

面向下一代光通信的 VCSEL 激光器仿真模型

友情提示：阅读本题附录 3 有助于理解本题的相关概念与方法。

随着互联网技术的快速发展，家庭固定网络速度从原来的 2Mbps、10Mbps，快速发展到了今天的百兆（100Mbps），甚至千兆（1000Mbps）光纤宽带入户。“光纤宽带入户”，顾名思义，就是采用光纤来传输信号。光纤中传输的激光信号具有远高于电信号传输速率的特点(激光信号传输带宽远大于电信号传输带宽)，更适合于未来高速率的传输网络。工程师们在光纤通信传输系统设计前，往往会通过计算机仿真的方式研究系统设计的指标，以便快速找到最适合的解决方案。因此在进行系统仿真时，需要准确把握系统中各个器件的特性以保证仿真模型的精度。激光器作为光纤通信系统的核心器件是系统仿真中需要考虑的一个重要因素。

与我们生活息息相关的激光器种类繁多，其中的垂直腔面发射激光器（VCSEL: Vertical Cavity Surface Emitting Laser）具有使用简单，功耗较低等特点，一般 VCSEL 的工作电流在 6mA~8mA。本题的主要任务，就是得到能准确反映 VCSEL 激光器特性的数学模型。

激光器输出的光功率强度与器件的温度相关，当器件温度（受激光器自身发热和环境温度的共同影响）改变后，激光器输出的光功率强度也会相应发生变化。在进行建模时，我们既要准确反映 VCSEL 激光器特性，还要考虑：

1. 激光器输出的功率强度与温度的关系——即该激光器可以在多大的外界环境温度范围内使用；
2. 如何设计激光器参数可以使激光器具有更大的传输带宽（即 S21 曲线上纵坐标-10dB 位置对应的横坐标频率值更大）——即可以实现更快的传输速率。

1 问题 1：VCSEL 的 L-I 模型

L-I 模型，即激光器的工作电流与输出光功率强度关系模型（**L: light**，表示光功率强度，也可以表示为 **P**；**I: Intensity of current**，表示工作电流）。激光器是将电能转换成光能的半导体器件，能量转换的过程，也是电子的电能转换为光子的光能的过程，在转换过程中，伴随着电子的运动，半导体器件会产生一定的热量。从能量守恒的角度看，转化为热能的能量越多（发热导致能量浪费了），器件温度越高，那么转化为光能的能量越少（输出光功率越低），可以利用的能量就少。

国际上很多研究机构对 **VCSEL** 的 **L-I** 建模问题做了大量研究，目前有一个 **L-I** 经验公式获得了大多数人的认可。附录 1 给出了该公式及其一种参数化表达，请你们根据附件提供的文件名为“**L-I-20C.mat**”的 **L-I** 实测数据（数据在室温 20℃ 下采集，载入 matlab 后将获得 4 个变量：**P**:光功率，**I**:实测驱动电流，**U**: 实测电压，**Ta**: 实测温度）和附录 1 中的表 1 给出的一组经验值，完成如下工作：

- a) 确定模型参数 $(\eta, I_{th0}, R_{th}, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ，根据模型画出 10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度下的 **L-I** 曲线（横坐标是电流强度，纵坐标是光功率）。
- b) 假定当电信机房里 **VCSEL** 激光器在直流输入时输出的平均光功率低于 2mW 时，用户的光猫无法检测到信号。那么，根据建立的 **L-I** 模型推测：电信机房里 **VCSEL** 激光器工作的环境温度最多不能高于多少摄氏度，才能保证用户可以正常使用网络？

2 问题 2：L-I 模型的改进

分析问题 1 中模型的精度和误差产生的原因，提出你们的改进，根据改进模型画出 10℃，20℃，30℃，……，90℃等温度下的 **L-I** 曲线，并与问题 1 中 **L-I** 曲线进行比较。你们也可以采用完全不同的方法得到更好的 **L-I** 模型。

