



Дальневосточный федеральный университет
Филиал в г. Уссурийске (Школа педагогики)
Кафедра информатики, информационных технологий
и методики обучения

2019

Т. Н. Горностаева
О. М. Горностаев

Математическое и компьютерное моделирование

Учебное пособие



УДК 004.94
ББК 30
Г 67

Рецензенты:

Осуховский Эдуард Валерьевич – профессор кафедры физики и общетехнических дисциплин ФГКВОУ ВО «Тихоокеанское высшее военно-морское училище им. С.О. Макарова», доктор физико-математических наук, профессор.

Здор Дмитрий Валерьевич – доцент кафедры физики и высшей математики ФГБОУ Приморской ГСХА, кандидат педагогических наук, доцент

Горностаева, Татьяна Николаевна

Горностаев, Олег Михайлович

Г 67 Математическое и компьютерное моделирование. Учебное пособие – М.: Мир науки, 2019. – Сетевое издание. Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/50MNNPU19.pdf> – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-6043909-6-2

Учебное пособие «Математическое и компьютерное моделирование» составлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Министерства образования и науки РФ от 22.02 2018 г. № 125, и предназначено для студентов педагогических вузов, изучающих курс «Компьютерное моделирование». В учебном пособии, рассматриваются, в основном, вопросы компьютерного математического моделирования и строятся математические и компьютерные модели чисто прикладных задач из различных областей человеческой деятельности. В пособии не рассматриваются формализованные математические модели, не связанные с объектами или процессами физического мира. Авторами пособия приведены определения моделей, их классификация, этапы математического компьютерного моделирования, методы исследования моделей, но, основное внимание уделено математическим компьютерным моделям, построенным на языке программирования Паскаль. В пособии проанализирован ряд программ, выполняющих компьютерный эксперимент с построенными моделями, и описана технология проведения таких экспериментов. Использование материала этого пособия позволяет студентам выполнить цикл лабораторных работ по компьютерному практикуму «Компьютерного моделирования», в которых они составляют программы для проведения компьютерного эксперимента из разных областей – физики, медицины, экологии, сферы массового обслуживания.

Данное пособие могут также использовать учителя школьной информатики при преподавании темы «Моделирование и формализация».

ISBN 978-5-6043909-6-2

© Горностаева Татьяна Николаевна

© Горностаев Олег Михайлович

© ООО Издательство «Мир науки», 2019

Оглавление

Введение	5
Глава I. Модели и их классификация	7
§ 1. Понятие модели	7
§ 2. Фундаментальное свойство моделей	11
§ 3. Классификация моделей	12
§ 4. Знаковые модели	19
§ 5. Компьютерные модели	21
Контрольные вопросы к первой главе	22
Глава 2. Моделирование	23
§ 1. Моделирование как метод познания	23
§ 2. Этапы моделирование	25
§ 3. Способы исследования моделей	28
Контрольные вопросы ко второй главе	31
Глава 3. Компьютерное графическое моделирование	33
§ 1. Модели художественной графики	33
1.1 Моделирование «Муарового узора»	33
1.2 Моделирование узора – «Звезда»	34
1.3 Моделирование узора – «Дерево»	36
§ 2. Модели деловой графики	37
2.1 Моделирование динамики изменения числа студентов	38
2.2 Моделирование распределения учащихся по секциям	39
2.3 Построение моделей - графиков	40
Контрольные вопросы к третьей главе	43
Глава 4. Математические модели физических процессов	44
§ 1. Классификация математических моделей	44
§ 2. Математическая модель равноускоренного движения тела	46
§ 3. Математическая модель свободного падения тела	48
§ 4. Математическая модель падения тела в среде с сопротивлением	50
4.1 Построение математической модели падения тела в среде с сопротивлением	50
4.2 Аналитическое исследование математической модели падения тела в среде с сопротивлением	51
§ 5. Математическая модель колебаний пружинного маятника	52
5.1 Построение математической модели гармонических колебаний	52
5.2 Аналитическое исследование модели гармонических колебаний	53
5.3 Математическая модель затухающих колебаний пружинного маятника	56
§ 6. Математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления	56
6.1 Построение дифференциальной математической модели полета тела	56
6.2 Теоретическое исследование дифференциальной математической модели	57
6.3 Теоретическое исследование аналитической математической модели полета	59
§ 7. Математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением	61
Контрольные вопросы к четвертой главе	62
Глава 5. Компьютерные модели физических процессов	64
§ 1. Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением	64
1.1 Алгоритм построения компьютерной модели падения тела	64

1.2 Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением	65
1.3 Компьютерный эксперимент с моделью падения тела.....	68
§ 2. Компьютерная модель колебаний маятника	72
2.1 Алгоритм построения компьютерной модели гармонических колебаний	72
2.2 Демонстрационная компьютерная модель гармонических колебаний.....	73
2.3 Графическая компьютерная модель гармонических колебаний	74
2.4 Компьютерная модель затухающих колебаний пружинного маятника	76
§ 3. Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту.....	76
3.1 Алгоритм построения компьютерной модели полета тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления	76
3.2. Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления	78
3.3 Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением	79
3.4 Компьютерные эксперименты с моделью полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления	80
3.5 Компьютерные эксперименты с моделью полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением.....	85
Контрольные вопросы к пятой главе	86
Глава 6. Компьютерное моделирование экологических процессов	88
§ 1. Самые страшные эпидемии в истории человечества	88
§ 2. История появления моделей эпидемии	89
§ 3. Простейшая модель процесса развития эпидемии	90
3.1 Математическая модель эпидемии	90
3.2 Теоретическое исследование математической модели эпидемии.....	91
3.3 Использование метода Эйлера – Коши для решения математической модели эпидемии.....	93
3.4 Компьютерная модель развития эпидемии.....	94
§ 4. Модели развития популяции	97
4.1. Модель неограниченного роста численности популяции (модель Мальтуса).....	98
4.2. Теоретическое исследование модели Мальтуса.....	100
4.3. Модель ограниченного роста численности популяции (Логистическая модель Ферхюльста).....	100
4.4. Теоретическое исследование модели Ферхюльста	101
4.5. Компьютерные модели развития популяции (модели Мальтуса и Ферхюльста).....	103
Контрольные вопросы к шестой главе	106
Глава 7. Компьютерное моделирование случайных процессов	108
§ 1. Случайные факторы в процессах и явления	108
§ 2 Случайные числа	108
§ 3. Системы массового обслуживания	109
3.1 Понятие системы массового обслуживания	109
3.2. Компьютерная модель системы массового обслуживания	111
§ 4. Метод Монте - Карло	115
§ 5. Задача о случайном блуждании.....	115
§ 6. Компьютерная модель блужданий.....	116
Контрольные вопросы к седьмой главе	120
Литература.....	121

Введение

В настоящее время компьютерное моделирование в научных и практических сферах является одним из основных инструментов исследования различных систем, процессов и явлений окружающего нас мира. Но моделирование в научных исследованиях стало применяться очень давно и постепенно захватывало все новые области научных знаний: строительство и архитектуру, техническое конструирование, физику, астрономию, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Но значительные успехи и признание практически во всех отраслях науки принес моделированию XX век в связи с появлением парка компьютеров, именно во второй половине XX века утвердилась роль моделирования как универсального метода научного познания. В начале 90-х годов в школьном курсе информатики появился раздел «Информационное моделирование», позднее получивший название «Моделирование и формализация». В 2000 году в Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования (ГОС ВПО) педагогических вузов дисциплина «Компьютерное моделирование» была введена как обязательный федеральный компонент. В настоящее время «Компьютерное моделирование» является одним из основных разделов в школьном и вузовском курсе информатики и имеет важное значение при подготовке учителей информатики к профессиональной деятельности.

В данном учебном пособии, в основном, рассматриваются вопросы **компьютерного математического моделирования** и строятся математические и компьютерные модели **чисто прикладных задач** из различных областей человеческой деятельности. В пособии не рассматриваются сугубо формализованные математические модели, не связанные с объектами или процессами физического мира. К таким моделям, например, относятся числовые системы, векторные пространства, евклидова геометрия, алгебраическая группа, подгруппа и т.п. К исследованию таких моделей тоже можно применять компьютерные технологии, но, эти исследования будут иметь чисто математический характер.

Курс «Компьютерное моделирование» — это довольно сложный курс вузовской информатики. Во-первых, он является междисциплинарным курсом, так как в нем рассматриваются модели из различных областей человеческой деятельности, а значит для его успешного освоения требуется наличие самых разнообразных знаний. При моделировании физических процессов, нужны знания законов физики, при моделировании экологических процессов — знания законов биологии, при моделировании экономических процессов — знание законов экономики. Во-вторых, компьютерное математическое моделирование использует разделы современной математики: теорию дифференциальных уравнений, аналитическую геометрию, математическую статистику, численные методы. Таким образом, изучение компьютерного математического моделирования позволяет студентам осознать связи информатики с естественными науками, прежде всего, с математикой и физикой.

Сама технология компьютерного моделирования требует от исследователя умения корректно ставить задачи, ранжировать входные параметры при построении модели,

прогнозировать результаты исследования, проводить компьютерные эксперименты и анализ их результатов.

В пособии рассмотрены определения моделей, имеющих место в информатике, их классификация по различным признакам, этапы моделирования, но основное внимание уделено математическим компьютерным моделям. Следует отметить, что в информатике существуют и иные подходы к определению моделей и их классификации, общепринятая точка зрения, в силу «молодости» науки информатики, здесь еще не установилась.

В пособии построены математические и компьютерные модели различных процессов из области физики, медицины, экологии, для построения компьютерных моделей использован язык Паскаль. В пособии не рассматриваются способы построения моделей с помощью специализированных пакетов, так как их использование зачастую не позволяет студенту осознать, как именно строится модель. Написание же программы, которая имитирует процесс полета тела в виде анимации или графика – траектории полета, как раз снимает эту проблему, кроме того, позволяет студенту углубить свои знания в области программирования. В пособии приведен ряд программ, выполняющих компьютерный эксперимент с построенными моделями, и описана его технология. Использование материала этого пособия позволяет студентам выполнить цикл лабораторных работ, в которых они должны написать программу для проведения компьютерного эксперимента согласно заданиям варианта.

Учебное пособие «Математическое и компьютерное моделирование» написано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Министерства образования и науки РФ от 22.02 2018 г. № 125 и предназначено для студентов педагогических вузов образовательных программ «Математика и информатика» и «Физика и информатика», изучающих дисциплину «Компьютерное моделирование». Данное пособие могут также использовать школьные учителя информатики при преподавании темы «Моделирование и формализация».

Глава I. Модели и их классификация

§ 1. Понятие модели

Слово «модель» произошло от латинского слова «modulus», что в переводе означает «образец», это понятие используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Его первоначальное значение было связано со строительным искусством и во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения прообраза, или объекта, сходного в каком-то отношении с другим объектом.

Термин «модель» стал востребован в XX веке в связи с появлением компьютеров, хотя сами модели используются человечеством с незапамятных времен. Именно с помощью моделей развивались языки общения людей, их письменность, графика. Наскальные изображения древних людей, статуэтки, карты, картины, книги – все это модельные формы представления и передачи знаний об окружающем мире последующим поколениям людей (Рис.1).



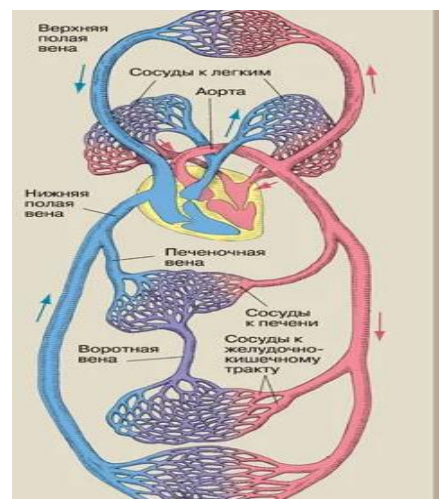
Рис. 1 - Древние модели - наскальные рисунки

Но наряду с этими материальными, часто называемыми натурными, моделями люди всегда отражали в своем мышлении объекты реальности в виде моделей - мысленных образов. Это первый этап отражения мира в мышлении человека. С появлением компьютера ситуация радикально изменилась. Люди уже могли передавать компьютеру свои знания, создав компьютерную модель реального объекта или процесса. Происходит второе отражение мира, теперь уже из мышления человека в компьютер. В этом смысле компьютерный мир является третьей реальностью, схематично это можно отобразить так (Рис.2):

І этап Материя (живая и неживая)ІІ этап Мышление человекаІІІ этап Неживая материя (компьютер)**Рис. 2 – Схема отображения мира**

С моделями люди сталкиваются повсеместно, начиная с раннего детства. Плюшевый тигренок, кукла, заводная машинка, игрушечный робот – это модели реальных объектов, с помощью которых дети познают мир.

Рассмотрим другие примеры. Прежде чем построить Золотой мост через пролив Золотой Рог во Владивостоке сначала построили его макет и выставили в кампусе Дальневосточного Федерального университета (ДВФУ) на острове Русский (Рис.3). *Макет – это модель моста.*

**Рис. 3 - Модель Золотого моста****Рис. 4 - Модель кровообращения**

Для иллюстрации системы кровообращения человека учителя часто используют плакат со схемой (Рис.4). *Схема на плакате – это модель системы кровообращения человека.*

**Рис. 5 – Самолет в аэродинамической трубе**

Прежде чем запустить самолет новой конструкции в серийное производство, его помещают в аэродинамическую трубу, в которой создаются условия, соответствующие полету в воздухе. **Самолет в аэродинамической трубе – это модель летящего в воздухе самолета** (Рис.5).

Для того, чтобы рассчитать путь, пройденный телом, движущимся с начальной скоростью V и ускорением a за время t , пользуются уравнением:

$$S = Vt + \frac{at^2}{2} \quad (1)$$

Уравнение (1) – модель равноускоренного движения тела.

Во всех рассмотренных случаях некоторый объект, система или процесс **сопоставляются** с другим объектом, его заменяющим, а именно:

- Реальный мост – с макетом из картона;
- Система кровообращения – со схемой на плакате;
- Летящий самолет – с самолетом в аэродинамической трубе;
- Процесс движения тела – с уравнением.

Причем, во всех случаях **одно или несколько свойств сохраняются при переходе от реального объекта к его модели:**

- Макет меньше моста, но сохраняет его форму и пропорции;
- Схема на плакате, на первый взгляд, не имеет ничего общего с системой кровообращения человека, но позволяет судить, откуда и куда течет венозная и артериальная кровь в теле человека;
- Самолет в аэродинамической трубе не летит, но испытывает такие же физические нагрузки, что и летящий самолет;
- Уравнение (1) тоже визуально не имеет ничего общего с процессом движения тела, но позволяет определить путь, пройденный телом в любой момент времени.

Информатика – наука относительно молодая по отношению к математике или физике, поэтому многие понятия, методы, алгоритмы в ней находятся в процессе становления, и авторы учебников, учебных пособий и статей многие понятия информатики определяют по-разному, в частности, определение модели не однозначно, имеются, например, такие определения:

Модель - искусственно созданный объект, который воспроизводит в определенном виде реальный объект - оригинал.

Модель – это физический или информационный аналог объекта, функционирование которого по определенным параметрам подобно функционированию реального объекта.

Модель – это новый объект, который отражает некоторые стороны изучаемого объекта, процесса или явления, существенные с точки зрения целей моделирования.

Модель – это объект заместитель объекта оригинала, часто существующий в форме, отличной от формы существования оригинала, но сохраняющий некоторые его свойства.

Все эти определения имеют место в информатике и являются, по своей сути, равнозначными. В них можно выделить общие моменты, во-первых, модель – это **самостоятельный объект - заместитель, аналог оригинала**, во-вторых, модель **обладает некоторыми свойствами оригинала**.

Из сказанного выше следует, что моделей без оригиналов не существует. Оригиналами моделей могут быть:

- **Объекты** (ракета, человек, атом, лицо, галактика, планета, животное, здание, космическое тело).

- **Процессы** (изменение климата, война, спад экономики, инфляция, эпидемия, переговоры, судебный процесс).

- **Явления** природы (землетрясение, цунами, северное сияние, снегопад, град, извержение вулкана, молния, гроза).

Все эти рассуждения приводят к вопросу: **«Для чего нужны модели?»** Чтобы ответить на него вернемся к уже рассмотренным моделям.

- Конечно, пользуясь чертежами (это тоже модели), можно построить мост и без макета. Но, он может по каким-то параметрам не устраивать заказчика и его пришлось бы перестраивать. Поэтому, **целесообразнее с точки зрения здравого смысла, сначала построить макет и изменять в случае необходимости именно его, а не переделывать уже построенный**.
- Учитель для демонстрации тока крови может использовать подробный анатомический атлас или вообще живого человека, но, обилие ненужных подробностей в атласе или на живом человеке будет отвлекать учеников от главного – направления движения тока венозной и артериальной крови. В данном случае, **использование модели - плаката делает объяснение темы более наглядным, чем показ тока крови на живом человеке или атласе**.
- Самолет новой конструкции тоже можно сразу запустить в полет, но, если в нем есть недоделки, он может потерпеть аварию, а в аэродинамической трубе при первых признаках аварийной ситуации силовые установки, создающие реальные условия полета, можно просто выключить. Значит, **модель самолета в аэродинамической трубе нужна для проведения серии более безопасных и дешевых испытаний**.
- Для того, чтобы узнать путь, пройденный телом за время t , можно всякий раз делать замеры времени, скорости и расстояния, но это довольно трудоемкий процесс, причем измерения не будут отличаться высокой точностью, поэтому **быстрее и точнее использовать для таких расчетов модель – уравнение**.

Во всех этих случаях использование моделей для получения информации о самом оригинале позволяет экономить средства или время, или получить более точную и качественную информацию.

Таким образом, **модели нужны, чтобы получить информацию о строении, свойствах, поведении или функционировании объекта – оригинала**.

Тогда возникает другой вопрос *«Почему эту информацию нельзя получить от самого оригинала?»*

Частично, на этот вопрос отвечают рассмотренные выше примеры моделей, но причины могут быть и другими.

1. Оригинал не существует в настоящее время (питекантропы, динозавры, древний Рим, древний Египет) или вообще не существовал (инопланетяне, живой океан - Солярис, кентавр, морские sireны).

2. Исследование оригинала дорого или опасно (ядерные испытания, черные дыры, влияние невесомости на здоровье человека, воздействие холода на человеческий организм, исследование недр Земли, измерение температуры ядра Земли – невозможность добраться).

3. Исследование оригинала очень сложно (Галактика – очень большие размеры, ядро атома – очень малые размеры, реактивное движение – очень быстрый процесс, рост коралла – очень медленный процесс).

4. Исследование только отдельных свойств оригинала (предельная грузоподъемность моста, предельно допустимая скорость автомобиля, температура плавления пластика).

§ 2. Фундаментальное свойство моделей

В основе моделирования лежит теория подобия, утверждающая, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене объекта другим точно таким же. При построении модели абсолютное подобие не нужно, но, требуется, чтобы модель достаточно хорошо отображала свойства оригинала, важные для решаемой задачи.

Построение модели всегда связано с какой-либо задачей, решаемой человеком. Только задача позволяет ограничить множество свойств реального объекта, процесса или явления при построении его модели.

Например, пусть поставлена задача:

Определить долю городских и сельских студентов на 1 курсе профиля «Математика и информатика» в педагогическом вузе.

Для решения этой задачи можно построить таблицу с четырьмя столбцами (Таблица № 1), содержащими порядковый номер, фамилию студента, место его проживания до поступления в институт и пометку – город (Г), село (С) или деревня (Д). Из этой таблицы выбираются данные для вычисления доли городских и сельских студентов. Эта таблица – *модель такого объекта, как множества студентов 1 курса*. Из всех свойств объекта выбраны только те, которые важны для поставленной задачи, а именно: количество студентов, их фамилии и место проживания, все остальные свойства, такие как, год рождения, успеваемость, посещаемость, не учитывались, так как для решения поставленной задачи они не нужны.

Таблица №1

№	ФИО студента	Адрес проживания до поступления в ВУЗ	Город (Г), село (С), деревня (Д)
1	Андреев Иван Васильевич	Уссурийск, Ленина 5-22	Г
2	Бабин Андрей Петрович	Артем, Ушакова 13-8	Г
3	Варгин Павел Ильич	Хороль, Францева 18	С
....
25	Янина Софья Андреевна	Яковлевка, Ленина 35	Д

Пусть поставлена другая задача:

Определить долю студентов профиля «Математика и информатика» 1 курса, успешно сдавших зимнюю сессию.

Для решения этой задачи тоже можно построить **таблицу-модель** из пяти-семи столбцов (в зависимости от числа предметов), содержащих порядковый номер, фамилию студента, название предметов, по которым сдавались экзамены, полученные оценки и пометки – успевает (У), не успевает (Н) (Таблица №2). Из этой таблицы выбираются данные для обработки. Из всех свойств того же объекта - множества студентов 1 курса, выделены уже другие свойства, которые важны для этой задачи. Исходя даже из этих примеров, можно сделать вывод.

Таблица №2

№	ФИО студента	Алгебра	Информатика	История	У/Н
1	Андреев Иван Васильевич	5	4	4	У
2	Бабин Андрей Петрович	3	3	4	У
3	Варгин Павел Ильич	4	5	4	У
....	...				
25	Янина Софья Андреевна	2	3	3	Н

Для каждого объекта – оригинала можно построить множество моделей, связанных с решением различных задач.

Например, представления о некоторой фирме (мысленные модели), существующие у ее директора, главного технолога, бухгалтера довольно различны, так как, каждое из этих должностных лиц, решая конкретные задачи в работе фирмы, встраивают в свою мысленную модель различную информацию о ней. Ближе к оригиналу будет мысленная модель директора, так как он владеет информацией в целом.

Из сказанного следует вывод: так как при создании модели отбрасываются свойства, не важные для решаемой задачи, **то модель всегда беднее оригинала. Это ее фундаментальное свойство.**

§ 3. Классификация моделей

Классификация объектов, систем, явлений в науке это всегда процесс трудоемкий и зачастую спорный, так как классификацию можно проводить по разным признакам и

критериям. Это относится ко всем наукам, но особенно к таким молодым, как информатика.

Моделей имеется великое множество и естественно, что для их классификации можно использовать разные признаки. Рассмотрим некоторые из принятых в информатике классификаций моделей.

I. Классификация моделей по форме существования (или по сущности)

Схема классификации моделей по сущности приведена ниже на Рис.6 ниже.

1. К материальным (или натурным) относятся модели, воспроизводящие основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта или явления. Это модели реального мира, их можно услышать, увидеть, осязать. Они подчиняются физическим законам мира, в котором мы живем. Основными видами материальных моделей являются геометрические и физические, некоторые авторы добавляют к ним еще аналоговые модели.

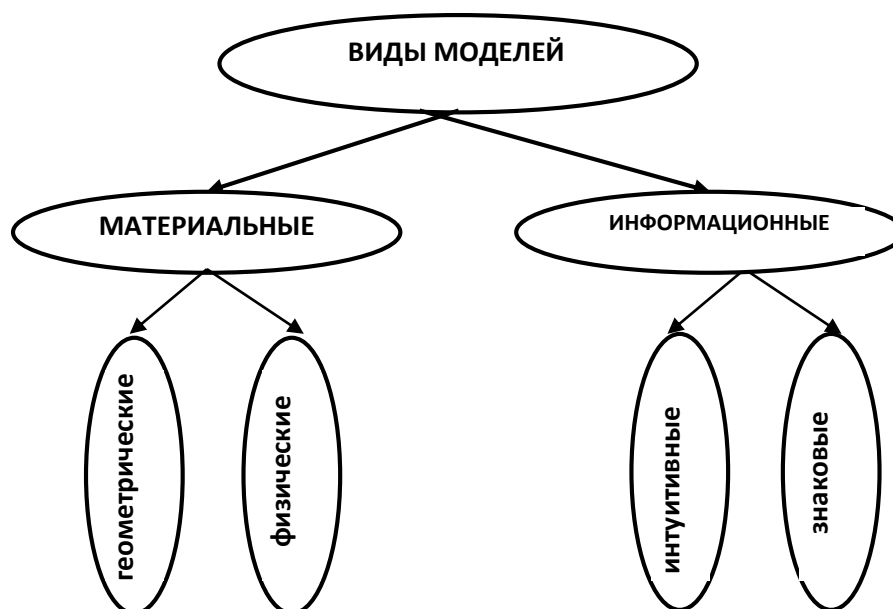


Рис. 6 - Схема классификации моделей по сущности

- **Модель называется геометрической**, если она геометрически подобна своему оригиналу, то есть, сохраняет его форму и пропорции.

Как правило, геометрические модели обычно являются уменьшенной или увеличенной копией оригинала и используются для демонстрационных целей. Так как они часто выполняются в масштабе, отличном от масштаба самого оригинала, геометрические модели еще называют *масштабными*. Громоздкие объекты (корабли, ракеты, здания – Рис.7) представляются в таких моделях в уменьшенном виде, а мелкие объекты (молекулы, микросхемы, атомы – Рис.8) – представляются в увеличенном виде. В ряде случаев геометрическая модель имеет тот же масштаб, что и объект – оригинал (копия картины, скульптуры, выкройка платья). Кроме того, встречаются геометрические

модели, имеющие меньшую «мерность», чем оригинал. Например, географическая карта – двумерная модель трехмерного пространства.



