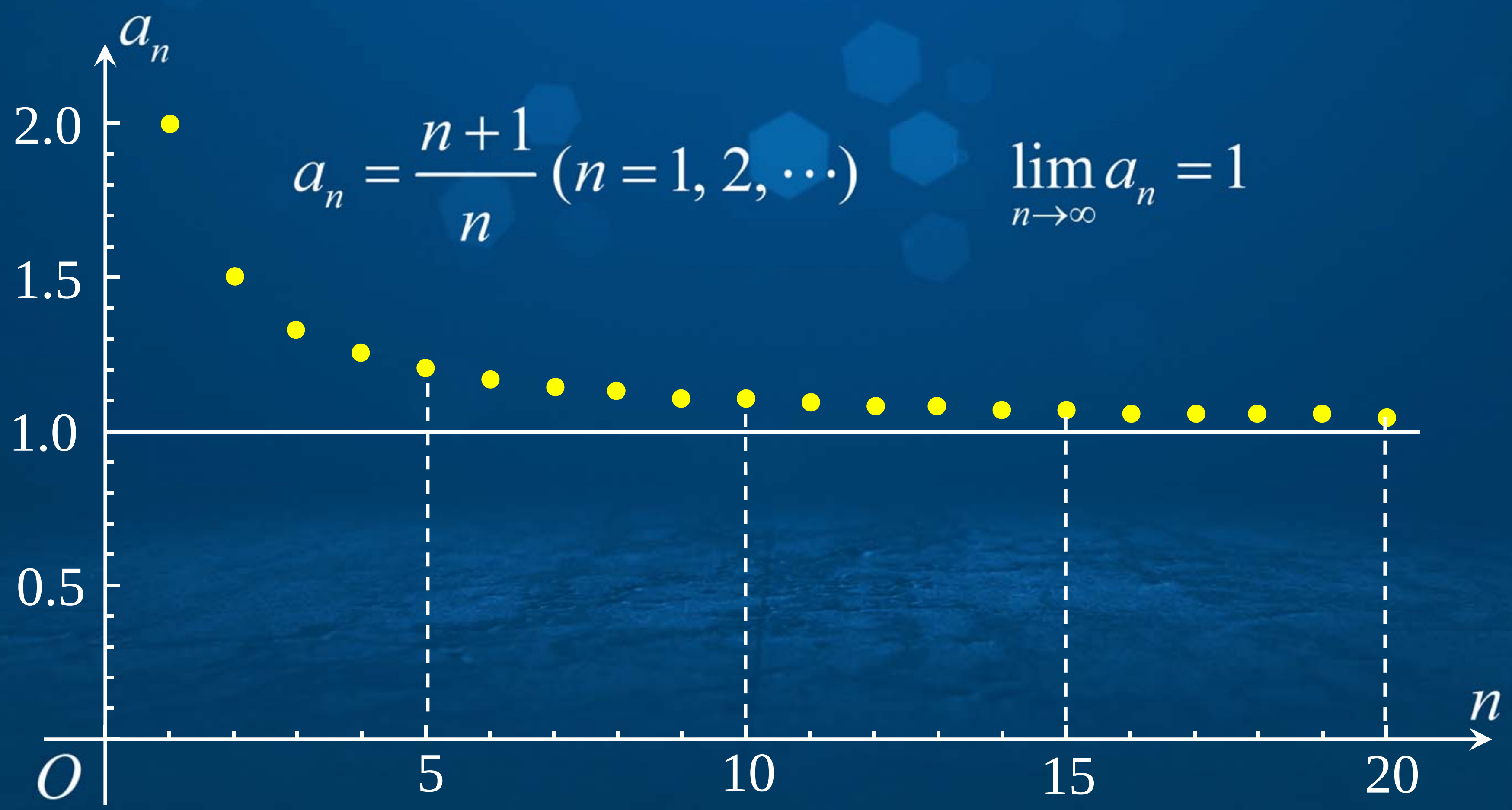
《高等数学》全程教学视频课

第14讲 函数极限的概念

数列的极限

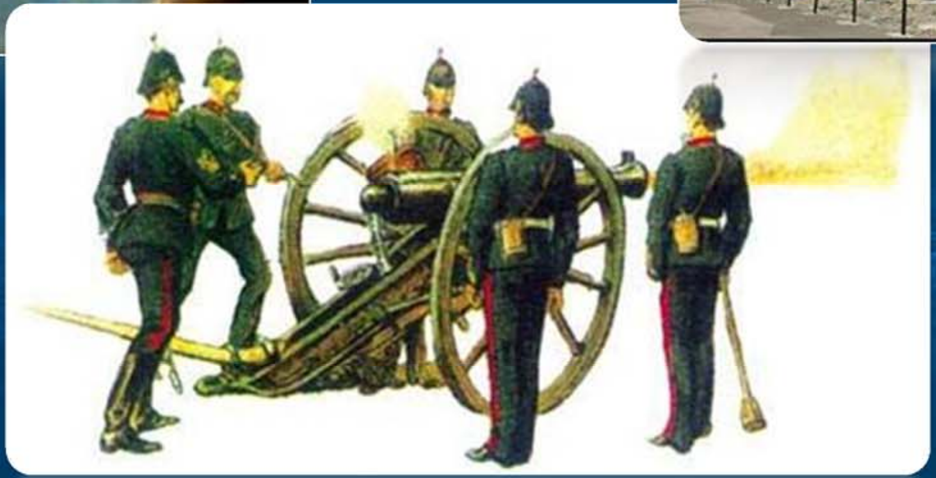


$$a_n = \frac{n+1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

天体运动

航海



炮弹发射

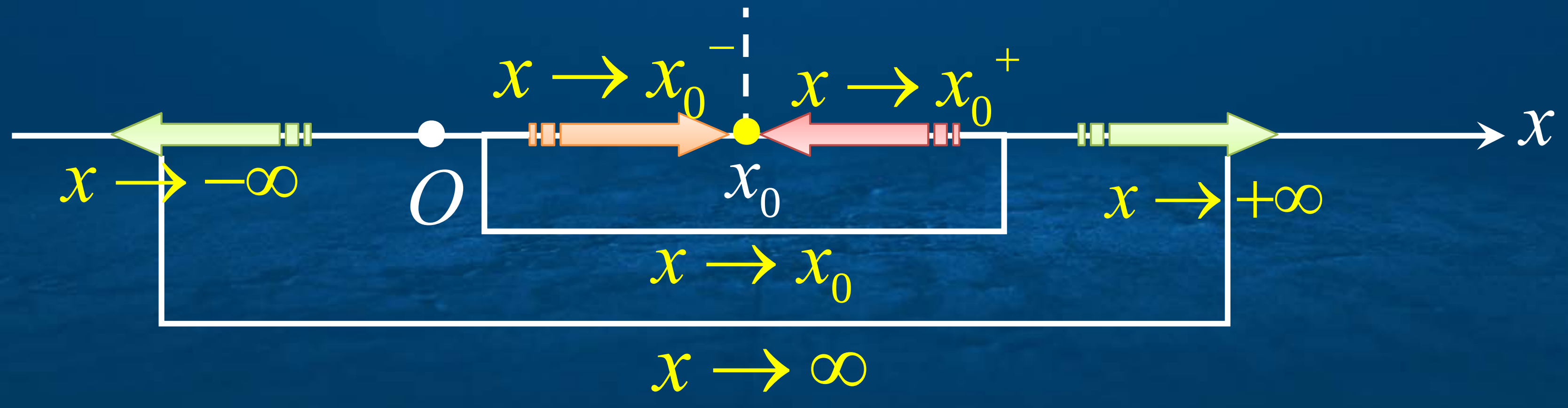
- 连续变量的变化过程
