

# 数值代数十一上机作业

## 一、上机作业 1

### 1.1 问题描述

对单位正方形上的 poisson 方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中  $f = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , 真解为  $u = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

利用五点差分法求解:

离散化:

$$x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N \quad (2)$$

$$y_j = jh, j = 0, 1, \dots, N \quad (3)$$

其中  $N=1/h$

对内部节点

$$\frac{2u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{2u_{i,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = f(x_i, y_j) \quad (4)$$

其中  $i = 1, \dots, N$   $j = 1, \dots, N$

对边界节点, 代入边界条件

$$u_{i,j} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (5)$$

得到一个  $(N-1) \times (N-1)$  阶线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{N-1}}{h^2} & -\frac{I_{N-1}}{h^2} & & \\ -\frac{I_{N-1}}{h^2} & \frac{A_{N-1}}{h^2} & -\frac{I_{N-1}}{h^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -\frac{I_{N-1}}{h^2} & \frac{A_{N-1}}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

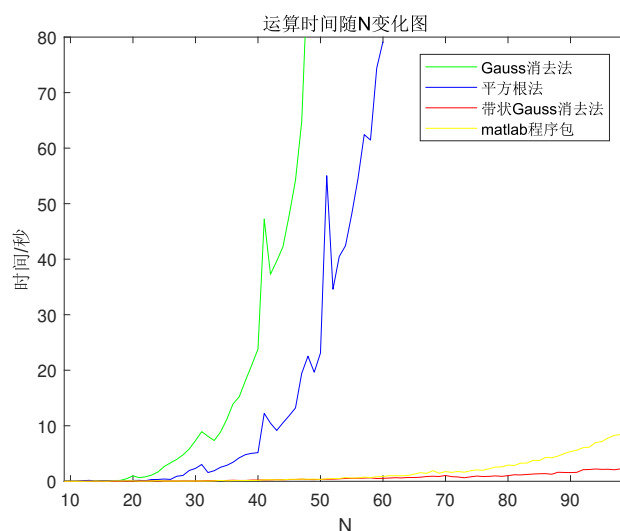
其中  $I_{N-1}$  为  $N-1$  阶单位矩阵,

$$A_{N-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} u_{i,1} \\ u_{i,2} \\ \vdots \\ u_{i,N-1} \end{bmatrix} \quad f_i = \begin{bmatrix} f(x_i, y_1) \\ f(x_i, y_2) \\ \vdots \\ f(x_i, y_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

这里  $i = 1, 2, \dots, N - 1$

对  $N = 9, 10, \dots, 99$

分别用 Gauss 消去法,  $LDL^T$  方法, 带状 Gauss 消去法, matlab 现有程序包求解  
 以下画出运算时间随 N 的变化曲线



总结：一般的 Gauss 消去法运算量约为  $\frac{2}{3}N^6$ ,  $LDL^T$  方法, 所需要的运算量约为  $\frac{1}{3}N^6$ , 对大规模的矩阵算起来特别慢。而带状 Gauss 消去法运算量约为  $O(N^4)$ , 当矩阵规模增大时带状 Gauss 消去法相比于之前两种大大缩短了计算时间, 并且比用 matlab 中已有的程序包求解还要快一些。

## 二、上机作业 2

A 为 40 阶 Hilbert 矩阵, 即 A 的第 i 行第 j 列元素为

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} \quad (8)$$

向量 b 第 i 个分量为

$$b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{i+j-1} \quad (9)$$

求解线性方程组  $Ax=b$ , 真解为  $x = [1, 1, \dots, 1]^T$

分别用平方根法, 改进平方根法, matlab 现有程序包求解, 用列主元 Gauss 消去法计算:

利用平方根法计算时间为 0.002s, 误差  $\|x_1 - x\|_2 = 11.4397$

用改进平方根法计算时间为 0.003s, 误差  $\|x_2 - x\|_2 = 11.5916$

用列主元 Gauss 消去法计算时间为 0.006s, 误差  $\|x_3 - x\|_2 = 739.9179$

用 matlab 程序包求解计算时间为 0.001s 误差  $\|x_4 - x\|_2 = 240.7459$

总结：问题中矩阵规模比较小，用各种方法求解都很快，计算时间差异不大，改进平方根法计算时间比平方根法稍快，符合预期。 $n \times n$  的 Hilbert 矩阵条件数随  $n$  指数增长  $O((1 + \sqrt{2})^{4n}/\sqrt{n})$ , 过于病态，用各种方法运算时间相差不大，且都会有较大误差，但用平方根法与改进平方根法误差相对较小。