1. 在谓词逻辑中构造下面推理的证明：每个喜欢步行的人都不喜欢做汽车，每个人或者喜欢坐汽车或者喜欢骑自行车。有的人不喜欢骑自行车，因而有的人不喜欢步行。

论域：所有人的集合。()：喜欢步行；()：喜欢坐汽车；()：喜欢骑自行车；

解 推理化形式为：

(()→¬())，(()∨())，¬()=》¬()

下面给出证明：

(1)¬() P

(2)¬() T(1)，E

(3)¬() T(2)，ES

(4)(()∨()) P

(5)()∨() T(4)，US

(6)() T(3)(5)，I

(7)(()→¬()) P

(8)()→¬() T(7)，US

(9)¬() T(6)(8)，I

(10)¬() T(9) ，EG

2. 设*R*1是*A*上的等价关系，*R*2是*B*上的等价关系，*A*≠∅且*B*≠∅。关系*R*满足：<<*x*1，*y*1>，<*x*2，*y*2>>∈*R*⇔<*x*1，*x*2>∈*R*1且<*y*1，*y*2>∈*R*2，证明*R*是*A*×*B*上的等价关系。

证明 对任意的<*x*，*y*>∈*A*×*B*，由*R*1是*A*上的等价关系可得<*x*，*x*>∈*R*1，由*R*2是*B*上的等价关系可得<*y*，*y*>∈*R*2。再由*R*的定义，有<<*x*，*y*>，<*x*，*y*>>∈*R*，所以*R*是自反的。

对任意的<*x*，*y*>、<*u*，*v*>∈*A*×*B*，若<*x*，*y*>*R*<*u*，*v*>，则<*x*，*u*>∈*R*1且<*y*，*v*>∈*R*2。由*R*1对称得<*u*，*x*>∈*R*1，由*R*2对称得<*v*，*y*>∈*R*2。再由*R*的定义，有<<*u*，*v*>，<*x*，*y*>>∈*R*，即<*u*，*v*>*R*<*x*，*y*>，所以*R*是对称的。

对任意的<*x*，*y*>、<*u*，*v*>、<*s*，*t*>∈*A*×*B*，若<*x*，*y*>*R*<*u*，*v*>且<*u*，*v*>*R*<*s*，*t*>，则<*x*，*u*>∈*R*1且<*y*，*v*>∈*R*2，<*u*，*s*>∈*R*1且<*v*，*t*>∈*R*2。由<*x*，*u*>∈*R*1、<*u*，*s*>∈*R*1及*R*1的传递性得<*x*，*s*>∈*R*1，由<*y*，*v*>∈*R*2、<*v*，*t*>∈*R*2及*R*2的传递性得<*y*，*t*>∈*R*1。再由*R*的定义，有<<*x*，*y*>，<*s*，*t*>>∈*R*，即<*x*，*y*>*R*<*s*，*t*>，所以*R*是传递的。

综上可得，*R*是*A*×*B*上的等价关系。

1. 设函数f：R×R→R×R，R为实数集，f定义为：f(<x，y>)=<x+y，x-y>。1)证明f是双射。

解：1）∀<x1，y1>，<x2，y2>∈R×R，若f(<x1，y1>)=f(<x2，y2>)，即<x1+y1，x1-y1>=<x2+y2，x2-y2>，则x1+y1=x2+y2且x1-y1=x2-y2得x1=x2，y1=y2从而f是单射。

2）∀<p，q>∈R×R，由f(<x，y>)=<p，q>，通过计算可得x=(p+q)/2；y=(p-q)/2；从而<p，q>的原象存在，f是满射。

4. 若无向图*G*是不连通的，证明*G*的补图是连通的。

证明 设无向图*G*是不连通的，其*k*个连通分支为、、…、。任取结点、∈*G*，若和不在图*G*的同一个连通分支中，则[，]不是图*G*的边，因而[，]是图的边；若和在图*G*的同一个连通分支中，不妨设其在连通分支（1≤≤）中，在不同于的另一连通分支上取一结点，则[，]和[，]都不是图*G*的边，，因而[，]和[，]都是的边。综上可知，不管那种情况，和都是可达的。由和的任意性可知，是连通的。

5.设图*G*中有9个结点，每个结点的度不是5就是6。试证明*G*中至少有5个6度结点或至少有6个5度结点。

证明 由握手定理的推论可知，*G*中5度结点数只能是0、2、4、6、8五种情况（此时6度结点数分别为9、7、5、3、1）。以上五种情况都满足至少5个6度结点或至少6个5度结点的情况。