基于 Linux 的 C++

第四讲　算　法

提　纲

算法概念与特征

算法描述

算法设计与实现

递归算法

容　错

算法复杂度

算法概念与特征

算法基本概念

算法定义：解决问题的方法与步骤

设计算法的目的：给出解决问题的逻辑描述，根据算法描述进行实际编程

算法特征

有穷性：算法在每种情况下都可以在有限步后终止

确定性：算法步骤的顺序和内容没有二义性

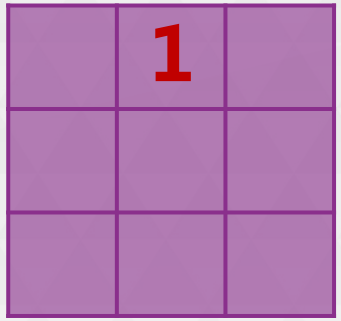
输入：算法有零个或多个输入

输出：算法至少具有一个输出

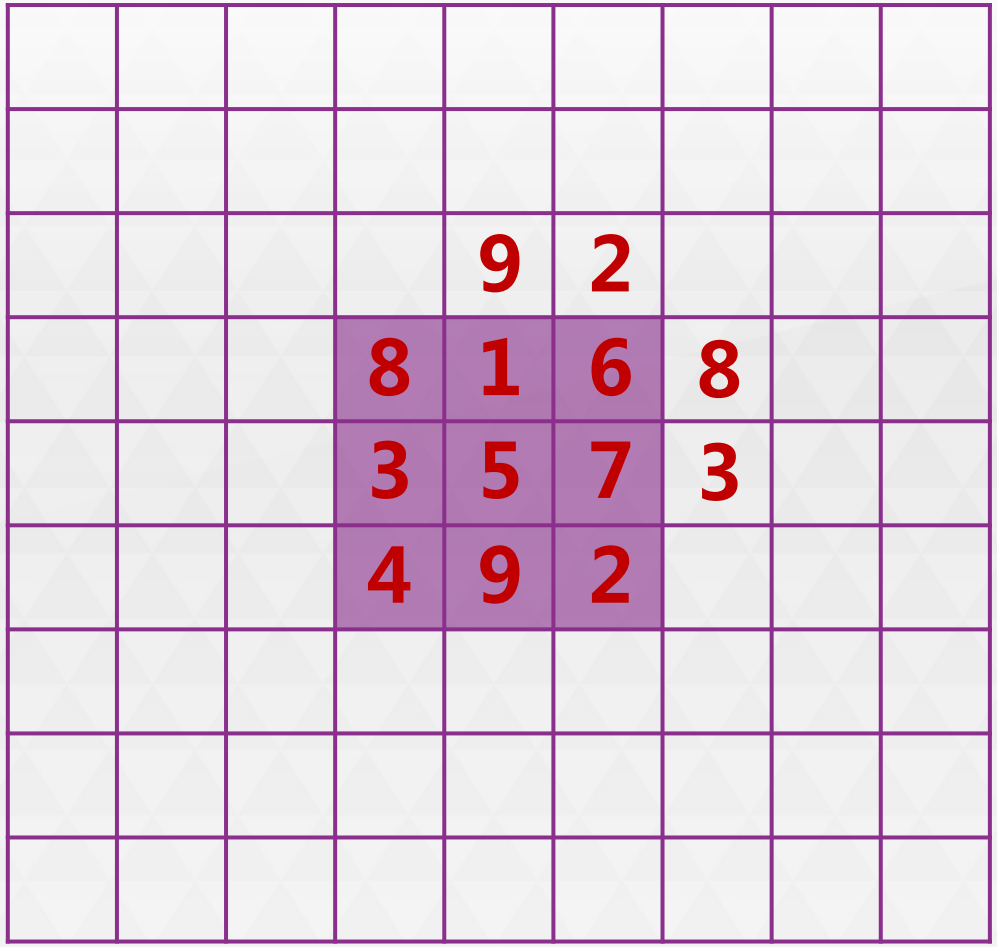
有效性：所有操作具有明确含义，并能在有限时间内完成

正确性不是算法的特征，算法的正确性需要数学证明

算法示例一：幻方



算法示例一：幻方



算法示例一：幻方

8	1	6
3	5	7
4	9	2

幻方填充步骤

步骤1：把 1 写在第一行中间一格

步骤2：在该格右上方的那一格中写入下一自然数

在此过程中，若该数已超出 3 × 3 幻方范围，则将该数书写在其所在的那一排或列的另一端格子中，即相当于认为幻方外围仍然包含了同样的幻方，而该数就写在外围幻方的同样位置

每写完三个数，将第四个数写在第三个数下面格子中

步骤3：重复步骤2，直到所有格子均填满

算法示例二：查英文单词

步骤1：翻开词典任意一页

步骤2：若所要的词汇按字母排列顺序在本页第一个单词之前，则往前翻开任意一页，重复步骤2；若所查词汇在本页最后一个单词之后，则往后翻开任意一页，重复步骤2

步骤3：若上述两条件均不满足，则该单词要么在本页上，要么词典中不存在

依次比较本页单词，或者查出该单词，或者得到该单词查不到的结论

算法描述

伪代码

混合自然语言与计算机语言、数学语言的算法描述方法

优点：方便，容易表达设计者思想，能够清楚描述算法流程，便于修改

缺点：不美观，复杂算法不容易理解

流程图（程序框图）

使用图形表示算法执行逻辑

优点：美观，算法表达清晰

缺点：绘制复杂，不易修改，占用过多篇幅

伪代码

顺序结构

执行某任务
执行下一任务

分支结构

```
if( 条件表达式 )
  处理条件为真的情况
else
  处理条件为假的情况
```

```
switch( 条件变量 ){
case 常量表达式 1: 处理分支 1
case 常量表达式 2: 处理分支 2
……
default:              处理默认分支
}
```