3 问题 3：VCSEL 的带宽模型（小信号响应模型）

VCSEL 的传输带宽越宽，用户上网的网速也就越快。为了适应未来的高速传

输网络需求，期望设计出具有更宽带宽的激光器。带宽模型，通常也称为小信号响应模型，就是给器件输入不同频率的幅度非常小的信号（注意与 L-I 模型不同，这里幅度小，而且含多个频率，对应 S21 曲线横坐标是频率，纵坐标是光功率幅度），获得对应频率点输出信号的幅度（功率）；这里“不同频率”是从 0 频到指定频率按一定步长进行扫描，例如从 0 开始以 0.5GHz 为步长，扫描到 30GHz。在无线通信中，器件带宽通常采用幅度 3dB 衰减位置的信号带宽来衡量——即 3dB 带宽。在光纤通信中，由于系统可用幅度衰减范围更大，通常采用幅度 10dB 衰减位置的信号带宽进行衡量——10dB 带宽。附件中名为“S21_5.mat”的文件给出了一组 VCSEL 激光器小信号幅频响应曲线数据和相应的驱动电流、输出光功率数据，将数据载入 MATLAB 将获得 4 个变量：I_b=7.5，表示偏置电流为 7.5mA；Ta=20 表示测试的环境温度是 20℃；f 表示 S21 曲线的频率，单位为 Hz；S21 表示 S21 曲线的幅度，单位为 dB，请你们：

- a) 建立恰当的激光器小信号幅频响应参数模型，给出参数构成及其确定方法，画出不同环境温度和不同偏置电流下的带宽响应曲线（即 S21 曲线），其中一条必须是 20℃ 下 7.5mA 偏置电流的仿真输出曲线。
- b) 利用你们的带宽模型，分析激光器的温度和激光器的偏置电流对器件带宽曲线的影响。
- c) 假定激光器工作环境温度可以采用某些措施让它固定在 20℃（例如，通信设备商通常的做法是将激光器放到精密的恒温箱中进行测试。若将激光器放在室内环境测试，随着测试时间的变成，激光器本身会发热导致激光器表面及其周边环境温度升高，而恒温箱则可以保证其表面和周边环境温度恒定不变），偏置电流固定在 7.5mA，那么，如果要获得更宽带宽的激光器设计方案，还可以通过什么手段实现？
- d) 改变激光器的某些参数可以发现一些有趣的问题，比如激光器在 3dB 范围内的部分频率处幅度可能会高于 0 频位置。请问，改变哪些参数会有这种现象？在实际应用中，我们希望这部分带宽曲线越平坦越好，那么如何设计这些参数可以实现我们的目的？

