Aplicações da Matemática no Sudoku

Gabriel Barbosa da Silva
Orientador: Jose Fabio Boia Porto

Universidade Federal de Alagoas (UFAL)
Campus de Arapiraca
Licenciatura em Matemática

23 de abril de 2023

Sumário

Sumário

Introdução

O Jogo

O Sudoku é um jogo de quebra-cabeça matemático que se tornou muito popular nos últimos anos e tem sido objeto de estudos visando entender suas propriedades e características.

Qual a importância?

Embora não seja necessário um conhecimento aprofundado de matemática, o Sudoku envolve uma aplicação prática e significativa de conceitos matemáticos em seu processo de resolução.

Sumário

A História do Sudoku

Leonhard Euler

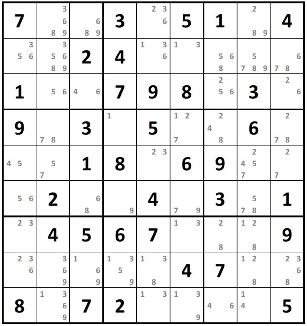
No século XVIII, Euler combinou os conceitos de Quadrado Mágico e Quadrado Latino para criar um sistema matemático de análise estatística.

Howard Garns

O Sudoku foi criado pelo designer de quebra-cabeças Howard Garns em 1979 e era conhecido como Number Place.

Maki Kaji

No Japão recebeu o nome de *"suuji wa dokushin ni kagiru"*, cujo significado é "os números têm que ser únicos".



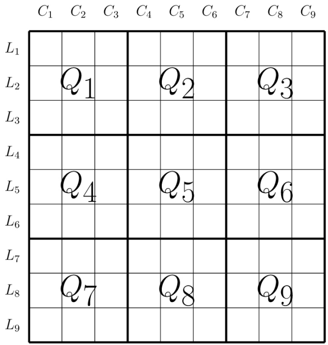
Regras do Jogo

O jogador deve preencher uma grade de 9×9 com números de 1 a 9, de forma que cada número apareça uma única vez em cada linha, coluna e quadrantes.

Pistas

O Sudoku começa com algumas células já preenchidas em forma de pistas e o jogador deve utilizá-las para preencher as células vazias.

O Sudoku e Suas Variações



Identificando as células

Cada linha é denominada como L_i, cada coluna como C_j e cada quadrante como Q_p.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}	a_{19}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}	a_{49}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}	a_{59}
a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}	a_{67}	a_{68}	a_{69}
a_{71}	a_{72}	a_{73}	a_{74}	a_{75}	a_{76}	a_{77}	a_{78}	a_{79}
a_{81}	a_{82}	a_{83}	a_{84}	a_{85}	a_{86}	a_{87}	a_{88}	a_{89}
a_{91}	a_{92}	a_{93}	a_{94}	a_{95}	a_{96}	a_{97}	a_{98}	a_{99}

Como identificar?

É comum usar a notação matemática a_{ij}, onde i representa a posição da linha e j representa a posição da coluna.

FullHouse/Last Digit

Este método consiste em buscar por uma célula vazia no Sudoku que possua apenas uma opção de número para ser preenchida.

1	3	6				7		
2	5	9		1	6	8		
4	7	8						
			4					3
	4		1		2		2	9
		5						
8	9			7				4
				2	1		3	
3			5					

Métodos de Resolução

Hidden Single

É usado quando apenas uma célula em uma linha, coluna ou quadrante pode conter determinado número.

Essa célula é chamada de candidato oculto, pois é o único lugar onde o número pode ser colocado naquela linha, coluna ou quadrante.

6	7		3				2	
		5		4				
	2		7					6
	5					1		
2				5	4			3
				1			5	
5								
1	4					8	9	
			9	8		7		

Naked Single

É usado quando uma célula tem apenas uma possibilidade de número, ou seja, não há outras opções de escolha para esta célula.

Os dígitos inseridos no quadrante, na coluna e na linha que compõe a célula deixa restando apenas o dígito 9.

