计算物理第四次作业

刘茁

1500011438

一、利用标准的4 阶Runge-Kutta来求解简单的常微分方程的初值问题

(a)

- 重新定义如下

$$x' = \frac{\delta}{\gamma}x, y' = \frac{\beta}{\alpha}y, t' = \gamma t$$

- 我们有

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial \gamma x'/\delta}{\partial t'/\gamma} = \frac{\gamma^2}{\delta}\dot{x}', \dot{y} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}\dot{y}'$$

$$\frac{\gamma^2}{\delta}\dot{x}' = \frac{\alpha\gamma}{\delta}x' - \frac{\alpha\gamma}{\delta}x'y' = \frac{\alpha\gamma}{\delta}x'(1-y')$$

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta}\dot{y}' = \frac{\alpha\gamma}{\beta}x'y' - \frac{\alpha\gamma}{\beta}y' = \frac{\alpha\gamma}{\beta}y'(x'-1)$$

- 最后有

$$\dot{x}' = \frac{\alpha}{\gamma}x'(1-y')$$

$$\dot{y}' = y'(x'-1)$$

(b)

- $\dot{x}' = 0$ 时有

$$x = 0或y = \frac{\alpha}{\beta}$$

- $\dot{y}' = 0$ 时有

$$y = 0或x = \frac{\gamma}{\delta}$$

- 因此稳定解点有四个，分别是

$$(0,0),(0,\frac{\gamma}{\delta}),(\frac{\alpha}{\beta},0),(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\gamma}{\delta})$$

- 在稳定点附近进行小量展开
  - 对于$(0,0)$

$$\dot{x} \approx \alpha\Delta x - \beta\Delta x\Delta y \approx \alpha\Delta x$$

$$\dot{y} \approx \delta\Delta x\Delta y - \gamma\Delta y$$

这显然是不稳定的。

  - 对于($\frac{\alpha}{\beta}$， $\frac{\gamma}{\delta}$)

$$\dot{x} = \alpha\left(\frac{\gamma}{\delta}+\Delta x\right) - \beta\left(\frac{\gamma}{\delta}+\Delta x\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\Delta y\right) \approx -\frac{\beta\gamma}{\delta}\Delta y$$

$$\dot{y} = \delta\left(\frac{\gamma}{\delta}+\Delta x\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\Delta y\right) - \gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}+\Delta y\right) \approx \frac{\delta\alpha}{\beta}\Delta x$$

于是有

$$\ddot{x} + \alpha\gamma x = 0$$

$$\ddot{y} + \alpha\gamma y = 0$$

注意到α,γ大于0，这说明x和y将会在稳定点附近震动，这一点时稳定的。

  - 对于$(\frac{\alpha}{\beta},0)$ 和 $(0,\frac{\gamma}{\delta})$，根据第一个点的分析，它们也是不稳定的。

(c)

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{x'(1-y')}{y'(x'-1)}$$

$$\frac{x'-1}{x'}dx' = \frac{\alpha}{\gamma}\frac{1-y'}{y'}dy'$$

积分后有

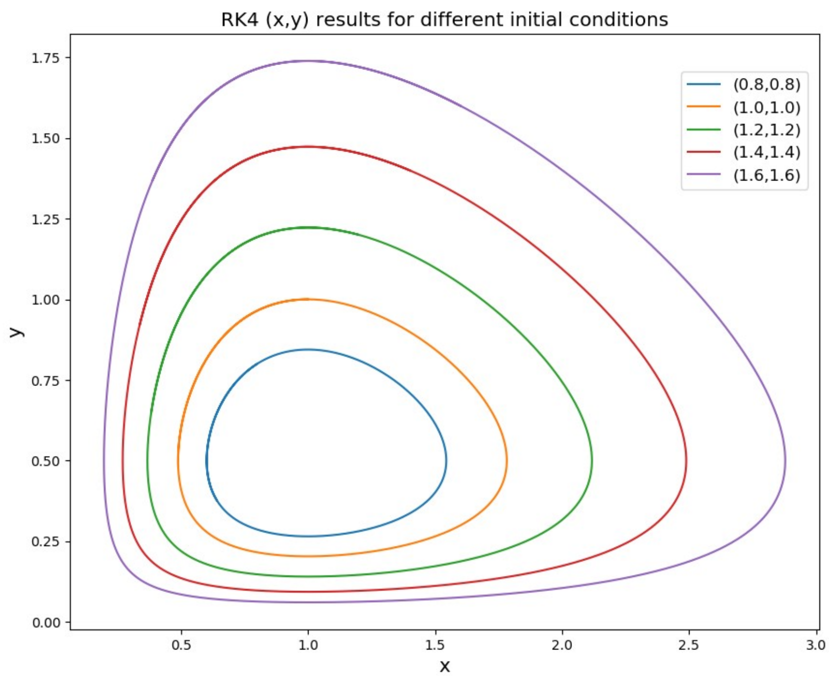
$$\frac{e^{x'+\frac{\alpha}{\gamma}y'}}{x'y'^{\frac{\alpha}{\gamma}}} = Const.$$

即

$$\frac{\exp(\delta x + \beta y)}{y^\alpha x^\gamma} = Const.$$

(d)

- 编写程序 rungekutta.py 运行结果如下图所示。



- 需要说明的是，时间步长取为0.001。取为0.001的原因为：我在程序中比较了从t_0出发，用一次长度为$2h$的Runge-Kutta一次和用两次长度为h的Runge-Kutta的方法将微分方程推到$t_0 + 2h$的位置。在步长取为0.001时，这两种方法一次的相差不足机器精度，在计算资源绰绰有余的情况下，取0.001是精确的。