Рис.7 - Модель здания

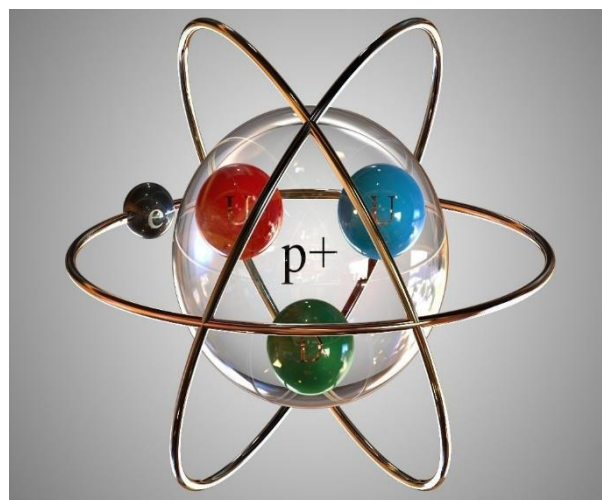


Рис.8 - Модель атома

• **Модель называется физической**, если она подобна своему оригиналу не только с точки зрения геометрических соотношений, но и с точки зрения происходящих в ней физических процессов. При этом и модель, и оригинал *всегда* имеют одинаковую физическую структуру.

Например, самолет в аэродинамической действующей трубе – физическая модель летящего самолета, аквариум с морскими водорослями и рыбками – физическая модель морской экологической системы.



Рис.9 - Модель летящего самолета



Рис.10 - Модель экосистемы

2. К информационным (или идеальным, или абстрактным) относятся модели, имеющие абстрактную, то есть мыслимую аналогию с объектом – оригиналом, они не имеют материального воплощения, потому что строятся только на информации. К ним относятся вербальные и знаковые модели.

• **Модель называется вербальной (или интуитивной),** если она представима в мыслимой или разговорной форме, оригинал такой модели либо не нуждается в формализации, либо не поддается ей. Такая модель получается в результате раздумий и умозаключений человека (Рис.11 и 12).

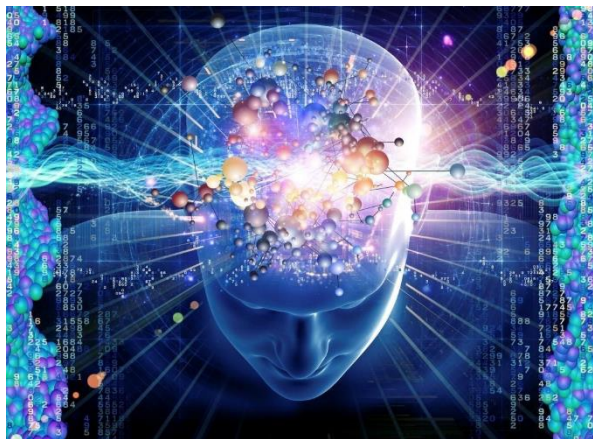


Рис.11 - Мыслимая модель



Рис.12 - Модель-умозаключение

Например, *жизненный опыт каждого человека – это его вербальная модель мира*. Прежде чем написать сочинение, статью, эссе, автор в уме составляет вербальную модель этого труда. Каждый человек содержит в памяти мысленные образы знакомых людей, прочитанных книг, просмотренных кинофильмов - эти образы и есть вербальные модели людей, книг, кинофильмов, хотя сами книги и кинофильмы являются знаковыми моделями.

• **Модель называется знаковой,** если выражает основные свойства и отношения реального объекта или процесса с помощью определенной системы знаков и символов, то есть, средствами любого формального языка (литературного, алгоритмического, математического, программирования).

Все знаковые модели являются символическими, это искусственные логические объекты, которые замещают реальные. Это могут быть списки, схемы, чертежи, графики, математические формулы и т.д. (Рис.13). Например, плакат со схемой кровообращения – это знаковая модель системы кровообращения человека, знаками являются кривые и символы органов, из которых составлена схема на плакате. Уравнение (1) – это знаковая модель полета тела, она составлена из знаков – латинских букв и математических символов.

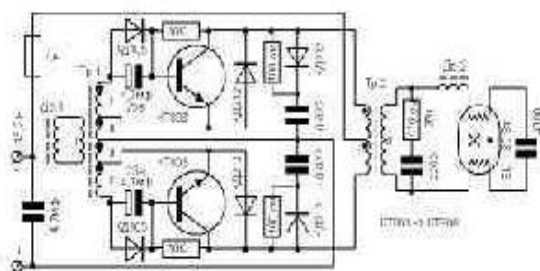


Рис.13 - Знаковые модели (схема, диаграмма, формула)

Вербальные и знаковые модели, как правило, взаимосвязаны. Мысленный образ, родившийся в мозгу человека, может быть облечен в знаковую форму, и наоборот, знаковая модель помогает сформировать в сознании верный мысленный образ.

II. Классификация моделей по фактору времени

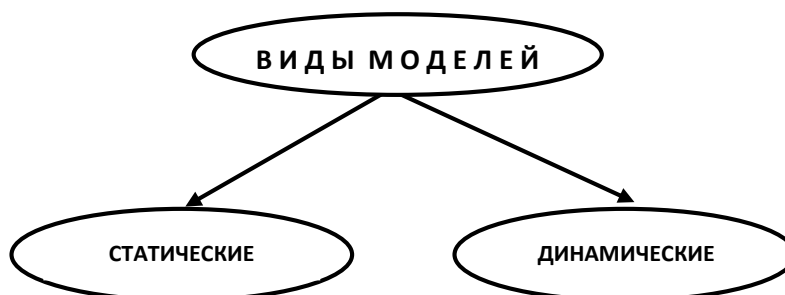


Рис.14 - Схема классификации моделей по временному фактору

Модель называется статической, если она отображает лишь структуру объекта – оригинала или описывает состояние объекта в фиксированный момент времени и не позволяет проследить его развитие во времени.

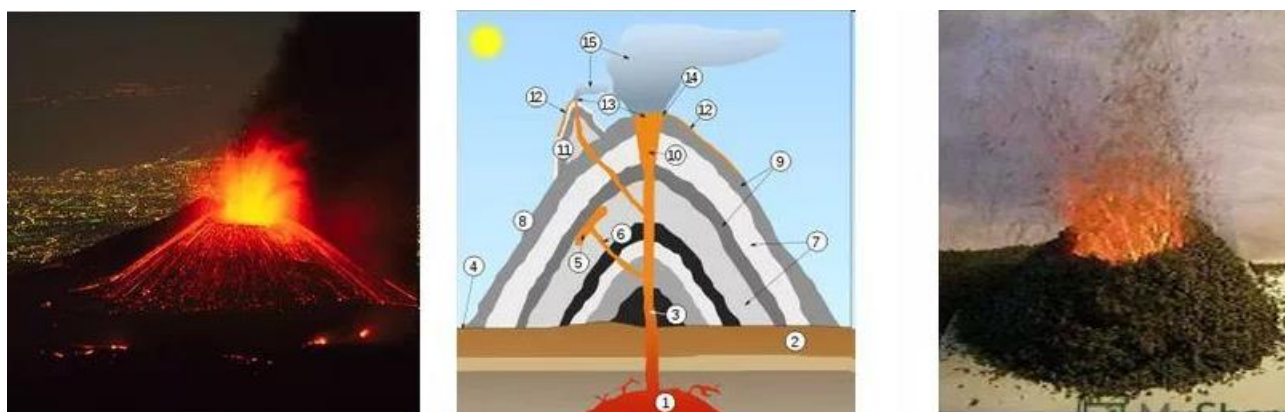


Рис.15 - Статические модели извержения вулкана

Образно говоря, статическая модель представляет собой как бы «срез» существенных свойств объекта-оригинала в некоторый момент времени. Примеры статических моделей: макет моста, скелет в кабинете биологии, карта местности, схема персонального компьютера, перечень планет Солнечной системы, фотография, схема, рисунок извержения вулкана (Рис.15).

Модель называется динамической, если она позволяет увидеть или прогнозировать поведение, или функционирование оригинала во времени.

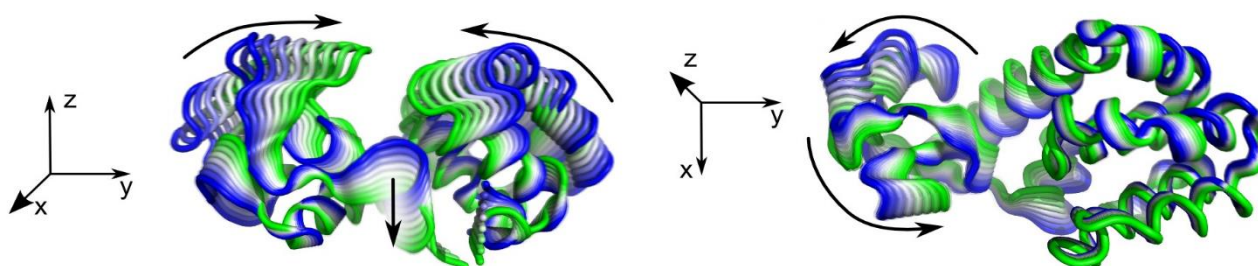


Рис.16 - Динамическая модель изменения цепочки ДНК

Динамические модели содержат информацию, как о поведении самого объекта-оригинала, так и его составных частей. Модели представимы в виде формул, схем соотношений, позволяющих вычислить параметры объекта и его частей как функции времени. Примеры динамических моделей: набор формул небесной механики, описывающий движение планет Солнечной системы; график изменения температуры в течение суток; видеозапись извержения вулкана, уравнение (1), развёртывание цепочки ДНК (Рис.16), процесс развития зародыша в фотографиях.

В зависимости от цели моделирования для одного и того же объекта могут создаваться как статические, так и динамические модели. Построение динамических моделей обычно сложнее, чем статических, поэтому, если значения свойств объекта изменяются редко или медленно, то лучше построить статическую модель системы и при необходимости вносить в нее коррективы.

III. Классификация моделей по характеру изучаемых процессов

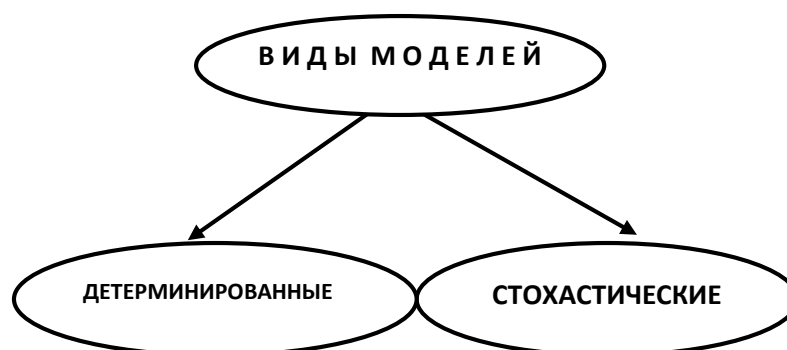


Рис.17 - Схема классификации моделей по характеру процесса

Модель называется детерминированной, если она отображает процесс, в котором предполагается отсутствие случайных факторов.

Модель называется стохастической, если она отображает процесс, в котором имеются случайные факторы с заданным вероятностным распределением.

На рисунках 18 и 19 приведены примеры детерминированной и стохастической моделей проницаемости почвы, уравнение (1) – детерминированная моделью процесса равноускоренного движения, модель броуновского движения частиц – стохастическая модель.

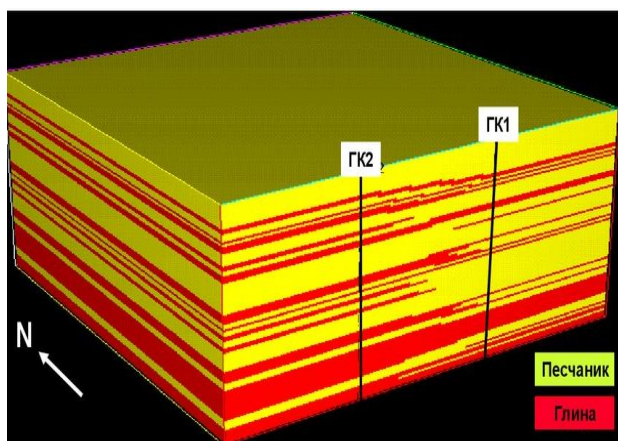


Рис.18 - Детерминированная модель
проницаемости почвы

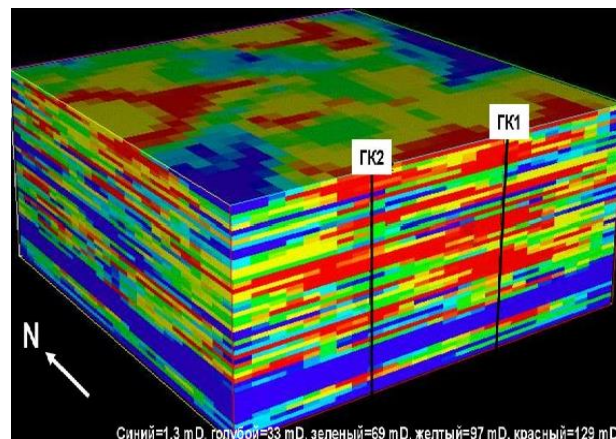


Рис.19 - Стохастическая модель
проницаемости почвы

IV. Классификация моделей по отдельной характеристике объекта

Схема классификации моделей по этому признаку приведена на Рис.20. В этой классификации используется одна из характеристик объекта моделирования, которая и выносится в название вида модели.

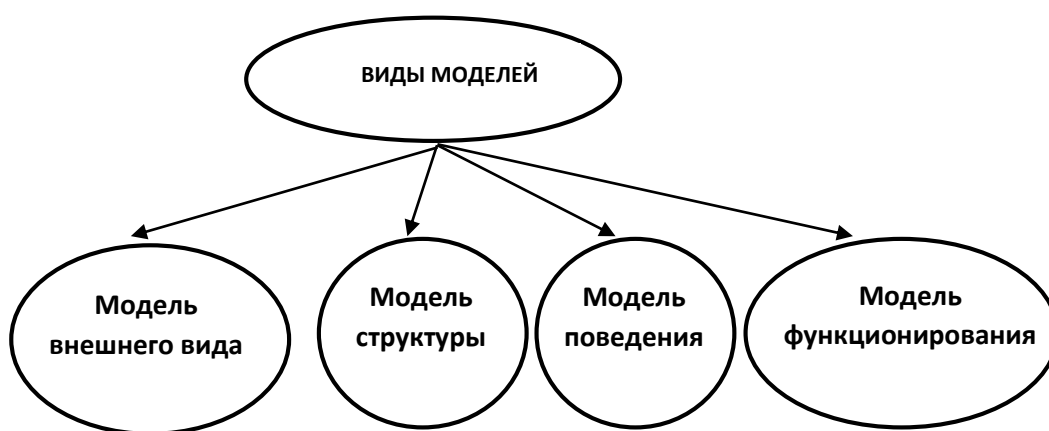


Рис. 20 - Схема классификации моделей по отдельной характеристике

В этой классификации название характеристики определяет вид модели.

Рассмотрим, как одну и ту же модель можно классифицировать по четырем различным признакам, рассмотренным выше.

1. **Макет моста** является по классификации:

- I - материальной геометрической моделью;
- II – статической моделью;
- III – не классифицируется, так как не является процессом;
- IV - моделью внешнего вида.

2. *Схема кровообращения* является по классификации:

- I - информационной знаковой моделью;
- II – статической моделью;
- III – детерминированной моделью;
- IV – моделью структуры.

§ 4. Знаковые модели

Рассмотрим более подробно знаковые модели. Это наиболее востребованный класс информационных моделей, их в свою очередь тоже можно классифицировать по различным признакам.

1. Классификация по используемым формальным языкам

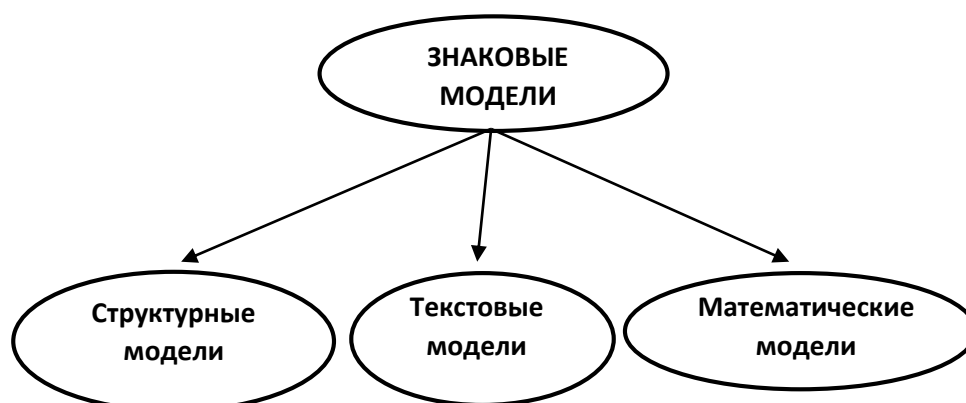


Рис. 21 - Схема классификации знаковых моделей по языкам

Структурными называются модели, в которых информация об объекте оригинале представлена в виде схем, чертежей, графиков, таблиц, часто снабженных поясняющими записями.



Рис.22 - Структурная схема языка

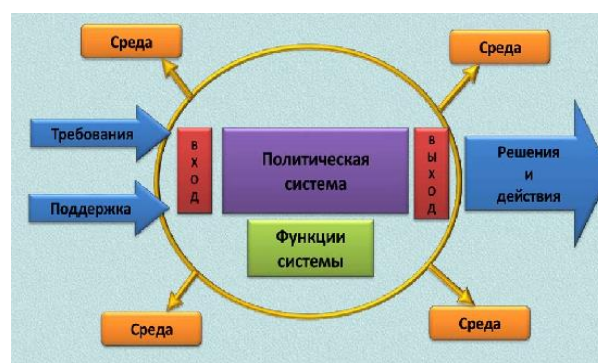


Рис.23 - Структурная схема системы

Текстовыми (словесными, вербальными) называются модели, использующие предложения естественного языка для описания объектов, событий, ситуаций, предметных областей с целью их осмысления, анализа и использования опыта (Рис.24 и 25).

- ТОЧНОСТЬ
- ЛОГИЧНОСТЬ
- СТРЕМЛЕНИЕ К СТАНДАРТУ
- ОТСУТСТВИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЛИЧНЫХ, СУБЪЕКТИВНЫХ ЧУВСТВ И ОТНОШЕНИЙ
- ОТСУТСТВИЕ ЭМОЦИОНАЛЬНО-ОКРАШЕННЫХ ЯЗЫКОВЫХ СРЕДСТВ
- ОТСУТСТВИЕ ОБРАЗНЫХ РИТОРИЧЕСКИХ СРЕДСТВ И ПРИЕМОВ
- СПЕЦИФИЧЕСКАЯ ЛЕКСИКА И ФРАЗЕОЛОГИЯ

Рис.24 - Словесная модель
делового стиля письма

1. Уровень правильности, критикуемый в быту по формуле “Он русского языка (еще) не знает”.
2. Уровень интериоризации, критикуемый в быту по формуле “Он еще говорить как следует не научился”.
3. Уровень насыщенности, критикуемый в быту по формуле “У него бедная речь”.
4. Уровень адекватного выбора, критикуемый в быту по формуле “Он не те слова говорит”.
5. Уровень адекватного синтеза, критикуемый в быту по формуле “говорит он то, да получается что-то не то”.

Рис.25 – Словесная модель
уровней личности

Примерами словесных моделей является милицейский протокол, список приглашенных гостей, пьеса и т.д.

Математическая модель – это совокупность математических выражений, определяющих формальную зависимость между входными и выходными данными моделируемого объекта или явления.

Эта совокупность может состоять из уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств, логических и числовых выражений.

Например, уравнения $S = V \cdot t$ и $S = V \cdot t + a \cdot t^2 / 2$ являются математическими моделями таких физических процессов, как равномерное и равноускоренное движение тела соответственно. Для построения математических моделей используется формализованный математический язык, состоящий из специальных символов.

2. Классификация по способу реализации (или инструментарию)



Рис. 26 - Схема классификации знаковых моделей по инструментарию

Схема классификации знаковых моделей по способу реализации (инструментарию) приведена на Рис.26.

К **некомпьютерным** относятся модели, для построения которых использован традиционный набор инструментов: карандаши, ручки, печатные машинки, линейки.

К **компьютерным** относятся модели, для построения которых использовался компьютер.

§ 5. Компьютерные модели

В вузовских и школьных учебниках по информатике можно встретить различные определения компьютерной модели:

Компьютерная модель – это модель реального объекта, процесса или явления, полученная с помощью компьютера

Компьютерная модель — это информация о моделируемой системе, представленная средствами компьютера в виде рисунка, графика, диаграммы, текста, электронной таблицы, базы данных, базы знаний, анимационного изображения, видеоролика и т.д.

Компьютерная модель является **виртуальным объектом**, так как существует лишь в памяти компьютера и не подчиняется физическим законам (вне памяти виртуальных объектов нет).

В настоящее время выделяют два вида **компьютерных** моделей (Рис.27):

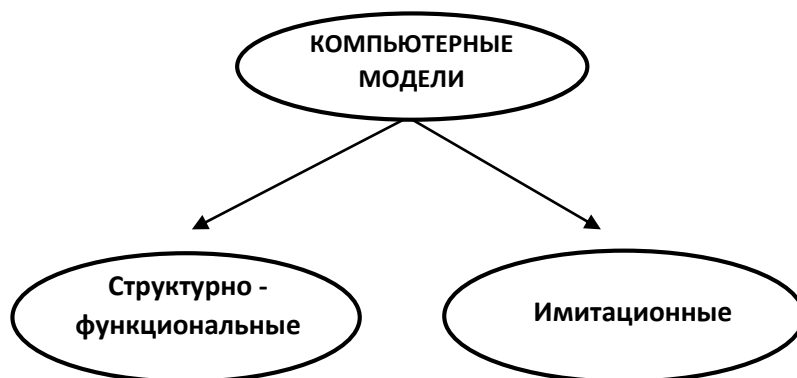


Рис.27 - Схема классификации компьютерных моделей

Структурно-функциональными называются компьютерные модели, которые представляют собой условный образ объекта, описанный с помощью компьютерных сред (фоторобот, трехмерная модель атома, траектория движения объекта).

Имитационными называются компьютерные модели, представляющие собой программу или комплекс программ, позволяющий воспроизводить процессы функционирования объекта в разных условиях (распад атома, излучение частиц, развитие эмбриона, анимация работы двигателя).

Компьютерные модели можно строить с помощью самых разных программных средств и пакетов: Excel, Word, Access, MathCad, 3DMAX и любых систем программирования.

Компьютерная модель, в основе которой лежит математическая модель, называется **компьютерной математической моделью**.

Компьютерные программы, написанные на каком-либо языке программирования, строящие модели объектов, процессов, явлений называются **моделирующими программами**.

Моделирующие программы некоторые авторы относят к *компьютерным моделям* наряду с результатами их работы. В них используются знаки языка программирования, на котором они написаны. Моделирующие программы могут иметь три основных блока.

1. Блок исходных данных. Этот блок определяет *цель (стратегию)* моделирования и может содержать следующие данные:

- Статические параметры, такие как гравитационная постоянная, ускорение силы тяжести, масса, размеры и т.д.;
- Динамические параметры, такие как время, скорость, ускорение;

Эти данные в программе могут быть константами или переменными, значения для переменных могут вводиться с клавиатуры, из файла или присваиваться в самой программе.

2. Рабочий блок.

Он содержит алгоритм реализуемой задачи, записанный в виде совокупности операторов языка программирования, если программа написана на алгоритмическом языке. Этот блок обычно содержит процедуры и функции обработки различных ситуаций. Если же используется логический язык, то рабочий блок – это база знаний программы и ее цель.

3. Блок результатов.

Этот блок содержит вывод результатов моделирования в любом виде: словесном, числовом, графическом, в виде демонстрации или имитации процесса, или явления. В ряде случаев рабочий блок и блок вывода результатов могут совпадать.

Контрольные вопросы к первой главе

1. Является ли определение модели однозначным?
2. Какие определения модели имеют место в информатике?
3. Как давно появились модели?
4. Когда они стали востребованными?
5. Для чего нужны модели?
6. В чем заключается фундаментальное свойство моделей?
7. По каким признакам можно классифицировать модели?
8. На какие виды делятся модели по форме существования?
9. Какие модели относятся к натурным? Информационным?
10. Какие модели называются натурными? Информационными?
11. На какие виды делятся натурные модели?
12. Какие модели называются геометрическими? Физическими?
13. Какие модели называются интуитивными? Знаковыми?
14. На какие виды делятся знаковые модели по используемым языкам? По инструментарию?
15. Какие модели называются структурными? Текстовыми? Математическими?
16. Какие модели называются некомпьютерными? Компьютерными?
17. Какие модели называются имитационными?
18. Какие программы называются моделирующими?
19. Какие блоки могут содержать моделирующие программы?
20. В чем назначение каждого блока?

Глава 2. Моделирование

§ 1. Моделирование как метод познания

Существуют различные способы познания окружающей человека действительности, некоторые из них известны очень давно, например, *эвристический* (метод проб и ошибок). Он предполагает проведение большого числа проб, опытов для установления истины. Такой метод познания очень долог.

Так как любая модель строится с целью получения информации об объекте – оригинале, то моделирование, по своей сути, является *методом познания* окружающей действительности.

Моделирование в научных исследованиях начали применять еще в глубокой древности, оно постепенно захватывало все новые области научных знаний: строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию, техническое конструирование и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX век, в котором термины «модель» и «моделирование» стали востребованными и начали активно использоваться. Определение моделирования, как и модели, неоднозначно.

