第15讲 函数极限的性质与运算法则

函数在无穷远处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0$，当 $x > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists X > 0$，当 $\lvert x\rvert > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在无穷远处极限定义一览

极　限	定　义
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists X > 0$，当 $x > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists X > 0$，当 $x < -X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists X > 0$，当 $\lvert x\rvert > X$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在有限点处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$	$\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$，当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，$\lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$

函数在有限点处极限定义一览

极 限	定 义
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$

函数极限的性质

函数的四则运算法则

复合运算的极限

定理1（惟一性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则极限值$A$惟一.

定理2（有界性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在$\delta>0$，使$f(x)$在去心邻域 $0<|x-x_0|<\delta$ 中有界.（局部有界性）

定理3（保号性）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$，则存在 $\delta>0$ ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$. （$f(x)>\frac{A}{2}$）

推论 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且存在 $\delta>0$ ，使当$0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$f(x)\geq 0$，则有$A\geq 0$.

定理4（四则运算的极限）假定下面考虑的都是对自变量 x 的同一变化过程的极限．设 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 存在，则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

(2) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x)\lim g(x)$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} \quad (\lim g(x) \neq 0)$.

特别，$\lim[C f(x)] = C \lim f(x)$，其中 C 为常数

$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$，其中 n 为正整数

例1 证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geq g(x)$，则 $A\geq B$.（保序性）

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=A-B \xrightarrow[\text{推论}]{f(x)-g(x)\geq 0} A-B\geq 0$$

例2 设 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n,\ x_0\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{x\to x_0}P_n(x)=P_n(x_0).$$

例3 设 $R(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$，试求 $\lim\limits_{x\to 2}R(x),\ \lim\limits_{x\to 3}R(x)$.

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$，其中$a_0b_0\neq 0$，$m,n$为正整数，且$m\leq n$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\frac{1}{6}$$

$$\lim_{u\to 1/6}\sqrt{u}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$y=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}} \longleftrightarrow y=\sqrt{u},\ u=\frac{x-3}{x^2-9}$$

定理5 (复合函数的极限) 设函数$u=\varphi(x)$在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内有定义，$\varphi(x)\neq u_0$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$. 又$y=f(u)$在$u_0$的去心邻域$\mathring{U}(u_0)$内有定义，且$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，则极限$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$存在，且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A\ .$$