- 函数极限例子
- 函数极限的定义

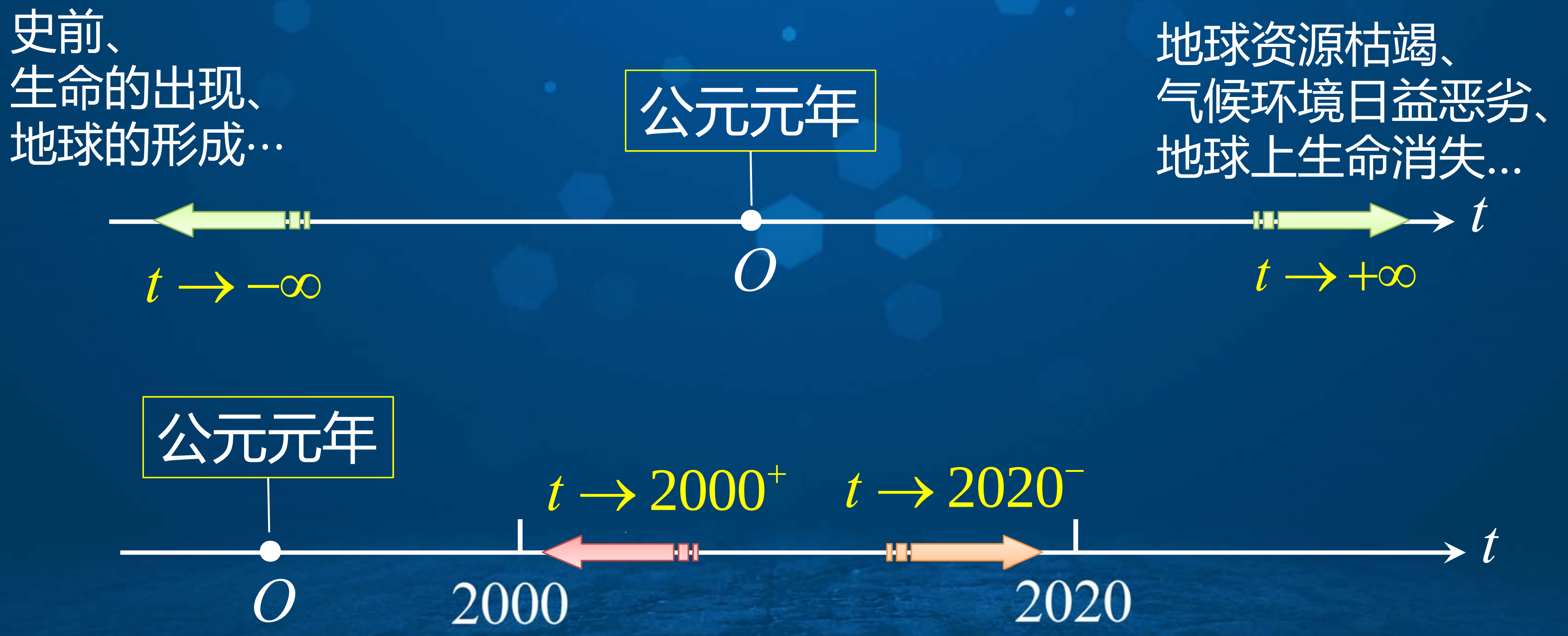
第14讲函数极限的概念——主要内容

函数 $y = f(x)$ 自变量 x 变化过程有六种形式：

(1) $x \to -\infty$　　(2) $x \to +\infty$　　(3) $x \to \infty$

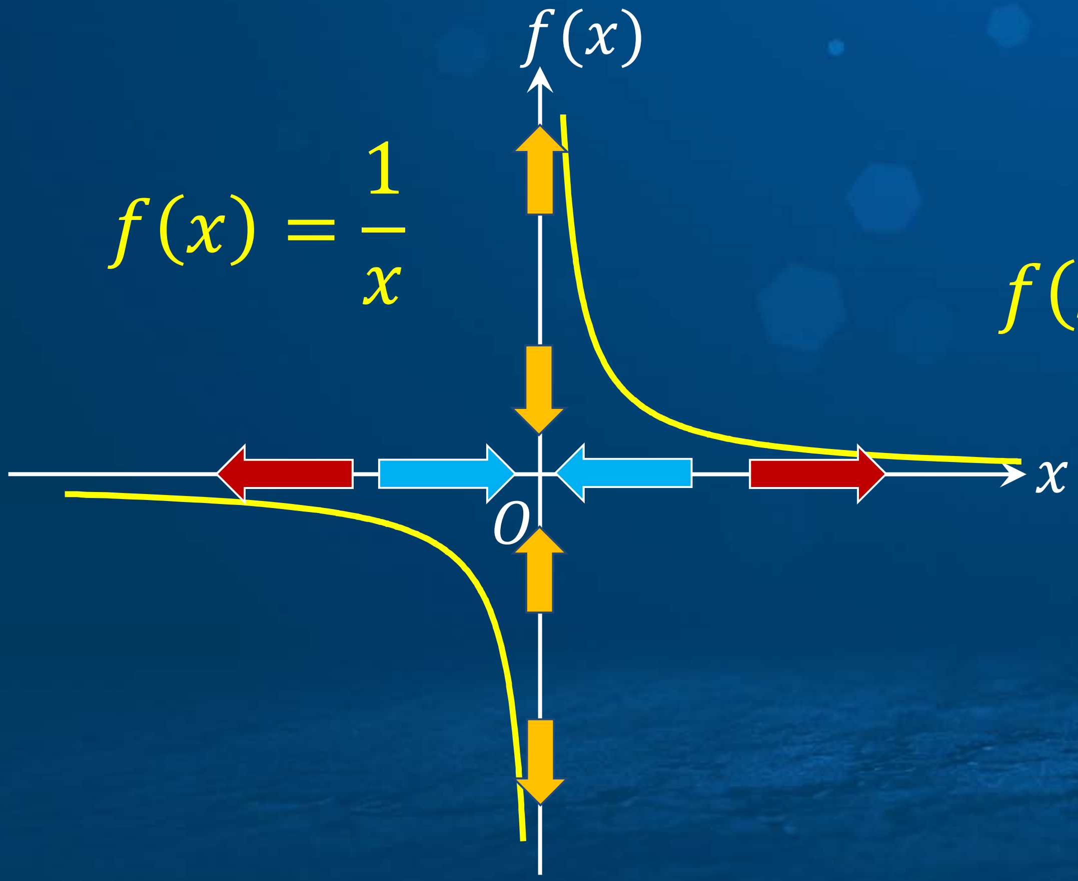
(4) $x \to x_0^-$　　(5) $x \to x_0^+$　　(6) $x \to x_0$