Моделирование – способ, процесс замещения оригинала его аналогом (моделью) с последующим изучением свойств и поведения оригинала на модели.

Моделирование есть процесс перехода из реальной области в виртуальную (модельную) посредством формализации.

Моделирование — исследование объектов познания на их моделях.

Моделирование - построение и изучение моделей реально существующих объектов, процессов и явлений с целью получения объяснений этих явлений, а также для предсказания явлений, интересующих исследователя.

Моделирование – это метод научного познания действительности (систем, процессов, явлений) с помощью построения, изучения и использования моделей.

В данном пособии в следующих главах рассмотрены такие виды моделирования, как математическое и компьютерное.

Математическое моделирование – это метод научного познания действительности с помощью построения математических моделей и проведения с ними теоретического исследования (эксперимента).

Компьютерное моделирование – это метод научного познания действительности с помощью построения компьютерных моделей и проведения с ними компьютерного эксперимента.

Суть компьютерного моделирования заключается в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризующих систему.

Компьютерное моделирование для рождения новой информации использует любую информацию, которую можно актуализировать с помощью компьютера.

Моделирование, как метод познания позволяет:

1. Понять как устроена система (объект), то есть, какова ее структура, ее свойства, ее законы развития. Например, построив модель Вселенной, ученые установили, что она разбегается.

2. Прогнозировать поведение системы во времени при различных внешних воздействиях. Например, исследуя модель Солнечной системы, ученые пришли к выводу, что Солнце через 4 миллиарда лет взорвется.

3. Научиться оптимально управлять системой согласно выбранному критерию. Например, построив модель такого процесса, как загруженность городского транспорта в течение дня, можно выяснить, какое количество автобусов, по каким маршрутам, в какие часы нужно выпускать на линии.

В узком смысле (в технике, науке, быту) под **моделированием** понимается сам процесс построения и/или использования модели.

Главная особенность моделирования как метода познания состоит в том, что это **метод опосредованного познания действительности с помощью объектов-заместителей. Модель в нем выступает как инструмент познания, с помощью которого изучается этот объект.** Перенос результатов, полученных в ходе построения и исследования модели, на оригинал возможен потому, что модель в определенном смысле воспроизводит (отображает, описывает, имитирует) некоторые характеристики оригинала, интересующие исследователей. В настоящее время моделирование как форма отражения действительности широко распространено, но достаточно полная классификация возможных видов моделирования крайне затруднительна, хотя бы в силу многозначности понятия «модель», активно используемого не только в науке и технике, но и в искусстве, и в литературе, и в повседневной жизни.

Необходимость использования моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или невозможно, или исследование требует много времени и средств, поэтому, **главной задачей моделирования является получение информации об объекте – оригинале через изучение модели.**

Процесс моделирования включает три элемента:

1. Субъект исследования (исследователь);
2. Объект исследования (оригинал);
3. Модель, опосредующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Субъект моделирования — это человек или группа лиц, которые строят, или изучают, или используют модель

Объект моделирования – это система, процесс или явление для которого строится модель.



Рис.28 - Три объекта моделирования

На Рис.28 слева представлен субъект моделирования – исследователь, который по черепу – оригиналу восстановил лицо человека (модель), жившего в VII веке.

Например, газетная статья о событии – это модель, само событие – объект моделирования, репортер, написавший статью и люди, ее читающие – это субъекты моделирования.

§ 2. Этапы моделирование

Несмотря на большое разнообразие моделей, в процессе моделирования можно выделить ряд этапов, общих для построения любой модели. Рассмотрим этапы **компьютерного математического моделирования**, которое базируется на математической модели.

1. Постановка задачи.

На этом этапе определяется, прежде всего, **цель моделирования**. Далее, исходя из цели:

- Определяется список входных величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, от которых зависит строение или функционирование объекта или ход процесса,
- Определяется список выходных величин $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$, значение которых нужно получить в результате моделирования.

Например, если строится модель полета кометы, вторгнувшейся в пределы Солнечной системы, то масса кометы, ее скорость, время появления, масса и расположение планет Солнечной системы являются входными величинами, а наименьшее расстояние, на которое комета приблизится к Земле – выходной величиной.

Входные параметры модели $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ могут быть **детерминированными**, то есть, однозначно определенными, или **стохастическими**, то есть, определенными в вероятностном смысле, в зависимости от этого модель будет **детерминированной или стохастической**. Для стохастической модели выходные параметры могут быть как детерминированными, так и вероятностными.

В модели движения кометы ее масса, скорость и время появления определены не точно, а с некоторой вероятностью, результат моделирования – наименьшее расстояние -

тоже будет вычислен с некоторой вероятностью, поэтому построенная модель движения ракеты будет стохастической.

2. Ранжирование входных параметров.

На этом этапе входные параметры $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ разделяются по степени важности на значимые и второстепенные.

Значимым называются параметры, изменение которых *существенно* влияет на выходные величины $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$, именно их и учитывают в модели.

Второстепенными называются параметры, изменение которых *практически не* влияет на выходные величины $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$, эти параметры в модели не учитываются. Это огрубляет модель, но способствует пониманию главных свойств и закономерностей развития объекта.

3. Выдвижение гипотезы.

Гипотеза – это предположение, основанное на небольшом количестве опытных данных, наблюдений или догадок.

На этом этапе выдвигаются гипотезы о строении, свойствах, поведении, функционировании изучаемой системы или явления. Изучение модели должно подтвердить или опровергнуть гипотезу.

Например, при вторжении кометы может быть выдвинута гипотеза о том, что она столкнется с Землей или пролетит настолько близко, что вызовет на Земле различные катаклизмы, или наоборот, что ее вторжение не повлияет на земные процессы.

4. Построение математической модели.

На этом этапе выполняются следующие действия:

- Определяется набор постоянных величин (констант), которые характеризуют сам моделируемый объект и его составные части. Это статические параметры модели;
- Определяется набор переменных величин, изменение значений которых меняет структуру или поведение модели, это динамические или управляющие параметры модели;
- Составляются формулы и алгоритмы, связывающие величины в каждом из состояний моделируемого объекта;
- Составляются формулы и алгоритмы, описывающие процесс смены состояний моделируемого объекта.

Выдвинутая ранее гипотеза тоже записывается в терминах матмодели.

5. Составления алгоритма для нахождения решения модели.

Для нахождения решения одной матмодели в ряде случаев можно использовать несколько алгоритмов. Например, если математическая модель – это система линейных уравнений, то для нахождения ее решения можно использовать метод подстановки, метод Гаусса, метод итераций и т.д. Из нескольких алгоритмов выбирается один, наиболее

подходящий для решения поставленной задачи. Обычно используют уже готовые алгоритмы, если таковых нет, разрабатываются новые.

6. Составление программы.

На этом этапе, на основе выбранного алгоритма, составляется компьютерная программа или берется уже готовая. Эта программа наряду с результатом ее работы и есть компьютерная математическая модель объекта или явления.

7. Прогонка программы на компьютере.

На этом этапе программа тестируется с целью обнаружения логических ошибок. На этом же этапе в том или ином виде получают результаты моделирования.

8. Изучение модели.

На этом этапе с компьютерной моделью проводят **вычислительный (компьютерный) эксперимент**, который позволяет сделать выводы о строении, свойствах, поведении модели. Эти выводы могут быть получены в любой форме: словесной, числовой, графической, табличной и т.д.

Например, при изучении модели движения кометы результат может быть получен в виде траектории ее полета или в виде числа, определяющего наименьшее расстояние, на которое комета приблизится к Земле.

9. Получение заключения по объекту оригиналу.

На этом этапе **по аналогии** делаются выводы о строении, исследуемого объекта – оригинала, его свойствах, характеристиках, предсказывается или имитируется его поведение или функционирование. Здесь уже используются выводы, полученные на восьмом этапе.

Аналогия — это суждение о сходстве двух объектов по каким-либо признакам.

10. Анализ результатов и получение выводов.

На этом этапе делается вывод, что математическая модель, с которой проводился компьютерный эксперимент, годна, с ней можно работать и дальше, или, что модель – груба и ее следует уточнить.

В конкретных случаях моделирования не обязаны присутствовать все десять этапов. Например, не обязательно должна выдвигаться гипотеза, если об объекте – оригинале нет сведений вообще или их очень мало. Не обязательно строить модель, можно использовать уже готовую.

Если гипотеза была выдвинута, и результаты моделирования ее подтвердили, то говорят, что модель **адекватна** (близка) оригиналу. Если же гипотеза не подтвердилась, то тут возможны два варианта:

- 1) гипотеза неверна;
- 2) модель – груба, то есть она не адекватна оригиналу.

В первом случае нужно выдвигать новую гипотезу или брать за основу результаты моделирования.

Во втором случае модель нужно **уточнить**, то есть дополнить свойствами и характеристиками, которые были отброшены на первом этапе как второстепенные, но которые оказались существенными для решаемой задачи и снова провести исследование.

§ 3. Способы исследования моделей

Для исследования моделей с целью получения информации используют два способа.

I. Аналитический (или теоретический) способ.

Этот способ используют, как правило, при исследовании знаковых моделей. Например, если имеется математическая модель, выраженная уравнением, то ее исследование заключается в нахождении решения уравнения. Полученное решение и позволит ответить на вопрос, какие величины, от каких, каким образом зависят в объекте-оригинале или в процессе-оригинале. Если модель получена в виде химической формулы, то ее теоретическое исследование проводят путем составления для этой формулы химических уравнений и нахождения их решений. На Рис.29 приведены фотографии математических выкладок, примерно так могут выглядеть теоретические исследования моделей.

Метод Гаусса

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.166 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.333 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при x_3

Откуда получаем $x_3=2$. Подставляем полученное значение в уравнения 2 и 1 получаем

↓

$$x_2 = 5.333 - 0.1666 \cdot 2 = 5.333 - 0.333 = 5$$

$$x_1 + 0.4 \cdot x_2 = 9.4 - 0.2 \cdot 2 = 9.4 - 0.4 = 9$$

Подставляя полученное значение $x_2=5$ в уравнение 1, найдем

↓

$$x_1 = 9 - 0.4 \cdot 5 = 9 - 2 = 7$$

Таким образом, решением системы уравнений будет вектор $X = [7 \ 5 \ 2]^T$

$$2\text{Mg} + \text{O}_2 = 2\text{MgO};$$

$$2\text{Al} + 3\text{Cl}_2 = 2\text{AlCl}_3;$$

$$2\text{Na} + \text{S} = \text{Na}_2\text{S}.$$

$$4\text{P} + 5\text{O}_2 = 2\text{P}_2\text{O}_5;$$

$$\text{H}_2 + \text{Cl}_2 = 2\text{HCl};$$

$$4\text{Al} + 3\text{O}_2 = 2\text{Al}_2\text{O}_3.$$

Рис. 29 - Теоретические исследования знаковых моделей

II. Экспериментальный способ.

Эксперимент (проба, опыт) - метод исследования некоторого явления в **управляемых условиях**. Отличается от **наблюдения** активным взаимодействием с изучаемым объектом. Обычно эксперимент проводится в рамках научного исследования и служит для проверки гипотезы или установления причинных связей между явлениями. Эксперимент является краеугольным камнем эмпирического (опытного) подхода к знанию и позволяет отличить научную теорию от псевдонаучной.

Эксперименты делятся на физические и компьютерные.

1. **Физический эксперимент** – это способ познания природных явлений в специально созданных условиях.

Он проводится с физическими объектами или их моделями, которые растягивают, сжимают, охлаждают, нагревают, изгибают, ускоряют и т.д. При этом всегда используются физические приборы, позволяющие замерять, как изменяются характеристики моделей во время испытаний (Рис.30). Этот способ исследования моделей используется людьми довольно давно.

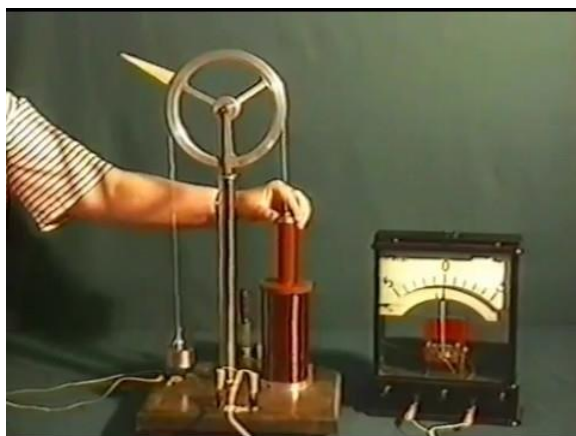


Рис.30 - Физические эксперименты

2. **Компьютерный эксперимент** появился сравнительно недавно, тогда, когда компьютеры стали использовать в науке, его определение в информатике тоже неоднозначно.

Компьютерный эксперимент – это стиль проведения научного теоретического исследования модели с помощью компьютера.

Компьютерный эксперимент — это эксперимент над математической моделью объекта-оригинала на компьютере, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие ее параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах объекта-оригинала (Рис.31).

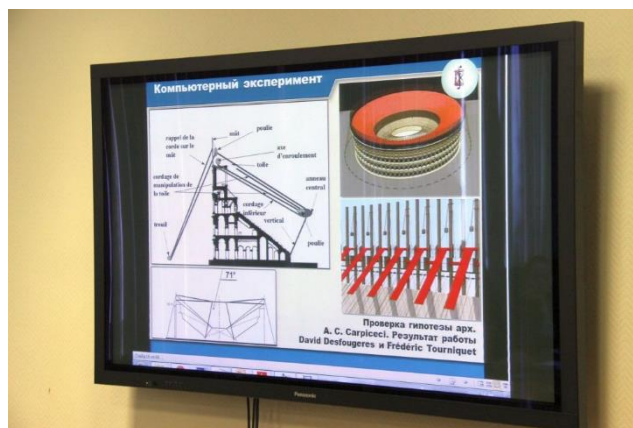
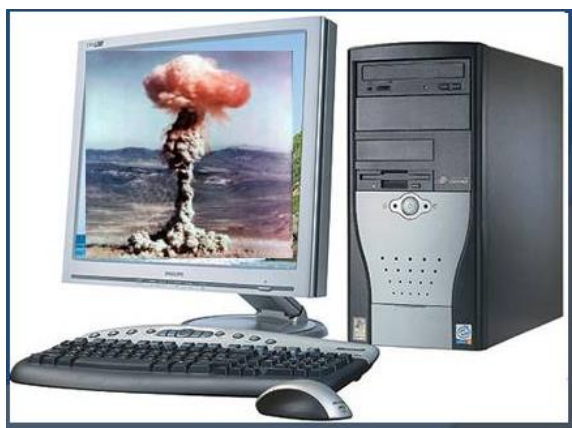


Рис.31 - Компьютерные эксперименты на экране компьютера

Компьютерный эксперимент, выдающий результат в числовом виде, называется **вычислительным**.

Компьютерный эксперимента *лишь условно* можно отнести к эксперименту, потому как он не отражает природные явления, а является лишь численной реализацией созданной человеком математической модели, то есть, это виртуальный эксперимент. Например, если, матмодель составлена некорректно, ее численное решение может расходиться с физическим экспериментом.

Цели, для достижения которых проводится компьютерный эксперимент, могут быть следующие:

- 1) *Познание окружающего мира*, то есть, получение знаний о структуре объекта, его свойствах, законах его развития и взаимодействия с окружающим миром.
- 2) *Создание объекта с заданными свойствами*, например, атомной электростанции новой конструкции.
- 3) *Нахождение решения задачи* путем подбора соответствующих данных.
- 4) *Нахождение оптимального варианта решения* задачи путем перебора данных.
- 5) *Изучение свойств* процессов или явлений путем их имитации на экране в замедленном или ускоренном режиме времени.
- 6) *Наблюдение процесса* или явления на экране в виде его демонстрации с заданными параметрами.

Основой компьютерного эксперимента чаще всего является **математическая модель**.

Теоретической базой компьютерного эксперимента является **прикладная математика**.

Технической базой компьютерного эксперимента является **парк мощных компьютеров**.

Компьютерный эксперимент соединяет в себе достоинства физического эксперимента и теоретического исследования, так как:

- так же, как в теоретическом исследовании позволяет использовать всевозможные методы математики;
- так же, как в физическом эксперименте позволяет менять входные данные процесса и наблюдать изменение выходных данных (результата) на экране.

Более того, компьютерный эксперимент имеет собственные достоинства:

- позволяет заменить дорогостоящий физический эксперимент расчетами на компьютере, причем, все математические вычисления в нем производятся со скоростью, во много раз превышающей скорость исследователя теоретика;
- позволяет в короткие сроки и без значительных материальных затрат исследовать большое число вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации, что значительно сокращает сроки разработки сложных систем и их внедрение в производство.

- входные данные в нем можно менять очень быстро и также быстро увидеть результат, причем, не производя никаких замеров, не используя никаких приборов.

Например, экспериментируя с моделью с помощью компьютера, ее можно охладить до абсолютного нуля, нагреть до термоядерных температур, отправить в прошлое или будущее, отправить в глубь Земли или океана. В некоторых процессах, где физический эксперимент опасен для жизни и здоровья людей, вычислительный эксперимент является единственно возможным способом исследования (термоядерный синтез, освоение космического пространства и т.д.).

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования заставляет, в свою очередь, совершенствовать математический аппарат, используемый при построении и исследовании математических моделей, позволяет, используя математические методы, уточнять и усложнять математические модели. Наиболее перспективным для проведения вычислительного эксперимента является его использование для решения крупных научно-технических и социально-экономических проблем современности (проектирование реакторов для атомных электростанций, проектирование плотин и гидроэлектростанций, составление сбалансированного плана для отрасли, региона или страны и др.).

Контрольные вопросы ко второй главе

1. Однозначно ли определение моделирования?
2. Какие определения моделирования можно привести?
3. Что называется математическим моделированием?
4. Что называется компьютерным моделированием?
5. В чем заключается суть компьютерного моделирования?
6. Что позволяет моделирование как метод познания?
7. Что понимается под моделированием в «узком» смысле?
8. В чем заключается главная особенность моделирования как метода познания?
9. Чем объясняется необходимость моделирования?
10. Какие элементы включает процесс моделирования?
11. Что называется субъектом моделирования? Объектом моделирования?
12. Из скольких этапов состоит процесс математического моделирования?
13. Как они называются?
14. Что происходит на этапе «Постановка задачи»?
15. Какими могут быть входные и выходные параметры модели?
16. Что понимается под ранжированием входных параметров?
17. Какие параметры при ранжировании считаются значимыми? Второстепенными?
18. Что называется гипотезой?
19. Что называется математической моделью?
20. Что происходит на этапе «Построение математической модели»?
21. Что понимается под алгоритмом?
22. Что происходит на этапе «Составление алгоритма»? Всегда ли его надо составлять?

23. Что происходит на этапе «Составление программы»?
24. Что происходит на этапе «Прогонка программы»?
25. Каким образом происходит изучение модели?
26. Какие выводы позволяет сделать изучение модели?
27. В каком виде они могут быть получены?
28. Каким образом получают заключение по объекту оригиналу?
29. Что называется аналогией?
30. Все ли десять этапов бывают задействованы при моделировании?
31. Какие этапы могут отсутствовать и почему?
32. Когда считается, что модель адекватна оригиналу?
33. Какие варианты есть у исследователя оригинала, если результаты моделирования не подтвердили выдвинутую гипотезу?
34. Что в таких случаях может предпринять исследователь?
35. Сколько существует способов для исследования моделей?
36. Для исследования каких моделей используется аналитический (теоретический) способ?
37. Каким образом исследуются модели этим способом?
38. Что называется экспериментом? Чем он отличается от наблюдения?
39. На сколько видов делится экспериментальный способ исследования?
40. Какой эксперимент называется физическим? Когда он появился?
41. С какими объектами он проводится? Каким образом измеряются характеристики объектов?
42. Какой эксперимент называется компьютерным? Когда он появился?
43. Какой компьютерный эксперимент называется вычислительным?
44. Почему компьютерный эксперимент можно лишь условно отнести к эксперименту?
45. С какими целями может проводиться компьютерный эксперимент?
46. Что является его основой? Теоретической базой? Технической базой?
47. Какие достоинства физического эксперимента и теоретического исследования соединяет в себе компьютерный эксперимент?
48. Какие собственные достоинства имеет компьютерный эксперимент?
49. Для решения каких задач наиболее перспективным является использование компьютерного эксперимента?
50. Как компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент в качестве нового метода исследования влияют на развитие математического исследовательского аппарата

Глава 3. Компьютерное графическое моделирование

§ 1. Модели художественной графики

Одним из основных достоинств компьютерного моделирования как метода познания является возможность исследователя представлять результаты моделирования в графическом виде, что позволяет сделать даже невидимые и абстрактные объекты «видимыми», например, увидеть строение молекулы, распад атомного ядра, лицо умершего человека, смоделированное по черепу, фоторобот, смоделированный по словесному описанию. Довольно часто программы, моделирующие объекты, процессы, явления в виде графических изображений, пишутся на основе их математической модели, но не всегда. Графическую модель можно построить вообще без использования математики, например, с помощью точек, отрезков прямых и кривых линий, плоских и объемных фигур и т.п. Получаемые модели являются красочными и наглядными, поэтому эту главу начнем с рассмотрения графических моделей. В компьютерной графике различают художественную, деловую и научную графику, различие это чисто условное, в разных источниках оно определяется по-разному.

Графика, связанная с использованием художественных образов, называется **художественной**.

Одним из направлений художественной графики является моделирование различных узоров, при этом основная роль принадлежит зрительному восприятию результатов моделирования. Например, при пересечении двух семейств прямых под заданным углом получаются узоры, которые называются «муаровыми». Меняя параметры семейства линий, можно составить очень красивые «муаровые» узоры (Рис.32).

1.1 Моделирование «Муарового узора»

Для моделирования такого узора можно использовать, например, такую программу, составленную на языке программирования Паскаль.

```
program Y3OR;
  uses Crt, Graph;
  var gD, gM, i, k, k1, k2, m, n : integer;
BEGIN
  gD:=Detect; InitGraph(gD,gM, ' ');
  randomize; setbkcolor(15);
  k:= random(15)+1; setcolor(k);
  k1:= 2; k2:= 4; {параметры узора}
  if k1 <= k2 then m :=k1 else m:=k2;
  n:=480 div m;
  for i:=1 to n do begin line(0, i*k1, 640, i*k2); line(0, i*k2, 640, i*k1); end;
  readkey;
  closegraph;
END.
```

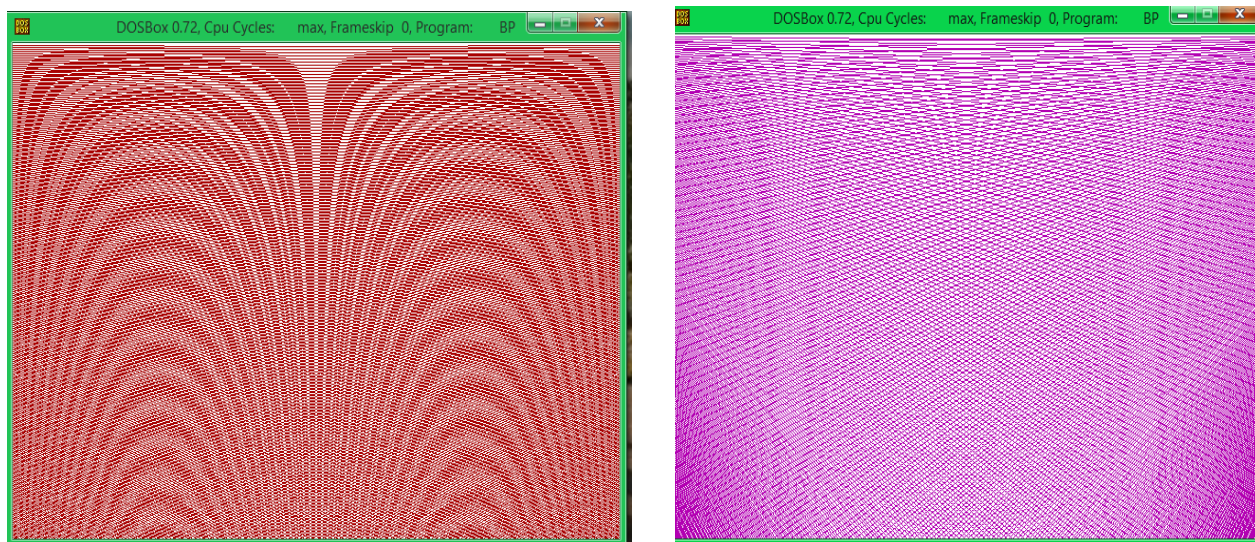



Рис. 32 - Графические модели – «муаровые узоры»

На Рис.32 представлены узоры, которые моделирует эта программа. При пересечении двух семейств прямых, которые рисуются операторами *line* с разными параметрами, наблюдается эффект «интерференции», воспринимаемый зрительно как узор.

Меняя параметры модели k_1 , k_2 , задающие расстояние между линиями соответственно в левом и правом семействе прямых, то есть, выполняя с моделью простейший компьютерный эксперимент, можно получить различные «муаровые» узоры. Например, при $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, получится узор, представленный на Рис. 32 слева, при $k_1 = 3$, $k_2 = 7$, получится узор, представленный на Рис. 32 справа. Очевидно, узоры существенно отличаются друг от друга, цвет узора в программе задается случайным образом из диапазона [1-16] с помощью функции **random()**. В данной графической модели «художественным образом» является отрезок прямой.

