「CTT 2021 Day 1」末日魔法少女计划

出题人：李欣隆。

Solution

题目等价于区间半群查询，限制查询的代价（合并的区间个数）不超过 k，求一个预处理方案，最小化预处理代价 m。在预处理时，初始有区间 $[i,i+1)$，可以从区间 $[a,b)$，$[b,c)$ 合并得到 $[a,c)$，合并次数为 m。

部分分的设置和以下算法有关。

算法1

对 $k=1$，需要合并出所有 $[l,r)$ 满足 $r-l>1$。

算法2

对 $k=2$，可以使用分治：
对 $[l,r)$ 合并得到每个 $[x,m)$ 和 $[m,x)$，然后递归合并 $[l,m)$ 和 $[m,r)$。

$m(n)=2m(\frac{n}{2})+O(n)=O(n\log n)$。

算法3

对 $k=3$，可以使用递归分块：
将序列分为 $\sqrt{n}$ 大小的块，合并出每个块区间，以及每个块的前后缀，块内递归处理。每个区间可以表示为块区间和左边的块前缀和右边的块后缀。

$m(n)=\sqrt{n}\cdot m(\sqrt{n})+O(n)=O(n\log\log n)$。

算法4

对 $k=4$，可以使用递归分治：
将序列分为 $\log n$ 大小的块，块内递归处理，块间用算法2处理，另外处理每个块的前后缀和。

$m=\frac{n}{\log n}m(\log n)+O(n)=O(n\log^* n)$。

算法5

对足够大的 k，可以构造线段树，叶子已经有了，只需合并出内部结点。
$m(n)=O(n)$；
$k\geq 2\log_2 n-O(1)$。

算法6

算法 5 使用线段树导致只适用于较大的 k。将线段树靠近根的 n_0 个结点换为其它适用于 $k=k'$ 的算法预处理，可以增大 m 并适用于更小的 k。

$m_k(n)=O(n)+m_{k'}(n_0)$；
$k\geq 2\log_2(\frac{n}{n_0})+k'-O(1)$。

算法7

观察算法 1,2,3,4 的特性，可以得到适用于所有 k 的算法：
对序列分块，块内递归处理，块间递归到 $k-2$ 的情况处理，另外处理每个块的前后缀和，边界情况为 $k=1,2$。

$m_k(n)=\frac{n}{B(k,n)}m_k(B(k,n))+O(n)$。

这里需要块大小 B，可以使用动态规划求出一个好的分块方案。
对每个 k，有 $B=O(\frac{m_{k-2}(n)}{n})$，这可以减小动态规划的时间复杂度。

算法8

算法 7 的实现不够精细，可以和算法 6 结合使用，在线段树上层用算法 7 的方案，下层用普通的线段树结构。

算法9

可以更精细地实现算法 7。
$m_k(n)$ 表示长度 n 的序列，支持查询时只用 k 个区间，预处理的代价；
$m_{k,1}(n)$ 表示长度 n 的序列，支持查询时只用 k 个区间，且查前缀只需 1 个区间，预处理的代价；
$m_{k,2}(n)$ 表示长度 n 的序列，支持查询时只用 k 个区间，且查前后缀只需 1 个区间，预处理的代价；
边界情况为 $k=0,1$ 和 $n\leq k$。

对于 $m_{k,2}(n)$，需要用动态规划求出一个分块方案，其中第一个块和最后一个块内为 $m_{k,1}$，其它块内为 $m_{k,2}$；除了第一个块和最后一个块，块间递归到 $m_{k-2,2}$；前后缀和可以复用第一个块和最后一个块的结果。

$m_{k,1}(n)$ 和 $m_k(n)$ 类似处理。可以发现这样求出的方案比更简单的实现好很多。

所有子任务都保证算法 9 能通过。

「CTT 2021 Day 1」魔塔 OL

出题人：陈松杨。

魔塔游戏，每个怪物有五个属性：它在魔塔的第 x 层，两个实力分别为 y,z，并且打掉它要扣 a 滴血，之后会回 b 滴血。

现在你需要支持以下操作：

- `1 x y z a b`：增加一个怪物。这个怪物的标号是上一次怪物的标号 $+1$；
- `2 id`：删除标号为 id 的怪物；
- `3 X Y Z`：提取出所有 $x\leq X,y\leq Y,z\leq Z$ 的怪物（即偏序），求击杀它们初始最少需要多少血量。

$1\leq q\leq 10^5$，怪物个数 $\leq 5\cdot 10^4$。

Solution

无。

反思

场上一直在码平衡树，贼难写，还被卡常。事实上，扩展到 k 维（本题 $k=4$），维度较高且数据范围为 5×10^4 时，不妨考虑下 `bitset`，块内四毛子预处理所有状态的答案，然后用“逐块处理”的 trick 做到空间线性。

「CTT 2021 Day 1」基因编辑

出题人：陈鸿基。

给定一个长为 n 的序列 a，以及 L,R。你需要找到最短的 l,r 满足 $l\leq L\leq R\leq r$，并且不存在别的 l',r' 满足 $(a_l,a_r)=(a'_l,a'_r)$。

$1 \le n \le 10^6$。

Solution

😅签到题。

「CTT 2021 Day 2」简单数据结构

出题人：钱易。

给定一个长为 n 的序列 a，执行 q 次询问，询问有如下三种：

- `1 x`：将所有 a_i 对 x 取 $\min$；
- `2`：将所有 a_i 变为 $a_i + i$；
- `3 l r`：查询区间 $[l, r]$ 的 a_i 和。