	4		8		9			
	6		4			5	9	
							6	
	2			5		1	7	
	5		7			9		
	9		6	3		2		
			2	8	7			
	1	4		9	6	3		
						8		9

Métodos de Resolução

Locked Candidates

O método Locked Candidates é uma estratégia intermediária para resolver Sudokus que consiste em identificar uma possibilidade em que um determinado número está "travado"em um quadrante específico, impedindo sua aparição em outras células da mesma linha ou coluna

Tipo 1

Permite eliminar candidatos apenas dentro de uma região 3x3.

	9	7	3	6		2		8
3		8	7	2		9		
2			9		8	3		7
		4			9	7	8	
8	1			7		4	2	
5				8		6	9	
4			^{3}	^{3}	2	8	7	9
9			8	^{3}	7	^{3}	^{3}	^{3}
7	8	3	6	9	^{3}	^{3}	4	^{3}

Tipo 2

Permite eliminar candidatos em toda a linha ou coluna em que aparecem.

1	3	8	6	2	7	5		
5	7		4				8	
9	2	4	1 3	8	5		7	
8	5		7			4		3
	9	7	5	4	3	8		1
4		3	1 2		8	9	5	7
	4	5	1 2 3 9	7	1 2 9	6	7	9
7	8		1 3 9	1 3 6 9	4	2		5
3			8	5	1 2 6 9	7	4	

Métodos de Resolução

Hidden Pair/Triple/Quadruple

Semelhantemente ao método Hidden Single, estes diferem apenas na quantidade de candidatos ocultos em uma célula ou grupo de células

5	8		4		6	9	3	
			8		9		4 5 6 7	2
9	4	2			7		8	
1	2	9		8	5		4 6 7	
4	6	3		7	1		5 9	
7	5	8			4	1	6 9	
8	7	5	1	9	3	6	2	4
3	1	6	7	4	2		5 9	
2	9	4			8	7	1	

Naked Pair/Triple/Quadruple

o que os difere dos métodos Hidden não é a existência de candidatos ocultos, mas sim a quantidade de candidatos nas células.

			5	1			8	6
	6			2				
8			6		4		1	3
7	1			5		6	4	
4 5 9	2	8	4 9	4 9	6	1 5	3	7
		6					9	
2					5	3	6	
	9		1	6	8	4	2	5
6		5						

Métodos de Resolução

X-Wing

É um padrão que ocorre quando há duas linhas ou colunas onde apenas dois candidatos para um número específico aparece, formando um "X"grande.

Swordfish

Swordfish é uma técnica semelhante, porém envolve três linhas ou três colunas ao invés de duas.

5 8	4	1	7	2	9	6 8	3	5 6
7	6	9	1 8	1 5 8	3	4	5 8	2
5 8	3	2	6	4	5 8	7	1	9
4	2 8	3	9	5 8	2 5 6 8	1	7	5 6
6	2 8	7	1 2 8	1 5 8	4	9	5 8	3
1	9	5	3	7	6 8	6 8	2	4
2	1	4	5	6	7	3	9	8
3	7	6	2 8	9	2 8	5	4	1
9	5	8	4	3	1	2	6	7

O Problema do Número Mínimo de Pistas

Um única solução válida

Um tabuleiro é considerado solucionável se existir pelo menos uma solução válida.

Mas e então?

Qual seria o número mínimo de pistas para que houvesse uma única solução possível?

O Problema do Número Mínimo de Pistas

São 17!

Gary McGuire, Bastian Tugemann e Gilles Civario, provaram em 2012 que o número mínimo de pistas para que houvesse uma única solução válida para o jogo eram de apenas 17.

			8		1			
						4	3	
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

O Teorema

Os 16 dígitos nas quatro regiões de canto corresponderão aos dígitos no anel de 16 células circulando a região do quadrante central 3×3.

2	6	8	3	4	7	1	9	5
4	7	5	6	1	9	3	8	2
9	1	3	2	8	5	7	6	4
6	8	9	4	3	1	5	2	7
5	3	2	7	9	6	4	1	8
7	4	1	8	5	2	6	3	9
3	9	7	1	2	4	8	5	6
8	2	6	5	7	3	9	4	1
1	5	4	9	6	8	2	7	3

Sumário

Soluções de Keedwell

Anthony Donald Keedwell

Pesquisador honorário sênior, desde 1993, da University of Surrey, Inglaterra, e um dos autores do livro *"Latin Squares and their Applications"*.