1.2 Моделирование узора – «Звезда»

Узоры можно рисовать и с помощью таких «художественных образов», как окружность, эллипс, ромб, угол. Рассмотрим, как можно использовать фигуру угол для рисования узора в виде звезды. Угол будем задавать координатами трех точек, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) расположенных на двух окружностях разных радиусов, имеющих общий центр. При этом координаты точек будем рассчитывать по формулам (1), которые задают точки окружности с параметрами - радиусом r и углом α .

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos(\alpha) \\ y = y_0 + r \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

На Рис. 33 ниже фактически изображена графическая модель угла, на которой точка (x_1, y_1) изображена на окружности с радиусом r_1 , а точки (x_2, y_2) и (x_3, y_3) - на окружности с радиусом r_2 . Для точки (x_2, y_2) показан угол α_3 , который образует радиус-вектор этой точки с осью OX.

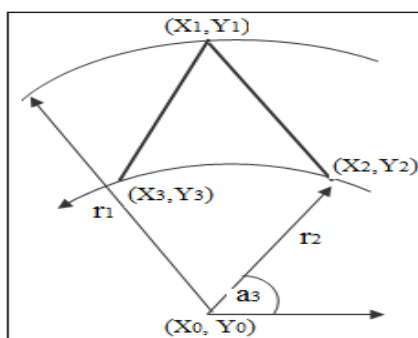


Рис. 33- Модель угла

Формула (1) является математической моделью точки с координатами (x, y) , лежащей на окружности радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) , радиус вектор этой точки образует с горизонтальной осью угол α . Эта формула размещена в процедуре Ugol в программе Star, моделирующей узор – звезду. В данном случае, модель Star является уже компьютерной математической моделью фигуры звезда.

```

program Star;
  uses Crt, Graph;
  var gD, gM, i, k, x0, y0, n: integer; r1, r2, a1, a2, a3: real;
  procedure Ugol; { процедура, рисующая угол }
    var x1, y1, x2, y2, x3, y3 : integer;
  begin
    x1:= round (x0 + r1*cos (a1));  y1:= round (y0 - r1*sin (a1));
    x2:= round (x0 + r2*cos (a2));  y2:= round (y0 - r2*sin (a2));
    x3:= round (x0 + r2*cos (a3));  y3:= round (y0 - r2*sin (a3));
    line (x1, y1, x2, y2); line (x1, y1, x3, y3);
  end;
  BEGIN
    gD:=Detect; InitGraph (gD, gM, ' ');
    randomize;
    setbkcolor(15);
    k:= random(15) +1;
    setcolor(k);
    x0:= 280; y0:= 250; {координаты центра окружностей}
    r1:= 180;  r2:= 60; {радиусы внешней и внутренней окружности}
    a1:= 0; {начальный угол}
    n:= 5; {число лучей звезды}
    for i:=1 to n do
      begin
        a1:= a1+2*pi/n; a2:= a1+pi/n;  a3:= a1-pi/n;
        Ugol;
        readkey; {нажмите любую клавишу}
      end;
    setfilstyle (1,k);
    floodfill (x0, y0,k);
    readkey;
    closegraph;
  END.

```

Программа Star моделирует узор в виде звезды. Меняя в программе количество лучей звезды n , радиусы окружностей r_1 и r_2 , можно получить различные конфигурации звезд, изображенные на Рис.34

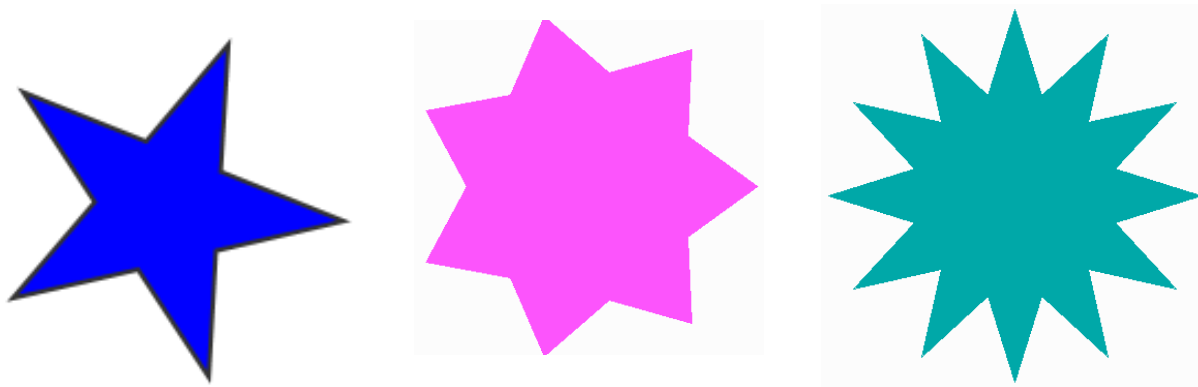


Рис. 34 - Графические модели – «звезды»

1.3 Моделирование узора – «Дерево»

Рассмотрим, как можно использовать эту же фигуру угол при моделировании другого узора, назовем его «Деревом».

Программа Derevo, моделирующая этот узор, представлена ниже. Она содержит ряд взаимно обратных процедур: Vpered (рисование линии от точки (x_1, y_1) до точки (x_2, y_2)) и Nazad (рисование линии от точки (x_2, y_2) до точки (x_1, y_1) – фактически возврат в точку (x_1, y_1)), PovVlevo (поворот влево на указанное число градусов) и PovVpravo (поворот вправо на указанное число градусов). В основе процедуры Vpered лежит математическая модель (1)

```

program Derevo;
    uses Crt, Graph;
    var gM, gD, i : integer;  x0, y0, a : real;
procedure Vpered (r: real);
    var x1, y1, x2, y2 : integer;
begin
        x1:= round(x0);  y1:= round (y0);
        x0:=x0 + r*sin(a); y0:=y0 - r*cos(a)
        x2:= round (x0); y2:= round (y0) ;
        line(x1, y1, x2, y2);  delay(100);
end;
procedure Nazad ( r: real);
    begin  Vpered ( -r); end;
procedure PovVpravo ( g: real);
    begin  a := a + g*PI / 180;  end;
procedure PovVlevo ( g: real);
    begin  PovVpravo ( - g);  end;
procedure Vetka ( d: real; t: integer);
    begin

```

```

    if t = 0 then exit ;
    PovVlevo (45); Vpered (d); Vetka (d/2, t – 1);
    Nazad (d); PovVpravo (90); Vpered (d);
    Vetka (d/2, t – 1); Nazad (d); PovVlevo (45);
end;
BEGIN
    gD:=Detect; InitGraph(gD, gM, ' ');
    x0:= 320; y0:= 240; {координаты центра ствола «дерева»}
    a:=0; Vetka (100,10);
    readkey; closegraph;
END.

```

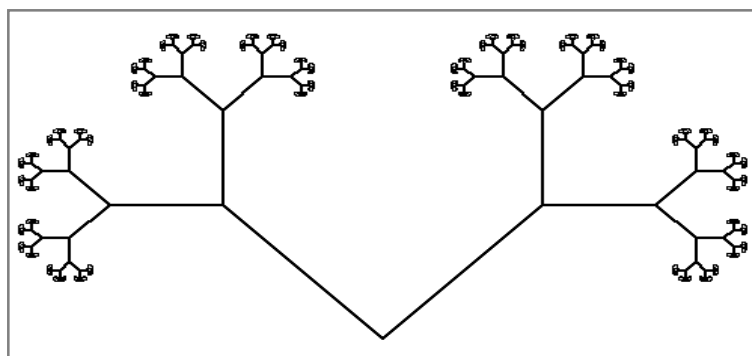


Рис.35 - Графическая модель «Дерево»

Основная процедура программы - Vetka, она рисует угол из двух веток, процедура имеет два параметра: d – длина ветки в начальном угле и t – количество углов - веток на дереве, эта процедура содержит в своем теле ряд других процедур и обращается сама к себе, то есть, является рекурсивной. При каждом обращении процедуры к себе длина стороны ветки, которую она рисует, уменьшается в два раза ($d/2$), а количество рисуемых углов уменьшается на единицу ($t-1$). Процедура заканчивает работу, когда $t=0$. На Рис. 35 представлен узор «Дерево», которое моделирует приведенная выше программа при $d=100$ и $t=10$.

§ 2. Модели деловой графики

Деловой или иллюстративной называется графика, предназначенная для представления процессов, явлений, функционирования систем в виде различных диаграмм и графиков.

Эти диаграммы и графики являются, по сути, графическими моделями этих объектов. Если модели получены с помощью компьютера, то это будут компьютерные модели. В настоящее время существует множество программных средств, позволяющих строить такие модели — это MatCad, AutoCad, Excel, 3DMAX, различные среды программирования. В данном пособии в основном приведено построение иллюстративных моделей в интегрированных системах программирования, использующих язык Турбо Паскаль.

2.1 Моделирование динамики изменения числа студентов

Приведенная ниже программа Students моделирует процесс изменения числа студентов на физико-математических профилях Школы педагогики ДВФУ в течение пяти лет в виде *модели - гистограммы*, представленной на Рис.35. Гистограмма имеет две оси с центром в точке (60,400), на горизонтальной оси отображаются учебные годы, на вертикальной - количество обучающихся студентов, причем, отрезок длиной в 40 пикселей соответствует 10 студентам. Столбцы гистограммы рисуются с помощью процедуры *bar*. Программа моделирует процесс изменения числа студентов, используя только входные данные из массивов, она не базируется на математической модели, хотя содержит математические вычисления для расчета размеров столбцов.

```

program Students;
  uses Crt, Graph;
  const kol : array [1..5] of integer = (212, 198, 175, 140, 161);
        god: array[1..5] of string = ('2015/16', '2016/17', '2017/18', '2018/19', '2019/20');
  var gM, gD, k, x0m, y0m, by, ay, ax : integer; ky: real; ks, kols : string [5];
BEGIN
  gD:= Detect; InitGraph(gD, gM, ' ');
  setbkcolor(15); setcolor(1); setlinestyle (0,0,1);
  x0m:=60; y0m:=400;
  line(x0m, y0m, 600, y0m); line(x0m, 40, x0m, y0m);
  by:=40; ay:= 25; ky: = by/ay;
  for k :=1 to 8 do
    begin
      line(x0m - 3, y0m - k*by, x0m + 3, y0m - k*by);
      str (k*25,ks); outtextxy(25 , y0m - k*by - 4, ks);
    end;
  settextstyle (0,0,2); outtextxy(50,20, 'Динамика изменения числа студентов');
  settextstyle (0,0,1); ax := 100;
  for k :=1 to 5 do
    begin
      setfillstyle(1, k); str (kol[k], kols);
      bar(70 + (k - 1)*ax, y0m, 70 + k*ax, round (y0m-kol[k]*ky));
      outtextxy(110 +(k-1)*ax, round(y0m -10 - kol[k]*ky), kols);
      outtextxy(90 + (k-1)*ax, y0m + 10 , god[k]);
    end;
  readkey;
  closegraph;
END.

```

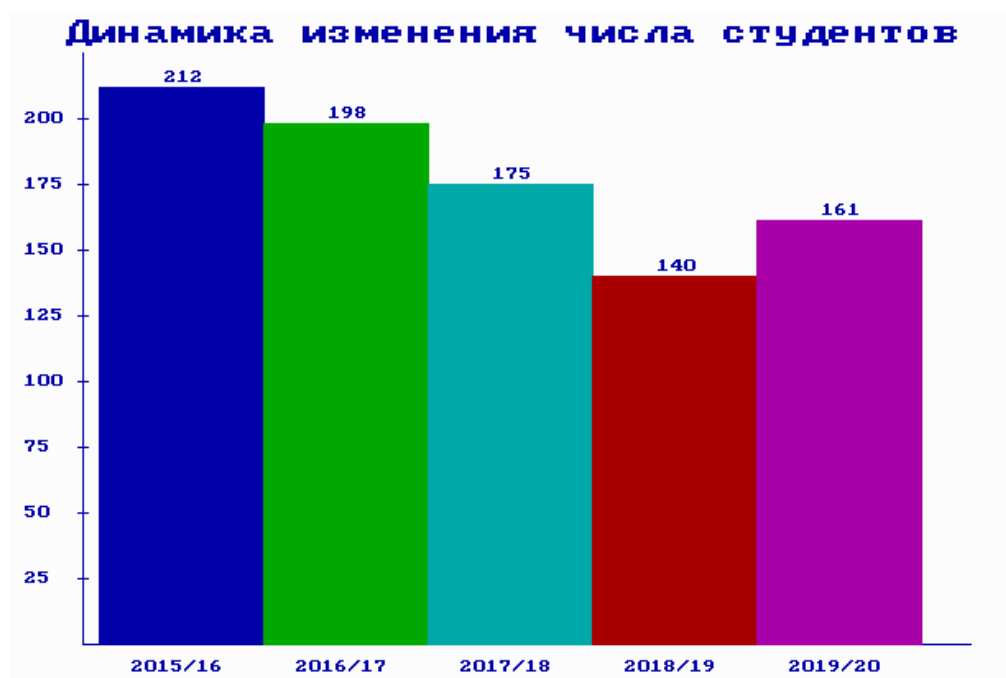



Рис. 36 - Модель – гистограмма

2.2 Моделирование распределения учащихся по секциям

Программа Sport, приведенная ниже, строит модель распределения учащихся спортивной школы по пяти секциям в виде **круговой диаграммы**, результат моделирования представлен на Рис.36. В программе в цикле для каждой секции с помощью процедуры *pieslice* рисуется сектор круга с центральным углом, величина которого рассчитывается в теле цикла. С помощью процедуры *bar* рисуется прямоугольник того же цвета, что и сектор, справа от него выводится название секции, в самом прямоугольнике выводится число учащихся. Такое пояснение к аналогичной диаграмме в программе Excel называется Легендой. Эта модель является статической, так как отображает процесс распределения учащихся в какой-то фиксированный момент времени, в ней для расчета координат точек (x, y), лежащих на окружности, использует математическая модель (1).

```

program Sport;
  uses Crt, Graph;
  const kol : array [1..5] of integer = (70, 120, 230, 150, 172);
        sek: array [1..5] of string = ('футбол', 'гимнастика',
                                         'теннис', 'хоккей', 'самбо');
  var gM, gD, a, a1,a2, k, x0m, y0m, x, y, S, R1,R2 : integer; d: real; st, kols : string ;
BEGIN
  gD:= Detect; InitGraph(gD, gM, ' ');
  setbkcolor(15); setcolor(1); settextstyle (0,0,2);
  outtextxy(60, 70, ' Распределение учащихся по секциям');
  settextstyle (0,0,1); setlinestyle (0,0,1);
  a :=0; S:=0; x0:=170; y0:= 240; R1:=120; R2:=90;

```

```

for k := 1 to 5 do S:=S + kol[k];
for k := 1 to 5 do
  begin
    setfillstyle (1, k+1);
    d:= kol[k] /S;
    a1:= a + round (d*360);
    pieslice(x0, y0, a, a1, R1);
    a2 := a + round (d*360/2);
    x := x0m + round (R2*cos (a2*pi / 180));
    y := y0m - round (R2*sin (a2*pi / 180));
    str(d*100 :2 : 0, kols); outtextxy(x, y, kols + ' % ');
    bar( 350, 80 + k*50, 400, 80 + 50*(k+1));
    str(kol[k], kols);
    outtextxy(365, 95 + k*50, kols);
    outtextxy(410, 95 + k*50, sek[k]);
    readkey;
    a := a1;
  end;
readkey;
closegraph;
END.

```



Рис. 37 - Модель – круговая диаграмма

2.3 Построение моделей - графиков

Очень часто в деловой графике результаты моделирования строятся в виде графиков, демонстрирующих зависимость величины от какой-то величины. Рассмотрим программу, которая моделирует зависимость между двумя какими-то абстрактными величинами X и Y в виде графика в декартовой системе координат, построенной на

экране компьютера. Так как начало координат в построенной на экране и машинной системе координат обычно не совпадают, то в программе нужно преобразовывать координаты точек из построенной системы XOY в компьютерную (машинную) систему координат XOY_m . Рассмотрим, как можно сделать такое преобразование. Пусть:

(x, y) – координаты точки в системе координат XOY ;

(x_m, y_m) – координаты этой точки в системе координат XOY_m ;

(x_{0m}, y_{0m}) – машинные координаты начала координат XOY ;

b_x, b_y – количество пикселей в одном делении на осях OX и OY ;

a_x, a_y – цена деления на осях OX и OY соответственно;

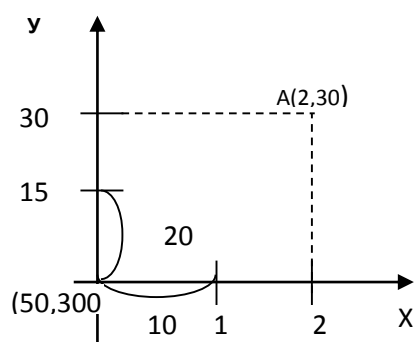
$k_x = b_x/a_x, k_y = b_y/a_y$ – коэффициенты перевода,

тогда формулы перевода координат из построенной декартовой системы координат XOY в компьютерную (машинную) систему имеют вид:

$$x_m = x_{0m} + x \cdot k_x, \quad k_x = b_x / a_x$$

$$y_m = y_{0m} - y \cdot k_y, \quad k_y = b_y / a_y$$

Поясним такое преобразование на конкретном примере. Пусть на экране (Рис.38) построена система координат XOY с центром в точке экрана $(50, 300)$, то есть, $x_{0m} = 50$ пикселей, $y_{0m} = 300$ пикселей – это машинные координаты центра системы XOY . Точка A в этой системе, как следует из Рис.37, имеет координаты $(2, 30)$.



$b_x = 10$ (количество пикселей в 1-ом делении оси OX);

$a_x = 1$ (цена деления на оси OX)

$b_y = 20$ (количество пикселей в 1-ом делении оси OY)

$a_y = 15$ (цена деления на оси OY)

$k_x = 10/1 = 10$ (коэффициент перевода по оси OX)

$k_y = 20/15 = 4/3$ (коэффициент перевода по оси OY .)

Теперь воспользуемся формулами, указанными выше.

Рис. 38- Система координат XOY

$$\begin{cases} X_m = 50 + 2 \cdot 10 = 50 + 20 = 70; \\ Y_m = 300 - 30 \cdot 4 / 3 = 300 - 40 = 260; \end{cases}$$

Итак, машинные координаты точки A на экране – $(70, 260)$.

Ниже приведен текст программы, моделирующей зависимость между двумя произвольными величинами X и Y в виде графика функции $y = x^2$ на заданном промежутке $[a, b]$.

program Graphic;

uses Crt, Graph;

var gM, gD, i, bx, by, x0m, y0m, xm, ym tx1, tx2, ty1, ty2: **integer**;

a, b, x, y, ax, ay, kx, ky: **real**; s1, s2 : **string** ;

BEGIN

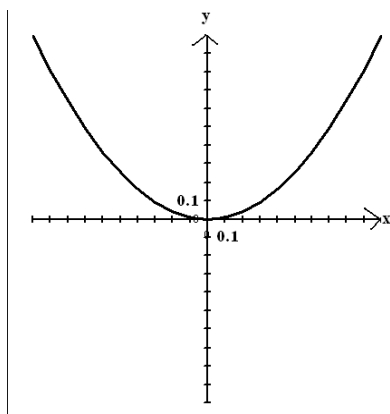
clrscr;

```

setbkcolor (15); setcolor(1);
write ('Введите машинные координаты начала координат XOY ');
readln (x0m, y0m);
write ('Введите число пикселей в одном делении на осях OX и OY ');
readln (bx, by);
write ('Введите цену деления на осях OX и OY '); readln (ax, ay);
write ('Введите концы отрезка [a,b] '); readln (a, b);
D := Detect; InitGraph(gD, gM, ' ');
line (10, y0m, 630, y0m); line (615, y0m - 5, 620, y0m);
line (615, y0m + 5, 620, y0m); outtextxy (630, y0m, 'X');
line (x0m, 15, x0m, 460); line (x0m - 10, 25, x0m, 15);
line (x0m + 10, 25, x0m, 15); outtextxy (x0m, 5, 'Y');
tx1 := round((x0m - 10) / bx); tx2 := round((620 - x0m) / bx);
for i := 1 to tx1 do line(x0m - i*bx, y0m - 5, x0m - i*bx, y0m + 5);
for i := 1 to tx2 do line (x0m + i*bx, y0m - 5, x0m + i*bx, y0m + 5);
ty1 := round((y0m - 15) / by); ty2 := round((460 - y0m) / by);
for i := 1 to ty1 do line (x0m - 5, y0m - i*by, x0m + 5, y0m - i*by);
for i := 1 to ty2 do line (x0m - 5, y0m + i*by, x0m + 5, y0m + i*by);
str (ax : 2 : 1, s1); outtextxy (x0m + bx, y0m + 8, s1);
str (ay : 2 : 1, s2); outtextxy (x0m - 10, y0m - by, s2);
kx := bx / ax ; ky := by / ay ; x := a;
repeat
  y := sqr(x);
  xm := round(x0m + kx*x); ym := round(y0m - ky*y);
  circle( xm, ym, 1);
  x := x + 0.01;
until x >= b;
readkey; closegraph;

```

END.



Если в программу ввести $x0m = 320$, $y0m = 240$. $bx = 10$, $by = 10$, $ax = 0.1$, $ay = 0.1$. $a = -1$, $b = 1$, то программа построит график, представленный на Рис.38. Эта программа строит график *любой* функции на *любом* промежутке, пользователю программы нужно только правильно выбрать начало координат строящейся системы координат, цену деления на осях координат и масштаб. Если это сделать неправильно, то график может получиться ненаглядным - занимать очень незначительную часть экрана, или Рис.39 не отображать всех значений функции на промежутке.

Рис.39 - Модель-график

Контрольные вопросы к третьей главе

1. Какая возможность является одним из достоинств компьютерного моделирования как метода познания?
2. Можно ли построить графическую модель без использования математики?
3. Какая графика называется художественной?
4. Какое из направлений графики рассматривается в третьей главе?
5. Какие «художественные образы» использованы в программе Y3OR для получения «муарового узора»? Какие параметры формируют узор?
6. Является ли модель – «муаровый узор» компьютерной математической моделью?
7. Какой «художественный образ» использован в программе Star для построения узора -звезды?
8. Как выглядит графическая модель угла? Чем для фигуры «угол» является формула (1)? Где она используется в программе Star?
9. Какие данные в программе являются входными?
10. Какие параметры определяют вид звезды?
11. Является ли модель – звезда компьютерной математической моделью?
12. Какой «художественный образ» использован в программе «Derevo» для построения узора - дерево?
13. Сколько процедур использовано в этой программе? Какие из них взаимно обратные?
14. Какие данные в программе являются входными?
15. Какие параметры определяют вид узора – дерева?
16. Является ли модель – дерево компьютерной математической моделью?
17. Какая графика называется деловой?
18. В виде чего построена модель динамики изменения числа студентов?
19. Какие данные в программе являются входными?
20. Какая процедура в программе определяет вид модели -гистограммы?
21. От какого параметра зависит высота столбца диаграммы?
22. В виде чего построена модель распределения учащихся по секциям?
23. Какие данные в программе являются входными?
24. Какая процедура в программе определяет вид модели – круговой диаграммы?
25. Какие из моделей – «муаровый узор», «звезда», «дерево», «гистограмма», «круговая диаграмма» являются статическими? Динамическими?
26. В чем особенность построения моделей – графиков на экране компьютера на языке программирования?
27. Какие формулы позволяют переводить координаты точек из построенной декартовой системы координат XOY в машинную?
28. Любую ли зависимость между двумя величинами позволяет смоделировать программа Graphic? Что для этого требуется от пользователя программы?

Глава 4. Математические модели физических процессов

§ 1. Классификация математических моделей

Компьютерные модели физических процессов, которые будут рассмотрены в следующей главе, построены на основе математических моделей, поэтому рассмотрим поподробнее этот класс моделей.

Из определения математической модели следует, что по сущности — это информационная знаковая модель, она является одной из самых значимых знаковых моделей, а *метод математического моделирования является одним из самых универсальных методов исследования в самых различных науках.*

При математическом моделировании абстрагируют, то есть, отвлекаются, от конкретной физической природы объекта – оригинала и происходящих в нем процессов и рассматривают только *преобразования входных величин в выходные, записанные на языке математики.*

Исследователи в различных областях науки считают, что если удастся сформулировать «хорошую» математическую модель, то для ее исследования можно применить весь арсенал науки, накопленный за тысячелетия, и приводят цитату *«Область знания становится наукой, когда она выражает свои законы в виде математических соотношений»*

Математические модели использовались учеными довольно давно, но только назывались они формулами, принципами, законами, уравнениями и т.п. Самое широкое применение математические модели нашли в физике. Все уравнения механики, электродинамики, законы сохранения энергии и вещества являются математическими моделями соответствующих явлений природы. Законы эти носят эмпирический характер и являются отражением многовекового опыта человечества.

Математические модели описывают целый класс процессов или явлений, которые обладают сходными свойствами, то есть, являются *изоморфными*. Наука конца 20 века о законах самоорганизации сложных развивающихся систем. – *синергетика*, показала, что сходными уравнениями описываются процессы самоорганизации самой разной природы: от образования скоплений галактик до образования пятен планктона в океане.

Рассмотрим классификацию математических моделей по различным признакам (Рис. 40).

1. По *принципам построения* модели делятся на аналитические и имитационные.

Аналитическими называются математические модели, в которой процессы функционирования реальных объектов или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей.

