

## 数值代数第二章上机作业

### 一、问题 1

用算法 2.5.1 估计 5 到 20 阶 Hilbert 矩阵的  $\infty$  范数条件数

矩阵规模	无穷范数	条件数
5	2.283	6.248e+05
6	2.450	2.641e+07
7	2.593	9.852e+08
8	2.718	3.387e+10
9	2.829	1.100e+12
10	2.929	3.421e+13
11	3.020	1.027e+15
12	3.103	3.261e+16
13	3.180	4.493e+17
14	3.252	1.256e+19
15	3.318	9.989e+17
16	3.381	1.835e+18
17	3.440	1.323e+18
18	3.495	9.618e+19
19	3.548	3.380e+19
20	3.598	3.163e+18

数值结果：对 Hilbert 矩阵  $A$  的条件数进行计算时，当  $A$  规模较小时，计算所得结果符合指数增长的趋势，但当矩阵规模达到 15 时计算所得  $A$  的条件数随  $n$  的增大开始震荡。

分析：当  $A$  规模较小不非常并态时，计算得到当条件数较为精确，计算所得结果有指数增长的趋势；但当矩阵规模较大时， $A$  的三角分解已经相当不准确，计算所得的  $\|A^{-1}\|_{\infty}$  要比真实值小得多，计算得到的条件数也会比真实值小得多。

## 二、 问题 2

矩阵规模	实际相对误差	计算估计相对误差
5	8.737930e-16	7.401487e-16
6	1.591971e-16	5.551115e-17
7	3.670094e-16	5.773160e-16
8	1.161357e-16	1.480297e-16
9	3.240888e-15	2.410770e-15
10	1.274903e-14	1.243450e-14
11	2.485871e-14	1.302662e-14
12	4.065778e-14	2.167155e-14
13	3.584752e-14	1.582572e-14
14	7.527386e-14	3.212245e-14
15	4.185389e-13	1.452513e-13
16	5.051220e-13	3.911792e-13
17	1.695057e-12	3.324156e-13
18	5.440089e-13	4.520828e-13
19	2.743271e-12	1.540624e-12
20	9.255517e-13	4.906692e-13
21	2.310420e-12	5.914333e-13
22	2.188465e-11	1.818634e-11
23	8.622616e-11	3.626103e-11
24	1.068635e-10	2.767588e-11
25	3.380843e-11	1.453782e-11
26	5.689025e-10	1.451976e-10
27	4.562095e-11	1.266010e-11
28	6.125150e-10	2.542527e-10
29	1.891001e-09	3.357648e-10
30	8.357871e-09	3.775375e-09

数值结果与总结：实际相对误差与计算估计相对误差比较接近，但有时会比计算估计相对误差大，这是由于舍入误差的影响使得计算得到的残量  $\|r\|_\infty$  会比真实值小很多

注：代码可在 <https://github.com/Zhuifengzhuimeng/Numerical-Algebra> 中找到

## 参考文献

- [1] 徐书方，高立，张平文著《数值线性代数》第二版