



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э.БАУМАНА
(национальный исследовательский университет)»

Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Теоретическая информатика и компьютерные технологии

Лабораторная работа № 2

«Аппроксимация методом наименьших квадратов.

Двухпараметрические модели»

по дисциплине «Численные методы»

Вариант 10

Работу выполнил
студент группы ИУ9-62Б
Жук Дмитрий

Цель работы

Целью данной работы является изучение создания аппроксимирующей функции на основе априорных данных о ней, а также оценка ошибки с помощью среднеквадратичного отклонения.

Задание

1. Построить графики таблично заданной функции и функции $z(x)$.
2. Найти значение $x_a, x_g, x_h, y_a, y_g, y_h, z(x_a), z(x_g), z(x_h), \delta_1, \dots, \delta_9, \delta_k = \min \delta_i$.
3. Составить систему уравнений для определения a и b и решить её.
4. Найти среднеквадратичное отклонение Δ .

Индивидуальный вариант

$$n = 8$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	1,32	1,81	2,58	2,88	3,88	4,29	4,58	5,00	4,14

Реализация

1. Использовался сайт [GeoGebra](https://www.geogebra.org/m), для изображения на координатной плоскости заданные точки $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ и проведения гладкой монотонной кривой, аппроксимирующей зависимость (рисунок 1).