循环结构

```
for( 初始化表达式; 条件表达式; 步进表达式 ) || while( 条件表达式 )
{
  循环体内部代码逻辑描述
}
```

流程图

常用流程图的框图与符号

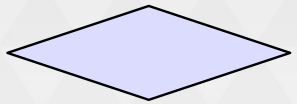
准　备

终　止

处　理

预定义处理

数据输入输出

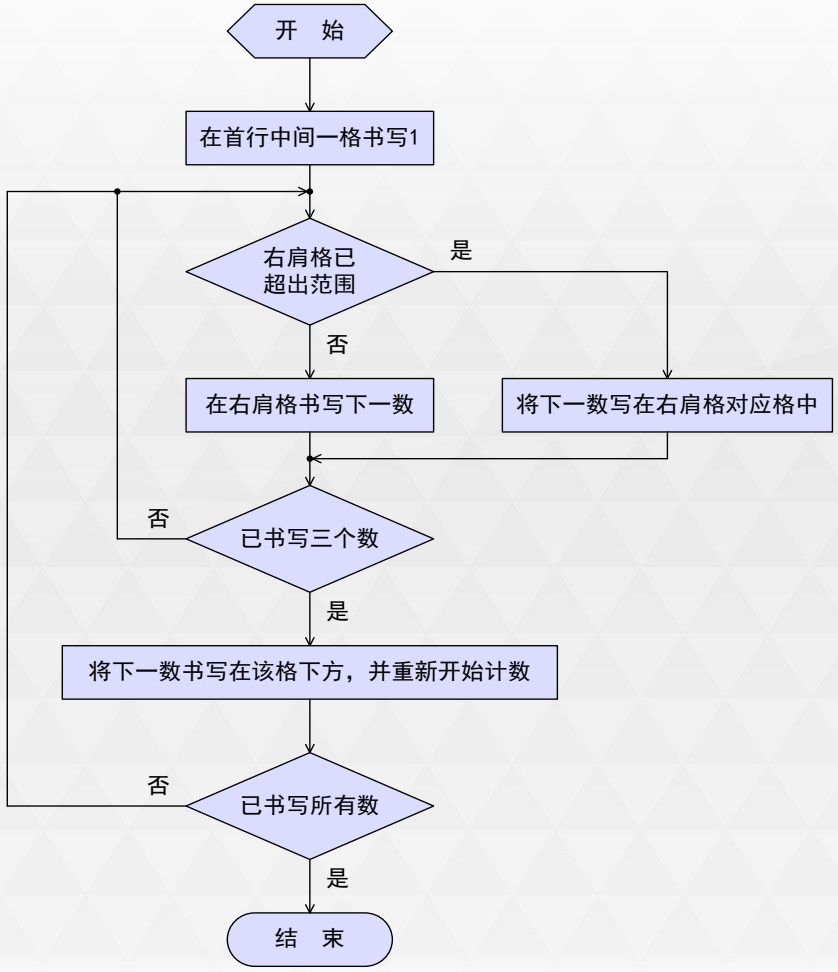


条件判断

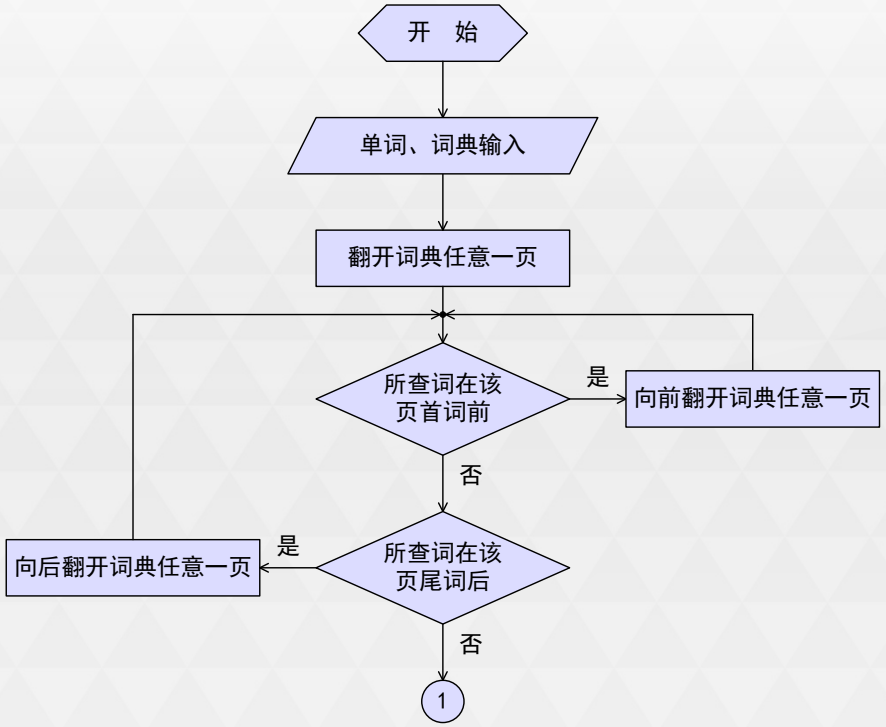
连接符

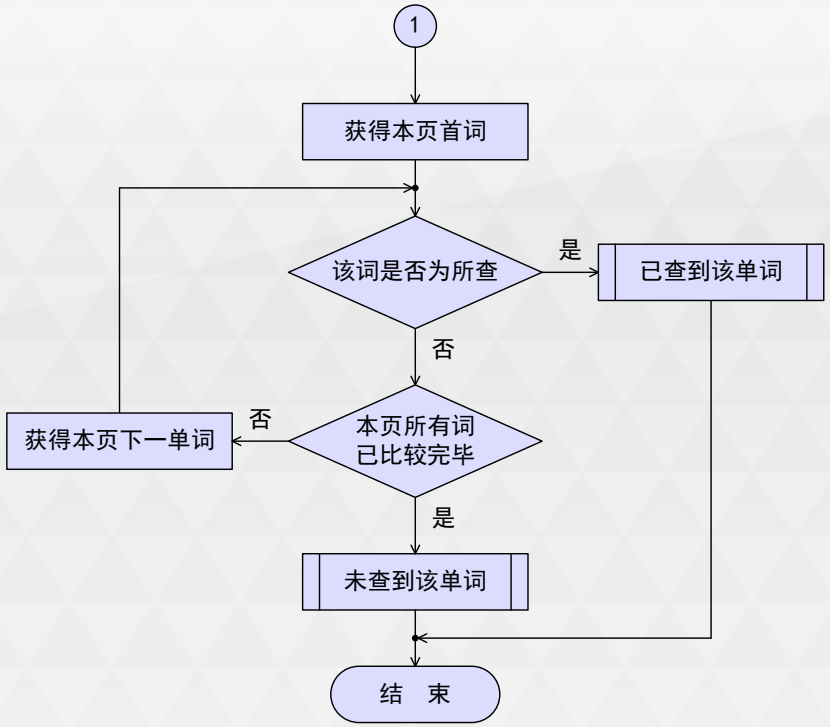
流程线

幻方流程图


开　始
在首行中间一格书写1
右肩格已
超出范围
是
否
在右肩格书写下一数
将下一数写在右肩格对应格中
已书写三个数
否
是
将下一数书写在该格下方，并重新开始计数
已书写所有数
否
是
结　束

幻方流程图


开　始
单词、词典输入
翻开词典任意一页
所查词在该
页首词前
是
向前翻开词典任意一页
否
所查词在该
页尾词后
是
向后翻开词典任意一页
否
1


1
获得本页首词
该词是否为所查
是
已查到该单词
否
本页所有词
已比较完毕
否
获得本页下一单词
是
未查到该单词
结　束

算法设计与实现

算法设计与实现

- 构造算法解决问题
- 按照自顶向下、逐步求精的方式进行
- 使用程序设计语言编程实现

典型示例

- 素性判定问题
- 最大公约数问题

素性判定问题

判断给定的某个自然数 n（大于 2）是否为素数

算法逻辑

输入：大于 2 的正整数 n

输出：该数是否为素数，若为素数返回 true，否则返回 false

步骤 1：设除数 i 为 2

步骤 2：判断除数 i 是否已为 n，若为真返回 true，否则继续

步骤 3：判断 n % i 是否为 0，若为 0 返回 false，否则继续

步骤 4：将除数 i 递增，重复步骤 2

素性判定函数第一版

```
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 2;
  while( i < n )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i++;
  }
  return true;
}
```

验证其为算法：对照算法五个基本特征

证明算法正确

测试算法

素性判定函数第二版

```
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 2;
  while( i <= (unsigned int)sqrt(n) )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i++;
  }
  return true;
}
```

为什么可以使用 sqrt(n) 代替 n ?

sqrt 为标准库中的求平方根函数

素性判定函数第三版

```
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 3;
  if( n % 2 == 0 )
    return false;
  while( i <= (unsigned int)sqrt(n) )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i += 2;
  }
  return true;
}
```

第三版有什么改进？

素性判定函数第四版

```
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 3;
  if( n % 2 == 0 )
    return false;
  while( i <= (unsigned int)sqrt(n) + 1 )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i += 2;
  }
  return true;
}
```

第四版有什么改进？

素性判定函数第五版

```
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 3, t = (unsigned int)sqrt(n) + 1;