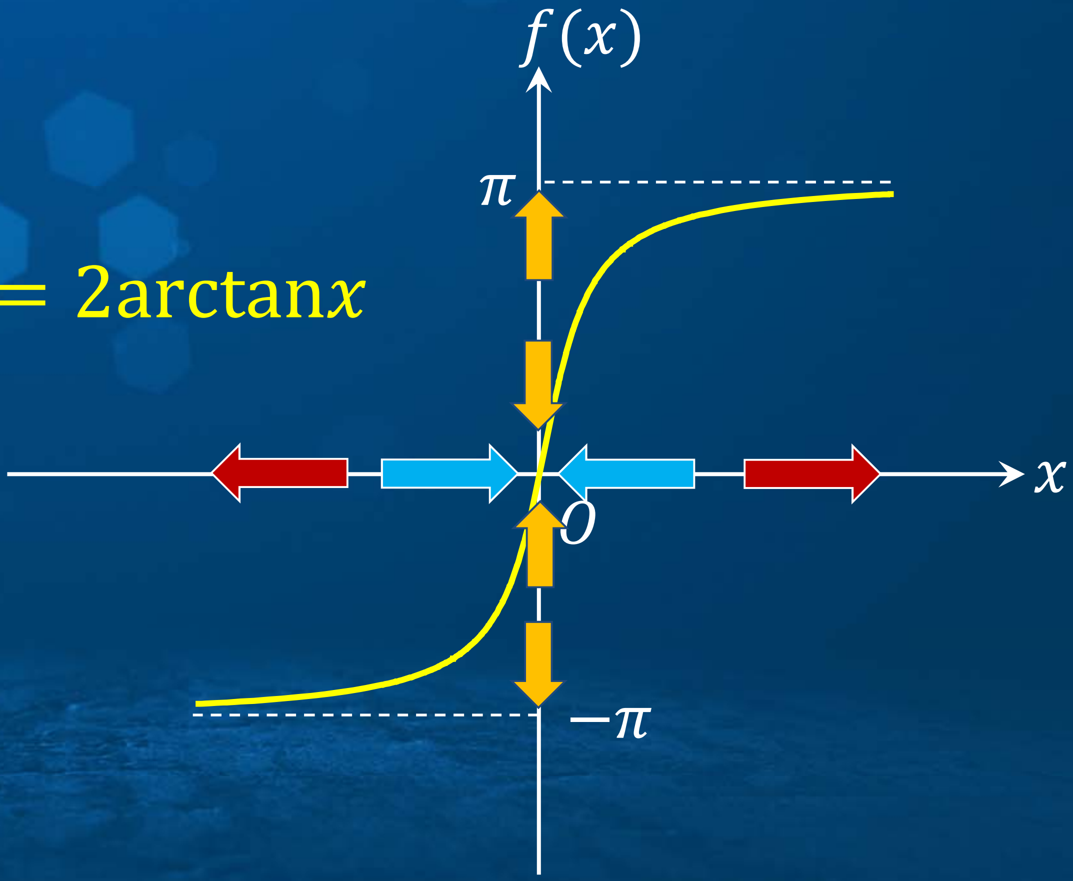

史前、
生命的出现、
地球的形成…
公元元年
地球资源枯竭、
气候环境日益恶劣、
地球上生命消失…
t
$t \to -\infty$
O
$t \to +\infty$
公元元年
$t \to 2000^{+}$
$t \to 2020^{-}$
t
O
2000
2020

时间坐标轴

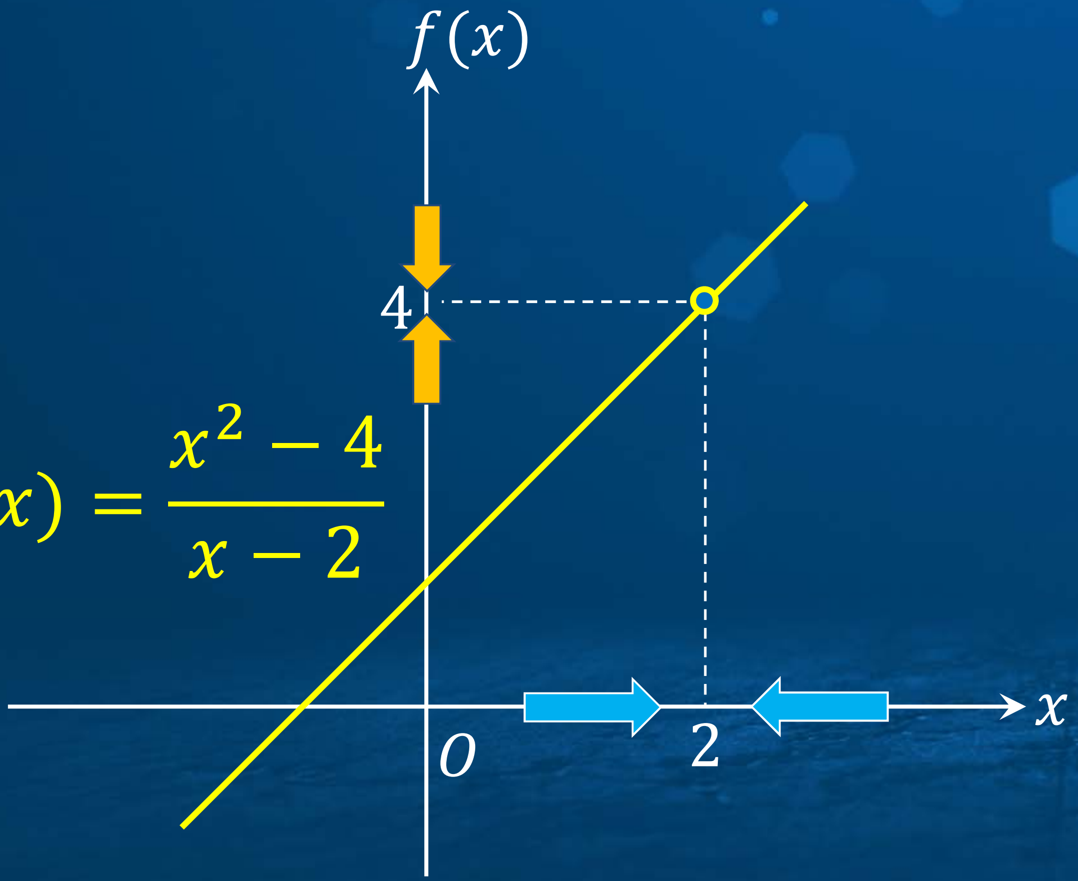
$$f(x)=\frac{1}{x}$$

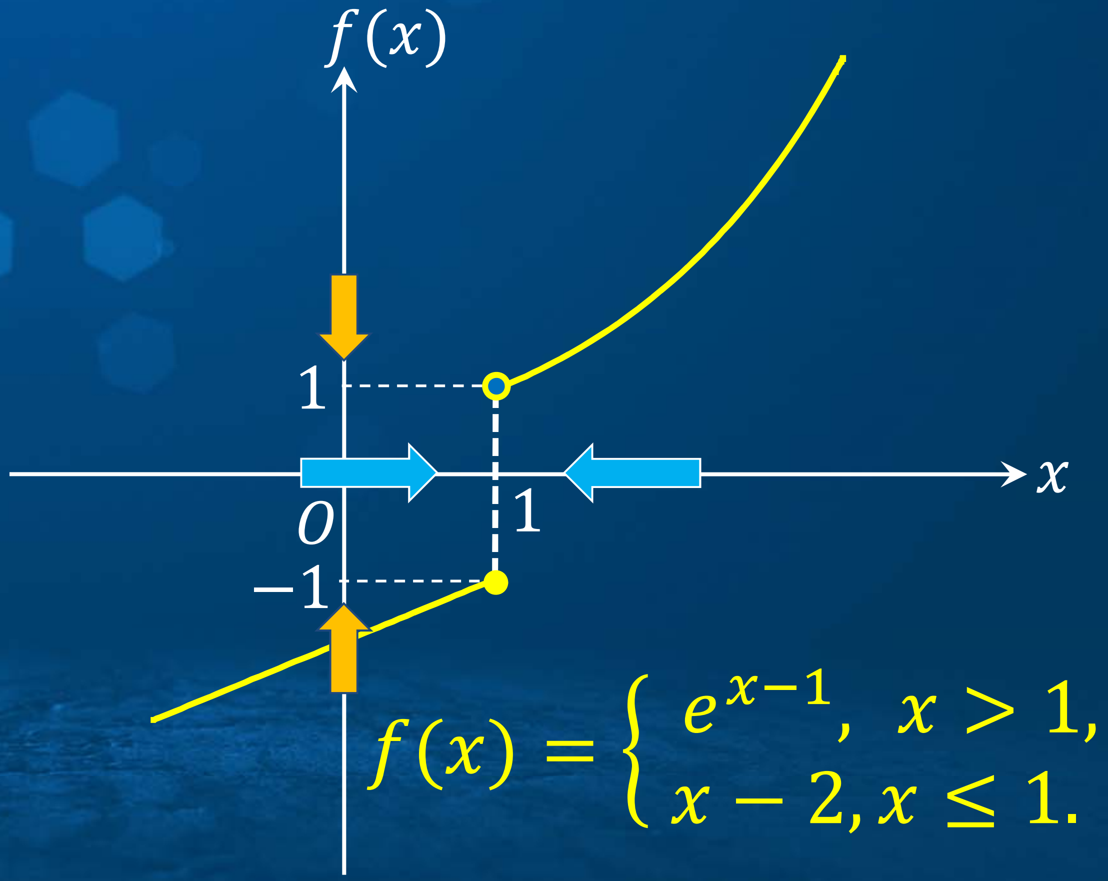


$$f(x)=2\arctan x$$



$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$





$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x>1, \\ x-2, & x\le 1. \end{cases}$$

函数关于过程$x \to +\infty$的极限定义

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$的定义：对于任何给定的正数$\varepsilon$，存在正整数$N$，当$n > N$时，恒有$|a_n - a| < \varepsilon$.

