

数值代数十一作业

高广维

上机作业一

- 方程为单位正方形上面的 poisson 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中, 真解 $u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$, 相应右端函数 $f = 2\pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

- 我们采用五点差分法求解这个问题. 首先要对求解区间离散化, 我们对区域做正方形网格剖分:

网格节点:

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)h, i = 1, 2, \dots, N+1 \\ y_j &= (j-1)h, j = 1, 2, \dots, N+1 \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $N = 1/h$

下面在网格节点上, 我们求解原方程的差分近似方程. 对于内部节点, 我们用 2 阶差商代替 2 阶偏导数:

$$\frac{2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j) \quad (3)$$

其中 $i = 2, \dots, N, j = 2, \dots, N$.

对于边界节点, 直接带入边界条件:

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (4)$$

由此可见, 我们对原问题的离散近似化构成了一个 $(N-1) \times (N-1)$ 阶线性方程组, 求解这个线性代数方程, 我们就得到了原问题的数值近似解.

- 几点要求:
 - (1) 写出线性方程组矩阵各个元素的具体取值.
 - (2) 分别利用 Gauss 消去法, LDL^T 方法, 带状高斯消去法, matlab(python) 现有程序包去求解本问题中的线性代数方程. 画出当 $N = 9, \dots, 99$ 时运算时间随 N 变化的曲线.

上机作业二

第一章书后上机作业第二题的 (2), 用平方根法和带状高斯消去法求解方程, 对运算时间进行对比和分析.

书面作业

第一章课后习题 (38 页), 18, 20, 23

提交日期

10 月 9 日, 星期二 (国庆假期后第次一课)