附录 2 给出了一种基于速率方程的建模方法，你们可以在确认其推导正确的基础上提出参数估计方法并根据题目提供的数据确定合适的参数以完善模型。你

们还可以对推导过程进行完善或者改进，以得到更为精确的模型。

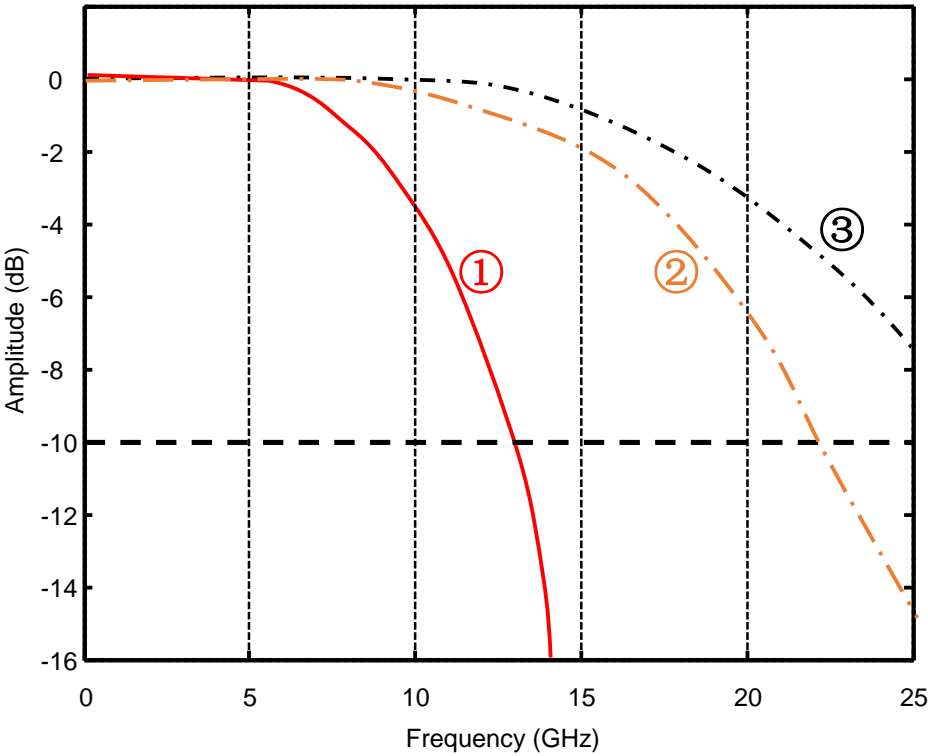


图1 某激光器 S21 曲线

对于 S21 曲线的一些基本说明：假定图 1 是实验室在不同条件下（不同测试环境温度，不同偏置电流）测试到某型号激光器的三条 S21 曲线（幅频响应曲线）。图中横坐标为频率，纵坐标为不同频率对应的幅度，-10dB 幅度位置的虚线表示所关注的对应的频率大小（带宽）。从图中可以看到，①号曲线对应的横坐标频率（带宽）约 13GHz，②号曲线对应的横坐标频率（带宽）约 22GHz，③号曲线对应的横坐标频率（带宽）大于 25GHz。即三条 S21 曲线中，③号曲线的-10dB 带宽最大。

4 问题 4：VCSEL 带宽模型的改进

开放性探索问题：是否有更好的带宽模型建模方式，使得模型运算速度更快？或者在相同的温度和偏置电流下，可以获得更宽的 3dB（或 10dB）带宽？

如果有，请给出建模方案，包括可能的数学公式，不同温度和偏置电流下的

带宽响应曲线，并与问题 3 的模型进行比较。

1 附录 1：激光器 L-I 模型

一般认为，VCSEL 的各参数间满足如下规律：

$$P_0 = \eta(T)(I - I_{th}(N, T)) \quad (1)$$

其中：

P_0 ：激光器输出的光功率，在 L-I 中光功率也用 L 来表示，即 L-I 也可以写成 P-I

I ：注入到激光器的外部驱动电流，包含外部加载的偏置电流 I_b 和信号电流，在无信号时为偏置电流 I_b

$\eta(T)$ ：L-I 曲线的斜率，从能量转换角度看，斜率对应于转换效率(L-I 曲线横坐标是电流 I ，纵坐标是出光功率 P ，斜率越高，相同电流 I 对应的输出光功率越高，相同电能转换为的光能越多，即转换效率越高)；与温度相关

$I_{th}(N, T)$ ：阈值电流；激光器电流超过该值则激光发光；与载流子数和温度相关

N ：载流子数

假设：

1. 转换效率 $\eta(T)$ 受温度影响较小，即 $\eta(T)$ 近似于常数 η ；

2. $I_{th}(N, T) = I_{th0} + I_{off}(T)$

其中 I_{th0} 为常数， $I_{off}(T)$ 是与温度相关的经验热偏置电流（即激光器内部的偏置电流，随激光器温度的变化而变化，有别于外部人为加载的激光器偏置电流 I_b ）。

这样（1）式可以简化为

$$P_0 = \eta(I - I_{th0} - I_{off}(T)) \quad (2)$$

将 $I_{off}(T)$ 表示为：

$$I_{off}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \quad (3)$$

式(4)中的温度 T 受外界环境温度 T_0 和自身的温度影响，自身的温度与器件产生的瞬时功率 VI 相关，即受 V - I 特性（电压-电流特性）影响：

$$T = T_0 + (IV - P_0)R_{th} - \tau_{th} \frac{dT}{dt} \quad (5)$$

R_{th} : VCSEL 热阻抗

τ_{th} : 热时间常数

T_0 : 环境温度

I : 偏置电流 I_b （输入电流）

V : 输入电压

式（2）-（5）就是 VCSEL 的一种经验模型，其中的参数需要根据实验数据确定，表 1 给出的仅是一组（并非最佳）参考初值：

表1 L-I 模型初值设置即模型参数提取

参数	参考初值	单位
η	0.5	-
I_{th0}	0.3E-3	A
R_{th}	2.6E3	°C/W
a_0	1.246E-3	A
a_1	-2.545E-5	A/K
a_2	2.908E-7	A/K ²
a_3	-2.531E-10	A/K ³
a_4	1.022E-12	A/K ⁴