Однако получить эти зависимости (дифференциальные и интегральные уравнения, системы уравнений) удастся только для сравнительно простых систем и явлений. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на их упрощение. В результате аналитическая матмодель становится слишком грубым приближением реальной системы или процесса. Если все же для сложных систем удастся построить аналитическую модель, то зачастую ее исследование превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден строить имитационные модели.



Рис. 40 - Схема классификации математических моделей

Имитационными называются математические модели, имитирующие поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода, причем имитируются элементарные явления, которые составляют процесс или систему с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационные модели не позволяют заранее вычислить или предсказать поведение системы, а требуют для такого предсказания проведения вычислительного эксперимента на математической модели при заданных исходных данных. Поэтому в информатике имеет место еще и такое определение.

Имитационные модели — это проводимые на компьютере вычислительные эксперименты с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов или систем во времени в течение заданного периода.

2. По целям моделирования математические модели делятся на дескриптивные, оптимизационные, многокритериальные и игровые.

Дескриптивными (описательными) называются модели, которые только описывают объекты и явления и как бы фиксируют сведения о них. Например, модель Солнечной системы определяет расположение планет в ней и их орбиты, модель движения кометы, вторгшейся в Солнечную систему, позволяет предсказать траекторию ее полета, расстояние, на котором она пройдет от Земли, и т.д. В обоих случаях цели моделирования носят описательный характер, поскольку нет никаких возможностей повлиять на расположение планет или движение кометы.

Оптимизационными называются модели, имеющие параметры, изменение которых влияет на результат моделирования. Они служат для поиска оптимального (наилучшего в каком-либо смысле) решения задачи при соблюдении определенных

условий. Например, модель перевозок продукции от производителей к потребителям позволяет подобрать (оптимизировать) маршрут перевозок таким образом, чтобы их стоимость была минимальной.

Многокритериальными называются модели, которые позволяют оптимизировать процесс по нескольким параметрам сразу, причем, цели оптимизации могут быть весьма противоречивы, например, модель организации питания семьи должна удовлетворять таким критериям, как полезность, калорийность пищи и минимальность затрат на ее закупку;

Игровыми называются модели, которые определяют стратегию противников в конфликтной ситуации, называемой в математической теории игр *игрой*. Модели карточных, спортивных игр, военных сражений относятся к игровым моделям. Они позволяют моделировать тактику и стратегию игроков.

§ 2. Математическая модель равноускоренного движения тела

Постановка задачи. Пусть тело, имеющее начальную скорость V_0 , движется с постоянным ускорением a . Определить путь S , который пройдет тело за время T .

Чтобы ответить на вопрос задачи, построим математическую модель равноускоренного движения, в нем V_0 , a , T – исходные данные процесса движения, S – выходное данное или результат.

Цель моделирования – получить математическое соотношение, связывающее исходные данные и результат. Это соотношение и будет математической моделью такого физического процесса, как равноускоренное движение тела.

Разобьем все время движения тела T на n равных частей, будем считать, что на каждом промежутке времени тело движется *равномерно*, то есть, с постоянной скоростью, а в конце промежутка скорость меняется скачком (это допущение сделано для построения математической, то есть, абстрактной модели движения, такое изменение скорости не имеет места в физическом мире). На Рис.41 представлена модель такого движения в виде рисунка, движущееся тело изображено в виде человека.

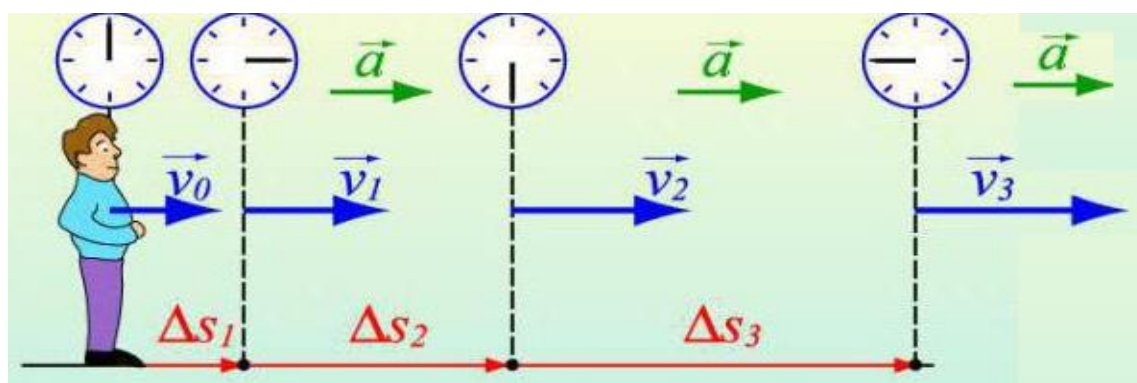


Рис. 41 - Графическая модель равномерного движения

Обозначим промежутки через $t = \frac{T}{n}$, тогда на каждом промежутке $[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 1, 2, \dots, n-1$, значение скорости можно вычислить следующим образом:

на промежутке $[t_1, t_2]$ $V_1 = V_0$ м/сек;
 на промежутке $[t_2, t_3]$ $V_2 = (V_1 + a \cdot t)$ м/сек;
 на промежутке $[t_3, t_4]$ $V_3 = (V_2 + a \cdot t)$ м/сек;

 на промежутке $[t_{k-1}, t_k]$ $V_k = (V_{k-1} + a \cdot t)$ м/сек;

Учитывая, что движение на каждом промежутке является равномерным, всю длину пути, пройденного телом, вычислим следующим образом:

$$S = V_1 \cdot t + V_2 \cdot t + V_3 \cdot t + \dots + V_n \cdot t = (V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n) \cdot t \quad (1)$$

Последовательность скоростей $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, \dots$ является арифметической прогрессией с начальным членом V_1 и разностью $d = a \cdot t$. Из алгебры известно, что сумма первых n членов такой арифметической прогрессии вычисляется по формуле:

$$S_n = \frac{2 \cdot V_1 + d \cdot (n-1)}{2} n,$$

а значит сумму скоростей в формуле (1) можно представить так:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_n = \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), выполним ряд преобразований

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \cdot t = \frac{2 \cdot V_0 + a \cdot t \cdot (n-1)}{2} \cdot n \cdot \frac{T}{n} = \\ &= \frac{2 \cdot V_0 \cdot T + a \cdot t \cdot T \cdot (n-1)}{2} = \frac{2 \cdot V_0 \cdot T + a \cdot \frac{T}{n} \cdot T \cdot (n-1)}{2} = \\ &= \frac{2 \cdot V_0 \cdot T \cdot n + a \cdot T \cdot T \cdot (n-1)}{2 \cdot n} = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2} - \frac{a \cdot T^2}{2 \cdot n} \end{aligned}$$

И получим пройденный телом путь:

$$S = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2} - \frac{a \cdot T^2}{2 \cdot n}$$

Последняя формула - **приближенная математическая модель** равноускоренного движения тела. Если взять число разбиений n достаточно большим, то последнее слагаемое будет бесконечно малой величиной и им можно пренебречь, тогда

$$\boxed{S = V_0 \cdot T + \frac{a \cdot T^2}{2}} \quad (3)$$

Формула (3) и есть **математическая модель равноускоренного движения тела**. Она позволяет определить путь S , который пройдет тело, имеющее начальную скорость V_0 и постоянное ускорение a , за время T . Эта модель по принципам построения является **аналитической**, так как явным образом связывает входные и выходные данные процесса

движения, а по целям моделирования является *дескриптивной*, так как только описывает процесс движения с исходными данными.

Поставленная цель достигнута – получена *модель - формула*, связывающая входные и выходные данные процесса равномерного движения.

§ 3. Математическая модель свободного падения тела

Свободное падение — это равнопеременное движение под действием силы тяжести, когда другие силы, действующие на тело, отсутствуют или пренебрежимо малы.

Например, падение парашютиста в первые секунды до раскрытия парашюта (Рис. 42) является свободным падением.



Рис. 42 - Свободное падение парашютиста

Постановка задачи. Пусть тело массой m падает на Землю, имеющую массу M_3 и радиус R_3 , в среде без сопротивления с некоторой высоты H . Найти ускорение падения тела, обозначим его a .

Чтобы ответить на вопрос задачи, построим математическую модель свободного падения тела.

Цель моделирования – получить математическое соотношение, связывающее исходные данные и результат. Это соотношение и будет математической моделью такого физического явления, как свободное падение тела.

В этой задаче H , m , M_3 , R_3 – входные данные, a – выходное.

Из закона тяготения следует, что если тело находится над Землей на сравнительно небольшой высоте H , то Земля притягивает его с силой

$$F = G \frac{mM_3}{R_3^2}$$

где G – гравитационная постоянная. Из второго закона Ньютона имеем, что сила, действующая на движущееся тело, определяется формулой

$$F = ma,$$

где a – ускорение, с которым движется тело.

Так как на падающее тело действует лишь одна сила – сила тяготения, то приравнявая выражения в правых частях формул, получим

$$G \frac{mM_3}{R_3^2} = ma$$

Из последней формулы выразим ускорение, с которым тело падает на Землю

$$a = G \frac{M_3}{R_3^2} \quad (4)$$

Эта формула является *математической моделью свободного падения тела*. Эта модель по принципам построения тоже является *аналитической*, так как явным образом связывает входные данные M_3 и R_3 с выходным – ускорением a , по целям моделирования модель является *дескриптивной*.

Исследуем ее теоретически путем логических рассуждений и математических выкладок.

1) Из вида самой модели следует, что свободное падение тела – это *равноускоренное движение*, так как его ускорение является величиной постоянной.

2) Так как модель (4) не содержит ни значения массы тела m , ни значения высоты H , с которой оно падает, то отсюда следует, что все тела падают на Землю с одинаковым ускорением. Это ускорение называют *ускорением свободного падения* и обозначают g , величина его вычислена экспериментально, $g \approx 9.8$ м/сек².

3) В каждый момент времени t величина скорости падения $V = gt$.

4) Высоту $h(t)$, на которой находится тело в момент времени t , можно определить следующим образом:

$$h(t) = H - S(t) = H - \left(V_0 t + \frac{gt^2}{2} \right)$$

но, так как в начальный момент времени скорость $V_0 = 0$, получим

$$h(t) = H - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

5) При падении тела на землю $h(t) = 0$, тогда из последней формулы получаем уже формулу для расчета времени падения тела

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$$

Эти выводы, полученные путем теоретического исследования модели, полностью подтверждаются *лабораторными опытами*. Но, в то же время, есть факты, которые противоречат этим выводам, например, листья с деревьев падают не равноускорено, или, независимо от высоты, на которой парашютисты покидают самолет, все они приземляются примерно с одинаковой скоростью.

Эти противоречия объясняются следующим образом. В реальности на падающее тело кроме силы притяжения Земли действует сила сопротивления воздуха,

сила ветра, сила притяжения Луны, Солнца, планет, сила вращения Земли и другие силы. Если все эти силы учитывать в математической модели, то получится «математический монстр», исследовать такую модель будет затруднительно даже на компьютере. Но создавать такие монстры нет необходимости, так как влияние указанных выше сил – **неравнозначно**, в конкретных случаях падения только некоторые из них становятся значимыми.

В лабораторных условиях можно отбросить все силы, кроме силы притяжения Земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, так как тело не успевает разогнаться до скорости, когда сопротивление станет ощутимым. Поэтому в **лабораторных условиях математическая модель (4) адекватна моделируемому процессу – свободному падению тела**.

В природных же условиях при падении листьев и парашютистов сопротивление воздуха уже является важным фактором, им пренебрегать нельзя. **В этих условиях математическая модель (4) уже не адекватна** процессу свободного падения и нужно строить другую модель.

Таким образом, **матмодель имеет границы применимости, то есть, условия, при выполнении которых она адекватна объекту оригиналу** (Рис.43)

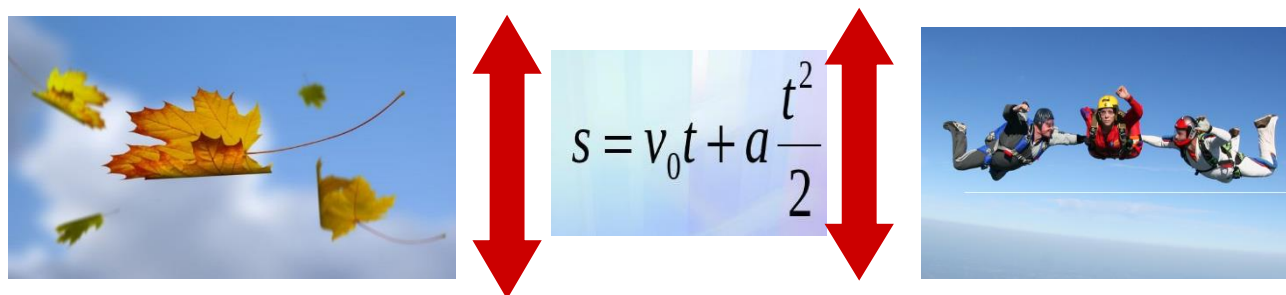
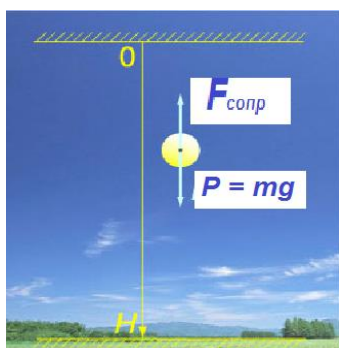


Рис. 43 - Матмодель не применима к изображенным процессам

§ 4. Математическая модель падения тела в среде с сопротивлением

4.1 Построение математической модели падения тела в среде с сопротивлением



Постановка задачи. Пусть тело массой **m** падает на Землю с некоторой высоты **H** в среде с сопротивлением. Определить, как изменяется скорость и ускорение тела в процессе падения.

Чтобы ответить на вопрос задачи, построим математическую модель такого падения. На падающее тело действует сила тяжести $P = mg$, направленная вниз, и сила сопротивления среды $F_{сопр.}$, направленная вверх (Рис.44).

Рис. 44- Модель падения

По второму закону Ньютона имеем:

$$ma = P - F_{сопр} = mg - F_{сопр}$$

Сила сопротивления среды в физике определяется следующей формулой

$$F_{\text{сопр}} = k_1 V + k_2 V^2, \text{ тогда } ma = mg - (k_1 V + k_2 V^2)$$

Сила сопротивления зависит от скорости тела, его свойств и свойств самой среды, k_1 и k_2 – коэффициенты сопротивления, k_1 – зависит от вязкости среды и формы тела, k_2 – зависит от площади сечения тела и плотности среды.

Если скорость невелика, то в формуле доминирует линейная составляющая силы сопротивления, квадратичной же составляющей можно пренебречь, при более высоких скоростях напротив, резко возрастает квадратичная составляющая силы сопротивления, а линейной составляющей можно пренебречь.

Из последнего равенства выразим ускорение и получим

$$a = \frac{mg - (k_1 V + k_2 V^2)}{m} \quad (5)$$

Формула (5) является *математической моделью падения тела в среде с сопротивлением*. Эта модель по принципам построения является *аналитической*, а по целям моделирования – *дескриптивной*. В ней величины m , k_1 , k_2 являются входными, а величины V и a – выходными. Такое падение уже не является равноускоренным, так как с увеличением времени скорость тела возрастает, следовательно, ускорение уменьшается.

4.2 Аналитическое исследование математической модели падения тела в среде с сопротивлением

Пусть падающее тело имеет форму шара и его скорость невелика, тогда положим $F_{\text{сопр}} = k_1 V$. Коэффициент сопротивления k_1 определяется в этом случае по формуле Стокса $k_1 = 6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r$, где μ – это динамическая вязкость среды, r – радиус шарика, сила тяжести шарика определяется формулой $m \cdot g = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho$, где ρ – его плотность.

Определим при какой скорости V^* шарика сила тяжести $m \cdot g$ сравняется силой $F_{\text{сопр}}$ и движение станет равномерным:

$$6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r \cdot V^* = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g \rightarrow V^* = \frac{2r^2 \rho \cdot g}{9 \cdot \mu} \quad (6)$$

Пусть $r = 0.1 \text{ м}$, $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ (шарик деревянный), $\mu = 0.0182 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$ для воздуха и $\mu = 1.001 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$ для воды, тогда производя вычисления по формуле (6), получим **$V^* = 957 \text{ м/с}$ для воздуха и $V^* = 17 \text{ м/с}$ для воды.**

На самом деле эти результаты совершенно не соответствуют реальному падению тела при заданных условиях, так как уже при гораздо меньших скоростях, чем были получены выше, сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости, то есть, $F_{\text{сопр}} \sim k_2 V^2$. Разумеется, линейная составляющая $k_1 V$ тоже при этом сохраняется, но, если $k_2 V^2 \gg k_1 V$, то вкладом $k_1 V$ можно пренебречь. (В данном случае проведено ранжирование параметров модели).

Из физики известно, что коэффициент k_2 рассчитывается по формуле $k_2 = 0.5 \cdot c \cdot S \cdot \rho_{\text{ср}}$, то есть, он пропорционален площади поперечного сечения тела S , плотности среды $\rho_{\text{ср}}$ и зависит от коэффициента лобового сечения шарика c .

Теперь оценим, при какой скорости V^{**} для падающего шарика сила тяжести $m \cdot g$, сравняется с силой $F_{\text{сопр}}$ и движение станет равномерным, если учитывать вторую составляющую силы сопротивления

$$0.5 \cdot c \cdot S \cdot \rho_{\text{ср}} \cdot (V^{**})^2 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g \rightarrow V^{**} = \sqrt{\frac{2(4/3 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho_T)}{c \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \rho_{\text{ср}}}} = \sqrt{\frac{8r \cdot \rho_T}{3\rho_{\text{ср}} \cdot c}}$$

Учитывая, что $\rho_{\text{возд}} = 1.29 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{воды}} = 1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, получим тогда

$$V^{**} = 20 \text{ м/с для воздуха и } V^* = 0.73 \text{ м/с для воды.}$$

Сравнивая эти результаты с полученными выше видим, что при падении шарика в воздухе и в воде квадратичная часть сопротивления сделает движение равномерным задолго до того, как это могла бы сделать линейная часть.

Рассмотрим, как вычислить равномерную скорость $V_{\text{равн.}}$, если присутствуют обе составляющие силы сопротивления. Процесс падения станет равномерным, если $F_{\text{сопр}} = m \cdot g$, то есть $k_1 V_{\text{равн}} + k_2 V_{\text{равн}}^2 = m \cdot g$. Имеем квадратное уравнение относительно скорости $V_{\text{равн.}}$:

$$k_2 V_{\text{равн}}^2 + k_1 V_{\text{равн}} - mg = 0.$$

его решением будет значение $V_{\text{равн.}} = \sqrt{\frac{k_1^2}{4k_2^2} + \frac{mg}{k_2}} - \frac{k_1}{2k_2}$,

таким образом, скорость падения шарика будет возрастать от $V=0$ до $V_{\text{равн.}}$.

§ 5. Математическая модель колебаний пружинного маятника

5.1 Построение математической модели гармонических колебаний

Под **пружинным маятником** понимается упругая пружина с прикрепленным к ней грузом. Если пружину растянуть или сжать, груз начнет совершать колебания относительно положения равновесия (Рис.45).

Колебания маятника при отсутствии силы трения называются **гармоническими**.

Постановка задачи. Определить характеристики гармонических колебаний пружинного маятника (амплитуду, период и частоту смещения, скорости и его ускорения) если груз имеет массу **m**, а коэффициент упругости пружины равен **k**.

Чтобы решить поставленную задачу, построим математическую модель колебаний, а на ее основе - компьютерную модель.

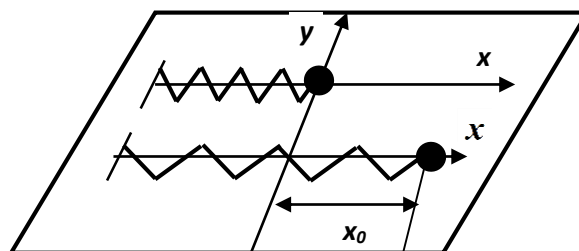


Рис. 45 - Графическая модель маятника

Пусть на гладком столе лежит шарик, прикрепленный к пружине, свободный конец которой зафиксирован зажимом. Шарик находится в положении равновесия (верхнее положение на Рис.45). Если пружину растянуть на величину x_0 , а затем отпустить, то он начнет колебаться около положения равновесия. Стол – гладкий, будем считать, что сила трения отсутствует, на шарик согласно закону Гука действует только сила упругости пружины, которая возвращает тело в положение равновесия, она определяется формулой

$$F = -k \cdot x(t) \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости пружины, x – смещение шарика от положения равновесия. Но по второму закону Ньютона на любое движущееся тело действует сила F , определяемая формулой

$$F = m \cdot a(t) \quad (2)$$

где a – ускорение тела, а m – его масса. Так как это одна и та же сила, приравняв правые части формул, получим следующее равенство:

$$-k \cdot x(t) = m \cdot a(t) \quad (3)$$

Из курса физики известно, что, что ускорение с математической точки зрения интерпретируется как вторая производная пути по времени, поэтому формулу (3) можно записать и так:

$$-k \cdot x(t) = x''(t) \cdot m \quad (3')$$

Дифференциальное уравнение (3) или (3') — это **математическая модель гармонических колебаний тела**. Она связывает исходные данные процесса – массу тела m и коэффициент упругости пружины k , с выходными данными – смещением тела $x(t)$ и его ускорением $x''(t)$. Эта модель является дескриптивной динамической моделью, для ответа на вопрос задачи ее нужно исследовать.

5.2 Аналитическое исследование модели гармонических колебаний

Исследование математической модели заключается в решении дифференциального уравнения (3'). Но для этого нужно задать начальные условия процесса колебания:

– Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ шарик находился в точке x_0 , то есть

$$x(0) = x_0 \quad (4)$$

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ шарик не двигался, то есть

$$v(0) = x'(0) = 0 \quad (5)$$

Уравнение (3') – это обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами k и m . Его общее решение, как следует из теории дифференциальных уравнений, имеет вид:

$$x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad (6)$$

где A , B – некоторые константы, $x(t)$ – смещение шарика от положения равновесия в момент времени t . Для нахождения A и B используем начальные условия (4) и (5).

$$\text{Из (6) имеем: } x(0) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right) = B$$

Из (4) имеем: $x(0) = x_0$, таким образом, константа $B = x_0$. Продифференцируем выражение (6) и вычислим $x'(0)$:

$$x'(t) = v(t) = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) - B \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$x'(0) = v(0) = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right) - B \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot 0\right) = A \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Из (5) имеем: $x'(0) = 0$, таким образом, константа $A = 0$. Подставляя найденные значения A и B в (6), получим

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad (7)$$

Формула (7) – это частное решение математической модели (3). Эта формула **является характеристикой колебаний**, из нее следует:

1) Смещение шарика от положения равновесия $x(t)$ – переменная величина, изменяющаяся во времени по закону косинуса;

2) Амплитуда колебаний этого смещения, обозначим ее A_x , равна x_0 – это постоянная величина, зависящая только от величины первоначального отклонения шарика от положения равновесия, и не зависящая от входных данных m и k ;

в) Период колебаний $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – тоже постоянная величина для данного колебания, но уже зависящая от m и k ;

г) Частота колебаний – число колебаний в единицу времени, определяется формулой:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}};$$

д) Циклическая частота, то есть число колебаний за время 2π , можно записать следующим образом

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

Чтобы узнать **характеристики скорости колебаний, аналитическое исследование модели нужно продолжить**. Продифференцируем формулу (7), чтобы получить формулу скорости

$$x'(t) = v(t) = -x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad (8)$$

используя формулу приведения, известную из алгебры – $\sin\varphi = \cos(\varphi + \pi/2)$, получим

$$v(t) = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (9)$$

Из формулы (9) следуют такие **выводы**:

1) Скорость шарика $v(t)$ - переменная величина, меняющаяся во времени по закону косинуса, но, по отношению к колебаниям смещения $x(t)$, фаза колебаний скорости смещена на величину $\pi/2$;

2) Амплитуда колебаний скорости $A_v = x_0 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$, она не зависит от времени, но, в отличие от амплитуды колебаний смещения A_x , зависит не только от x_0 , но и от m и k ;

3) Период и частоты колебаний скорости такие же, как и для смещения $x(t)$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Чтобы узнать **характеристики ускорения колебаний**, продолжим исследование модели. Продифференцируем уже формулу (8):

$$v'(t) = a(t) = -x_0 \frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

Используя формулу приведения: $\cos \varphi = \cos(\varphi + \pi)$, получим:

$$a(t) = x_0 \frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \pi\right) \quad (10)$$

Из формулы (10) следуют **выводы**:

1) Ускорение шарика тоже является переменной величиной, изменяющейся по закону косинуса, но по отношению к колебаниям $x(t)$ фаза колебаний ускорения смещена на величину π , а по отношению к скорости $v(t)$ – на величину $\pi/2$;

2) Амплитуда колебаний ускорения $A_a = x_0 \cdot \frac{k}{m}$, то есть, не зависит от времени, но зависит от x_0 , m и k ;

в) Период и частоты колебаний ускорения остались такими же, как для $x(t)$ и $v(t)$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \nu = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Итак, не имея под рукой пружинного маятника, не производя никаких измерений, но, построив математическую модель колебаний и, исследуя ее аналитически, мы **получили полную информацию об этом физическом процессе и получили ответы на вопросы задачи**.

