数值代数十一上机作业

一、 上机作业 1

1.1 问题描述

对单位正方形上的 possion 方程：

$$\begin{cases} -\triangle u = f & in\Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $f = 2\pi^2 sin(\pi x)sin(\pi y)$，$\Omega = [0,1]\times[0,1]$，真解为 $u = sin(\pi x)sin(\pi y)$

利用五点差分法求解：

离散化:

$$x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N \tag{2}$$

$$y_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N \tag{3}$$

其中 N=1/h

对内部节点

$$\frac{2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j) \tag{4}$$

其中 $i = 1, \ldots, N \quad j = 1, \ldots, N$

对边界节点，代入边界条件

$$u_{i,j} = 0 \qquad on\partial\Omega \tag{5}$$

得到一个 $(N-1)\times(N-1)$ 阶线性方程组：

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{N-1}}{h^2} & -\frac{I_{N-1}}{h^2} & & \\ \frac{-I_{N-1}}{h^2} & \frac{A_{N-1}}{h^2} & \frac{-I_{N-1}}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{-I_{N-1}}{h^2} & \frac{-A_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中 I_{N-1} 为单位矩阵，

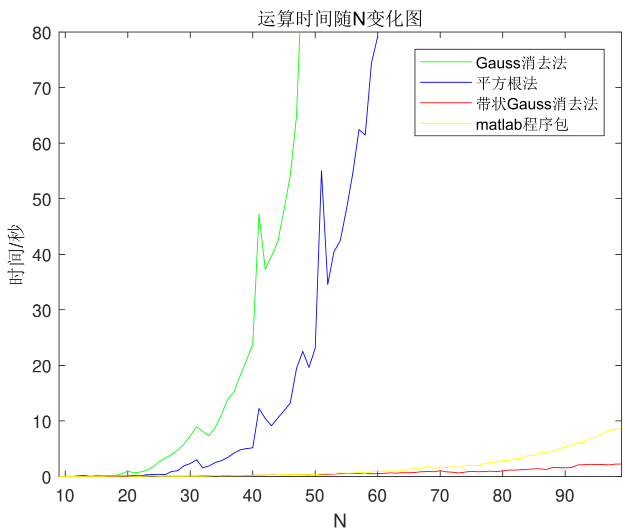
$$A_{N-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,N-1} \end{bmatrix} \quad f_i = \begin{bmatrix} f(x_i, y_1) \\ f(x_i, y_2) \\ \vdots \\ f(x_i, y_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{7}$$

这里 $i=1,2,\ldots,N-1$

对 $N=9,10,\ldots,99$

分别用 Gauss 消去法，LDL^T 方法，带状 Gauss 消去法，matlab 现有程序包求解

以下画出运算时间随 N 的变化曲线



总结：一般的 Gauss 消去法运算量约为 $\frac{2}{3}N^6$，LDL^T 方法，所需要的运算量约为 $\frac{1}{3}N^6$，对大规模的矩阵算起来特别慢。而带状 Gauss 消去法运算量约为 $O(N^4)$，当矩阵规模增大时带状 Gauss 消去法相比于之前两种大大缩短了计算时间，并且比用 matlab 中已有的程序包求解还要快一些。

二、 上机作业 2

A 为 40 阶 Hilbert 矩阵，即 A 的第 i 行第 j 列元素为

$$a_{i,j}=\frac{1}{i+j-1} \tag{8}$$

向量 b 第 i 个分量为

$$b_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i+j-1} \tag{9}$$

求解线性方程组 Ax=b，真解为 $x=[1,1,\ldots,1]^T$

分别用平方根法，改进平方根法，matlab 现有程序包求解，用列主元 Gauss 消去法计算：

利用平方根法计算时间为 0.002s，误差 $\|x_1-x\|_2=11.4397$

用改进平方根法计算时间为 0.003s，误差 $\|x_2-x\|_2=11.5916$

用列主元 Gauss 消去法计算时间为 0.006s，误差 $\|x_3-x\|_2=739.9179$

用 matlab 程序包求解计算时间为 0.001s 误差 $\|x_4-x\|_2=240.7459$

总结：$n \times n$ 的 Hilbert 矩阵条件数随 n 指数增长 $O((1+\sqrt{2})^{4n}/\sqrt{n})$, 过于病态，用各种方法运算时间相差不大，且都会有较大误差，但用平方根法与改进平方根法误差相对较小。