  if( n % 2 == 0 )
    return false;
  while( i <= t )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i += 2;
  }
  return true;
}
```

第五版有什么改进？

算法选择

算法选择的权衡指标

正确性：算法是否完全正确？

效率：在某些场合，对程序效率的追求具有重要意义

可理解性：算法是否容易理解，也是必须要考虑的

算法评估：衡量算法的好坏，主要是效率

最大公约数问题

求两个正整数 x 与 y 的最大公约数

函数原型设计

```
unsigned int gcd( unsigned int x, unsigned int y );
```

最大公约数函数：穷举法

```
unsigned int gcd( unsigned int x, unsigned int y )
{
  unsigned int t;
  t = x < y ? x : y;
  while( x % t != 0 || y % t != 0 )
    t--;
  return t;
}
```

最大公约数函数：欧氏算法

输入：正整数 x、y
输出：最大公约数
步骤 1：x 整除以 y，记余数为 r
步骤 2：若 r 为 0，则最大公约数即为 y，算法结束
步骤 3：否则将 y 作为新 x，将 r 作为新 y，重复上述步骤

```
unsigned int gcd( unsigned int x, unsigned int y )
{
  unsigned int r;
  while( true )
  {
    r = x % y;
    if( r == 0 )
      return y;
    x = y;
    y = r;
  }
}
```

递归算法

递归问题的引入

递推公式：数学上非常常见

例一：阶乘函数：$1! = 1$，$n! = n \times (n-1)!$

例二：斐波那契数列函数：$f(1) = f(2) = 1$，$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

递推函数一定是分段函数，具有初始表达式

递推函数的计算逻辑：逐步简化问题规模

递归的工作步骤

递推过程：逐步分解问题，使其更简单

回归过程：根据简单情形组装最后的答案

阶乘函数

使用循环实现

```
unsigned int GetFactorial( unsigned int n )
{
  unsigned int result = 1, i = 0;
  while( ++i <= n )
    result *= i;
  return result;
}
```

使用递归实现

```
unsigned int GetFactorial( unsigned int n )
{
  unsigned int result;
  if( n == 1 )          result = 1;
  else                  result = n * GetFactorial( n - 1 );
  return result;
}
```

斐波那契数列函数

使用循环实现

```
unsigned int GetFibonacci( unsigned int n )
{
  unsigned int i, f1, f2, f3;
  if( n == 2 || n == 1 )        return 1;
  f2 = 1;                       f1 = 1;
  for( i = 3; i <= n; i++ ){
    f3 = f1 + f2;               f1 = f2;            f2 = f3;
  }
  return f3;
}
```

使用递归实现

```
unsigned int GetFibonacci( unsigned int n )
{
  if( n == 2 || n == 1 )        return 1;
  else                          return GetFibonacci( n - 1 ) + GetFibonacci( n - 2 );
}
```