5.3 Математическая модель затухающих колебаний пружинного маятника

Если пружинный маятник колеблется в среде, имеющей сопротивление, то математическая модель таких колебаний имеет вид:

$$ma = -k \cdot x - F_{\text{сопр}},$$

где $F_{\text{сопр}}$ - сила сопротивления среды. Обе силы имеют знак минус, так как направлены в сторону, противоположную движению. Полагая, что сила сопротивления среды равна

$$F_{\text{сопр}} = k_1 V,$$

где k_1 - коэффициент сопротивления среды, v – скорость, получим формулу

$$ma = -k \cdot x - k_1 V, \quad (1)$$

Учитывая, что $V = x'$, $a = x''$, получим ту же формулу, но записанную в виде:

$$mx'' = -k \cdot x - k_1 x', \quad (1')$$

Формулы (1) и (1') являются математической моделью процесса колебания пружинного маятника в среде с сопротивлением. Из формулы (1) имеем:

$$a = \frac{-k \cdot x - k_1 \cdot v}{m} \quad (2)$$

Эта формула позволяет вычислить ускорение затухающих колебаний маятника.

§ 6. Математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления

6.1 Построение дифференциальной математической модели полета тела

Постановка задачи. Пусть тело брошено с начальной скоростью v_0 в среде без сопротивления под углом α к горизонту. Определить характеристики полета – его дальность, максимальную высоту полета, его продолжительность.

Для ответа на вопросы задачи построим математическую модель этого физического процесса.

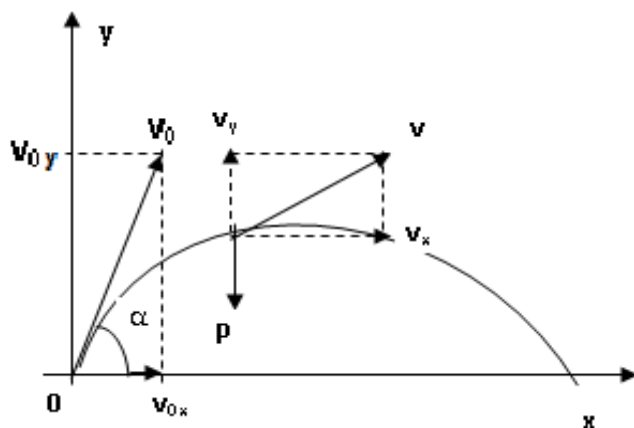


Рис. 46- Модель – схема полета

Принимая тело за материальную точку, совместим начало координат декартовой системы с точкой вылета тела, как показано на Рис.46. На летящее тело действует только сила тяжести P . Рассмотрим характеристики такого полета не в пространстве, а на плоскости.

Пусть x, y - координаты тела на плоскости XOY ;

V_0 - скорость движения тела в начальный момент времени t_0 ;

V - скорость движения тела в момент времени t ;

V_x, V_y - горизонтальная и вертикальная составляющая V момент времени t ;

a - ускорение движения тела в момент времени t ;

a_x, a_y - горизонтальная и вертикальная составляющая a момент времени t ;

Запишем характеристики полета в начальный момент времени, то есть при $t=0$, это будут **начальные условия процесса**:

$$\begin{cases} x(0) = 0; & y(0) = 0; \\ v_x(0) = V_{0x} = V_0 \cdot \cos(\alpha); \\ v_y(0) = V_{0y} = V_0 \cdot \sin(\alpha); \end{cases} \quad (1)$$

По второму закону Ньютона на движущееся тело действует сила $F = ma$, в данном случае на летящее тело действует лишь одна сила тяжести $P = mg$, значит, $ma = mg$, причем сила P направлена вертикально вниз и не имеет горизонтальной составляющей, поэтому для горизонтальной и вертикальной составляющей ускорения последнее равенство запишется в виде:

$$\begin{cases} ma_x = 0 \\ ma_y = -g \end{cases}$$

Знак « - » имеет место, так как ось OY направлена вверх, а сила тяжести - вниз. Так как $m \neq 0$, разделим оба уравнения на m и получим:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad (2) \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases} \quad (2')$$

Система уравнений (2) или (2') есть **дифференциальная математическая модель** процесса полета тела, брошенного под углом к горизонту. По принципам построения она относится к **детерминированным** моделям, а по целям - к **дескриптивным**, так как лишь описывает движение летящего тела. В ней нет явной зависимости между входными данными полета α и V_0 и выходными данными V, a, x, y .

6.2 Теоретическое исследование дифференциальной математической модели

Чтобы получить такую зависимость, проведем аналитическое исследование модели, то есть, решим дифференциальное уравнение (2'), используя начальные условия (1).

$$1) \text{ Из физики известно, что } v_x = \frac{dx}{dt}, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Учитывая эти формулы, проинтегрируем первое уравнение из системы (2) по переменной t дважды:

$$\int a_x dt = \int 0 dt \Leftrightarrow \int \frac{dv_x}{dt} dt = \int 0 dt \Leftrightarrow \int dv_x = 0 \int dt \Leftrightarrow \underline{v_x = C_1}$$

$$\int v_x dt = \int C_1 dt \Leftrightarrow \int \frac{dx}{dt} dt = C_1 \int dt \Leftrightarrow \int dx = C_1 \int dt \Leftrightarrow \underline{x = C_1 t + C_2}$$

Используя условия (1), определим постоянные C_1 и C_2 :

$$x(0) = 0; \quad x(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0;$$

$$V(0) = V_0 \cdot \cos(\alpha); \quad V(0) = C_1; \quad \Leftrightarrow C_1 = V_0 \cos(\alpha)$$

В результате получим:

$$\begin{cases} V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha); \\ V_y = V_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha); \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) — это решение первого дифференциального уравнения из матмодели (2). Из системы (3) следует, что горизонтальная составляющая скорости V_x есть величина постоянная, поэтому **движение тела в горизонтальном направлении является равномерным с постоянной скоростью $V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha)$** .

2) Проинтегрируем второе уравнение из модели (2) по t дважды, учитывая, что

$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\int a_y dt = - \int g dt \Leftrightarrow \int \frac{dv_y}{dt} dt = -g \int dt \Leftrightarrow \int dv_y = -g \int dt \Leftrightarrow \underline{v_y = -gt + c_1}$$

$$\int v_y dt = \int (-gt + C_1) dt \Leftrightarrow \int \frac{dy}{dt} dt = \int (-gt) dt + \int C_1 dt \Leftrightarrow$$

$$\int y dt = -g \int t dt + C_1 \int dt \Leftrightarrow y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Используя начальные условия (1), определим C_1 и C_2 :

$$V_y(0) = V_0 \cdot \sin \alpha; \quad V_y(0) = -g \cdot 0 + C_1; \quad \Leftrightarrow C_1 = V_0 \sin(\alpha);$$

$$\left| \begin{aligned} y(0) = 0; \quad y(0) - \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_1 t + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0 \end{aligned} \right.$$

В результате получим:

$$\begin{cases} V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha) - gt; \\ V_y = V_0 \cdot \sin(\alpha) - gt^2/2; \end{cases}$$

Система уравнений (4) — это решение второго уравнения матмодели (2). Из системы (4) следует, что движение в вертикальном направлении не является равномерным, так как v_y уже зависит от времени t и направления движения, причем:

- В начале движения, когда тело движется вверх, $gt < v_0 \cdot \sin \alpha$, **движение является равнозамедленным**, как gt из $v_0 \cdot \sin \alpha$ вычитается.

• В момент времени, когда $gt = v_0 \cdot \sin \alpha$, вертикальная составляющая скорости $v_y = 0$ и тело находится в состоянии покоя.

• Затем, когда $gt > v_0 \cdot \sin \alpha$, начинается спуск, **движение становится равноускоренным**, так как P и v_y направлены в одну сторону.

Собирая формулы (2), (3), (4) получим систему математических соотношений, характеризующих полет тела:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ v_x = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - gt \\ x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha \\ y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Причем, $t \in [0, T]$, где T – время полета тела.

Соотношения (5) называют **аналитической математической моделью полета тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0** . Эта модель тоже относится к дескриптивным моделям, но она уже явным образом связывает исходные данные полета α , v_0 , t с выходными данными – x , y , V_x , V_y , a_x , a_y .

6.3 Теоретическое исследование аналитической математической модели полета

Исследуем построенную аналитическую матмодель теоретически, а именно, найдем характеристики полета тела.

1) Выразим из 5-го уравнения системы (5) время полета t , подставим полученное выражение в 6-тое уравнение этой системы и получим формулу, связывающую величины x и y :

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (6)$$

Формула (6) – это уравнение траектории полета тела. Из нее следует, что **тело движется по параболе**.

2) Определим скорость движения по этой траектории способом проекций

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \cdot g \cdot t \cdot \sin \alpha + g^2 t^2} \quad (7)$$

Из последней формулы следует, что *движение, полученное сложением равномерного горизонтального и равнопеременного вертикального, не является ни равномерным, ни равнопеременным.*

3) Положим в 6-ом уравнении системы (5) $y=0$, в этот момент полет заканчивается и тело падает на землю:

$$v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Leftrightarrow t \left(v_0 \cdot \sin \alpha - \frac{gt}{2} \right) = 0, \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g}} \quad (8)$$

Формула (8) определяет время продолжительности полета.

4) Подставим T , определенное формулой (8) в 5-ое уравнение системы (5), получим:

$$S = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \Rightarrow \boxed{S = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}} \quad (9)$$

Формула (9) определяет дальность полета, то есть расстояние, которое пролетит тело по горизонтали за время T .

5) Положим в 4-ом уравнении матмодели (5) $v_y = 0$, получим:

$$v_0 \cdot \sin \alpha - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}$$

Очевидно, что в этот момент времени тело поднимется на наибольшую высоту. Сравнивая это время t со временем всего полета T , определенного формулой (8), видим, что максимальная высота полета H достигается в момент времени $t = T/2$, то есть, в середине полета. Подставим t в 6-ое уравнение системы (5) и получим:

$$H = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} - \frac{g \cdot v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g^2}$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}} \quad (10)$$

Формула (10) определяет максимальную высоту подъема тела в процессе полета.

§ 7. Математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением

Постановка задачи. Пусть тело – бронзовый шарик с радиусом $r = 0.1\text{ м}$ брошен на Землю с начальной скоростью $v_0 = 20\text{ м/сек}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ в воздухе, коэффициент вязкости которого $\mu = 0.0182\text{ Н}\cdot\text{сек/м}^2$. Известно, что коэффициент лобового сечения для шарика $c = 0.4$, плотность шарика $\rho_{\text{ш}} = 8500\text{ кг/м}^3$, плотность воздуха $\rho_{\text{в}} = 1.29\text{ кг/м}^3$. Продемонстрировать его полет на экране. Определить характеристики полета – его дальность, максимальную высоту полета, его продолжительность.

Статические входные данные модели:

v_0 – скорость, с которой бросили тело;

α – угол, под которым бросили тело;

r – радиус тела - шарика;

μ – коэффициент вязкости среды

c – коэффициент лобового сечения ;

$\rho_{\text{ш}}$ – плотность шарика;

$\rho_{\text{в}}$ – плотность воздуха ;

g – ускорение свободного падения.

Динамические выходные данные модели:

$t1$ – время;

$x1, y1$ – координаты тела в момент времени $t1$;

$vx1, vy1$ – горизонт. и вертикальная составляющие скорости

$ax1, ay1$ – горизонтальная и вертикальная составляющие ускорения

На, брошенное под углом к горизонту, тело в среде с сопротивлением действует сила тяжести $F = mg$, направленная вниз, и сила сопротивления среды $F_{\text{сопр.}}$, направленная в сторону, противоположную движению (Рис.47). По второму закону Ньютона имеем:

$$ma = mg - F_{\text{сопр}} \quad (1)$$

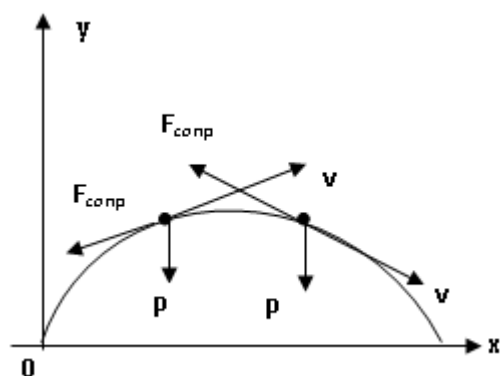
Сила сопротивления среды

$$F_{\text{сопр}} = k_1 V + k_2 V^2$$

зависит от скорости тела, его поперечного сечения и свойств самой среды.

k_1 – коэффициент сопротивления, зависящий от вязкости среды и формы тела;

k_2 – коэффициент лобового сопротивления, зависящий от площади поперечного сечения и плотности среды



Если скорость небольшая, то доминирует линейная составляющая силы, квадратичной же составляющей можно пренебречь, при более высоких скоростях напротив, резко возрастает квадратичная составляющая силы сопротивления, а линейной составляющей можно пренебречь. Подставляя $F_{сопр}$ в формулу (1), получим

$$ma = mg - k_1 V + k_2 V^2,$$

Рис.47 Модель – схема полета

Для горизонтальной и вертикальной составляющей ускорения последнее равенство запишется в виде:

$$\begin{cases} a_x m = -k_1 v_x - k_2 \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_x \\ a_y m = gm - k_1 v_y - k_2 \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot v_y \end{cases} \quad (2)$$

Эта формула является **математической моделью полета тела в среде с сопротивлением**. В ней величины m , k_1 , k_2 являются входными, а величины V и a – выходными. Такое падение уже не является равноускоренным, так как с увеличением времени скорость тела возрастает, следовательно, ускорение уменьшается.

Контрольные вопросы к четвертой главе

1. Что называется математической моделью?
2. От чего абстрагируют, и что рассматривают в математических моделях?
3. По каким признакам можно классифицировать математические модели?
4. Какие модели называются аналитическими? Имитационными? Дескриптивными? Оптимизационными? Многокритериальными? Игровыми?
5. Какое движение называется равноускоренным? Как записывается математическая модель равноускоренного движения? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
6. Какое движение тела называется свободным падением? Как записывается математическая модель свободного падения? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
7. Является ли свободное падение равноускоренным движением? Если – да, то откуда это следует?
8. Какие формулы позволяют вычислить высоту тела над землей при свободном падении, скорость падения, время падения?
9. Имеет ли математическая модель свободного падения границы применимости? Если – да, то какие?
10. Как записывается математическая модель падения тела в среде с сопротивлением? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
11. Что понимается под пружинным маятником?
12. Какие колебания маятника называются гармоническими?
13. Как записывается математическая модель гармонических колебаний маятника? Какие данные в ней являются входными? Выходными?

14. Какие колебания называются затухающими?

15. Как записывается математическая модель затухающих колебаний маятника? Какие данные в ней являются входными? Выходными?

16. Как записывается дифференциальная математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления? Какие данные в ней являются входными? Выходными?

17. Как записывается аналитическая математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления? Какие данные в ней являются входными? Выходными?

18. Как записывается уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления?

19. Какие формулы позволяют вычислить характеристики этого полета: его дальность, его продолжительность, максимальную высоту полета? Каким образом получены эти формулы?

20. Как записывается математическая модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением? Какие данные в ней являются входными? Выходными?

Глава 5. Компьютерные модели физических процессов

§ 1. Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением

1.1 Алгоритм построения компьютерной модели падения тела

Рассмотрим алгоритм, который положим в основу программы, моделирующей падения тела в среде с сопротивлением.

1. Время падения тела T разбить на равные, достаточно малые промежутки dt .
2. Движение на каждом промежутке dt считать *равноускоренным* и использовать на нем матмодель равноускоренного движения для вычисления пройденного расстояния и скорости:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a(dt)^2}{2} \quad \text{и} \quad V = V_0 + a \cdot dt$$

3. Считать, что скорость $V(t)$ и ускорение $a(t)$ *меняются скачком* в конце каждого промежутка dt .

4. Задать начальные условия процесса падения, то есть, данные процесса в начальный момент времени:

$$t_0 = 0; \quad S_0 = 0; \quad V_0 = 0; \quad a_0 = g.$$

5. Далее, на каждом из промежутков времени использовать формулы, указанные в таблице №3:

Таблице №3

Время	Расстояние	Скорость	Ускорение
$t_1 = t_0 + dt,$	$S_1 = S_0 + V_0 t + a_0(dt)^2/2$	$V_1 = V_0 + a_0 dt$	$a_1 = (mg - k_1 V_1 - k_2 V_1^2)/m$
$t_2 = t_1 + dt,$	$S_2 = S_1 + V_1 t + a_1(dt)^2/2$	$V_2 = V_1 + a_1 dt$	$a_2 = (mg - k_1 V_2 - k_2 V_2^2)/m$
...
$t_i = t_{i-1} + dt,$	$S_i = S_{i-1} + V_{i-1} t + a_{i-1}(dt)^2/2$	$V_i = V_{i-1} + a_{i-1} dt$	$a_i = (mg - k_1 V_i - k_2 V_i^2)/m$
...

6. Закончить процесс, когда расстояние S_i , которое пролетело падающее тело, будет не меньшим высоты H , с которой тело начало падение.

Из этих формул следует, что переменные – время t_i , путь S_i , скорость V_i , в дискретные моменты времени idt определяются через S_{i-1} , V_{i-1} , t_{i-1} , то есть эти формулы являются рекуррентными.

При исследовании модели свободного падения тела, была получена формула для расчета времени падения t , величину промежутка dt можно положить равной одной

сотой части этого времени, то есть, $dt = t/100 = \frac{1}{100} \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$

1.2 Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением

Детализируем постановку задачи о падении тела в среде с сопротивлением, приведенную выше в пункте 1.1.

Постановка задачи. Пусть тело – деревянный шарик с радиусом $r = 0.1$ м падает на Землю с высоты $H = 1500$ м в воздухе, коэффициент вязкости которого $\mu = 0.0182$ Н·сек/м². Известно, что коэффициент лобового сечения шарика $c = 0.4$, плотность шарика $\rho_{ш} = 800$ кг/м³, плотность воздуха $\rho_{в} = 1.29$ кг/м³. Определить (смоделировать), как изменяются скорость и ускорение тела в процессе падения.

Рассмотрим данные модели.

Статические входные данные модели:

H – высота, с которой падает тело;

r – радиус тела -шарика;

μ – коэффициент вязкости среды (в программе kv);

c – коэффициент лобового сечения шарика;

$\rho_{ш}$ – плотность шарика (в программе psh);

$\rho_{в}$ – плотность воздуха (в программе pv);

g – ускорение свободного падения.

Динамические выходные данные модели:

$t1$ – время;

$S1$ – пройденное расстояние;

$V1$ – скорость;

$a1$ – ускорение.

Компьютерная модель падения тела в среде с сопротивлением «Pad_telR» построена на основе рассмотренного алгоритма и указанных выше входных данных.

program Pad_telR;

uses Crt, Graph;

const $H=1500$; $r=0.1$; $kvz=0.0182$; $c=0.4$; $psh=800$; $pv=1.29$; $g=9.8$;

var $gD, gM, t0m, v0m, tm, vm, am, ym, k j, z, bt, bv, ba$: **integer**;

$m, v0, v1, a0, a1, s0, s1, t0, t1, dt, k1, k2, at, av, aa, kt, ky, ka, kv$: **real**;

$mast, masv, mass, masa$: **array**[1..2000] **of real**; ats, avs, aas : **string**;

BEGIN

$m:=4/3*\pi*\exp(3*\ln(r))*psh$; {масса шарика}

$dt:=\sqrt{2*N/g}/100$; {1/100 часть времени падения}

$k1:=6*\pi*kvz*r$; $k2:=0.5*c*\pi*\sqrt{r}*pv$; {коэффициенты сопротивления}

$j:=0$; $t0:=0$; $s0:=0$; $v0:=0$; $a0:=g$; {начальные данные процесса падения}

repeat {цикл, моделирующий падение тела}

$j:=j+1$; {счетчик шагов цикла}

$t1:=t0+dt$;

$s1:=s0+v0*dt+a0*\sqrt{dt}/2$;

$v1:=v0+a0*dt$;

$a1:=(m*g-k1*v1-k2*\sqrt{v1})/m$;

```

    mast[j]:=t1; mass[j]:=s1; masv[j]:=v1; masa[j]:=a1;
    t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H; { условие «приземления» тела }
if j < 25 then k:=1 else if j<40 then k:=2 else k:= round(j/20);
clrscr;
writeln(' Шаг z      Время t      Путь S      Скорость V      Ускорение a');
for z:= 1 to j do if (z mod k) =0 then writeln('      ', z:5, '      ', mast[z]:10:4,
    '      ', mass[z]:10:4, '      ', masv[z]:10:4, '      ', masa[z]:6:4);
writeln('      ', j:5, '      ', mast[j]:10:4, '      ', mass[j]:10:4,
    '      ', masv[j]:6:4, '      ', masa[j]:4:4);
readln;
gD:=Detect; Initgraph(gD,gM,' ');
{построение на экране системы координат (V/a)Ot}
t0m:= 40; v0m:=420; {координаты начала координат системы (V/a)Ot }
bt:= 50; bv:= 50; ba:= 50; {число пикселей в одном делении на осях V,a,t}
at:=3; av:=10; aa:=2; {масштаб на осях V, a, t }
setbkcolor(15); setcolor(1);
{рисование осей координат и их масштабирование}
line(10, v0m, 620, v0m); line(615, v0m - 5, 620, v0m);
line(615, v0m + 5, 620, v0m); outtextxy(630, v0m, 't');
line(t0m, 15, t0m, 460); line(t0m - 10, 25, t0m, 15);
line(t0m + 10, 25, t0m, 15); outtextxy(t0m, 5, 'V/a');
for i := 1 to 10 do line(t0m + i*bt, v0m - 5, t0m + i*bt, v0m + 5);
for i := 1 to 10 do line(t0m- 5, v0m - i*bv, t0m + 5, v0m - i*bv);
outtextxy(t0m - 8, v0m + 8, 'O');
str(at : 1 : 0, ats); outtextxy(t0m + bt, v0m + 8, ats);
str(av : 1 : 0, avs); str(aa : 1 : 0, aas);
outtextxy(t0m - 35, v0m - bv, avs + '/' + aas);
kt:= bt / at ; kv:= bv / av ; ka:= ba / aa ;
for z:=1 to j do
    begin
        tm:= round(t0m + kt*mast[z]);
        vm:= round(v0m - kv*masv[z]);
        setcolor(2); circle(tm,vm,1);
        am:= round(v0m - ka*masa[z]);
        setcolor(4); circle(tm,am,1);
    end;
readkey;
cleardevice;
setcolor(1); circle(300,50,5);
setfillstyle(5,2); bar(200,420,400,430);
readkey; setcolor(0); circle(300,50,5);

```



```

t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
repeat {цикл, моделирующий падение тела на экране }
  t1:= t0+dt;
  s1:= s0+v0*dt+a0*sqr(dt)/2;
  v1:= v0+a0*dt;
  a1:= (m*g - k1*v1 - k2* sqr (v1))/m;
  ky := (420 - 50)/H;
  ym:= round(50 + ky*s1);
  setcolor(1); circle(300,yk,5); delay(450);
  setcolor(0); circle(300,ym,5);
  t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
setcolor(1); circle(300,415,5); { упавшее тело }
readkey; closegraph;
END.

```

В этой программе строятся три модели процесса падения тела:

1) Сначала в текстовом режиме строится **модель – таблица**, содержащая значения пройденного пути, скорости и ускорения тела в фиксированные моменты времени;

Номер шага	Время t	Путь S	Скорость V	Ускорение a
8	1	10	13.5	9.2
16	3	37	25.7	8.0
24	4	81	35.9	6.4
32	6	137	43.9	4.8
40	7	202	49.7	3.4
48	8	275	53.8	2.4
.....				
128	22	1118	62.0	0.0
136	24	1204	62.1	0.0
144	25	1291	62.1	0.0
152	27	1378	62.1	0.0
160	28	1465	62.1	0.0
164	29	1509	62.1	0.0

Рис.48 - Модель – таблица процесса падения тела

Из таблицы - модели Рис.48 следует, что:

- Цикл, моделирующий падение тела, выполненлся 164 раза, на экран выводятся значение всех шагов, кратных 8, и последний 164 шаг.
- Время падения тела составляет примерно 29 сек.
- В первые 24 секунды падения скорость тела возрастает, затем становится постоянной, равной $\approx 62,1$ м/с, то есть падение тела становится равномерным.

• Ускорение, наоборот, убывает и через 24 секунды практически становится равным нулю.

2) Затем в графическом режиме модель падения представляется в *виде графиков* зависимости скорости падения V и ускорения a от времени падения t . На графиках (Рис.49) более наглядно, чем в таблице, видно, как скорость падения резко возрастает до 61,5 м/сек, а затем становится постоянной, ускорение a в это же время убывает до практически до нуля.

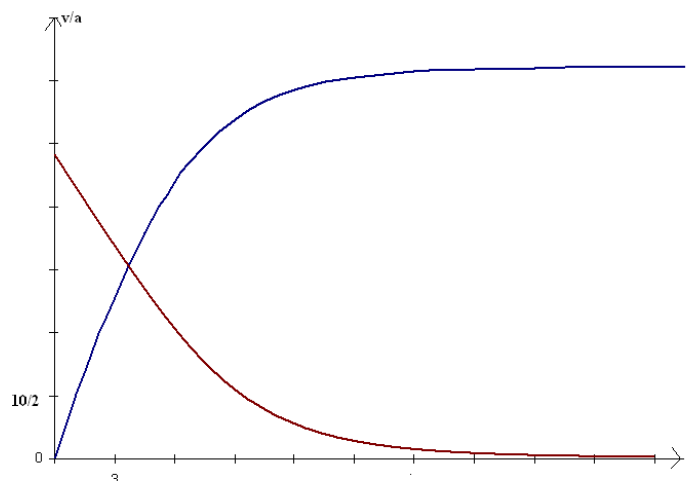


Рис.49 - Модель процесса падения в виде графиков

3) После этого опять в графическом режиме модель представлена в *виде демонстрации* падения тела на экране.