定义1　设函数$f(x)$在 x 大于某一正数时有定义，若存在常数A，使得对任意给定的正数 ε，存在正数X，当 $x > X$ 时，恒有

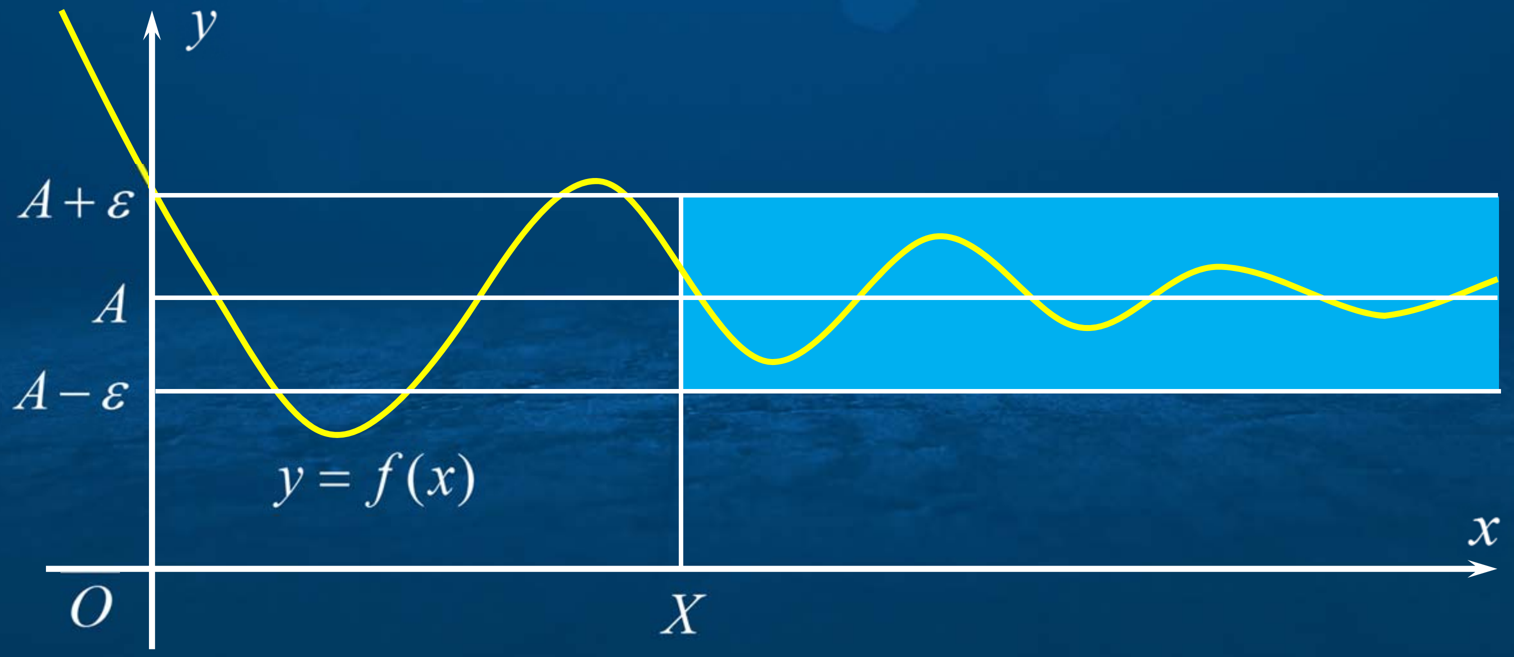
$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当 自变量x趋于无穷大（即 $x \to +\infty$）时存在极限A, 记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$或$f(x) \to A$(当$x \to +\infty$)．

极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 定义简洁形式：

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$, 当$x>X$时, 恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

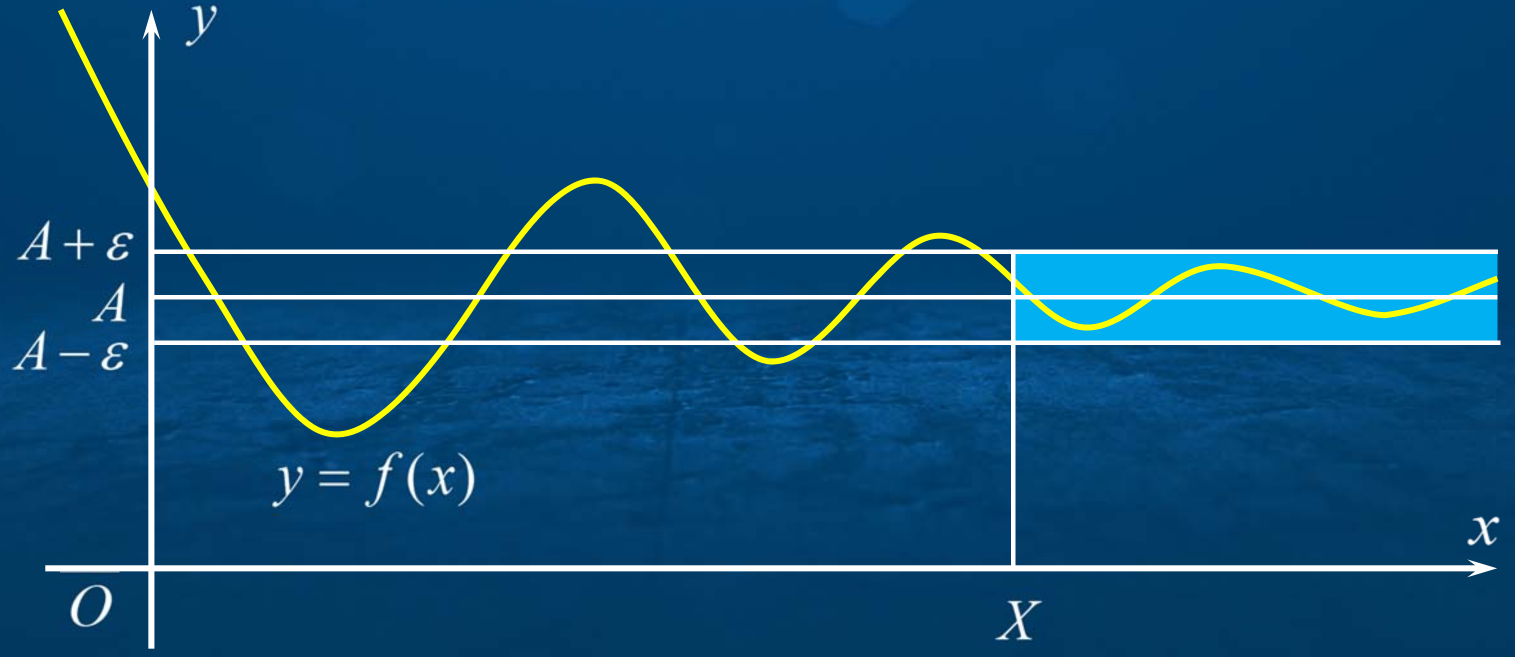
极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 定义的几何解释