循环与递归的比较

循环使用显式的循环结构重复执行代码段，递归使用重复的函数调用执行代码段

循环在满足其终止条件时终止执行，而递归则在问题简化到最简单情形时终止执行

循环的重复是在当前迭代执行结束时进行，递归的重复则是在遇到对同名函数的调用时进行

循环和递归都可能隐藏程序错误，循环的条件测试可能永远为真，递归可能永远退化不到最简单情形

理论上，任何递归程序都可以使用循环迭代的方法解决

- 递归函数的码更短小精悍
- 一旦掌握递归的思考方法，递归程序更易理解

递归函数调用的栈框架

```
#include <iostream>
using namespace std;
void PrintWelcomeInfo();
unsigned int GetInteger();
unsigned int GetFactorial( unsigned int n );
int main()
{
  unsigned int n, result;
  PrintWelcomeInfo();
  n = GetInteger();
  result = GetFactorial( n );
  cout << n << "! = " << result << ".\n";
  return 0;
}
void PrintWelcomeInfo()
{
  cout << "The program gets a number and computes the factorial.\n";
}
```

递归函数调用的栈框架

```
unsigned int GetInteger()
{
  unsigned int t;
  cout << "Input a non-negative number: ";
  cin >> t;
  return t;
}
unsigned int GetFactorial( unsigned int n )
{
  unsigned int result;
  if( n == 0 )
    result = 1;
  else
    result = n * GetFactorial( n - 1 );
  return result;
}
```