2 附录 2：基于速率方程的带宽模型推导

将偏置电流和注入激光器的外部驱动电流代入激光器速率方程，得到：

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0 (N - N_0) S}{1 + \varepsilon S} \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0 (N - N_0) S}{1 + \varepsilon S} \end{cases} \quad (6)$$

VCSEL 输出的光功率与光子数成正比，假定比例因子为 k

$$P_0 = kS \quad (7)$$

N ：载流子数
 t ：时间
 η_i ：注入效率；或转换效率；
 q ：物理常量，电子电量， 1.6×10^{-19} 库伦
 N_0 ：透明载流子数，当载流子数 N 大于透明载流子数的时候，激光器有源区发生粒子束反转，满足产生激光的其中一个条件
 I ：注入的外部驱动电流；
 $I_{off}(T)$ ：与温度相关的偏置电流
 τ_n ：载流子复合寿命
 τ_p ：光子寿命（p: Photon, 光子）
 G_0 ：增益系数，激光产生的阈值条件，增益大于总损耗；
 S ：光子数
 β ：受激辐射耦合系数
 ε ：增益压缩因子

VCSEL 的小信号响应建模的思路为：

1. 求出稳态下的电流 I_s 、载流子数 N_s 、光子数 S_s ；稳态，即无驱动信号情况下，激光器中的电流为直流信号，此时电流是稳定的，载流子数、光子数也都是稳定的；
2. 加载小信号（小信号为信号幅度非常小的信号，不同频率处的信号幅度不同，因此小信号是与频率相关的小幅度信号），可以假定小信号引入了与频率相关的电流、载流子数、光子数，数学表达可以写成： $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$
3. 给 VCSEL 加载上小信号后，原来速率方程中的电流、载流子数、光子数则表示为稳态下的值与小信号下引入信号变化的值的和。

$$\begin{aligned}
I(t) &= I_s + i(f)e^{j2\pi ft} \\
N(t) &= N_s + n(f)e^{j2\pi ft} \\
S(t) &= S_s + s(f)e^{j2\pi ft}
\end{aligned} \tag{8}$$

其中， $i(f)$ ， $n(f)$ ， $s(f)$ 足够小。

可以根据前面所有材料提到的数学表达式（主要为等式(6)和等式(7)）推导出 VCSEL 的小信号响应模型数学表达式。

【下面是小信号响应数学表达式推导的过程】

当外部驱动电流保持恒定，载流子数 N 与光子数 S 将在一段时间的瞬态后达到稳定状态，此时 N 和 S 对时间求导为 0（稳态下，载流子和光子数变化为 0），那么等式(6)可以写为

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N}{\tau_n} - \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \tag{9}$$

$$-\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N}{\tau_n} + \frac{G_0(N - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \tag{10}$$

现在研究在已知输出光功率 P_0 情况下激光器中载流子的浓度问题。将 $P_o = kS$ 关系式带入等式(10)，此时求出的 N 为稳态下载流子浓度，记为 N_s ，等式(10)中的第二个等式得到

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & -\frac{S}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)S}{1 + \varepsilon S} = 0 \\ & P_0 = kS \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
& -\frac{P_0}{k\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0 N_s P_0}{k + \varepsilon P_0} - \frac{G_0 N_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0 \\
& \left(\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) N_s = \frac{G_0 N_0 P_0}{k + \varepsilon P_0} + \frac{P_0}{k\tau_p} \\
& \frac{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0 P_0}{\tau_n(k + \varepsilon P_0)} N_s = \frac{k\tau_p G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p(k + \varepsilon P_0)} \\
& N_s = \frac{\tau_n}{\beta(k + \varepsilon P_0) + \tau_n G_0 P_0} \cdot \frac{k\tau_p G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0)}{k\tau_p} \\
& N_s = \frac{G_0 N_0 P_0 + P_0(k + \varepsilon P_0) / (k\tau_p)}{\beta(k + \varepsilon P_0) / \tau_n + G_0 P_0} \\
& N_s = \frac{P_0 / (k\tau_p) + G_0 N_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)}{\beta / \tau_n + G_0 P_0 / (k + \varepsilon P_0)} \quad (11)
\end{aligned}$$