极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 定义简洁形式：

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists X > 0,$ 当$x > X$ 时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

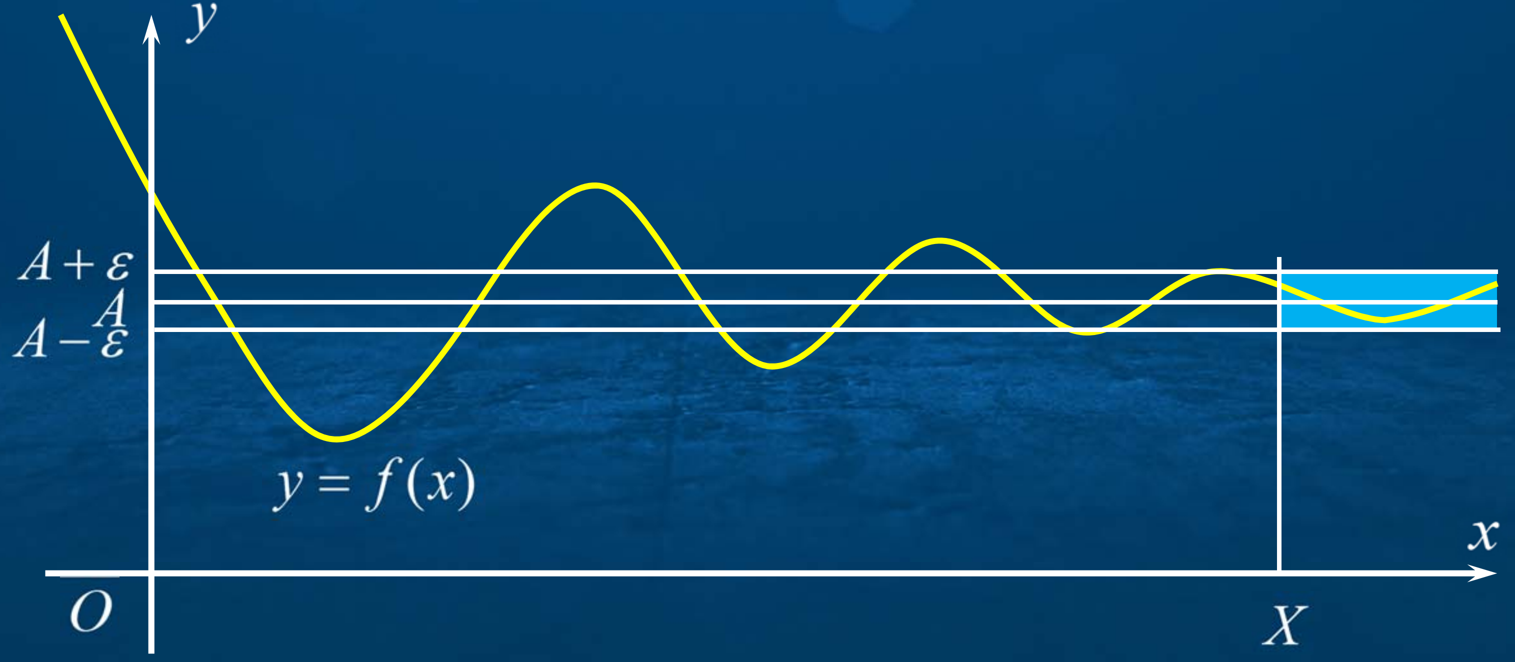
极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 定义的几何解释



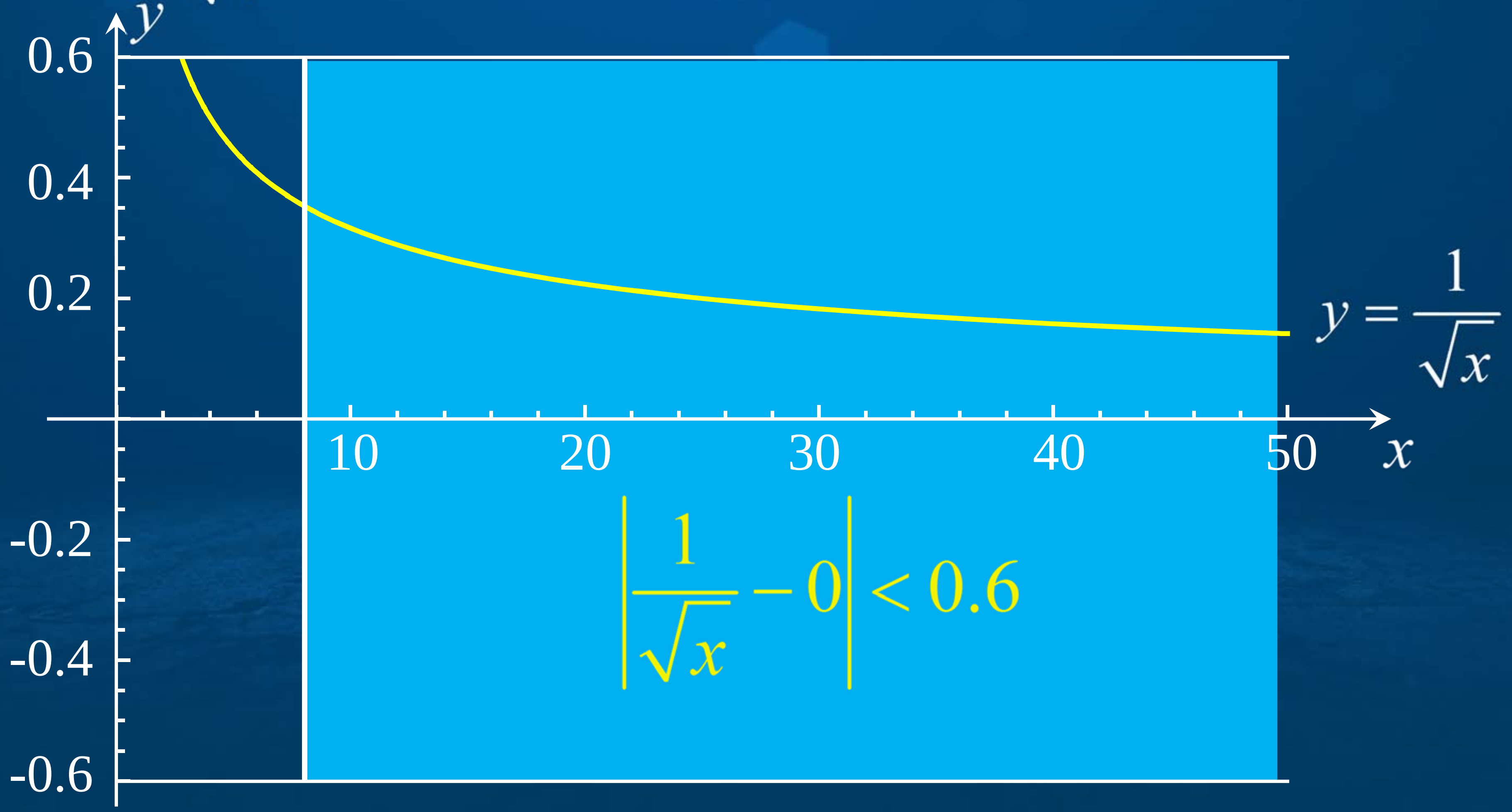
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 定义简洁形式：

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,$ 当$x>X$ 时, 恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

