Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени Н.Э.БАУМАНА
(национальный исследовательский университет)»

Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Теоретическая информатика и компьютерные технологии

Лабораторная работа № 2

«Аппроксимация методом наименьших квадратов.

Двухпараметрические модели»

по дисциплине «Численные методы»

Вариант 10

Работу выполнил

студент группы ИУ9-62Б

Жук Дмитрий

Москва, 2022

Цель работы

Целью данной работы является изучение создания аппроксимирующей функции на основе априорных данных о ней, а также оценка ошибки с помощью среднеквадратичного отклонения.

Задание

1. Построить графики таблично заданной функции и функции $z(x)$.
2. Найти значение x_a, x_g, x_h, y_a, y_g, y_h, $z(x_a)$, $z\left(x_g\right)$, $z(x_h)$, δ_1, …, δ_9, $\delta_k = \min \delta_i$.
3. Составить систему уравнений для определения a и b и решить её.
4. Найти среднеквадратичное отклонение Δ.

Индивидуальный вариант

$$n = 8$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y_i	1,32	1,81	2,58	2,88	3,88	4,29	4,58	5,00	4,14

Реализация

1. Используя сайт GeoGebra, изобразим на координатной плоскости заданные точки $(x_i, y_i), i = 0, \dots, n$ и проведем гладкую монотонную кривую, аппроксимирующую эту зависимость (рисунок 1).