O que Keedwell propõe?

É necessário utilizar uma matriz 3×3 para preencher o primeiro bloco da grade de um Sudoku e em seguida permutar a posição das linhas e colunas de forma que estas operações possam permitir obter matrizes que completem os demais blocos da grade do jogo.

Matriz de Keedwell

Como assim?

Ao obter uma matriz qualquer de ordem n^2, basta identificar as localizações dos blocos $n \times n$ da matriz com o conjunto $\mathbb{Z}_n^2$.

$(0,0)$	$(0,1)$	$\cdots$	$(0,n-2)$	$(0,n-1)$
$(1,0)$	$(1,1)$	$\cdots$	$(1,n-2)$	$(1,n-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(n-1,0)$	$(n-1,1)$	$\cdots$	$(n-1,n-2)$	$(n-1,n-1)$

Condições

- A $i-$ ésima linha de αK é a $(i+1)-$ ésima linha $K \mod n$.
- A $j-$ ésima coluna de βK é a $(j+1)-$ ésima coluna de $K \mod n$.

$$K = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \alpha K = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix} \qquad \beta K = \begin{pmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{pmatrix}$$

Definições

- Dizemos que M é uma matriz de Keedwell para K se para cada $(i,j) \in \mathbb{Z}_n^2$ o (i,j) - ésimo bloco de M é $\alpha^{c_{ij}}\beta^{d_{ij}}K$, para algum $(c_{ij}, d_{ij}) \in \mathbb{Z}_n^2$ com $(c_{00}, d_{00}) = (0,0)$.
- Dizemos que M é uma solução de Keedwell para K se M é tanto uma matriz de Keedwell para K e uma solução do Sudoku.

Matriz Expoente

Exemplo

Esta matriz permitirá identificar a quantidade de vezes que deslocará as linhas ou colunas da matriz original.

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,1) & (2,2) \\ (0,1) & (1,2) & (2,0) \\ (0,2) & (1,0) & (2,1) \end{pmatrix} \quad \therefore \quad M = \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2\beta K \end{pmatrix}$$

Matriz Expoente

É Uma Solução de Keedwell?

Basta considerar um $K \in \mathbb{Z}_n^2$ e em seguida substituir na matriz M.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ então } \quad M = \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \beta K & \alpha\beta^2 K & \alpha^2 K \\ \beta^2 K & \alpha K & \alpha^2 \beta K \end{pmatrix}$$

Sudoku Resolvido Através das Soluções de Keedwell

0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1
6	7	8	1	2	0	5	3	4
1	2	0	5	3	4	6	7	8
4	5	3	8	6	7	0	1	2
7	8	6	2	0	1	3	4	5
2	0	1	3	4	5	7	8	6
5	3	4	6	7	8	1	2	0
8	6	7	0	1	2	4	5	3

Outras Representações

Podem ser usadas como solução para o Sudoku, seguindo o modelo proposto por Keedwell.

K	αK	$\alpha^2 K$
$\alpha\beta K$	$\alpha^2\beta K$	βK
$\alpha^2\beta^2 K$	$\beta^2 K$	$\alpha\beta^2 K$

K	$\alpha\beta^2 K$	$\alpha^2\beta K$
$\alpha^2\beta^2 K$	βK	αK
$\alpha\beta K$	$\alpha^2 K$	$\beta^2 K$

K	$\alpha^2\beta K$	$\alpha\beta^2 K$
$\beta^2 K$	$\alpha^2 K$	$\alpha\beta K$
βK	$\alpha^2\beta^2 K$	αK

K	$\alpha^2 K$	αK
$\alpha\beta^2 K$	$\beta^2 K$	$\alpha^2\beta^2 K$
$\alpha^2\beta K$	$\alpha\beta K$	βK

K	$\alpha^2\beta^2 K$	$\alpha\beta K$
$\alpha^2\beta K$	αK	$\beta^2 K$
$\alpha\beta^2 K$	βK	$\alpha^2 K$

K	$\alpha\beta K$	$\alpha^2\beta^2 K$
βK	$\alpha\beta^2 K$	$\alpha^2 K$
$\beta^2 K$	αK	$\alpha^2\beta K$

Matriz Que Não É Solução

Exemplo

Quando uma matriz M não é solução para um sudoku?