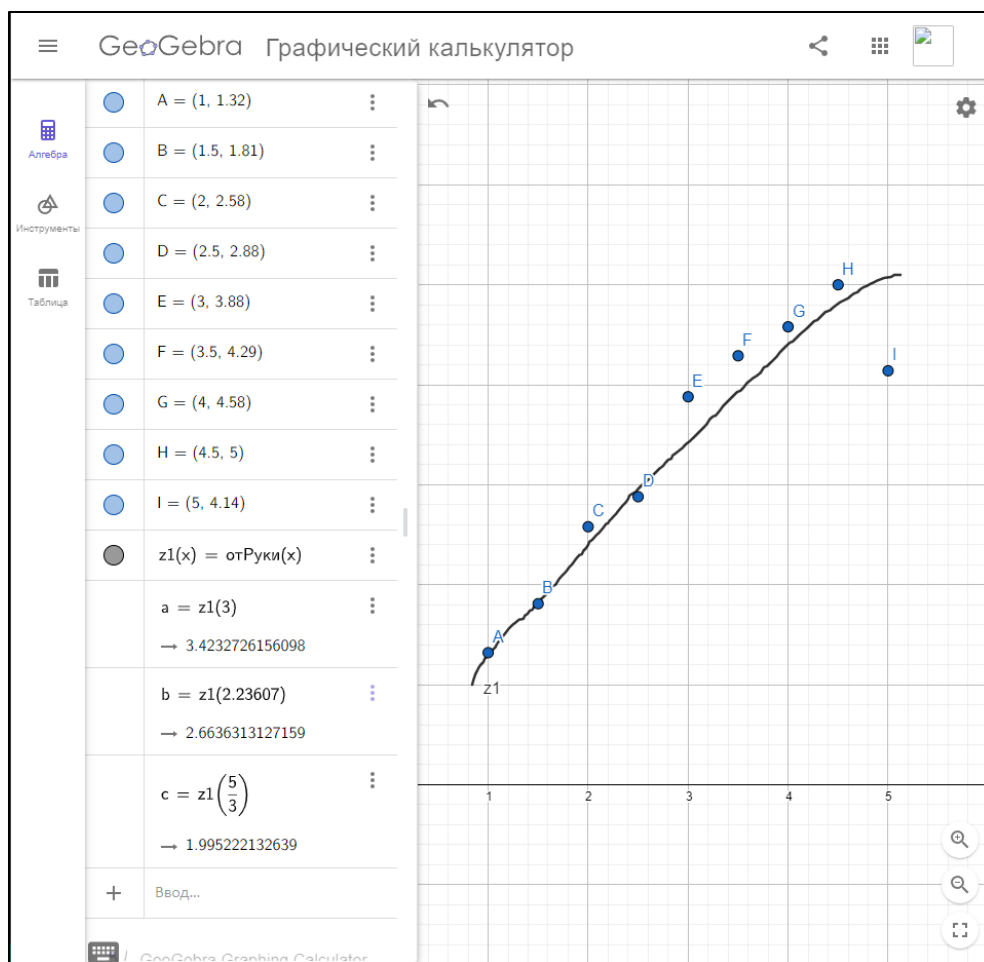


Рисунок 1 – заданные точки и получившийся график в GeoGebra

2. Используя Excel (рисунок 2) и GeoGebra (рисунок 1), вычислили значения величин $x_a = \frac{x_0 + x_n}{2}$, $x_g = \sqrt{x_0 x_n}$, $x_h = \frac{2}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_n}}$, $y_a = \frac{y_0 + y_n}{2}$, $y_g = \sqrt{y_0 y_n}$, $y_h = \frac{2}{\frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_n}}$, $z(x_a)$, $z(x_g)$, $z(x_h)$. Так же вычислили значения следующих величин:

$\delta_1 = z(x_a) - y_a $,	$\delta_2 = z(x_g) - y_g $,	$\delta_3 = z(x_h) - y_h $,
$\delta_4 = z(x_g) - y_a $,	$\delta_5 = z(x_h) - y_a $,	$\delta_6 = z(x_a) - y_h $,
$\delta_7 = z(x_h) - y_h $,	$\delta_8 = z(x_h) - y_g $,	$\delta_9 = z(x_g) - y_h $

и была выбрана наименьшая из них. По рисунку 2 – это $\delta_7 \Rightarrow k = 7$.

7					
8	2.	i	x_i	y_i	
9		0		1,32	
10		n	5	4,14	
11					
12		*	x_*	y_*	z(x_*)
13		a	3,00000	2,73000	3,42327
14		g	2,23607	2,33769	2,66363
15		h	1,66667	2,00176	1,99522
16					
17		i	δ_i	ans	
18		7	0,0065350	min	
19		4	0,0663687		
20		2	0,3259401		
21		8	0,3424679		
22		9	0,6618731		
23		1	0,6932726		
24		5	0,7347768		
25		3	1,0855814		
26		6	1,4215144	max	
27					

Рисунок 2 – расчеты δ в Excel

3. Для определения коэффициентов a и b произвели переход к обратным величинам:

$$\frac{1}{z_7(x)} = \frac{ax + b}{x} = a + \frac{b}{x}$$

Минимизация величины:

$$F(a, b) = \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial a} &= \left(\sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)^2 \right)'_a = \sum_{i=0}^n \left[2 \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right) \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)'_a \right] \\
&= 2 \sum_{i=0}^n \left[\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right) (1 + 0 - 0) \right] = 2 \sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right) \\
\frac{\partial F}{\partial b} &= \left(\sum_{i=0}^n \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)^2 \right)'_b = \sum_{i=0}^n \left[2 \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right) \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)'_b \right] \\
&= 2 \sum_{i=0}^n \left[\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right) \left(0 + \frac{1}{x_i} - 0 \right) \right] = 2 \sum_{i=0}^n \left(\frac{a}{x_i} + \frac{b}{x_i^2} - \frac{1}{x_i y_i} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}_i = \frac{1}{x_i} \\ \tilde{y}_i = \frac{1}{y_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \sum_{i=0}^n (a + b \tilde{x}_i - \tilde{y}_i) = 0 \\ 2 \sum_{i=0}^n (a \tilde{x}_i + b \tilde{x}_i^2 - \tilde{x}_i \tilde{y}_i) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} an + b \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i = \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i \\ a \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i + b \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i^2 = \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i \tilde{y}_i \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{b \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i - \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i}{n} \\ b = \frac{n \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i \tilde{y}_i - \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i * \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i}{n \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i * \sum_{i=0}^n \tilde{x}_i} \end{cases}
\end{aligned}$$

Произвели вычисления в Excel (рисунок 3) и получили значения a и b .
Так же построили получившуюся функцию $z_7(x)$ в GeoGebra (рисунок 4).