其中， P_0 为通过仪器测量到的激光器的实测出光功率， $(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta)$ 为参数。根据实测光功率和参数值，从等式(11)可以计算出激光器中载流子浓度 N_s 。

根据计算出来的载流子浓度 N_s 可以进一步计算激光器中用于转换成光能的激光器驱动电流 I_{cur} 和激光器中稳态下理论上可计算处的光子数 S_s 。

将 $P_0 = kS$ 和等式(11)计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(9)中，求出的电流 I 即为根据速率方程从理论上所计算出的激光器发光的驱动电流 I_{cur}

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta_i(I_{cur} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)P_0}{k + \varepsilon P_0} = 0 \\
& I_{cur} = \frac{q}{\eta_i} \left(\frac{N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)P_0}{k + \varepsilon P_0} \right) + I_{th0} + I_{off}(T) \quad (12)
\end{aligned}$$

根据计算出的稳态下载流子浓度 N_s ，从等式(9)可以计算稳态下理论上的光子数 S_s

$$\frac{\eta_i(I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (13)$$

在通常的 VCSEL 激光器中, $\varepsilon S_s \ll 1$, 根据等式(13)得到理论计算出的激光器稳态工作时的光子数

$$\frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} = G_0 (N_s - N_0) S_s \quad (14)$$

$$S_s = \frac{\eta_i (I - I_{th0} - I_{off}(T)) / q - N_s / \tau_n}{G_0 (N_s - N_0)}$$

值得考虑的问题是: 此处如果不做简化, 是否可以得到更准确的计算结果?

根据前面介绍知道, 激光器输出光功率与光子数成正比, 比例因子为 k , 那么根据理论计算出的光子数 S_s 可以计算出理论上的出光功率

$$P_{od} = k S_s \quad (15)$$

至此, 我们已经计算出了激光器理论的出光功率和理论上的驱动电流的值 $(P_{od}; I_{cur})$, 而通过仪器可以测量出激光器的出光功率, 驱动电流, 电压为 $(P_0; I; V)$ 。

重新梳理一次上述信息, 根据实测激光器光功率 P_0 值和参数 $(k, \tau_p, \tau_n, G_0, N_0, \varepsilon, \beta)$, 我们可以计算出载流子浓度 N_s ; 将计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(12), 可以得到理论上的驱动电流 I_{cur} , 该理论值与实测驱动电流值相减可以得到第 1 个误差约束关系。再将计算出的载流子浓度 N_s 带入等式(14)和等式(15), 可以得到理论上的激光器出光功率, 将该理论光功率值与实测激光器光功率 P_0 相减可以得到第 2 个误差约束; 第 3 个误差约束将由理论计算出的小信号响应与测试的小信号响应值给出。

现在进一步考虑加载小信号的情况以获得小信号响应的理论表达式。将等式(8)带入速率方程等式(6),

$$\frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = \frac{\eta_i (I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}$$

$$\frac{d(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{dt} = -\frac{S_s + s(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_p} + \frac{\beta (N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{\tau_n} + \frac{G_0 (N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0) (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon (S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \quad (16)$$

稳态方程(9), (10)中载流子浓度和光子数均为稳态理论值 N_s 和 S_s 时, 等式重写为下面的形式

$$\frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (17)$$

$$-\frac{S_s}{\tau_p} + \frac{\beta N_s}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} = 0 \quad (18)$$

将等式(17)和等式(18)带入等式(16)的第一个式子进行等式化解：

$$\begin{aligned} \frac{d(N_s + n(f)e^{j2\pi ft})}{dt} &= \frac{\eta_i(I_s + i(f)e^{j2\pi ft} - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s + n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s + n(f)e^{j2\pi ft} - N_0)(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})}{1 + \varepsilon(S_s + s(f)e^{j2\pi ft})} \\ (j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} \\ &\quad - G_0 \cdot \frac{(N_s - N_0)S_s + S_s n(f)e^{j2\pi ft} + (N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft} + n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &\quad - \frac{G_0 n(f)s(f)e^{j2\pi(2f)t}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft} + G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s + \varepsilon s(f)e^{j2\pi ft}} \end{aligned} \quad (19)$$