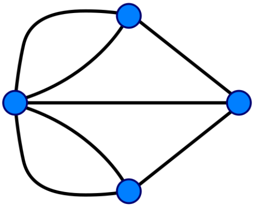
$$M = \begin{pmatrix} K & \alpha\beta K & \alpha^2\beta^2 K \\ \alpha K & \alpha^2\beta K & \beta^2 K \\ \alpha^2 K & \beta K & \alpha\beta^2 K \end{pmatrix}$$

0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1
6	7	8	1	2	0	5	3	4
3	4	5	7	8	6	2	1	0
6	7	8	4	5	3	5	4	3
0	1	2	1	2	0	8	7	6
6	7	8	1	2	0	5	3	4
0	1	2	4	5	3	8	6	7
3	4	5	7	8	6	2	0	1

Sumário

O Que São Grafos?

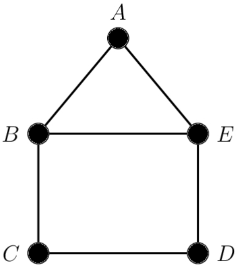
Um grafo G é uma tripla que consiste em um conjunto de vértices $V(G)$, um conjunto de arestas, $E(G)$, e uma relação que associa a cada aresta dois vértices (não necessariamente distintos) chamados de pontos finais. (WEST)



Definição e Terminologia

O Que É O Grau De Um Vértice?

O grau de um vértice é dado pela quantidade de arestas que estão ligadas a ele.

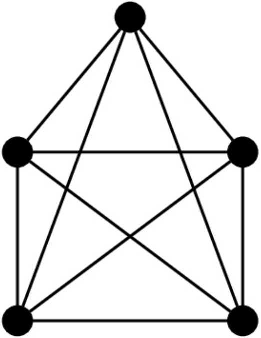


Observação:

Em grafos direcionados, o grau de um vértice é dividido em dois tipos: grau de entrada e grau de saída.

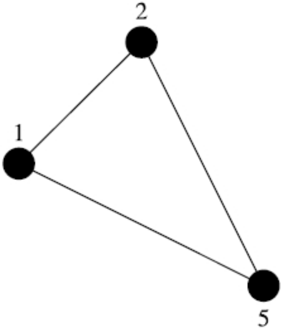
Grafos Completos

Todos os vértices devem estar ligados entre sí por uma aresta.



Grafos Ciclos e Caminhos

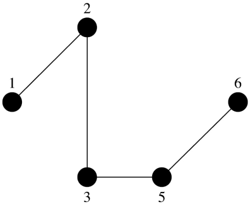
Um grafo cíclico é um tipo de grafo que possui um caminho que começa e termina no mesmo vértice.



Tipos de Grafos

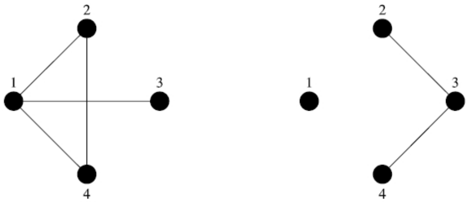
Grafos Ciclos e Caminhos

Já um caminho é um grafo simples em que consiste ter um vértice inicial e um vértice final distintos.



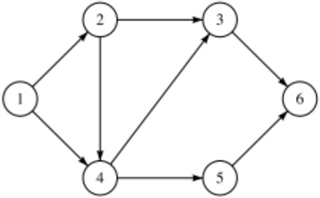
Grafos Complementares

Um grafo complementar é um tipo de grafo que possui exatamente as arestas que o grafo original não possui.



Grafos Direcionados

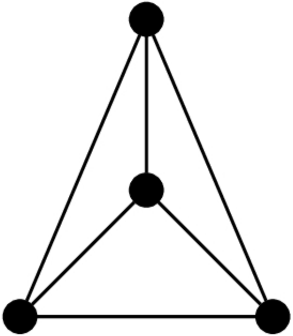
Suas arestas possuem direção, ou seja, cada aresta do grafo possui um vértice de origem e um vértice de destino.