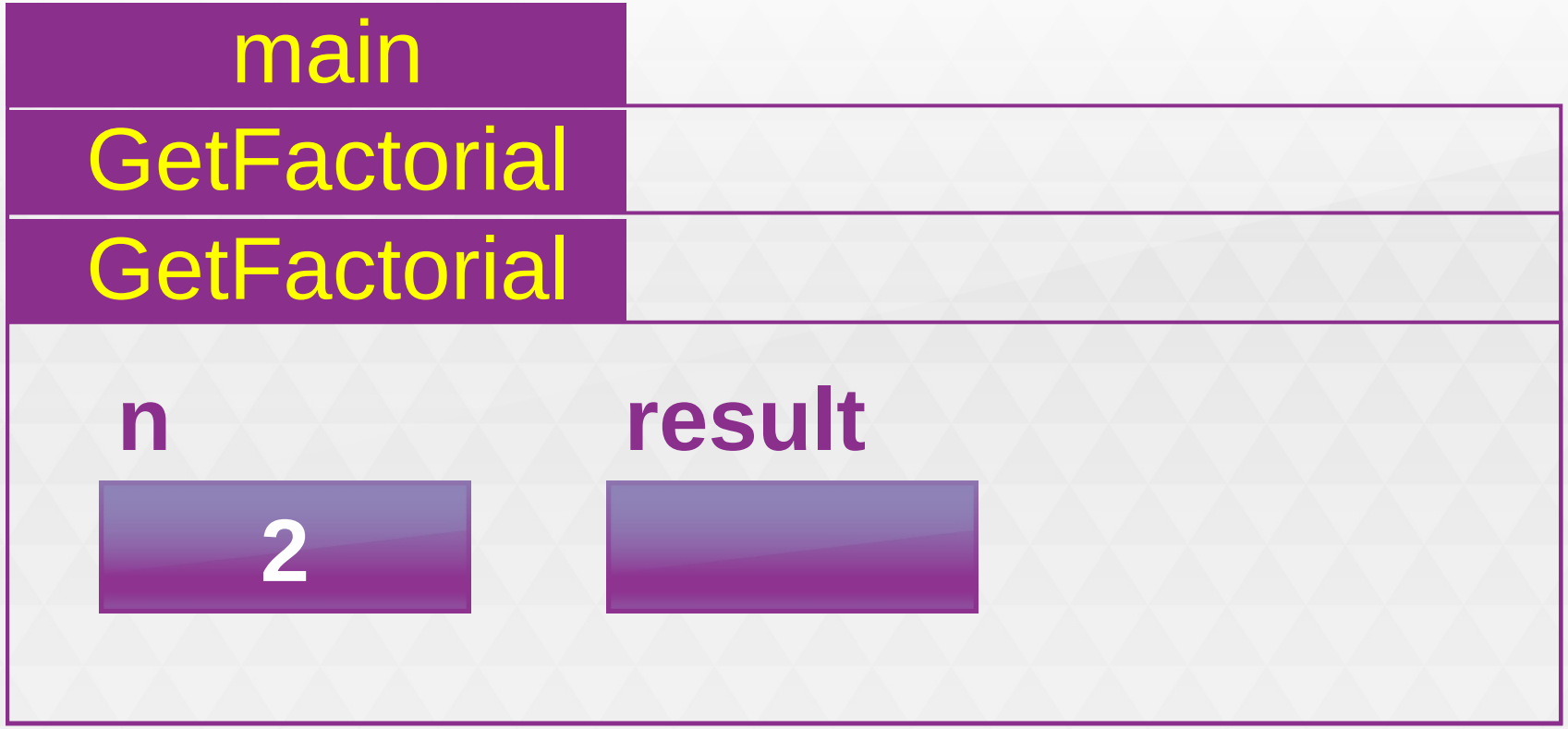
函数调用栈框架

main 函数栈框架

函数调用栈框架

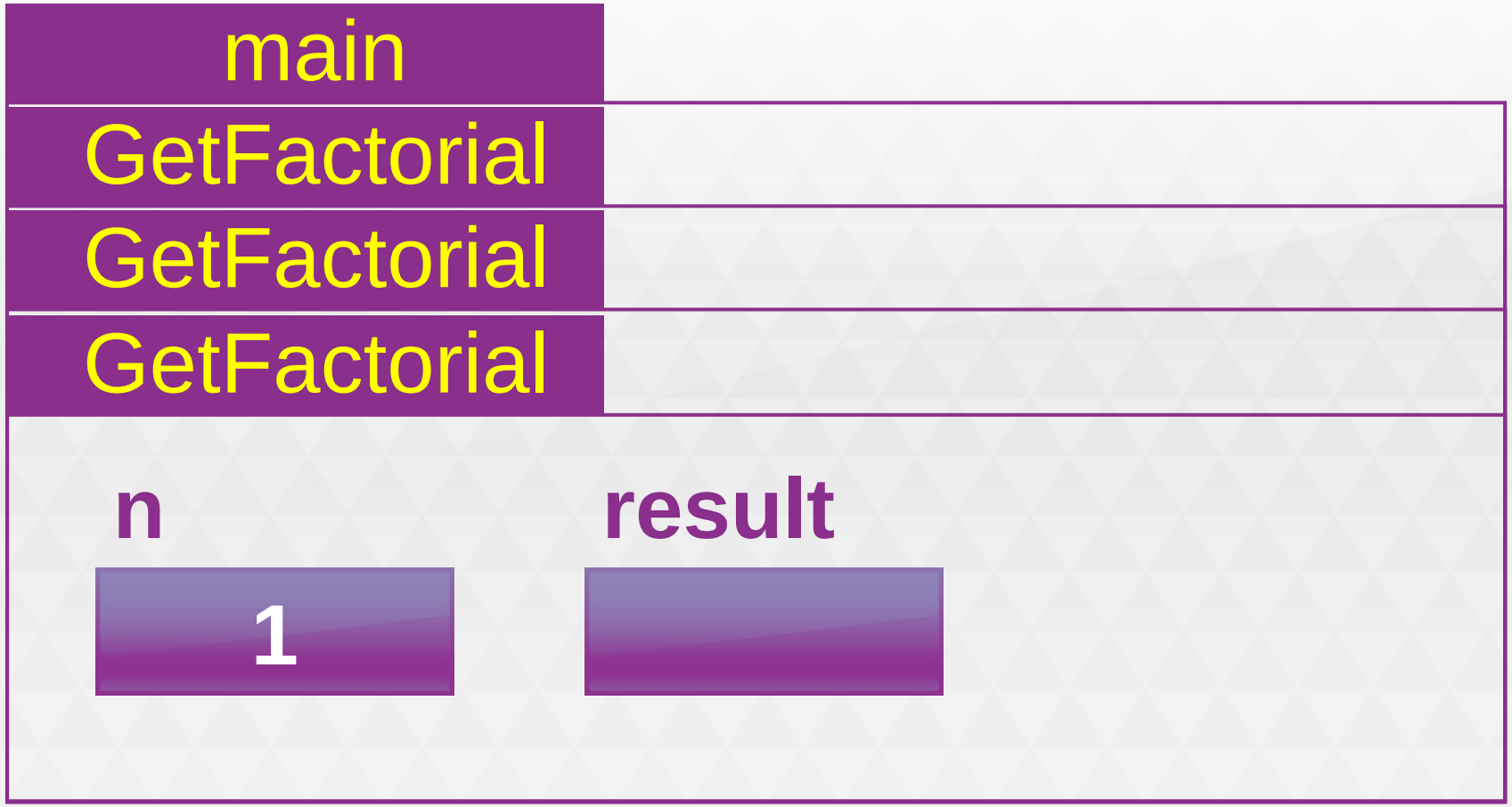
第一次以 3 为参数调用 GetFactorial，进入函数时

函数调用栈框架



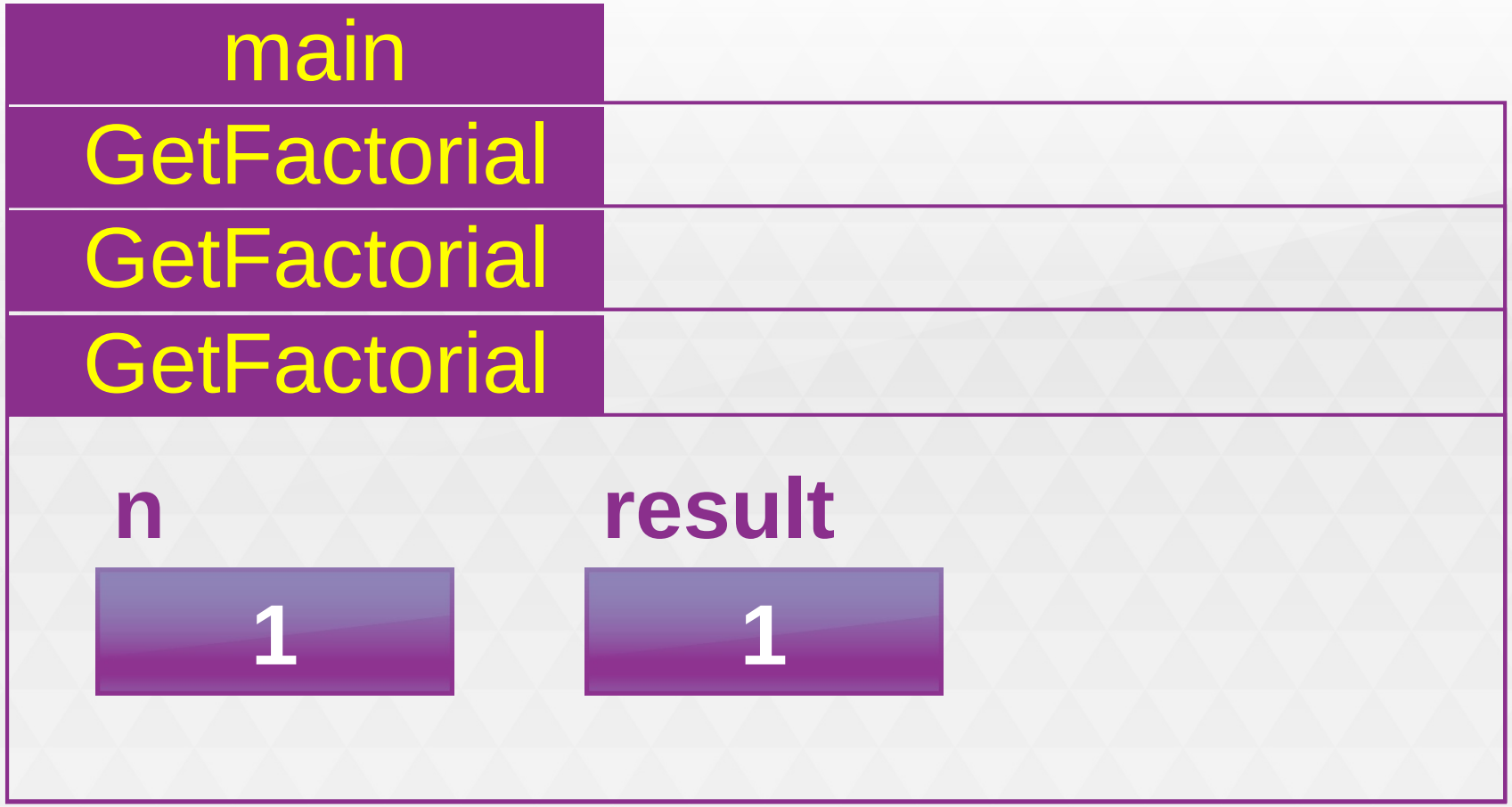
第二次以 2 为参数调用 GetFactorial，进入函数时

函数调用栈框架



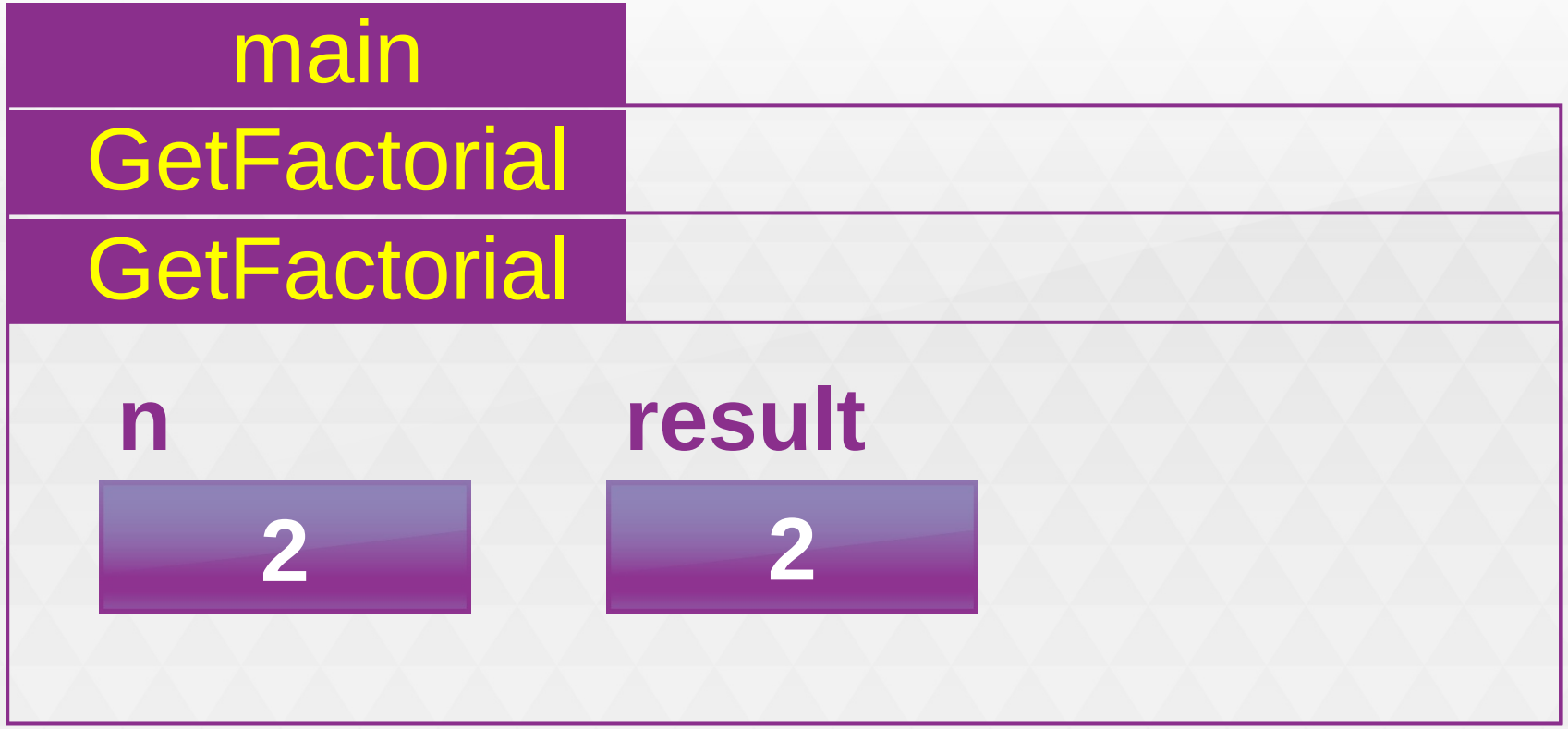
第三次以 1 为参数调用 GetFactorial，进入函数时

函数调用栈框架



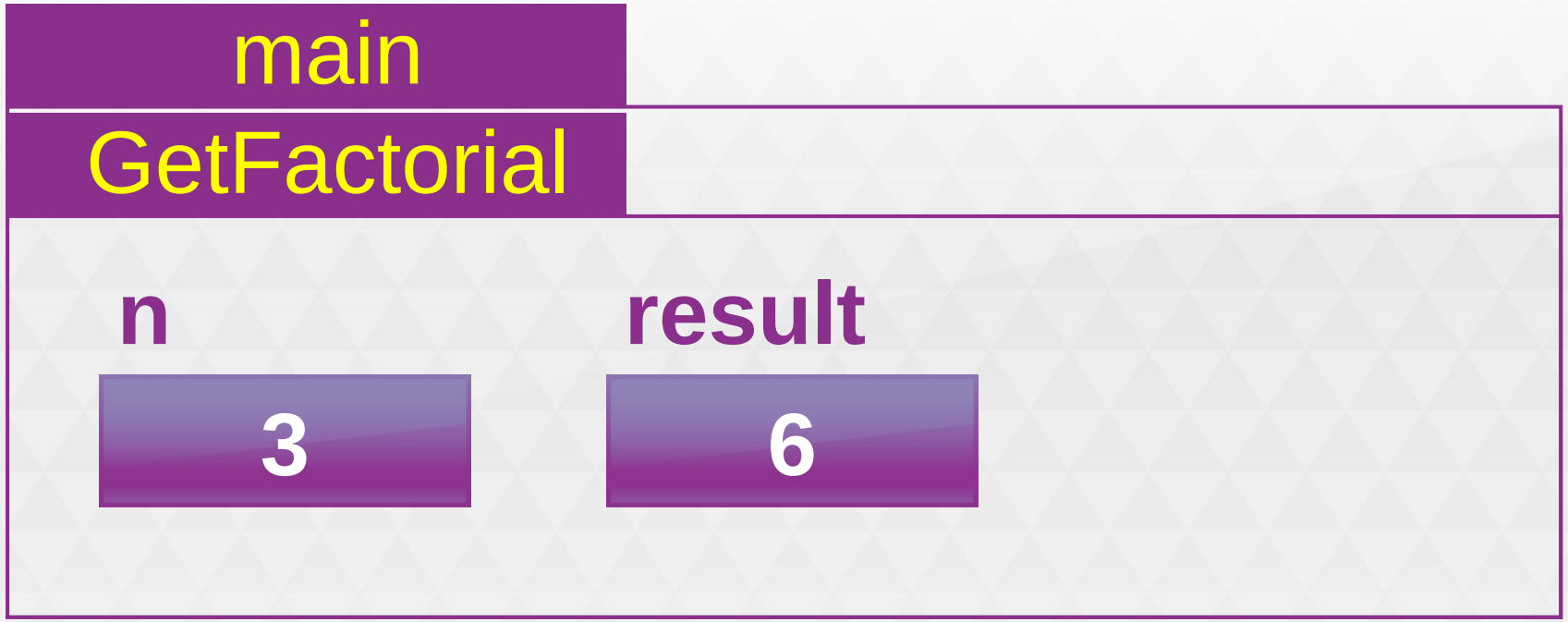
第三次以 1 为参数调用 GetFactorial，退出函数前

函数调用栈框架