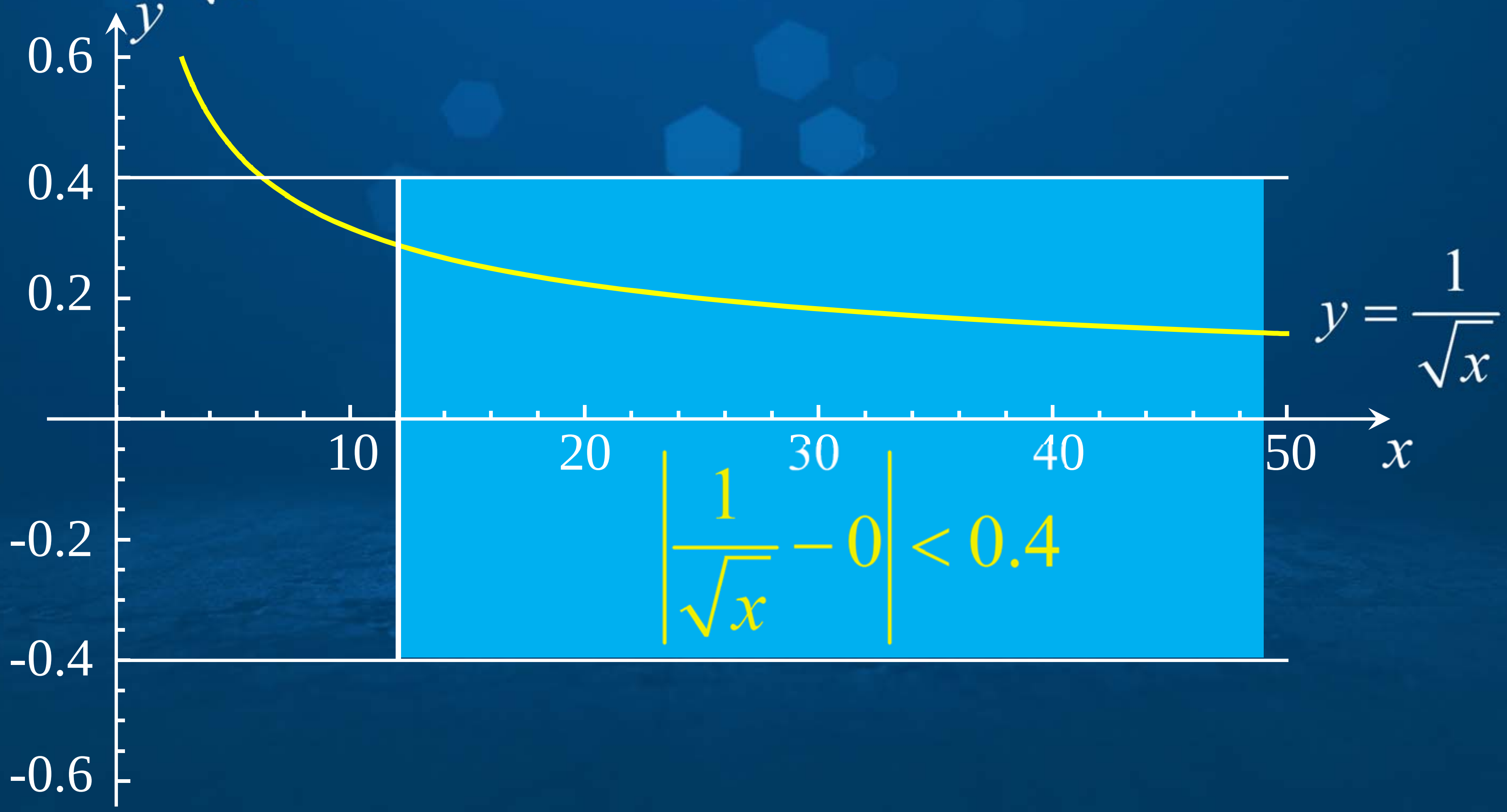
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 定义的几何解释



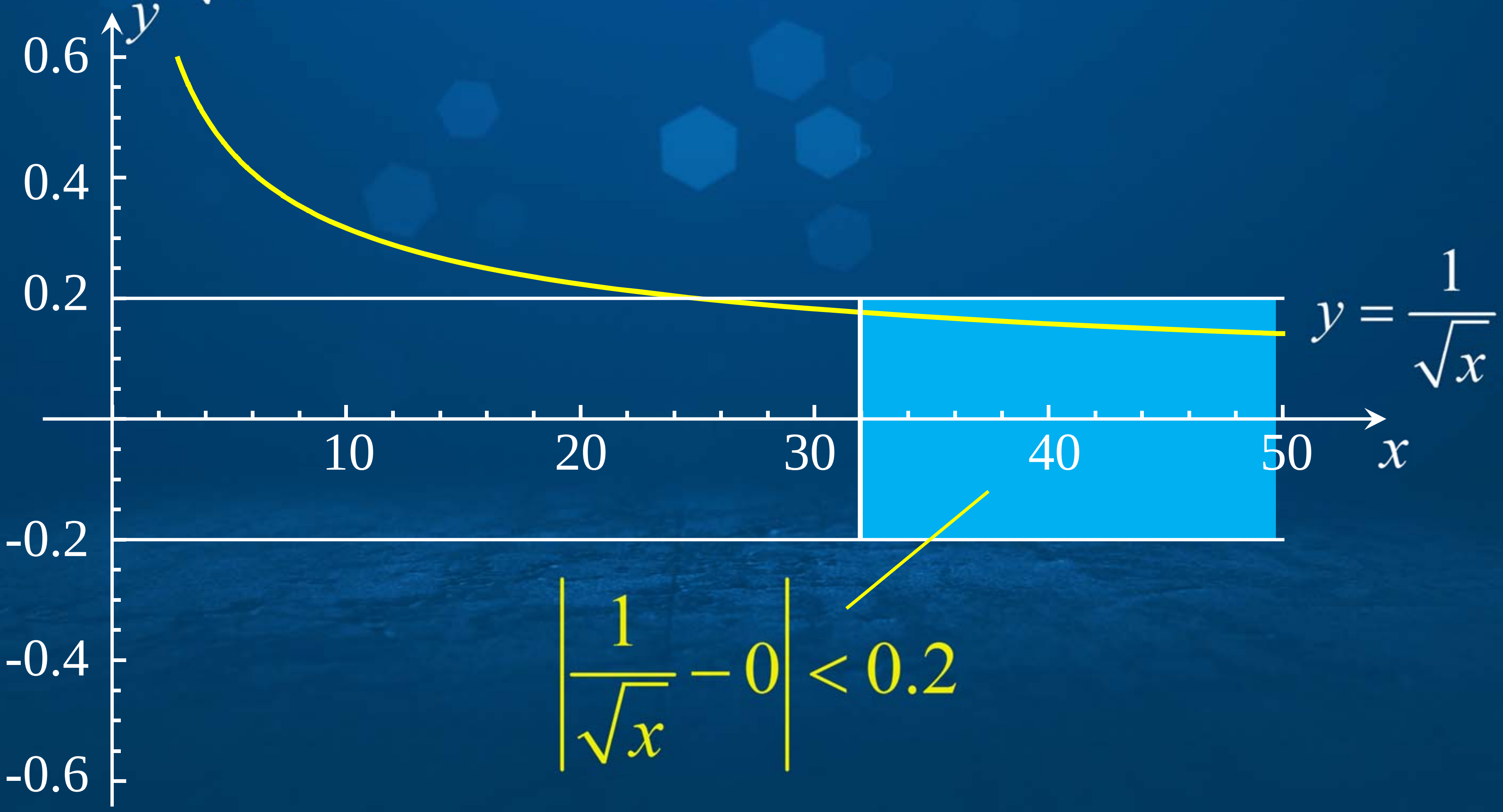
例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0.$