Tipos de Grafos

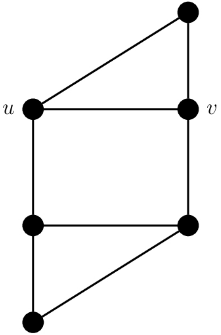
Grafos Regulares

Um grafo é dito regular quando todos os vértices têm o mesmo grau.



Grafos Conexos

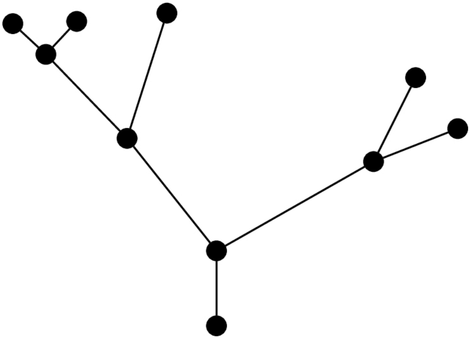
É necessário existir pelo menos um caminho entre qualquer par de vértices, ou seja, é possível deslocar-se por qualquer um dos vértices seguindo as arestas do grafo.



Tipos de Grafos

Grafos Árvores

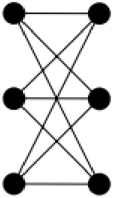
É um grafo conexo e acíclico, ou seja, não possui ciclos e é possível chegar a qualquer vértice à partir de outro.



Tipos de Grafos

Grafos Bipartidos

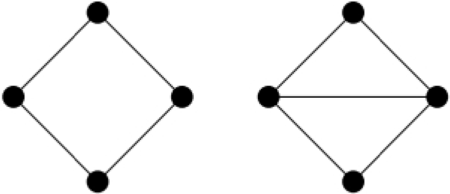
Os vértices puderem ser divididos em dois conjuntos, sem elementos em comum, de forma que todas as arestas ligam um vértice de um conjunto a um vértice de outro determinado conjunto.



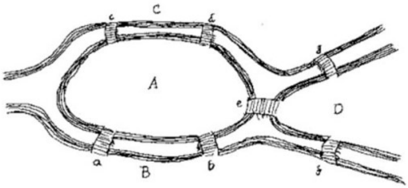
Tipos de Grafos

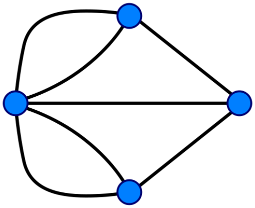
Grafos Eulerianos

"Um grafo G é Euleriano se e somente se possui no máximo uma componente não trivial e todos os seus vértices possuem grau par."[?, p. 27]



Problemas Clássicos





Pontes de Köenisberg

É possível cruzar todas as pontes uma única vez e retornar ao ponto de partida?

Solução!

Leonhard Euler em 1736.

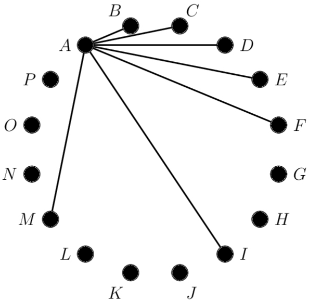
Problemas Clássicos

O Problema das Quatro Cores

Francis Guthrie, em 1853, tentou colorir o mapa da Inglaterra de forma que nenhuma fronteira compartilhasse a mesma cor com o país vizinho.

Aplicação de Grafos

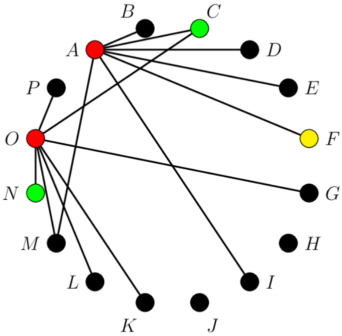
A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P



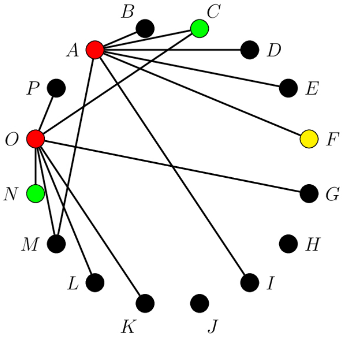
Aplicando

Observe que ....