第二次以 2 为参数调用 GetFactorial，退出函数前

函数调用栈框架



第一次以 3 为参数调用 GetFactorial，退出函数前

函数调用栈框架

递归调用结束后的 main 函数栈框架

汉诺塔问题

假设有三个分别命名为 X、Y 和 Z 的塔座，在塔座 X 上插有 n 个直径大小不同、依小到大分别编号为 1, 2, …, n 的圆盘，如图所示：

要求将塔座X上的 n 个圆盘移动到塔座 Z 上并按相同顺序叠放，圆盘移动时必须遵循下述规则：

- 每次只能移动一个圆盘；
- 圆盘可以插在X、Y与Z中的任意塔座上；
- 任何时刻都不能将较大的圆盘压在较小的圆盘上。

如何实现移动圆盘的操作呢？

问题分析

待解决的问题

Q1：是否存在某种简单情形，问题很容易解决

Q2：是否可将原始问题分解成性质相同但规模较小的子问题，且新问题的解答对原始问题有关键意义

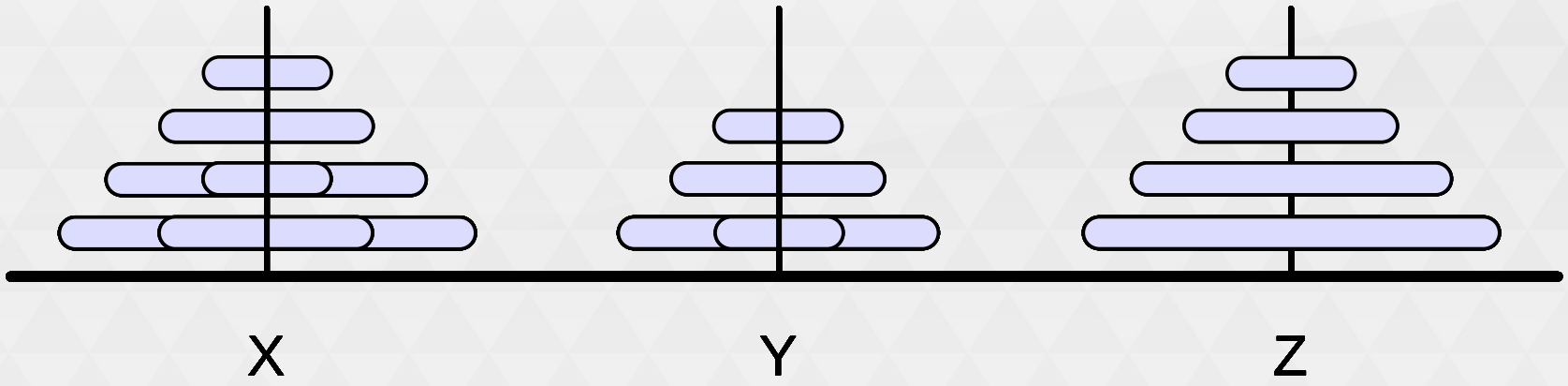
解答方案

A1：只有一个圆盘时是最简单情形

A2：对于 n > 1，考虑 n – 1 个圆盘，如果能将 n - 1 个圆盘移动到某个塔座上，则可以移动第 n 个圆盘

策略：首先将 n – 1 个圆盘移动到塔座 Y 上，然后将第 n 个圆盘移动到 Z 上，最后再将 n - 1 个圆盘从 Y 上移动到 Z 上

汉诺塔演示



伪代码

```
void MoveHanoi( unsigned int n, HANOI from, HANOI tmp, HANOI to )
{
  if( n == 1 )
    将一个圆盘从 from 移动到 to
  else
  {
    将 n – 1 个圆盘从 from 以 to 为中转移动到 tmp
    将圆盘 n 从 from 移动到 to
    将 n - 1个圆盘从 tmp 以 from 为中转移动到 to
  }
}
```