例1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0.$



例1 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$



函数在无穷远处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

极　限	定　义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

极限	定义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $x<-X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$，当 $\lvert x\rvert>X$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

性质（函数单边极限与双边极限的关系）

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

$x \to x_0$时函数极限的定义

定义2 设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内$U_0(x_0, r)$有定义，若存在常数A, 使得对任意给定的正数 ε ，存在正数$\delta(\delta < r)$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon ,$$

则称函数$f(x)$当自变量 x趋于x_0 (即 $x \to x_0$)时存在极限A, 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(x \to x_0) \ .$$

$\forall \varepsilon > 0$ ，$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

函数在有限点处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数在有限点处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$，当 $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在有限点处极限定义一览

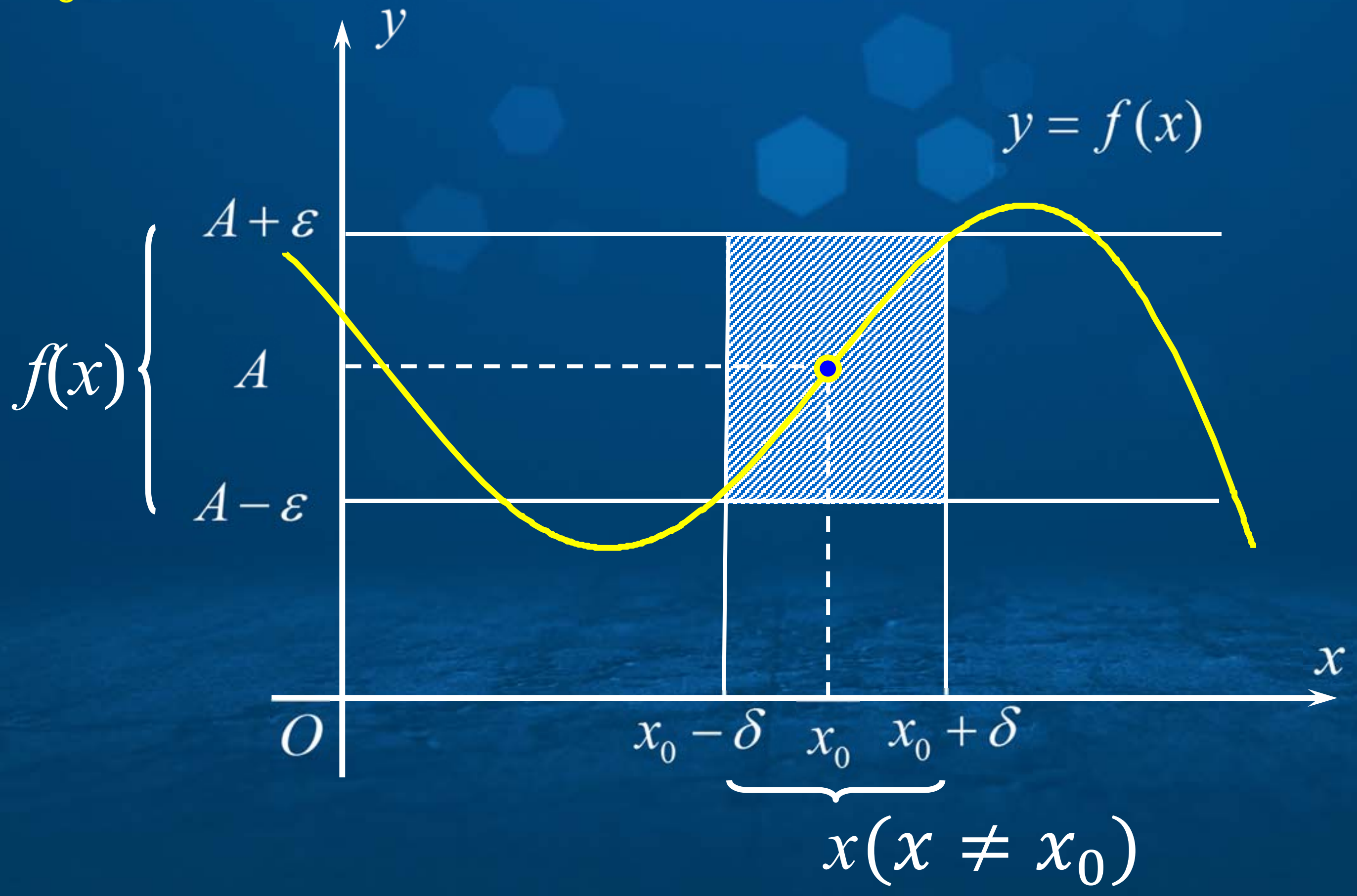
极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在有限点处极限定义一览

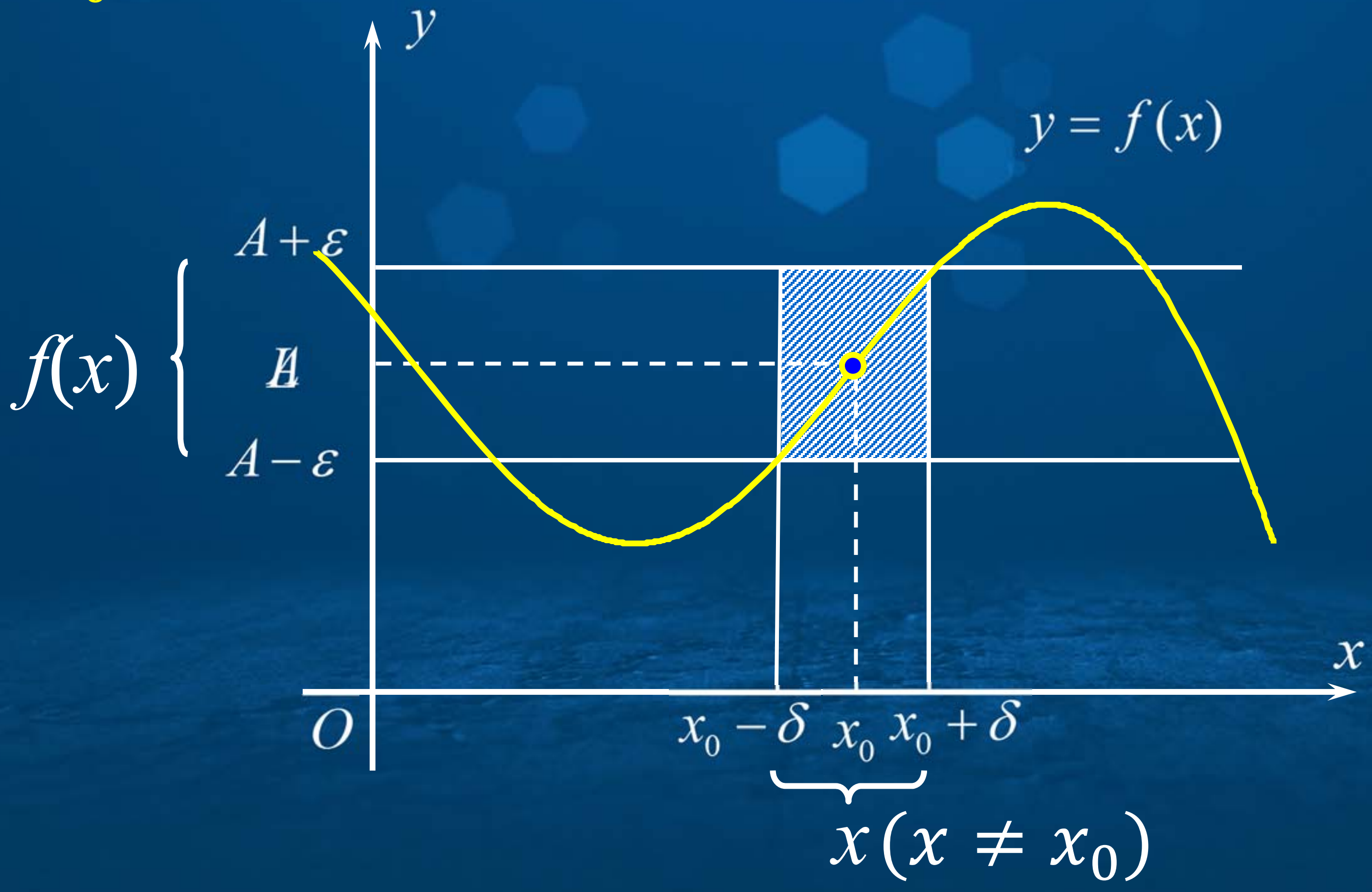
极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