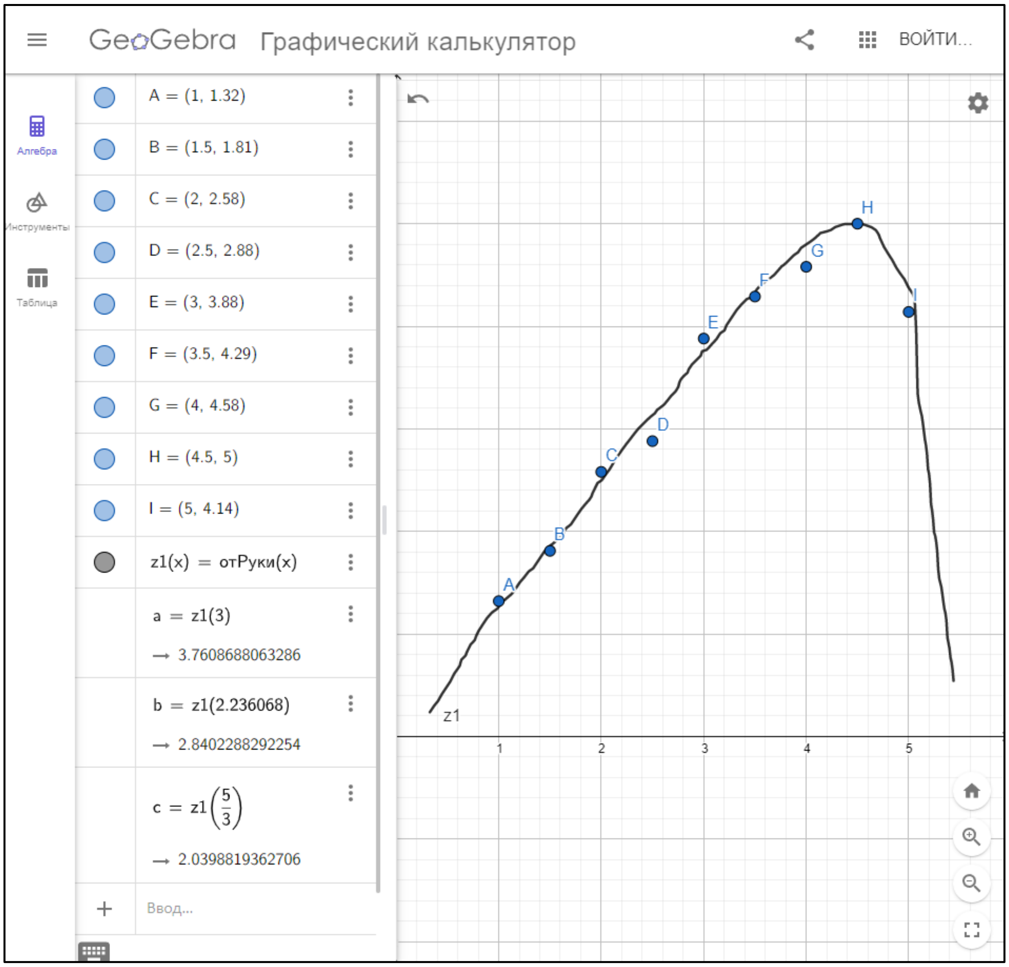

Рисунок 1 – заданные точки и получившийся график в GeoGebra

2. Используя Excel (рисунок 2) и GeoGebra (рисунок 1), вычислим значения величин $x_a = \frac{x_0+x_n}{2}$, $x_g = \sqrt{x_0 x_n}$, $x_h = \frac{2}{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_n}}$, $y_a = \frac{y_0+y_n}{2}$, $y_g = \sqrt{y_0 y_n}$, $y_h = \frac{2}{\frac{1}{y_0}+\frac{1}{y_n}}$, $z(x_a)$, $z(x_g)$, $z(x_h)$. Так же вычислим значения следующих величин:

$\delta_1 = \lvert z(x_a) - y_a \rvert,$	$\delta_2 = \lvert z(x_g) - y_g \rvert,$	$\delta_3 = \lvert z(x_a) - y_g \rvert,$
$\delta_4 = \lvert z(x_g) - y_a \rvert,$	$\delta_5 = \lvert z(x_h) - y_a \rvert,$	$\delta_6 = \lvert z(x_a) - y_h \rvert,$
$\delta_7 = \lvert z(x_h) - y_h \rvert,$	$\delta_8 = \lvert z(x_h) - y_g \rvert,$	$\delta_9 = \lvert z(x_g) - y_h \rvert$

и выберем из них наименьшее. По рисунку 2 – это $\delta_7 \ \Rightarrow \ k = 7$.

8	2.	i	x_i	y_i	
9		0	1	1,32	
10		n	5	4,14	
11					
12		*	x_*	y_*	z(x_*)
13		a	3,00000	2,73000	3,76087
14		g	2,23607	2,33769	2,84023
15		h	1,66667	2,00176	2,03988
16					
17		i	δ_i	ans	
18		7	0,0381237	min	
19		4	0,1102288		
20		8	0,2978092		
21		2	0,5025377		
22		5	0,6901181		
23		9	0,8384706		
24		1	1,0308688		
25		3	1,4231776		
26		6	1,7591106	max	

Рисунок 2 – расчеты δ в Excel

3. Для определения коэффициентов a и b перейдем к обратным величинам:

$$\frac{1}{z_7(x)} = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}$$

Минимизируется величина:

$$F(a,b) = \sum_{i=0}^{n} \left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i} \right)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \left(\sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)^2\right)'_a = \sum_{i=0}^{n}\left[2\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)'_a\right]$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\left[\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)(1 + 0 - 0)\right] = 2\sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \left(\sum_{i=0}^{n}\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)^2\right)'_b = \sum_{i=0}^{n}\left[2\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)'_b\right]$$

$$= 2\sum_{i=0}^{n}\left[\left(a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right)\left(0 + \frac{1}{x_i} - 0\right)\right] = 2\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{a}{x_i} + \frac{b}{x_i^2} - \frac{1}{x_i y_i}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} \tilde{x}_i = \dfrac{1}{x_i} \\ \tilde{y}_i = \dfrac{1}{y_i} \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} 2\sum\limits_{i=0}^{n}(a + b\tilde{x}_i - \tilde{y}_i) = 0 \\ 2\sum\limits_{i=0}^{n}\left(a\tilde{x}_i + b\tilde{x}_i^2 - \tilde{x}_i\tilde{y}_i\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} an + b\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{x}_i = \sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{y}_i \\ a\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{x}_i + b\sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{x}_i^2 = \sum\limits_{i=0}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{b\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i - \sum_{i=0}^{n}\tilde{y}_i}{n} \\ b = \dfrac{n\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i\tilde{y}_i - \sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i * \sum_{i=0}^{n}\tilde{y}_i}{n\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i^2 - \sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i * \sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i} \end{cases}$$

Произведем вычисления в Excel (рисунок 3) и получим значения a и b. Так же построим получившуюся функцию $z_7(x)$ в GeoGebra (рисунок 4).