28	3. Реализуем δ_7 :									
29										
30	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
31	$\chi_i = 1/x_i$	1	0,666667	0,5	0,4	0,333333	0,285714	0,25	0,222222	0,2
32	$y_i = 1/y_i$	0,7575758	0,552486	0,3875969	0,347222	0,257732	0,2331	0,218341	0,2	0,2415459
33										
34	*	$\Sigma[i=0,n](*)$								
35	$1/\chi_i$	3,8579365								
36	$1/y_i$	3,1955998								
37	$1/\chi_i^2$	2,1990709								
38	$1/(\chi_i * y_i)$	1,7584367								
39										
40	$b = \frac{n \Sigma \chi y - \Sigma \chi * \Sigma y}{n \Sigma \chi^2 - \Sigma \chi * \Sigma \chi} =$		0,641986431341112							
41										
42										
43	$a = \frac{\Sigma y - b * \Sigma \chi}{n} =$		0,089857109091747							
44										
45										

Рисунок 3 – расчеты a и b в Excel

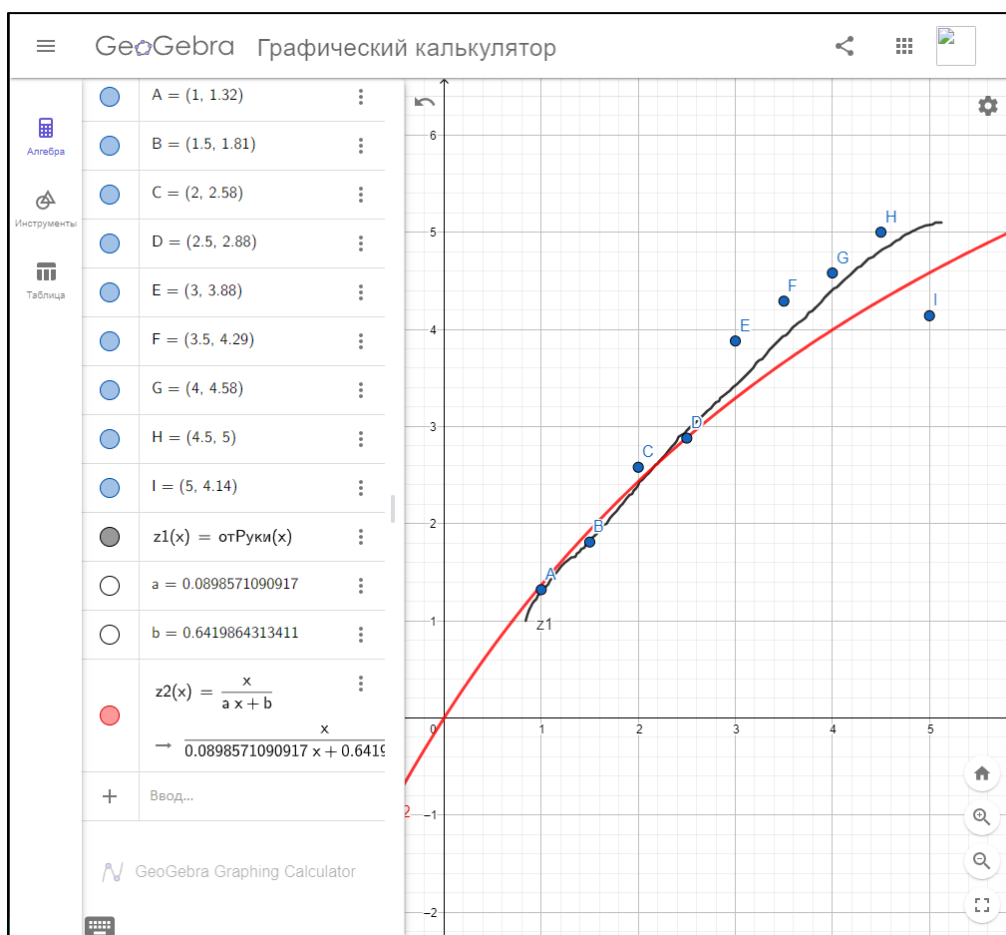


Рисунок 4 – график аппроксимированной функции в GeoGebra

4. С помощью Excel, вычислили значения известных точек в $z_7(x_i)$ $i = 0, \dots, n$ и нашли среднеквадратичное отклонение Δ (рисунок 5).

46	4. Среднеквадратическое отклонение										
47											
48	i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
49	z_7(x_i)	1,3664123	1,931068	2,4339764	2,88474	3,29107	3,659226	3,994349	4,30069125	4,5818092	
50											
51	Δ	0,4756689									
52											

Рисунок 5 – расчеты Δ в Excel

Вывод

В ходе лабораторной работы был изучен способ создания аппроксимирующей функции на основе априорных данных о ней. Предполагаемая и получившаяся функция различаются, однако достаточно схожи. Среднеквадратичное отклонение позволяет оценить размер, получившийся ошибки.