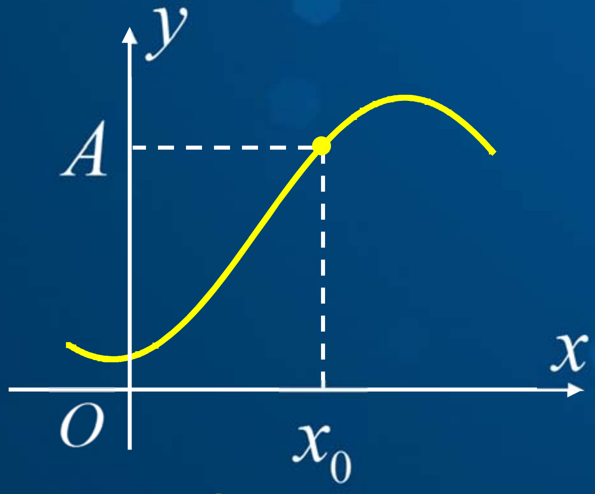
右极限$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$　　左极限$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的几何解释：

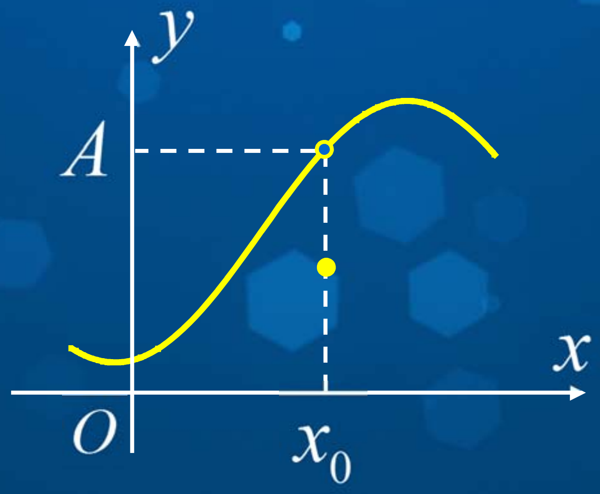


极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的几何解释：

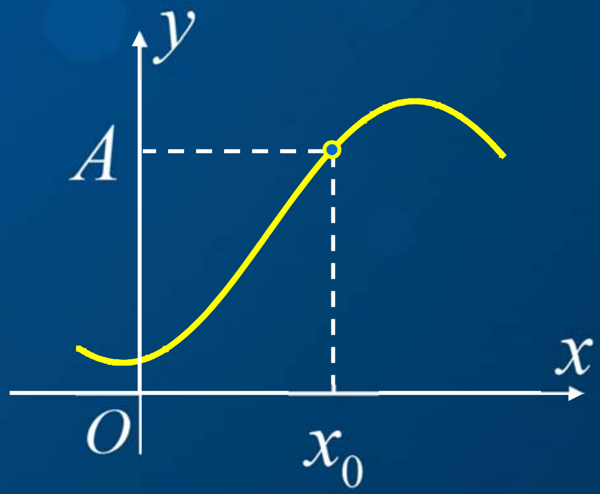




情形 1



情形2



情形3

情形1：$f(x_0)$有定义且 $A = f(x_0)$

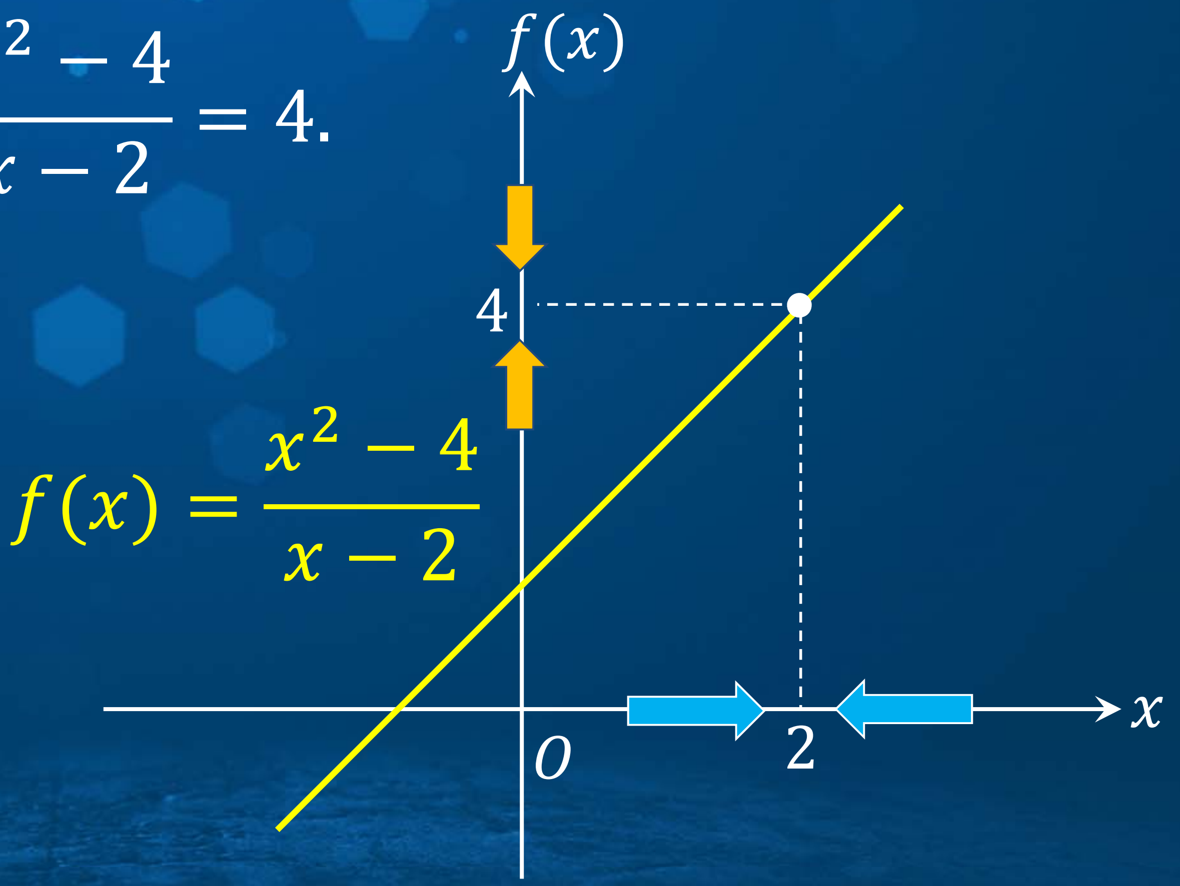
情形2：$f(x_0)$有定义但 $A \neq f(x_0)$

情形3：$f(x_0)$无定义

例2 用定义验证函数极限 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

例3 设x_0为任意实数，
试用定义验证函数极限：

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$



性质（单侧极限与双侧极限的关系）

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

例4 讨论函数 $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\ (x \neq 0)$ 当$x \to 0$时极限的存在性.

例5 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, x > -1, \\ x + a, x < -1, \end{cases}$ 试确定常数a 使 $\lim_{x\to -1} f(x)$存在.