Homework 6

Question 1.

疫情导致多国出现供应链问题。考虑某个港口有 n 艘集装箱货轮在等待装货，这些货轮能装载的标准集装箱数目各不相同。同时，该港口有 m 个货轮装载点，每个装载点需要单位时间为货轮装载一只集装箱，也就是说每个货轮装满所需要的时间只和其设计容量有关。为提高效率，每艘货轮装载期间不能切换装载点。不考虑待装载集装箱数目是否足够。港口当局决定优先为剩余船只中设计容量最高的空船优先安排装载点进行装载。试证明：对于初始状态为 n 艘空船需要装满离开、共有 m 个可用装载点，则港口当局的装载算法是一个近似比为 4/3 的近似算法。

证明过程中如思路受限，可酌情考虑反证法。

My Answer 1. 这个问题类似于并行调度问题：先将问题形式化：

> 现有 n 个任务，第 i 项任务所需要时间为 t_i，即：每项任务所需时间由下面的集合给出：T=$t_1, t_2, t_3, ..., t_n$，$0 \le t_i \le n$，现有 m 个完全一样的机器，每个任务均需要排他性地在一台机器上运行，并且每个任务一旦开始执行就不能停止（对应作业中的货轮装载过程中不能切换装载点），问题是求 n 个任务在 m 台机器上的一个调度序列，使得这些任务的并行时间最短，即尽早结束所有任务。

港口当局给的算法的手工实现流图如下：

1. 起始条件状态下，所有船只都是空的，按照每个船的装载量从大到小排序，构造一个最大堆 H
2. 每次返回 H 堆顶的元素，这个元素就是剩余空船中可装载量最大的那一艘船。
3. 将取出的这个船分配给目前工期最小的港口装载

形式化描述如下：

> 利用贪心策略：将所有任务按照所需完成时间由大到小排序，将排序后的任务一次分配给当前工期最小的机器上

定义一个概念：*good* 港口，一个 *good* 港口指的是在一个问题近似解 L^* 的情况下，最后结束装载的港口。这就意味着当 *good* 港口结束装载，整个装载任务就将结束。因此，这个优化问题就等价于优化 *good* 港口的工期和去掉最后一个任务（即装载量最小的一艘船，此时 *good* 港口工期最短）的问题最优解的最大值。

即：

$$L^*(m) = max\{L(good), L^*(m-1)\}$$

下面对 L^* 中 *good* 港口的情况做分类讨论：

1. ***good* 港口上只有一个任务**

   这就意味着第一次分派的船只 B_1 进行装载的港口 m_1 就是最后 *good* 港口。否则，若其他港口 m_j 为 *jgood* 港口，因为大顶堆的构造在前，$B_1 \geq B_i, \forall i \in Z$，$m_j$ 的工期必定包含两只船的工作时间。矛盾！

2. ***good* 港口上包含三个及以上的任务**

   这就意味着其他港口 *(非 good 港口)* 至少包含了一个任务，否则，对于 *good* 港口的最后一个任务 B_j，再分配时必然应该选择那些空港口（因为空港口的工期最短，为 *0*）。矛盾！其他港口 *(非 good 港口)* 至少包含了一个任务。

   于是，我们有：

   good 港口的最后一个任务 B_j 所需时间必然不大于第 $m+1$ 个任务所需时间。否则，将会被作为前 m 耗时长的任务分配给一个空港口作为第一个任务。即：

   $$t(B_j) \le t_{m+1},$$

   因为 *good* 港口有三个及以上个任务，因此优化解的工期 $L^*(good)$ 必然不小于 *3* 倍的第 *m+1* 耗时长的任务

   $$L^*(good) \ge 3t(B_{m+1}) \ge 3t(B_j)$$

   因此：

   $$t(B_j) \le \frac{1}{3}L^*(good)$$

   $$so, optimal\ solution\ L = L[m] = (L[m] - B_j) + B_j \le \frac{4}{3}L*$$

3. ***good* 港口上包含两个的任务** 同理的，这意味着其他港口 *(非 good 港口)* 至少包含了一个任务，否则，对于 *good* 港口的最后一个任务 B_j，再分配时必然应该选择那些空港口，才能符合每次选择港口都要满足当前工期最短的要求。和上面的证明方法类似，可以证明 $L \le \frac{3}{2}L^*$

我们不能简单地证明，必须构造出一个符合情况的解。

一个例子如下：

m 个港口，*n=2m+1* 艘船，容量为 *m+1,m+2,...,2m-1* 船务各有两个，容量为 *m* 的船有三个，可以验证，总共有 *2m+1* 艘船

最优解：两个任务首尾两两配对，有 *m* 组容量为 *3m-1* 的组，因此 *L=3m-1+m=4m-1*

近似解：根据算法，第一次填满后，最小工期的元素大概是 $\frac{3}{2}m$ 量级，于是最后优化解的 *good* 港口为 *O(3m)*，于是有：

$$\frac{L}{L^*} = \frac{4m-1}{3m},\ so, \lim_{m\to\infty} \frac{4m-1}{3m} = \frac{4}{3}$$

因此算法的近似比等于 $\frac{4}{3}$