增益压缩因子本身较小，它与小信号的乘积 $\varepsilon s(f)$ 值较小，现考虑在等式(19)中假定可以忽略其影响，即 $\varepsilon s(f) \rightarrow 0$ ；再考虑等式(19)中第四项，该项中包含的 $e^{j2\pi(2f)t}$ 相比其他项为 2 倍频高次项，高频信号在系统响应中不在考虑范围内，可忽略不考虑。由此，等式(19)可简化为

$$\begin{aligned} (j2\pi f)n(f)e^{j2\pi ft} &= \frac{\eta_i(I_s - I_{th0} - I_{off}(T))}{q} - \frac{N_s}{\tau_n} - \frac{G_0(N_s - N_0)S_s}{1 + \varepsilon S_s} \\ &\quad + \frac{\eta_i i(f)e^{j2\pi ft}}{q} - \frac{n(f)e^{j2\pi ft}}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)e^{j2\pi ft}}{1 + \varepsilon S_s} \end{aligned} \quad (20)$$

根据等式(17)，等式(20)的前三项为 0，在略掉因子 $e^{j2\pi ft}$ 后，等式(20)化简为

$$(j2\pi f)n(f) = \frac{\eta_i i(f)}{q} - \frac{n(f)}{\tau_n} - \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (21)$$

用同样的方法，等式(16)的第二个式子可以化简为

$$(j2\pi f)s(f) = -\frac{s(f)}{\tau_p} + \frac{\beta n(f)}{\tau_n} + \frac{G_0(N_s - N_0)s(f)}{1 + \varepsilon S_s} + \frac{G_0 S_s n(f)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (22)$$

由等式(22)得到

$$n(f) = \frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} s(f) \quad (23)$$

根据前面的描述，信号的响应等于对应频率处输出与输入信号的比值，假定小信号响应为线性频率响应 $h(f)$ ，按照定义表示为小信号带来的输出信号 $p(f)$ 与输入信号 $i(f)$ 的比值

$$h(f) = \frac{p(f)}{i(f)} = k \frac{s(f)}{i(f)} \quad (24)$$

将等式(23)带入等式(21)，并化简为等式(24)的形式

$$\begin{aligned} h(f) &= k \frac{s(f)}{i(f)} \\ &= \frac{k\eta_i}{q} \cdot \frac{1}{\left[\frac{j2\pi f + 1/\tau_p - G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)}{\beta/\tau_n + G_0 S_s/(1 + \varepsilon S_s)} \right] + G_0(N_s - N_0)/(1 + \varepsilon S_s)} \end{aligned} \quad (25)$$

通常，我们在通信系统里面的信号响应有如下形式

$$h(f) = \frac{X}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (26)$$

将等式(25)写成等式(26)的形式，那么，

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} Z &= \left[\frac{1}{\tau_p} - \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \left[\frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] + \left[\frac{\beta}{\tau_n} + \frac{G_0 S_s}{1 + \varepsilon S_s} \right] \cdot \frac{G_0(N_s - N_0)}{1 + \varepsilon S_s} \\ &= \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 S_s}{\tau_p(1 + \varepsilon S_s)} - \frac{(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(1 + \varepsilon S_s)} \end{aligned} \quad (28)$$

将 $P_s = kS_s$ 带入等式(27)和等式(28)，将稳态下的光子数 S_s 用光功率 P_s 表示

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{kG_0(N_s - N_0)}{k + \varepsilon P_s} \quad (29)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p(k + \varepsilon P_s)} - \frac{k(1 - \beta)G_0(N_s - N_0)}{\tau_n(k + \varepsilon P_s)} \quad (30)$$

等式(21)和等式(22)是忽略了 $\varepsilon s(f)$ 项得到的, 为了进一步提高精度, 假定只忽略高阶项, 而不忽略 $\varepsilon s(f)$ 项, 则可以得到

$$Y = \frac{1}{\tau_p} + \frac{1}{\tau_n} + \frac{G_0 P_s}{k + \varepsilon P_s} - \frac{G_0 (N_s - N_0)}{(1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (31)$$

$$Z = \frac{1}{\tau_p \tau_n} + \frac{G_0 P_s}{\tau_p (k + \varepsilon P_s)} - \frac{(1 - \beta) G_0 (N_s - N_0)}{\tau_n (1 + \varepsilon P_s / k)^2} \quad (32)$$