Все три модели по сущности являются знаковыми, по фактору времени – динамическими, так прослеживают процесс во времени, по характеру процесса – детерминированными.

1.3 Компьютерный эксперимент с моделью падения тела

Компьютерный эксперимент всегда проводится с входными данными модели.

С помощью программы Pad_telR можно проводить *простые компьютерные эксперименты, не изменяя кода программы, а изменяя только ее входные данные*, например, значение радиуса шарика или коэффициента вязкости среды. В табличной и графической модели при этом можно будет проследить, как изменятся при этом выходные данные процесса падения.

Но компьютерный эксперимент можно организовать и программным путем.

Рассмотрим пример задачи, для решения которой проводится такой эксперимент.

Постановка задачи для эксперимента. Определить, каким должен быть радиус r деревянного шарика, который падает на Землю с высоты $H = 1500$ м в воздухе, коэффициент вязкости которого $\mu = 0.0182$ Н·сек/м², чтобы шарик приземлился со скоростью $v = (100 \pm 1)$ м/сек. Известно, что коэффициент лобового сечения для шарика $c = 0.4$, плотность шарика $\rho_{ш} = 800$ кг/м³, плотность воздуха $\rho_{в} = 1.29$ кг/м³. Результаты моделирования вывести:

- 1) в текстовом режиме в виде таблицы, содержащей номер попытки в эксперименте, значения радиуса r , времени t , скорости V и ускорения a , соответствующие этой попытке;
- 2) в виде графика зависимости V от r ;
- 3) в виде демонстрации на экране процесса падения тела при найденном в эксперименте значении r .

Указания к составлению «экспериментальной» программы

В программах, которые проводят эксперименты, назовем их «экспериментальными», *эксперимент всегда проводится с входной величиной, а условием его окончания всегда является заданное значение выходной величины.*

В данном случае эксперимент является вычислительным, он проводится с *входной величиной* r – радиусом падающего шарика, именно его значение является искомым. Условием (критерием) окончания эксперимента (поиска) является *значение выходной величины* V – скорости приземления тела, равное (100 ± 1) м/с.

Для проведения *такого* эксперимента нужно:

- Составить программу, ядром которой будет рассмотренная выше программа Pad_telR.
- Организовать в ней цикл, в котором меняется значение искомой величины r с каким-либо шагом. Этот цикл должен быть внешним по отношению к циклу, моделирующему падение.
- Внешний цикл должен заканчиваться тогда, когда скорость приземления V будет отличаться от заданного значения 100 на ± 1 м, то есть, V должна попасть в промежуток $[99;101]$, с точки зрения математики это равносильно неравенству $|V - 100| \leq 1$. Программа, выполняющая этот компьютерный эксперимент, в данном случае – вычислительный, представлена ниже:

```

program Eks_Pad;
  uses Crt, Graph;
  const H=1500; kvz =0.0182; c=0.4; psh=800; pv=1.29; g=9.8;
  var gD, gM, r0m, v0m, rm, vm, ym, k, j, z, br, bv: integer;
      r, m, v0, v1, a0, a1, s0, s1, t0, t1, dt, k1, k2, ar, av, kr, ky, kv : real;
      mast, masv, masr, masa, mask1, mask2, masm: array[1..2000] of real;
      ars, avs: string;
BEGIN
  dt := sqrt (2*H/g)/100; r:= 0; j:=0;
  repeat {внешний цикл для подбора значения радиуса}
    r:=r+0.005; m:= 4/3*pi*exp(3*ln(r))*psh;
    k1:= 6*pi*k vz*r; k2:= 0.5*c*pi*sqr(r)*pv;
    t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
    repeat {цикл, моделирующий падение для заданного радиуса}
      t1:= t0+dt;

```

```

s1 := s0 + v0*dt + a0*sqr(dt)/2;
v1 := v0 + a0*dt;
a1 := (m*g - k1*v1 - k2* sqr (v1))/m;
t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
j:=j + 1; masr[j]:=r; mast[j]:=t1; masv[j]:=v1; masa[j]:=a1;
mask1[j]:= k1; mask2[j]:= k2;
until abs(v1-100) <=1;
if j < 25 then k:=1 else if j<40 then k:=2 else i:= round(k/20);
clrscr;
writeln(" z      R      m      k1      k2      t      V      a');
for z:= 1 to j do if (z mod k) =0 then writeln(z:5,'      ',masr[z]:5:3,
      '      ',masm[z]:7:4,'      ',mask1[z]:5:4, '      ',mask2[z]:5:4,
      '      ',mast[z]:5:3, '      ',masv[z]:5:4, '      ',masa[z]:5:4);
writeln(j:5,'      ',masr[j]:5:3,'      ',masm[j]:7:4,'      ',mask1[j]:5:4,
      '      ',mask2[j]:5:4,'      ',mast[j]:5:3, '      ',masv[j]:5:4,
      '      ',masa[j]:5:4);
writeln ('Требуемая скорость = ',v1:5:4, ' достигается при радиусе = ', r:5:3);
readln;
gD:=Detect; Initgraph(gD,gM,'      ');
r0m:= 40; v0m:=420; br:= 50; ar:=0.025; bv:= 50; av:=15;
setbkcolor(15); setcolor(1);
line(10, v0m, 620, v0m); line(615, v0m - 5, 620, v0m);
line(615, v0m + 5, 620, v0m); outtextxy(630, v0m, 'R');
line(r0m, 15, r0m, 460); line(r0m - 10, 25, r0m, 15);
line(r0m + 10, 25, r0m, 15); outtextxy(r0m, 5, 'V');
for i := 1 to 10 do line(r0m + i*br, v0m - 5, r0m + i*br, v0m + 5);
for i := 1 to 13 do line(r0m- 5, v0m - i*bv, r0m + 5, v0m - i*bv);
outtextxy(r0m - 8, v0m + 8, 'O');
str(ar : 3 : 3, ars); outtextxy(r0m + br, v0m + 8, ars);
str(av : 2: 0, avs); outtextxy(r0m - 20, v0m - bv, avs);
kr:= br / ar ; kv:= bv / av ; setcolor(2);
for z:=1 to j do
    begin
        rm:= round(r0m + kr*masr[z]);
        vm:= round(v0k - kv*masv[z]);
        circle(rm,vm,1);
    end;
readkey;
cleardevice;
setcolor(1); circle(300,50,5);
setfillstyle(5,2); bar(200,420,400,430); readkey;

```

```

setcolor(0); circle(300,50,5);
t0:=0; s0:=0; v0:=0; a0:=g;
repeat
  t1:= t0+dt;
  s1:= s0+v0*dt+a0*sqr(dt)/2;
  v1:= v0+a0*dt;
  a1:= (m*g - k1*v1 - k2*sqr(v1))/m;
  km:= (420 - 50)/H;   ym:= round(50 + ky*s1);
  setcolor(1); circle(300,yk,5); delay(450);
  setcolor(0); circle(300,ym,5);
  t0:=t1; s0:=s1; v0:=v1; a0:=a1;
until s1>=H;
setcolor(1); circle(300,415,5);
readkey; closegraph;}

```

END.

Сам эксперимент, в котором ищется значение радиуса r , проводится в программе в текстовом режиме с шагом 0.005. В этом же режиме на экран выводится таблица с результатами эксперимента, приведенная на Рис. 50.

z	R	m	k1	k2	t	v	a
5	0.015	0.0113	0.0051	0.0002	106.202	14.2957	0.0000
10	0.030	0.0905	0.0103	0.0007	54.939	28.5163	0.0000
15	0.045	0.3054	0.0154	0.0016	42.166	38.2550	0.0000
20	0.060	0.7238	0.0206	0.0029	36.042	45.9041	0.0000
25	0.075	1.4137	0.0257	0.0046	32.543	52.3747	0.0002
30	0.090	2.4429	0.0309	0.0066	30.094	58.0757	0.0016
35	0.105	3.8792	0.0360	0.0089	28.344	63.2203	0.0060
40	0.120	5.7906	0.0412	0.0117	26.944	67.9289	0.0163
45	0.135	8.2448	0.0463	0.0148	25.895	72.2771	0.0344
50	0.150	11.3097	0.0515	0.0182	25.020	76.3117	0.0624
55	0.165	15.0533	0.0566	0.0221	24.320	80.0695	0.1008
60	0.180	19.5432	0.0618	0.0263	23.795	83.5856	0.1477
65	0.195	24.8475	0.0669	0.0308	23.270	86.8616	0.2075
70	0.210	31.0339	0.0720	0.0357	22.920	89.9537	0.2713
75	0.225	38.1704	0.0772	0.0410	22.570	92.8448	0.3456
80	0.240	46.3247	0.0823	0.0467	22.220	95.5423	0.4305
85	0.255	55.5647	0.0875	0.0527	21.870	98.0517	0.5263
87	0.261	63.5543	0.0925	0.0579	22.220	99.0835	0.5529

Требуемая скорость = 99.0835 достигается при радиусе = 0.261

Рис.50 - Табличная модель проведения эксперимента

Из таблицы следует, что программа выводит на экран каждую пятую попытку эксперимента, на 87 попытке она нашла искомое значение радиуса r , при котором значение скорости v попадает в промежуток $[99, 101]$. Очевидно, что движение шарика с таким радиусом до конца падения остается равноускоренным, так как значение ускорения при приземлении равно 0.5529. В графическом режиме программа строит график, приведенный на Рис.51. На нем наглядно видно, что при увеличении радиуса падающего шарика скорость его приземления увеличивается.

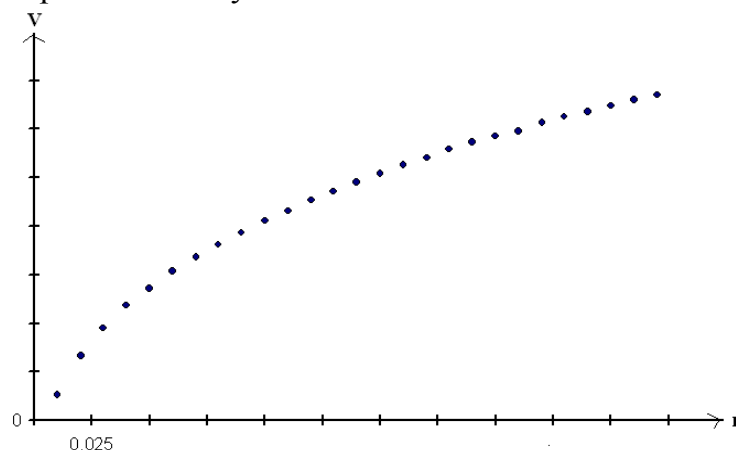


Рис.51 - Модель – график зависимости скорости приземления V от радиуса r

§ 2. Компьютерная модель колебаний маятника

2.1 Алгоритм построения компьютерной модели гармонических колебаний

На основе построенной в пункте 2.5 главы 4 математической модели колебаний пружинного маятника $-k \cdot x = m \cdot a$, которую представим виде $a = -\frac{kx}{m}$, построим компьютерную модель, которая позволит продемонстрировать на экране результаты исследования математической модели колебаний. За основу возьмем алгоритм, аналогичный рассмотренному выше при построении компьютерной модели падения тела.

1. Время моделирования колебаний, разбить на равные, достаточно малые промежутки dt .

2. Движение на каждом промежутке dt считать **равноускоренным** и использовать на нем модель равноускоренного движения для вычисления пройденного расстояния и скорости:

$$S = S_0 + V_0 t + \frac{a(dt)^2}{2} \quad \text{и} \quad V = V_0 + a dt$$

Но, так как смещение шарика принято обозначать переменной x , заменить в формулах S на x , а x_0 на x_h :

$$x = x_h + V_0 t + \frac{a(dt)^2}{2}$$

3. Считать, что ускорение $a(t)$ **меняется скачком** в конце каждого промежутка dt .

4. Задать начальные условия процесса колебания, то есть, данные процесса в начальный момент времени:

$$t_0 = 0; \quad x_0 = x_h; \quad v_0 = 0; \quad a_0 = -\frac{k}{m} x_0$$

5. Далее, на каждом из промежутков времени использовать формулы, приведенные в таблице №4:

Таблице №4

Время	Смещение	Скорость	Ускорение
$t_1 = t_0 + dt,$	$x_1 = x_0 + V_0 t + a_0 (dt)^2 / 2$	$V_1 = V_0 + a_0 dt$	$a_1 = -k \cdot x_0 / m$
$t_2 = t_1 + dt,$	$x_2 = x_1 + V_1 t + a_1 (dt)^2 / 2$	$V_2 = V_1 + a_1 dt$	$a_2 = -k \cdot x_1 / m$
...
$t_i = t_{i-1} + dt,$	$x_i = x_{i-1} + V_{i-1} t + a_{i-1} (dt)^2 / 2$	$V_i = V_{i-1} + a_{i-1} dt$	$a_i = -k \cdot x_{i-1} / m$
...

6. Закончить процесс, когда закончится заданное время наблюдения за процессом колебаний.

Из этих формул следует, что переменные – время t_i , смещение x_i , скорость V_i , в дискретные моменты времени idt определяются через x_{i-1} , V_{i-1} , t_{i-1} , то есть эти формулы являются рекуррентными. Они и составляют тело цикла, который является рабочим блоком программы.

2.2 Демонстрационная компьютерная модель гармонических колебаний

program GarmCol;

uses Crt, Graph;

var gD, gM, xm, xh : **integer**;

m, k, t0, t1, dt, x0, x1, v0, v1, a0, a1 : **real**;

BEGIN

gD:=**Detect**; **Initgraph**(gD, gM, ' ');

setbkcolor(15); **setcolor**(1);

m:= 0.1; k:=0.2; xh:=200; dt:=0.001;

setfillstyle(5,2); **bar**(50,210,590,220);

line (320,100,320,300); **line** (315,105,320,100);

line (325,105,320,100); **outtextxy** (300,90,'Y');

line (50,210,600,210); **line** (595,205,600,210);

line (595,215,600,210); **outtextxy** (590,190,'X');

line (320-xh, 205, 320-xh, 215); **line** (320+xh, 205, 320+xh, 215);

outtextxy (290 - xh, 200, '-xh'); **outtextxy** (330+xh, 200, '+xh');

circle (320,203,5);

readkey;

setcolor(15); **circle**(320,203,5);

t0 :=0; x0 :=xh; v0 :=0; a0 :=(-k*x0)/m;

repeat {цикл, моделирующий колебания}

```

t1 := t0 + dt;
x1 := x0 + v0*dt + a0*sqr(dt)/2;
v1 := v0 + a0*dt;
a1 := (-k*x1)/m;
xm:=round(320+x1);
setcolor (1); circle (xm,203,5); delay (20);
setcolor (15); circle (xm,203,5);
t0 := t1; x0 :=x1; v0 :=v1; a0 :=a1;
until t0 >= 10;
setcolor(1); circle (320,203,5);
readkey;

```

END.

Эта программа только демонстрирует в виде имитации на экране гармонические колебания шарика на столе около положения равновесия в течении 10 секунд для значения массы шарика $m = 0.1$ кг, коэффициента упругости пружины $k = 0.2$ и значения первоначального отклонения шарика $x_h = 200$ пикселей. Заключительный момент этих колебаний приведен на Рис.52. В программе не определяется амплитуда, период и частота колебаний маятника, кроме того, если увеличить время наблюдения, станет заметно, что амплитуда колебаний уменьшается, так как накапливается ошибка вычислений. Следовательно, математическая модель адекватна процессу гармонических колебаний маятника в первые 10-12 секунд колебаний.

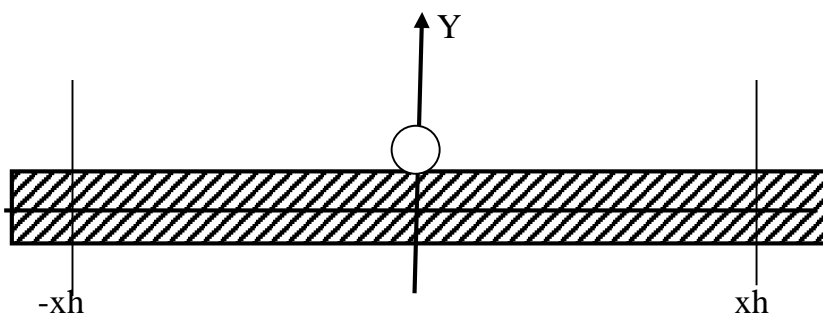


Рис.52 - Модель колебаний шарика

2.3 Графическая компьютерная модель гармонических колебаний

Программа GraphCol, помещенная ниже, результаты моделирования величин $x(t)$, $V(t)$, $a(t)$ для значения массы тела $m = 0.1$ кг, коэффициента упругости пружины $k = 0.2$ и значения первоначального отклонения шарика $x_h = 0.4$ м выводит на экран в виде графиков зависимости этих величин от времени.

```

program GraphCol;
  uses Crt, Graph;
  var gD, gM, t0m, y0m, tm, xm, vm, am, bg, bv,i : integer; s: string;
      m, k, t0, t1, dt, x0, x1, v0, v1, a0, a1, xh, ag, av, kg, kv : real;
BEGIN
  gD := Detect; Initgraph(gD, gM, ' ');
  setbkcolor(15); setcolor(1);

```

```

t0m:=40; y0m:= 220;
line (20,y0m,630,y0m); line (625,y0m-5,630,y0m);
line (625,y0m+5,630,y0m); outtextxy (625,y0m-10, 't');
line (t0m,20,t0m,460); line (t0m-5,25,t0m,20); line (t0m+5,25,t0m,20);
bg:= 40; ag:= 1; kg :=bg / ag;    bv:= 20; av:= 0.1; kv := bv / av;
for i := 1 to 15 do line ( t0m+i*bg, y0m-5, t0m+i*bg, y0m+5);
for i := 1 to 23 do line ( t0m-5, y0m -i*bv, t0m+5, y0m - i*bv);
str (ag :2 :0, s); outtextxy (70,y0m+5, s);
str (av :2 :1, s); outtextxy (5,195, s);
m := 0.1; k :=0.2; xh :=0.4; dt :=0.001;
t0 :=0; x0 :=xh; v0 :=0; a0 :=(-k*x0)/m;
repeat { цикл, моделирующий колебания в течении 12 единиц времени }
    t1 := t0 + dt;
    x1 :=x0 + v0*dt + a0*sqr(dt)/2;
    v1 :=v0 + a0*dt;
    a1 := (-k*x1)/m;
    tm := round( t0m + kg*t1);    xm := round( y0m - kv*x1);
    vm := round( y0m - kv*v1);    am := round( y0m - kv*a1);
    setcolor (1); circle (tm, xm, 1); { график смещения}
    setcolor (2); circle (tm, vm, 1); { график скорости}
    setcolor (5); circle (tm, am, 1); { график ускорения}
    t0 := t1; x0 :=x1; v0 :=v1; a0 :=a1;
until t0 >= 12;
setcolor (1);
outtextxy (50,130, ' x(t) ');
setcolor (2);
outtextxy (160, 95, ' V(t) ');
setcolor (5);
outtextxy (120,45, ' a(t) ');
readkey;
END.

```

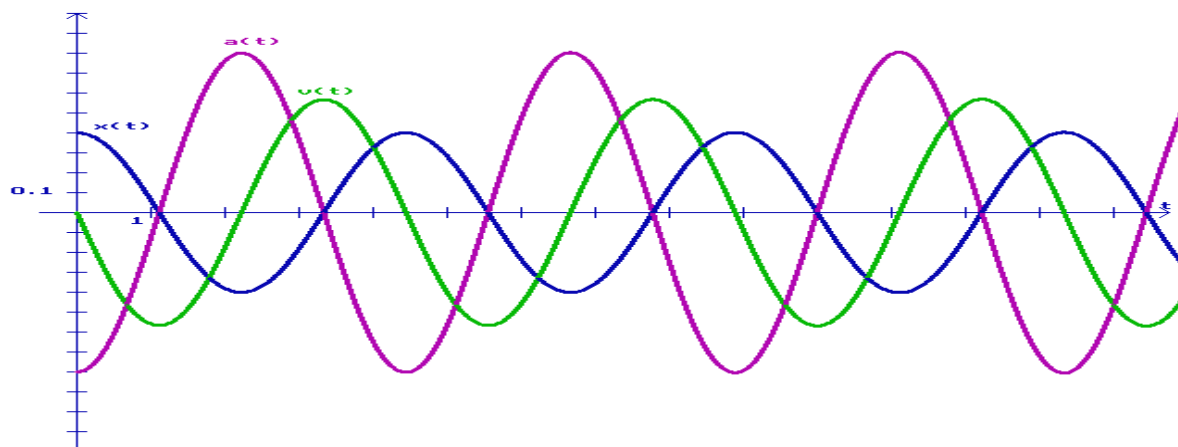


Рис. 53 - Модели-графики процессов колебаний $x(t)$ - $v(t)$ - $a(t)$

На Рис.53 представлены результаты моделирования программы GraphCol. Они подтверждают результаты теоретического исследования модели колебаний пружинного маятника, рассмотренные в пункте 2.6 главы 4. Все три величины – смещение шарика от положения равновесия $x(t)$, его скорость $v(t)$ и ускорение $a(t)$ изменяются во времени по закону косинуса, но смещены по фазе относительно друг друга на величину, равную $\pi/2$. Наибольшую амплитуду колебаний $a_a = 0.8$ см имеют колебания ускорения, наименьшую $a_x = 0.4$ см - колебания смещения. Период колебаний всех трех величин ≈ 4.5 сек.

2.4 Компьютерная модель затухающих колебаний пружинного маятника

Математическая модель затухающих колебаний пружинного маятника, построенная в пункте 2.7 Главы 4, имеет вид $am = -k \cdot x - k_1 \cdot v$, тогда ускорение, с которым происходят колебания, можно выразить в следующем виде:

$$a = \frac{-k \cdot x - k_1 \cdot v}{m}$$

Компьютерные модели таких колебаний можно построить, заменяя в программах GarmCol и GraphCol формулы, по которым рассчитывается ускорение, на формулу, указанную выше, получим демонстрационную и графическую компьютерные модели затухающих колебаний.

§ 3. Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту

3.1 Алгоритм построения компьютерной модели полета тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления

На основе дифференциальной математической модели, построенной в пункте 2.8 в Главе 4

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad (1)$$

построим компьютерную модель, которая позволит продемонстрировать на экране полет тела, брошенного под углом к горизонту. За основу возьмем алгоритм, аналогичный рассмотренному выше, при построении компьютерной модели падения тела.

1. Время всего полета T разбить на равные, достаточно малые промежутки dt .

2. Движение на каждом промежутке dt считать **равноускоренным**, и использовать на нем модель равноускоренного движения для вычисления пройденного расстояния:

$$S = S_0 + v \cdot dt + \frac{a \cdot dt^2}{2}$$

для вертикали и горизонтали эта формула преобразуется в следующие:

$$S_x = x = x_0 + v_x \cdot dt + \frac{a_x \cdot dt^2}{2}, \quad S_y = y = y_0 + v_y \cdot dt + \frac{a_y \cdot dt^2}{2}$$

3. Считать, что скорость в конце промежутка **меняется скачком**:

$$v_x = v_{x0} + a_x \cdot dt, \quad v_y = v_{y0} + a_y \cdot dt;$$

4. Задать начальные условия процесса полета, то есть, данные процесса в начальный момент времени:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ v_{x0} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_{y0} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

5. Далее, на каждом из промежутков времени использовать формулы, приведенные в таблице №5:

Таблице №5

Время	Координаты тела	Скорость	Ускорение
$t_1 = t_0 + dt,$	$x_1 = x_0 + V_{x0} dt + a_{x0}(dt)^2/2$ $y_1 = y_0 + V_{y0} dt + a_{y0}(dt)^2/2$	$V_{x1} = V_{x0} + a_{x0}dt$ $V_{y1} = V_{y0} + a_{y0}dt$	$a_{x1} = 0$ $a_{y1} = -g$
$t_2 = t_1 + dt,$	$x_2 = x_1 + V_{x1} dt + a_{x1}(dt)^2/2$ $y_2 = y_1 + V_{y1} dt + a_{y1}(dt)^2/2$	$V_{x2} = V_{x1} + a_{x1}dt$ $V_{y2} = V_{y1} + a_{y1}dt$	$a_{x2} = 0$ $a_{y2} = -g$
...
$t_i = t_{i-1} + dt,$	$x_i = x_{i-1} + V_{xi-1} dt + a_{xi-1}(dt)^2/2$ $y_i = y_{i-1} + V_{yi-1} dt + a_{yi-1}(dt)^2/2$	$V_{xi} = V_{xi-1} + a_{xi-1}dt$ $V_{yi} = V_{yi-1} + a_{yi-1}dt$	$a_{xi} = 0$ $a_{yi} = -g$
...

6. Закончить процесс, когда тело упадет на землю, то есть, когда высота подъема тела над горизонтом $y = 0$.

3.2. Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления

Постановка задачи. Тело брошено с начальной скоростью $v_0 = 20$ в/сек в среде без сопротивления под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. Продемонстрировать его полет на экране. Определить характеристики полета – его дальность, его продолжительность, значение составляющих скорости и ускорения в момент приземления.