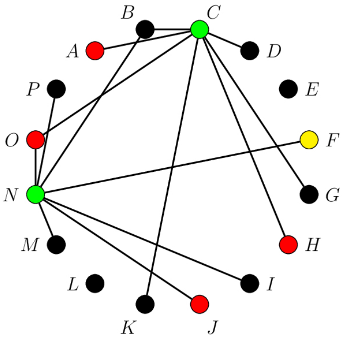
vermelho1



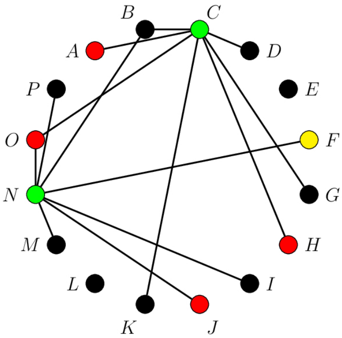
vermelho2

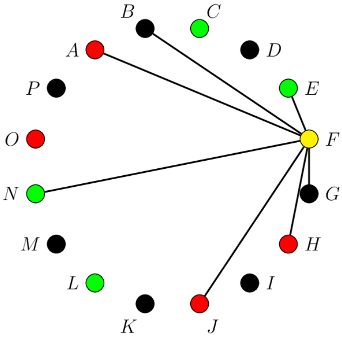


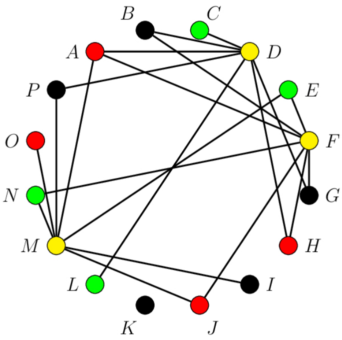
verde1

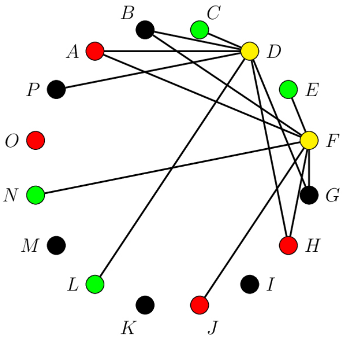


verde2




B
C
A
D
P
E
O
F
N
G
M
H
L
I
K
J

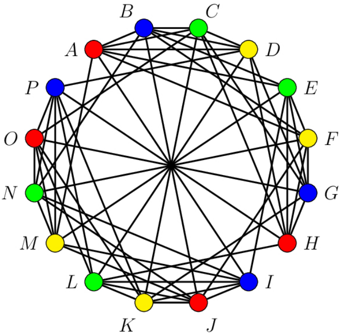

B
C
A
D
P
E
O
F
N
G
M
H
L
I
K
J


B
C
A
D
P
E
O
F
N
G
M
H
L
I
K
J

Aplicações Por Meio da Coloração de Grafos

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

Aplicações Por Meio da Coloração de Grafos



Conclusão

A análise de quebra-cabeças numéricos não apenas nos permite uma compreensão mais profunda da matemática como ferramenta para a solução de problemas práticos, mas também reforça a relevância dos jogos como objeto de pesquisa matemática e seu potencial para o avanço do conhecimento científico e o desenvolvimento em outras áreas.

Sumário

Referências I

Lorch, C.; Lorch, J.
Enumerating small sudoku puzzles in a first abstract algebra course.
Primus, Taylor & Francis, v. 18, n. 2, p. 149–157, 2008.

West, D. B. et al.
Introduction to graph theory.
[S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001. v. 2.0.

Keedwell, A. D.; Dénes, J.
Latin squares and their applications.
[S.l.]: Elsevier, 2015.

Ross, S. M.
Topics in finite and discrete mathematics.
[S.l.]: Cambridge University Press, 2000.