最后, 响应函数需要进行归一化处理, 因此不必关心刚才等式里面的 X 表达式是什么, 在归一化处理时 X 被抵消掉了。归一化小信号响应为

$$H(f) \equiv \frac{h(f)}{h(0)} = \frac{Z}{(j2\pi f)^2 + (j2\pi f)Y + Z} \quad (33)$$

将上述的 Y 和 Z 带入等式(33), 即可获得 VCSEL 的小信号响应数学表达式。在该表达式中存在许多的参数, 需要采用非线性最优化获取最佳的参数值, 使得在相同的温度和偏置电流影响下, 按照等式(33)输出的响应 $H(f)$ 与实测的响应输出一致。

表 2 提供了某些参数的可能 (未必合适) 初值, 仅供参考:

表2 小信号模型初值设置的参考值

参数	参考初值	单位
η_i	0.7	-
β	1E-5	-
τ_n	9.6E-9	s
k	1.5E-8	W
G_0	1.8E6	s ⁻¹
N_0	4.97E5	-
τ_p	3.8E-12	s
ε	4.7E-8	-

3 附录 3：选做本题所需的基础知识

信息时代，信息的传输和处理在理论、技术和工程上都具有非常重要的地位和作用。信息必须通过信号来携带通过系统进行传输和处理。信号、系统、信号通过系统因而成为信息科学领域必须研究的三大基本对象。

1. 信号

物理或工程上的信号是变化着的物理量，最常用的是电压、电流、磁通量、光通量等，数学上可统一地用随机过程来表示，但在对基本概念和基本理论的介绍时，将随机过程用确定性的时间函数 $f(t)$ 来代替，即信号就是函数，在下面的叙述中，信号和函数是完全相同的两个名词，不同的地方用不同的说法仅仅取决于作者的行文习惯。

经典的信号分析方法以傅里叶级数为基础：

满足狄利克雷条件的周期信号 $x(t)$ 可以展开成傅里叶级数：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

a_0 、 a_n 、 b_n 分别表示为：

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{cases}$$

式中： T_0 为信号的周期； ω_0 为信号的基频，即角频率， $\omega_0 = 2\pi / T_0$ ， $n = 1, 2, 3 \dots$ 。

合并同频项：

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

式中：信号的幅值 A_n 和相位 θ_n 分别为

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n &= \arctan(-b_n / a_n) \end{aligned}$$

这个表达式可以这样解读：

周期信号可以分解成一组频率 $n\omega_0$ 、幅度 A_n 、相位 θ_n 的正弦信号 $A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ （写成余弦，但习惯上称为正弦）的叠加。这样一组参数 $\{A_n, \theta_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty}$ 和一个周期函数是一一对应的（就是可以互相确定），因此，对满足狄里赫利条件的周期函数，也可以表示成 $\{A_n, \theta_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty}$ ，与周期信号原来的表示相对比，这种表示方法的好处是：它将一般的周期信号分解成正弦信号（再给它一个帅气的名字：频率分量）的叠加，由于正弦信号被认为是物理上最简单的信号，因而就实现了数学上用简单表示复杂的思想。

下面的做法无论在理论上还是在实际上都是具有重大意义的创新：

为了能够在平面坐标系中直观地表示 $\{A_n, \theta_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty}$ ，将它分开为两组：

$$\{A_n, \theta_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow \{A_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty}, \{\theta_n, n\omega_0\}_{n=0}^{\infty}$$

现在我们就可以很容易地建立起信号频谱的概念：

（1）信号的频谱（三角频谱）：构成信号的各频率分量的集合，表征信号的幅值和相位随频率的变化关系，即信号的结构，是 $A_n - \omega$ 和 $\theta_n - \omega$ 的统称；

（2）信号的幅度谱：周期信号幅值 A_n 随 ω 的变化关系，用 $A_n - \omega$ 表示；

（3）信号的相频谱：周期信号相位 θ_n 随 ω 的变化关系，用 $\theta_n - \omega$ 表示；

信号的频率也用 f 表示，二者之间的关系是 $\omega = 2\pi f$ 。

为了在形式上更简单，应用欧拉公式

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t \quad (j = \sqrt{-1}), \quad \begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2}j(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) \end{aligned}$$