$1 \le n, q \le 2 \times 10^5, 0 \le a_i, v \le 10^{12}$。

时间限制 3000ms，空间限制 512MB。

Solution

我们将被取过 $\min$ 的点为特殊点，则有如下性质：

> 特殊点的值随 i 的增大单调不降。

证明：

> 考虑归纳证明。一开始特殊点集为空，先进行若干次 2 操作，再进行一次 1 操作，此时所有 $a_i \ge x$ 的点加入特殊点集，值均变为 x。
>
> 紧接着又进行若干次 2 操作，再进行一次 1 操作，有一些新点被加入特殊点集。我们只需说明这些点在特殊点集中的前驱 $\le x$ 且后继 $\ge x$ 即可。
>
> 对于前驱而言，因为执行了 1 操作，它的值显然 $\le x$；对于后继而言，它每次 2 操作 + 的值比该点多，所以后继必然也变成了 x。

接下来，问题转化为如下两个任务：

- 计算出每个位置变成特殊点的时刻；
- 给特殊点集开个线段树，每次线段树二分找出后缀，并进行区间覆盖。

前者可以用整体二分 + 李超树做到 $\mathcal{O}(n \log \text{值域} \log n)$，也可以用 KTT 做到**实际效果** $\mathcal{O}(n \log \text{值域})$，或者是整体二分时建凸包，然后用指针在凸包上单调移动做到 $\mathcal{O}(n \log n)$。

后者显然可以做到 $\mathcal{O}(n \log n)$。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$。

「CTT 2021 Day 2」Datalab

出题人：周雨扬。

交互题，有一个长为 $k = 13$ 的序列 sgn，满足 $\text{sgn}_i \in \{-1, 1\}$。

假如给定一个长为 k 的 `bitset` s，它对应的数为 $\sum\limits_{i=0}^{k-1} [s_i = 1]\text{sgn}_i \cdot 2^i$。

我们定义 $a \oplus b$，每次交互给出 a, b，交互库返回 $g(f(A) \oplus f(B))$。

你需要在不超过 140 次询问内求出 sgn 数组。

Solution

无。

反思

对于交互题，我总是无从下手。我们可以采取“从一般到特殊”的思想，将 `Add(a, b)` 特殊化成 `Add(a, a)`，并从简单的情形入手，比如我们可以让 `a=100...0`，发现这可以找到下一个 $= a_0$ 的位置 i，并且只有 $[1, i]$ 这一段为 1。紧接着考虑并行，将若干次询问压缩至 1 次，并对边界（相邻块撞一起）进行分析。

「CTT 2021 Day 2」随机游走

出题人：潘骏跃。

给定一张 n 个点的有向图，初始有边 $i \to i+1$ $(i \in [1, n))$，你需要额外添加 m 条边（可以重边、自环），使得从 1 走到 n 的期望步数最大。

你需要求出期望值。

$1 \le n, m \le 10^9$，模数 p 保证为质数，且 $2 \le p \le 10^9 + 7$。

Solution

场切，找规律题。

「CTT 2021 Day 3」小明的树

出题人：余快。

给定一棵 n 个点的以 1 为根的树，以及一个 $2 \sim n$ 的排列 p。

我们依次将 p_i 点点亮。我们定义一个局面是好的，当且仅当每个点亮的点的子树全是亮的，并且它的贡献是亮连通块个数。

现在有 q 次修改，每次删掉一条边，再加入一条边（保证仍然是树），求每次的贡献和。

$1 \le n, q \le 5 \cdot 10^5$。

Solution

无。

反思

场上看到“每次删边再加边”，心里一发慌：哎我不会 LCT 死定了。于是敲暴力把前面 subtask 全拼满，就跑路了。

事实上，我们观察到“点亮的点的子树全亮”这个条件很别扭，不妨反面考虑：那没点亮的点不就是以 1 为根的连通块吗？进而联想到倒过来考虑问题，每次拼成以 1 为根的连通块，贡献是"两端点状态不同的边数"。

对于树上连通块而言，我们显然可以通过 $V - E = C$ 来判断。由于 $V - E$ 始终 ≥ 1，所以我们在线段树维护区间最小值即可。于是我们发现这跟 LCT 半毛钱关系没有，"删边加边仍是一棵树"是出题人所要保证的条件，我们只需要利用它进行线段树操作即可。

「CTT 2021 Day 3」出题高手

出题人：陈奇之。

给定一个序列 a，满足 a_i 在 $[-1000,1001]$ 内随机生成。我们定义区间 $[l,r]$ 的权值为 $\frac{\sum\limits_{i=l}^{r} a_i^2}{r-l+1}$。

有 q 次询问，每次查询 $[L,R]$ 内所有区间的权值最大值。

- $1 \le n,q \le 10^5$;
- $n = 5 \cdot 10^5, q = 1$。

Solution

场切，印象里是对于每个前缀，取单调栈里的栈顶 2000 个元素，得到 $2000n$ 个候选区间。然后瞎几把预处理一下，查询是平凡的。卡卡常、调调参就过了。

「CTT 2021 Day 3」扑克比大小

给定字符串 s，我们定义两个字符串 a,b 的大小为 $aa\cdots a$ 和 $bb\cdots b$（即循环串）的大小。

有 q 次查询，每次问 $s_l\cdots s_r$ 在 s 的所有本质不同子串里的排名。

$1 \le n,q \le 10^6$。

「CTT 2021 Day 4」算术

题意见原题面。

Solution

【模板】阶。

反思

对于猜结论，看到如此复杂的转换方式，可以大胆猜想它背后有很简洁的规律。

我们可以列一些特殊情况去猜出结论来，比如找到第一个可以截成两段的数 $\lceil\frac{b^k}{p}\rceil p$，它被截成 $1 \mid \lceil\frac{b^k}{p}\rceil p - b^k$，变成 $(\lceil\frac{b^k}{p}\rceil - b^k)b - 1 \equiv 0 \pmod p$，即 $b^{k+1} \equiv -1 \pmod p$。