Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э.БАУМАНА
(национальный исследовательский университет)»

Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Теоретическая информатика и компьютерные технологии

Лабораторная работа № 5

«Метод Рунге-Кутта численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений»

по дисциплине «Численные методы»

Вариант 10

Работу выполнил

студент группы ИУ9-62Б

Жук Дмитрий

Москва, 2022

Цель работы

Целью данной работы является изучение способа решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта.

Задание

1. Найти численное решение с погрешностью $\varepsilon = 0.001$ решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y'_0$$

на отрезке $[0; 1]$, приведя его к СОДУ первого порядка.

2. Найти точное решение дифференциального уравнения.
3. Сравнить приближенное и точное решения на каждом шаге вычисленный.

Индивидуальный вариант

$$p = 0, \qquad q = 1, \qquad f(x) = 4e^x, \qquad y_0 = 4, \qquad y'_0 = -3$$

Реализация

1. Приведем изначальное дифференциальное уравнение второго порядка к СОДУ первого порядка:

$$y'' + py' + qy = f(x) \Rightarrow y'' = -py' - qy + f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = f_1(x, y, y_1) = y_1 \\ y'_1 = f_2(x, y, y_1) = -py_1 - qy + f(x) \end{cases}$$

Получаем такую систему:

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, y_1) = y_1 \\ y'_1 = f_2(x, y, y_1) = -y + 4e^x \end{cases}$$

Используя TypeScript (листинг 1), найдем решение задачи Коши (рисунок 1):

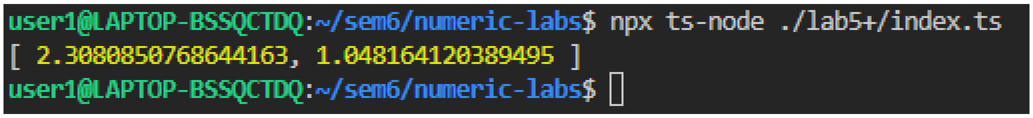

Рисунок 1 – получившееся значение

```
const P = 0;
const Q = 1;
const F = (x: number) => 4 * Math.exp(x);
const y0 = 4;
const yy0 = -3;

const solve = ({
    p = P, q = Q, f = F, Xs = 0, Xe = 1, Ys = [y0, yy0], n = 2 ** 7,
} = {}) => {
    let Y = [...Ys];
    let X = Xs;
    const h = (Xe - Xs) / n;
    const ff = ([x, y, y1]: number[]) => [y1, -p * y1 - q * y + f(x)];
    for (let iii = 0; iii < n; iii++) {
        const k1 = ff([X, ...Y]);
        const k2 = ff([X + h / 2, ...Y.map((y, i) => y + h * k1[i] / 2)]);
        const k3 = ff([X + h / 2, ...Y.map((y, i) => y + h * k2[i] / 2)]);
        const k4 = ff([X + h / 2, ...Y.map((y, i) => y + h * k3[i])]);
        X += h;
        Y = Y.map((y, i) => y + h / 6 * (k1[i] + 2 * (k2[i] + k3[i]) +
k4[i]));
    }
    return Y;
};

const s = solve();
console.log(s);
```

Листинг 1 — Метод Рунге-Кутта

2. Используя сайт Wolfram Alpha, решили дифференциальное уравнение и получили, что решением являются:

$$\begin{cases} y' = 2e + 2\cos 1 - 5\sin 1 \approx 2.3098133446148873722 \\ y_1' = 2e - 5\cos 1 - 2\sin 1 \approx 1.0521101579615988704 \end{cases}$$

3. Сравнили полученные значения и получили погрешность в $-1.7e^{-3}$ и $-3.9e^{-3}$, что удовлетворяет заданному ε.

Вывод

В ходе лабораторной работы был изучен метод Рунге-Кутта численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритм позволяет имея одно частное решение прийти к другому.