3. Реализуем δ_7:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
χ_i = 1/x_i	1	0,666667	0,5	0,4	0,333333	0,285714	0,25	0,22222222	0,2
y_i = 1/y_i	0,7575758	0,552486	0,3875969	0,347222	0,257732	0,2331	0,218341	0,2	0,2415459

*	Σ[i=0,n](*)
1/χ_i	3,8579365
1/y_i	3,1955998
1/χ_i^2	2,1990709
1/(χ_i*y_i)	1,7584367

$$b = \frac{n\Sigma\chi y - \Sigma\chi * \Sigma y}{n\Sigma\chi^2 - \Sigma\chi * \Sigma\chi} = \quad 0{,}641986431341112$$

$$a = \frac{\Sigma y - b * \Sigma\chi}{n} = \quad 0{,}089857109091747$$

Рисунок 3 – расчеты a и b в Excel

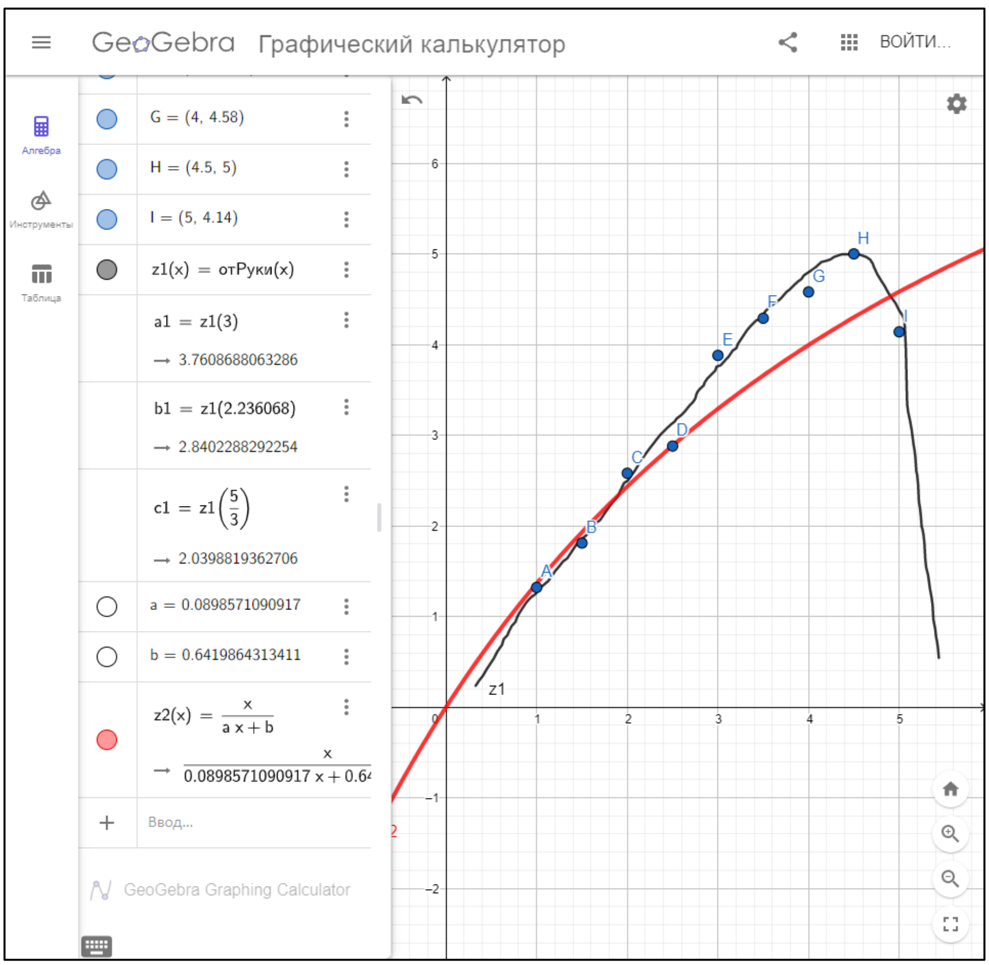

Рисунок 4 – график аппроксимированной функции в GeoGebra

4. С помощью Excel, вычислим значения известных точек в $z_7(x_i)$ $i = 0, \dots, n$ и найдем среднеквадратичное отклонение Δ (рисунок 5).

4. Среднеквадратическое отклонение

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_7(x_i)	1,3664123	1,931068	2,4339764	2,88474	3,29107	3,659226	3,994349	4,30069125	4,5818092

Δ	0,4756689

Рисунок 5 – расчеты Δ в Excel

Вывод

В ходе лабораторной работы был изучен способ создания аппроксимирующей функции на основе априорных данных о ней. Предполагаемая и получившаяся функция различаются. Среднеквадратичное отклонение позволяет оценить размер получившийся ошибки.