傅里叶级数三角函数表达式 $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ 可改写成

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

这就是周期信号的傅里叶复指数形式的表达式。

实际的信号往往并不是周期信号，这样上面的方法就不能直接使用了，不过没有关系，回忆在概率论课程中，尽管连续型随机变量没有了概率分布的概念，

但我们可以引入概率密度，类似的做法导致了频谱密度概念的产生，详细过程因为没有概念上的障碍，所以就不写了，直接给出结果：

对函数 $x(t)$ ，令 $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ 称为信号 $x(t)$ 的傅里叶变换，它反映了 $x(t)$ 中各个频率分量 $\cos \omega t$ 的“密度”的分布情况，也称为频谱密度函数，简称“频谱函数”，尽管和前面的频谱函数名字一样，但在不同的场合其内涵是不一样的，用的时候能够区分就可以了。

2. 系统

信号由 $x(t)$ 变为 $y(t)$ （可以是地理位置的改变，也可以是形式上的改变）通常被理解是因为受到了系统的作用，比如打电话时，我在北京说出来的声音是 $x(t)$ ，你在海南听到的是 $y(t)$ ，中间环节就统称为通信系统。

满足线性时不变（系统的功能不随时间变化）特性的系统被建模为线性常系数微分方程：

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = x(t)$$

$x(t)$ 称为输入或激励， $y(t)$ 称为输出或响应。之所以会有俩名完全是不同专业习惯的原因。

通常这一模型是通过研究系统的组成元素、组成方式，按照其所遵从的物理规律得到的，就是我们所称的机理分析法。将系统分解成结构（表现为微分方程的阶数）和参数（方程系数）两大要素，也可以在假设结构已知的前提下，通过输入和其对应的输出，采用数学方法求解参数，这对应于我们所称的数据分析法。

这一模型反映的是输入输出函数之间整体上的对应关系。利用傅里叶变换的性质，方程两边同时取傅里叶变换，得到：

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$X(j\omega), Y(j\omega)$ 是输入、输出的频谱， $H(j\omega)$ 是系统的频域模型——你猜的没错，右边就是普通的乘积运算（看看傅里叶变换有多厉害！）

3. 信号通过系统

在线性时不变假设下，从频域的观点看，系统对输入信号的作用就是将其频谱乘以 $H(j\omega)$ ，这个 $H(j\omega)$ 反映的是系统的全部功能，因而也被称为系统函数。它还有一个非常好的特点：它是某一条件（零状态）下系统对一特殊信号（冲激

信号)的响应的傅里叶变换!这一事实启示我们,对系统建模还可以采用第三种方法:选择某些具有特殊性质的函数(比如本题所称的小信号)去激励系统,通过响应推测系统的性能。

将 $H(j\omega)$ 写成 $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$: 我们就可以将信号通过系统后的响应 $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ 按一个个的频率成分来分析: 系统对输入的作用就是将一个个的频率分量幅度上加权(相乘), 相位上相加(本题不太关注相位问题, 因而不必深究)。

比如, 假设 $\omega > 0$ 时

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & \omega < \omega_0 \\ \frac{1}{2} & \omega_0 < \omega < \omega_1 \\ 0 & \omega > \omega_1 \end{cases}$$

这个系统的作用就是让频率低于 ω_0 的成分全部通过, 让频率介于 ω_0 和 ω_1 之间的频率分量幅度衰减一半, 让其他的频率成分衰减到 0。

$H(j\omega)$ 因而被称为系统的频率特性, $|H(j\omega)|$ 称为幅频特性。

4. 带宽

实际的信号和实际的系统都不可能是在全部频率上都有非零值的, 因而对信号, 将其具有非零值或集中了主要能量的频率范围称为信号的带宽, 对系统, 将其使输出信号的幅度下降到最大值的倍数不小于某一数值(比如 70.7%, 称为-3dB 带宽, 31.6%, 称为-10db 带宽)范围称为系统的带宽。显然, 系统的带宽越大, 其所能通过的频率成分就越多, 能承载的信息量也就越大。

注意: 本文档仅仅适用于本题, 并不对其他场合下的完整性和严谨性负责, 请勿外传。