图像处理中的数学方法 hw1

一、 作业内容 1

梯度的离散逼近：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} \approx \lambda\frac{v_{i+1,j}-v_{i-1,j}}{2h}+\frac{1-\lambda}{2}(\frac{v_{i+1,j+1}-v_{i-1,j+1}}{2h}+\frac{v_{i+1,j-1}-v_{i-1,j-1}}{2h}) \tag{1}$$

左图中计算得 $\nabla v=(1/2,0)$，$\|\nabla u\|_2=\frac{1}{2}$

右图中计算得 $\nabla v=((1+\lambda)/4,(1+\lambda)/4)$，$\|\nabla u\|_2=\frac{1+\lambda}{4}\sqrt{2}$

左右两边相等时 $\lambda=\sqrt{2}-1$

Laplace 的离散逼近

$$\begin{aligned}\triangle v|_{i,j} \approx \lambda\frac{v_{i+1,j}+v_{i-1,j}+v_{i,j+1}+v_{i,j-1}-4v_{i,j}}{h^2}+\\(1-\lambda)(\frac{v_{i+1,j+1}+v_{i-1,j+1}+v_{i+1,j-1}+v_{i-1,j-1}-4v_{i,j}}{2h^2})\end{aligned} \tag{2}$$

左图中计算得 $\triangle v=1$

右图中计算得 $\triangle v=\frac{1+3\lambda}{2}$

左右两边相等时 $\lambda=\frac{1}{3}$

二、 作业内容 2

2.1 问题描述

用以下模型对图片进行去噪去模糊

$$\hat{u}=argmin_u\lambda\int|\nabla u|dx+\frac{1}{2}\int(\mathcal{A}u-f)^2dx \tag{3}$$

其中 f 是待去噪去模糊的图片, u 是优化变量, 得到的最优解 û 为处理结果. A 是以 k 为卷积核的卷积算子:

求解方法：对 (3) 式采用 Alternative Direction Minimization of Multipliers (ADMM) 算法

$$\mathcal{A}u=k*u \tag{4}$$

2.2 求解方法

注：以下离散均选取循环边值条件，步长 h=1

先将原问题离散：

TV 的离散：

$$\int |\nabla u| dx = \sum_{i,j=1}^{N} |\nabla u|_{i,j}| \tag{5}$$

其中梯度的离散

$$\nabla u|_{i,j} \approx (u_{i+1,j} - u_{i,j}, u_{i,j+1} - u_{i,j}) \tag{6}$$

$$\int (\mathcal{A}u - f)^2 dx = \sum_{i,j=1}^{N} |\mathcal{A}u|_{i,j} - f|_{i,j}|^2 \tag{7}$$

再将 $u_{i,j} \quad i,j = 1,2,\ldots,N$ 向量化为一个 $N^2 \times 1$ 的向量, 对应的也将 f 向量化

设将差分梯度算子 $\nabla u = (W_1 u, W_2 u)$ 其中 W_1, W_2 是 $N^2 \times N^2$ 矩阵，卷积算子 $\mathcal{A}$ 对应于将 $N^2 \times N^2$ 矩阵 A 左乘 u 即得：

$$\int |\nabla u| dx = |Wu|_{tv} \quad \int (\mathcal{A}u - f)^2 dx = |Au - f|_2 \tag{8}$$

则原问题转化为：

$$\hat{u} = argmin_u \lambda |Wu|_{tv} + \frac{1}{2}(\mathcal{A}u - f)^2 \tag{9}$$

再对离散问题采用 Alternative Direction Minimization of Multipliers (ADMM) 算法：

选取初值 d_0, b_0，参数 μ, δ, 每步迭代

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (A^T A + \mu W^T W)^{-1} (A^t f + \mu W^T (d_k) - b_k) \\ d_{k+1} &= P_{\lambda/\mu}(W u_{k+1} + b_k) \quad P_\lambda v = \frac{v}{|v|} max\{|v| - \lambda, 0\} \\ b_{k+1} &= b_k + \delta (W u_{k+1} - d_{k+1}) \end{aligned} \tag{10}$$

而令

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

则 $W_1 = D \otimes I$,$W_2 = I \otimes D$

2.2.1 迭代方法

2.2.2 共轭梯度法

2.2.3 快速 **Fourier** 变换

2.3 边值条件

2.3.1 循环卷积条件

2.4 实验结果

2.5 结果分析