程序代码

```
#include <iostream>
using namespace std;
/* 枚举类型 HANOI，其文字分别表示三个圆柱的代号 */
typedef enum {X, Y, Z} HANOI;
void PrintWelcomeInfo();
unsigned int GetInteger();
void MoveHanoi( unsigned int n, HANOI from, HANOI tmp, HANOI to );
char ConvertHanoiToChar( HANOI x );
void MovePlate( unsigned int n, HANOI from, HANOI to );
int main()
{
  unsigned int n;
  PrintWelcomeInfo();
  n = GetInteger();
  MoveHanoi( n, X, Y, Z );
  return 0;
}
```

程序代码

```
void PrintWelcomeInfo()
{
  cout << "The program shows the moving process of Hanoi Tower.\n";
}
unsigned int GetInteger()
{
  unsigned int t;
  cout << "Input number of plates: ";
  cin >> t;
  return t;
}
char ConvertHanoiToChar( HANOI x )
{
  switch( x )
  {
  case X: return 'X';
  case Y: return 'Y';
  case Z: return 'Z';
  default: return '\0';
  }
}
```

程序代码

```
void MovePlate( unsigned int n, HANOI from, HANOI to )
{
  char fc, tc;
  fc = ConvertHanoiToChar( from );
  tc = ConvertHanoiToChar( to );
  cout << n << ": " << fc << " --> " << tc << endl;
}
void MoveHanoi( unsigned int n, HANOI from, HANOI tmp, HANOI to )
{
  if( n == 1 )
    MovePlate( n, from, to );
  else
  {
    MoveHanoi( n - 1, from, to, tmp );
    MovePlate( n, from, to );
    MoveHanoi( n - 1, tmp, from, to );
  }
}
```

递归信任

递归实现是否检查了最简单情形

- 在尝试将问题分解成子问题前，首先应检查问题是否已足够简单
- 在大多数情况下，递归函数以 if 开头
- 如果程序不是这样，仔细检查源程序

是否解决了最简单情形

- 大量递归错误是由没有正确解决最简单情形导致的
- 最简单情形不能调用递归

递归分解是否使问题更简单

- 只有分解出的子问题更简单，递归才能正确工作，否则将形成无限递归，算法无法终止

递归信任

问题简化过程是否能够确实回归最简单情形，还是遗漏了某些情况

如汉诺塔问题需要调用两次递归过程，程序中如果遗漏了任意一个都会导致错误

子问题是否与原始问题完全一致

如果递归过程改变了问题实质，则整个过程肯定会得到错误结果

使用递归信任时，子问题的解是否正确组装为原始问题的解

将子问题的解正确组装以形成原始问题的解也是必不可少的步骤

容　错

容错的定义：允许错误的发生

错误的处理

- 很少见的特殊情况或普通错误：忽略该错误不对程序运行结果产生影响
- 用户输入错误：通知用户错误性质，提醒用户更正输入
- 致命错误：通知用户错误的性质，停止执行

典型容错手段

- 数据有效性检查
- 程序流程的提前终止

数据有效性检查

```
void GetUserInput()
{
  获取用户输入数据
  while( 用户输入数据无效 )
  {
    通知用户输入数据有误，提醒用户重新输入数据
    重新获取用户输入数据
  }
}
void Input()
{
  GetInputData();
  while( !IsValid() )
  {
    OutputErrorInfo();
    GetinputData();
  }
}
```

素性判定函数第六版

```
const int failed_in_testing_primality = 1;
bool IsPrime( unsigned int n )
{
  unsigned int i = 3, t = (unsigned int)sqrt(n) + 1;
  if( n <= 1 )
  {
    cout << "IsPrime: Failed in testing the primality of " << n << endl;
    exit( failed_in_testing_primality );
  }
  if( n == 2 )
    return true;
  if( n % 2 == 0 )
    return false;
  while( i <= t )
  {
    if( n % i == 0 )
      return false;
    i += 2;
  }
  return true;
}
```

算法复杂度

引入算法复杂度的目的

- 度量算法的效率与性能

大 O 表达式

- 算法效率与性能的近似表示（定性描述）
- 算法执行时间与问题规模的关系

表示原则

- 忽略所有对变化趋势影响较小的项，例如多项式忽略高阶项之外的所有项
- 忽略所有与问题规模无关的常数，例如多项式的系数

标准算法复杂度类型

$O(1)$：常数级，表示算法执行时间与问题规模无关

$O(\log(n))$：对数级，表示算法执行时间与问题规模的对数成正比

$O(\text{sqrt}(n))$：平方根级，表示算法执行时间与问题规模的平方根成正比

$O(n)$：线性级，表示算法执行时间与问题规模成正比

$O(n*\log(n))$：$n*\log(n)$ 级，表示算法执行时间与问题规模的 $n*\log(n)$ 成正比

$O(n^2)$：平方级，表示算法执行时间与问题规模的平方成正比

……

算法复杂度估计

```
for( i = 0; i < n; i++ )
  cout << "No. " << I << ": Hello, World!\n";
```

$O(n)$

```
for( i = 0; i < n; i++ )
  for( j = 0; j < n; j++ )
    cout << "Hello, World!\n";
```

$O(n^2)$

```
for( i = 0; i < n; i++ )
  for( j = i; j < n; j++ )
    cout << "Hello, World!\n";
```

$O(n^2)$

编程实践

4.1 设计算法，将某个大于1的自然数n分解为其素因子的乘积，如6=2*3，7=7，8=2*2*2。

4.2 设计算法，分别使用循环和递归两种策略求二项式系数C(n,k)。其中，n为自然数，k为不大于n的非负整数。