Статические входные данные модели:

v_0 – скорость, с которой бросили тело;
 α – угол, под которым бросили тело;
 g – ускорение свободного падения;
 a_x, a_y – горизонтальная и вертикальная составляющие ускорения тела

Динамические выходные данные модели:

t_1 – текущий момент времени;
 x_1, y_1 – координаты тела в момент времени t_1 ;
 v_{x1}, v_{y1} – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости в t_1 ;

```
program Polet;
uses Crt, Ggraph;
var gD, gM, xm, ym : integer;
    g, alf, t0, t1, dt, x0, y0, x1, y1, v0, vx0, vx1, vy0, vy1, ax, ay: real;
BEGIN
  gD:=Detect; Initgraph(gD, gM, ' ');
  g :=9.8; v0 :=20; alf :=pi/4; dt :=0.01;
  t0 :=0; x0 :=0; y0 :=0; vx0 := v0*cos(alf); vy0 := v0*sin(alf);
  ax :=0; ay := -g;
  setfillstyle (5,2); bar (10,420,600,430); circle (13,412,5);
  readkey; setcolor(0); circle(13,412,5);
  repeat {цикл, моделирующий полет тела}
    t1 := t0 + dt;
    x1 := x0 + vx0*dt + ax0*sqr(dt)/2;
    y1 := y0 + vy0*dt + ay0* sqr(dt)/2;
    vx1 := vx0 + ax*dt;
    vy1 := vy0 + ay*dt;
    xm :=round (13+10*x1);
    ym :=round (412- 10*y1);
    setcolor (15); circle (xm,ym,5); delay (200);
    setcolor (0); circle (xm,ym,5);
    t0 :=t1; x0 :=x1; y0 :=y1; vx0 :=vx1; vy0 :=vy1;
  until y1<= 0;
  setcolor(15); circle (xm,412,5);
  readkey; closegraph;
```

```
clrscr;  
writeln( 'Продолжительность полета T= ', t1);  
writeln( 'Дальность полета S= ', x1);  
writeln( 'Горизонтальная составляющая скорости Vx= ', vx1);  
writeln( 'Вертикальная составляющая скорости Vy= ', vy1);  
writeln( 'Горизонтальная составляющая ускорения ax= ', ax0);  
writeln( 'Вертикальная составляющая ускорения ay= ', ay0);  
readln;
```

END.

Эта модель является *динамической*, она демонстрирует на экране полет тела – кружка в графическом режиме, затем в текстовом режиме выводит на экран следующие характеристики полета:

Продолжительность полета $T = 2.89$
Дальность полета $S = 40.87$
Горизонтальная составляющая скорости $V_x = 14.14$
Вертикальная составляющая скорости $V_y = -14.18$
Горизонтальная составляющая ускорения $a_x = 0.00$
Вертикальная составляющая ускорения $a_y = -9.80$

3.3 Компьютерная модель полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением

Постановка задачи. Пусть тело – бронзовый шарик с радиусом $r = 0.1$ м брошен на Землю с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/сек под углом $\alpha = 45^\circ$ в воздухе, коэффициент вязкости которого $\mu = 0.0182$ Н·сек/м². Известно, что коэффициент лобового сечения для шарика $c = 0.4$, плотность шарика $\rho_{ш} = 8500$ кг/м³, плотность воздуха $\rho_{в} = 1.29$ кг/м³. Продемонстрировать его полет на экране. Определить характеристики полета – его дальность, максимальную высоту полета, его продолжительность.

Статические входные данные модели:

v_0 – скорость, с которой бросили тело;
 α – угол, под которым бросили тело;
 r – радиус тела - шарика;
 μ – коэффициент вязкости среды (в программе kv);
 c – коэффициент лобового сечения;
 $\rho_{ш}$ – плотность шарика (в программе psh);
 $\rho_{в}$ – плотность воздуха (в программе pv);
 g – ускорение свободного падения.

Динамические выходные данные модели:

$t1$ – время;
 $x1, y1$ – координаты тела в момент времени $t1$;
 $vx1, vy1$ – горизонт. и вертикальная составляющие скорости
 $ax1, ay1$ – горизонтальная и вертикальная составляющие ускорения

. Программу Polet_R, моделирующую полет тела в среде с сопротивлением, с данными, указанными в постановке задачи, можно получить из программы Polet, модифицировав ее следующим образом:

- Так же, как в программе Pad_telR, вычислить массу шарика m и коэффициенты сопротивления среды k_1 и k_2 .
- Перед моделирующим циклом после определения значений $vx0$ и $vy0$ нужно определить значения $ax0$ и $ay0$ по формулам, полученным из матмодели :

$$ax0 := - (k1 * vx0 + k2 * \sqrt{\text{sqr}(vx0) + \text{sqr}(vy0)}) * vx0 / m ;$$

$$ay0 := -g - (k1 * vy0 + k2 * \sqrt{\text{sqr}(vx0) + \text{sqr}(vy0)}) * vy0 / m ;$$
- В моделирующий цикл после определения значений $vx1$ и $vy1$ поместить аналогичные формулы:

$$ax1 := - (k1 * vx1 + k2 * \sqrt{\text{sqr}(vx1) + \text{sqr}(vy1)}) * vx1 / m ;$$

$$ay1 := -g - (k1 * vy1 + k2 * \sqrt{\text{sqr}(vx1) + \text{sqr}(vy1)}) * vy1 / m ;$$
- При переопределении начальных данных добавить строки

$$ax0 := ax1 ; ay0 := ay1 .$$

3.4 Компьютерные эксперименты с моделью полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде без сопротивления

С программами Polet и Polet_R можно проводить компьютерные эксперименты, например, меняя входные данные модели, при этом все характеристики полета – выходные данные, также изменят свои значения. Но эксперимент можно проводить и программным путем, рассмотрим примеры программы, проводящих эксперимент с входной величиной.

Эксперимент №1

Постановка задачи: определить, под каким углом α к горизонту нужно бросить тело с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/сек в среде без сопротивления, чтобы дальность полета была наибольшей. Построить в декартовой системе координат разноцветные траектории полета тела для перебираемых в программе значений угла α . В правом верхнем углу экрана для каждого значения угла тем же цветом, что и график, вывести его значение и соответствующую ему дальность полета. Под графиками вывести результаты эксперимента в словесном виде и дальность полета, рассчитанную для этого угла теоретическим способом, то есть по формуле (9), выведенной выше в пункте 6.3.

Такой эксперимент проводится с помощью программы:

```
program Eks1_Pol;
uses Crt, Graph;
var Dg, Dm, i, x, y, x0m, y0m, xm, ym, alf, alfa, bx, by : integer;
    g, t0, t1, dt, alf1, x0, y0, x1, y1, v0, vx0, vy0, vx1, vy1,
    ax0, ay0, ax, ay, max, kx, ky, S: real; as, xs, ms : string;
BEGIN
    gD:=Detect; Initgraph(gG, gM, ' ');
    setbkcolor(15); setcolor(1);
```

```

x0m:=20; y0m:=420;
bx:=40; ax:=1; kx:=bx/ax; by:=45; ay:=0.6; ky:=by/ay;
line (x0m, y0m, 620, y0m); line (615, y0m-5, 620, y0m);
line (615, y0m+5, 620, y0m); outtextxy(625, y0m, 'X');
line (x0m, 20, x0m, 440); line (x0m-5, 25, x0m, 20);
line (x0m+5, 25, x0m, 20); outtextxy(x0m, 10, 'Y');
outtextxy(x0m-10, y0m+5, 'O');
for i :=0 to 14 do line (x0m + i*bx, y0m - 5, x0m + i*bx, y0m + 5);
for i :=0 to 10 do line (x0m - 5, y0m - i*by, x0m + 5 y0m - i*by);
str (ax:1:0, as); outtextxy (x0m+bx, y0m+10,as);
str(ay:2:1, as); outtextxy (x0m-20, y0m-by-10, as);
g :=9.8; v0 :=10; alf :=5; dt :=0.01; i :=0; max :=0;
repeat {внешний цикл для определения искомого угла}
    alf := alf +10;    alf1:= alf*pi/180;
    t0 :=0; x0 :=0; y0 :=0;
    vx0 :=v0*cos(alf1); vy0 :=v0*sin(alf1);
    ax0 :=0; ay0 := -g; i:=i+1; setcolor (i);
    repeat {цикл, моделирующий полет}
        t1 :=t0 + dt;
        x1 := x0 + vx0*dt + ax0*sqr(dt)/2;
        y1 := y0 + vy0*dt + ay0* sqr(dt)/2;
        vx1 := vx0 + ax0*dt;
        vy1:=vy0 + ay0*dt;
        xm :=round (x0m + kx*x1);
        ym :=round (y0m - ky*y1);
        circle(xm,ym,1);
        x0 :=x1; y0 :=y1; vx0 :=vx1; vy0 :=vy1;
    until y1<=0;
    str (x1:3:2, xs); str (alf:2, as);
    outtextxy (450, 100 + i*10, 'alf= '+as+' S='+xs);
    if x1>max then begin max :=x1; alfa :=alf; end;
until alf >= 85;
str (max:3:2, ms); str (alfa:2, as);
setcolor (1); outtextxy(50,450,' Наибольшая дальность полета S='+ms+
    ' достигается при угле '+as+' градусов');
S := sqr(v0)*sin (2*alfa*pi/180)/g;
str(S:3:2, ms); outtextxy (50,470, 'Теоретическая дальность полета =' +ms);
readkey; closegraph;
END.

```

Проанализируем программу. Для проведения эксперимента в ней организован внешний цикл, в котором меняется значение искомого угла α от 15 до 85 градусов. Для каждого значения угла α во внутреннем цикле моделируется полет тела и определяется

его дальность. Результат выводится в графическом и словесно - числовом виде. Во внешнем цикле, кроме того, определяется максимальная дальность полета для подбираемых значений угла, найденное значение угла фиксируется в переменной α . Затем по формуле, полученной при теоретическом исследовании матмодели полета, вычисляется дальность полета, соответствующая найденному в эксперименте значению угла. Результаты эксперимента представлены на Рис.54.

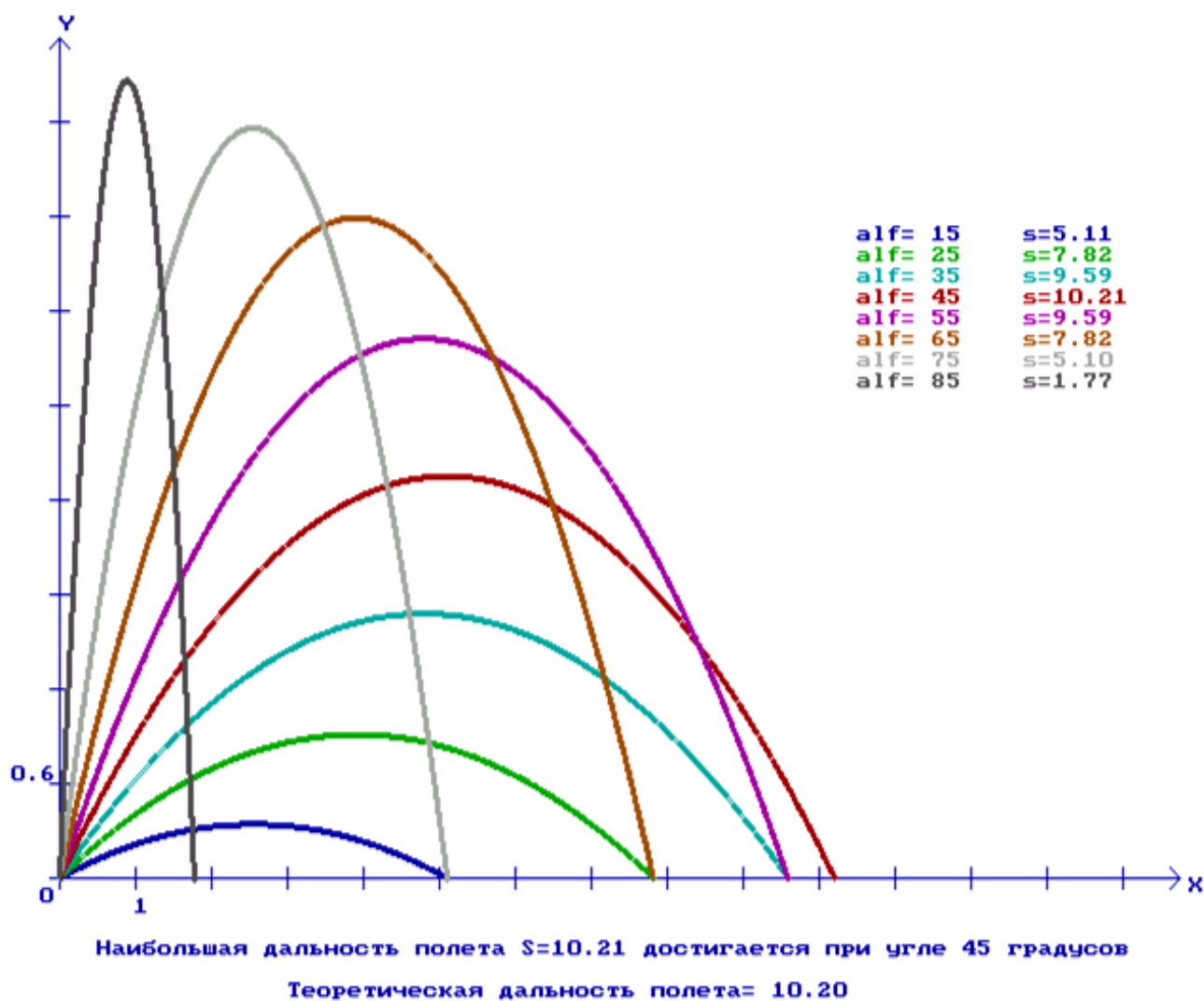


Рис. 54 - Графическая модель эксперимента №1

Эксперимент № 2

Постановка задачи: под каким углом α к горизонту нужно бросить тело в среде без сопротивления на Уране ($g = 7.4 \text{ м/с}^2$), Венере ($g = 8.8 \text{ м/с}^2$) и Сатурне ($g = 10.5 \text{ м/с}^2$) с начальной скоростью $V_0 = 15 \text{ м/с}$, чтобы дальность полета S равнялась $(20 \pm 1) \text{ м}$. Построить в декартовой системе координат разноцветные траектории полета тела на указанных планетах для найденных для них углов. Тем же цветом, что и график, вывести в правом верхнем углу экрана название планеты, найденный угол и дальность. Под графиками вывести значение дальности полета, рассчитанное для найденных углов на каждой планете по теоретической формуле.

```

program Eks2_Pol;
  uses Crt, Graph;
  const ysk :array[1..3] of real = (7.4, 8.8, 10.5);
      pl:array [1..3] of string = ('Уран', 'Венера', 'Сатурн');
  var gD, gM, i, j, x, y, x0m, y0m, xm, ym, bx, by, alf: integer;
      t0, t1, dt, x0, y0, v0, vx0, vy0, ax0, ay0, x1, y1, vx1, vy1, ax1,
      ay1, alf1, g, ax, ay, kx, ky, S: real;
      ygol :array [1..3] of integer; as, xs, ms, gs: string;
BEGIN
  for j:=1 to 3 do
    begin
      g:=ysk[j]; v0:=15; dt:=0.01; alf :=0;
      repeat {внешний цикл для определения искомого угла}
        alf:=alf +0.1; alf1:=alf*pi/180;
        t0:=0; x0:=0; y0:=0;
        vx0:=v0*cos(alf1); vy0:=v0*sin(alf1);
        ax0:=0; ay0:=-g;
        repeat {цикл, моделирующий полет для угла alf }
          t1:=t0+dt;
          x1:=x0+vx0*dt+ax0*sqr(dt)/2;
          y1:=y0+vy0*dt+ay0* sqr(dt)/2;
          vx1:=vx0+ax0*dt; vy1:=vy0 + ay0*dt;
          x0:=x1; y0:=y1;vx0:=vx1; vy0:=vy1;
        until y1<=0;
      until abs(x1 - 10) <=0.5;
      ygol[j]:=alf;
    end;
    gD:=Detect; Initgraph(gD, gM, ' ');
    setbkcolor(15); setcolor(1);
    x0m:=20; y0m:=420;
    bx:=40; ax:=5; kx:=bx/ax; by:=45; ay:=1; ky:=by/ay;
    line(x0m, y0m, 620, y0m); line(615, ymk -5, 620, y0m);
    line(615, y0m +5, 620, y0m);
    outtextxy(625, y0m, 'X');
    line(x0m, 20, x0m, y0m); line(x0m -5, 25, x0m, 20);
    line(x0m + 5, 25, x0m, 20);
    outtextxy(x0m ,10, 'Y');
    outtextxy(x0m -10, y0m+5, 'O');
    for i:=0 to 14 do line(x0m +i*bx, 415, x0m+ i*bx, 425);
    for i:=0 to 13 do line(15, y0m - i*by, 25, y0m - i*by);
    str(ax:1:1,as); outtextxy(x0m + bx, y0m +10, as);

```

```

str(ay:2:2,as); outtextxy(x0m -20, y0m -by-10, as);
for j:=1 to 3 do
  begin
    setcolor(j+1);
    alf :=ygol[j]; alf1:=alf*pi/180; g:=ysk[j];
    t0:=0; x0:=0; y0:=0;
    vx0:=v0*cos(alf1); vy0:=v0*sin(alf1);
    ax0:=0; ay0:=-g;
    repeat {цикл, моделирующий полет}
      t1:=t0+dt;
      x1:=x0+vx0*dt+ax0*sqr(dt)/2;
      y1:=y0+vy0*dt+ay0*sqr(dt)/2;
      vx1:=vx0+ax0*dt;
      vy1:=vy0 + ay0*dt;
      xm:= round(x0m + kx*x1);
      ym:= round(y0m - ky*y1);
      circle(xm,ym,1);
      x0:=x1; y0:=y1;vx0:=vx1; vy0:=vy1;
    until y1<=0;
    str(alf :2:1, ms); str(x1 :3:3, xs); str(g:2:2, as);
    outtextxy(350, 20+j*10, 'alf= '+ms+ ' S= '+xs , ' g=' +as+ ' на ' + pl[j]);
    S:=sqr(v0)*sin(2*alf1)/g; str(S:3:3,ms);
    outtextxy(50, 430+j*10, 'Теоретическая дальность =' +ms+ ' на " + pl[j];
  end;
readkey;
closegraph;
END.

```

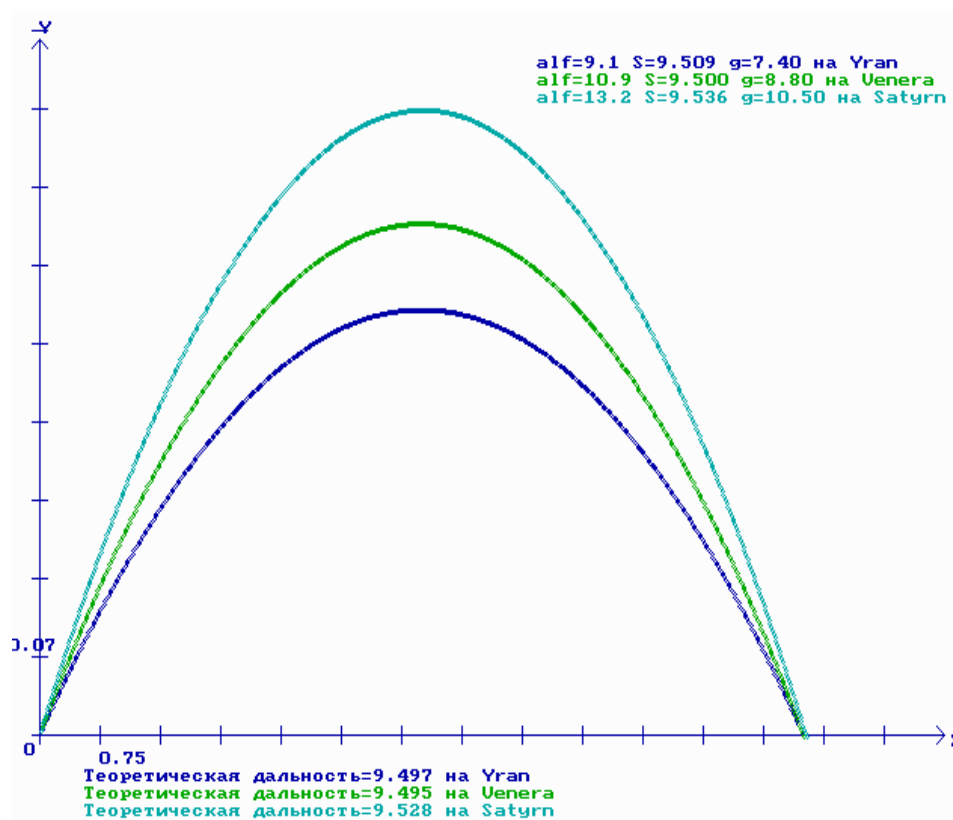


Рис. 55 - Графическая модель эксперимента №2

В этой программе уже три цикла, внешний цикл **for - to- do** выполняется три раза – по числу планет. В нем задается ускорение g и начальная скорость для каждой планеты. Следующий цикл **repeat – until** позволяет установить для каждой планеты искомый угол. Результаты опять выводятся в графическом и словесно- числовом виде. Графическая модель этого эксперимента приведена на Рис.55

3.5 Компьютерные эксперименты с моделью полета тела, брошенного под углом к горизонту, в среде с сопротивлением

Эксперимент №1

Постановка задачи: определить, под каким углом α к горизонту нужно бросить тело – бронзовый шарик радиусом $r = 0.1$ м с начальной скоростью $V_0 = 10$ м/сек в воздухе, коэффициент вязкости которого $\mu = 0.0182$ Н·сек/м², чтобы дальность полета была наибольшей. Известно, что коэффициент лобового сечения для шарика $c = 0.4$, плотность шарика $\rho_{ш} = 8500$ кг/м³, плотность воздуха $\rho_{в} = 1.29$ кг/м³. Построить в декартовой системе координат разноцветные траектории полета тела для перебираемых в программе значений угла α . В правом верхнем углу экрана для каждого значения угла тем же цветом, что и график, вывести его значение и соответствующую ему дальность полета. Под графиками вывести результаты эксперимента в словесном виде.

Чтобы составить программу Exs1_RPol, выполняющую такой эксперимент, нужно в программе Exs1_Pol заменить математическую модель полета без сопротивления на математическую модель полета с сопротивлением, предварительно вычислив массу

шарика m и коэффициенты сопротивления k_1 и k_2 , используя указания к составлению программы Polet_R, приведенные в пункте 3.3.

Эксперимент № 2

Постановка задачи: определить, под каким углом к горизонту нужно бросить тело - бронзовый шарик радиусом $r = 0.1\text{ м}$ в воздушной среде, на Уране ($g = 7.4\text{ м/с}^2$), Венере ($g = 8.8\text{ м/с}^2$), Сатурне ($g = 10.5\text{ м/с}^2$) с начальной скоростью $V_0 = 15\text{ м/с}$, чтобы дальность полета S равнялась $(10 \pm 0.5)\text{ м/с}$. Построить в декартовой системе координат разноцветные траектории полета тела на указанных планетах. Тем же цветом, что и траектория, вывести в правом верхнем углу экрана название планеты, найденный для нее угол и дальность.

Чтобы составить программу Exs2_RPol, выполняющую такой эксперимент, нужно в программе Exs2_Pol заменить математическую модель полета без сопротивления на математическую модель полета с сопротивлением, предварительно вычислив массу шарика m и коэффициенты сопротивления k_1 и k_2 , используя указания к составлению программы Polet_R, приведенные в пункте 3.3.

Замечания. Этот эксперимент не имеет под собой реальной физической основы, так как предполагает наличие на планетах воздушной среды, подобной земной.

Контрольные вопросы к пятой главе

1. Какая модель называется компьютерной?
2. Какой алгоритм положен в основу компьютерной модели падения тела в среде с сопротивлением?
3. Как формулируется задача о падения тела в среде с сопротивлением?
4. Какие данные компьютерной модели падения тела в среде с сопротивлением являются входными статическими? Входными динамическими? Выходными?
5. Сколько моделей и каких типов строить программа Pad_telR? Какая из них является более наглядной?
6. Что называется компьютерным экспериментом? С какими данными модели всегда проводится компьютерный эксперимент? Какие данные являются критериями?
7. Как ставится задача для проведение компьютерного эксперимента Eks_Pad? В каком режиме проводится эксперимент?
8. С какой величиной проводится этот эксперимент? На какой попытке (по счету) программа находит искомое решение?
9. Что называется пружинным маятником? Гармоническими колебаниями?
10. Какой алгоритм положен в основу компьютерной модели гармонических колебаний маятника GarmCol?
11. В каком виде программа моделируют процесс колебаний?
12. В каком виде программа GraphCol моделируют процесс гармонических колебаний маятника?
13. Какие колебания маятника называются затухающими?

14. Какая математическая модель положена в основу компьютерной модели затухающих колебаний?
15. Как ставится задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
16. Какой алгоритм положен в основу компьютерной модели полета тела, брошенного под углом к горизонту в среде без сопротивления?
17. В каком виде моделируется полет тела?
18. Как ставится задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту в среде с сопротивлением? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
19. В каком виде программа выводит результаты моделирования?
20. Как ставится задача для проведение компьютерного эксперимента №1 (без сопротивления и с сопротивлением)?
21. В каком виде выводятся результаты эксперимента №1 (без сопротивления и с сопротивлением)?
22. Как ставится задача для проведение компьютерного эксперимента №2 (без сопротивления и с сопротивлением)?
23. В каком виде выводятся результаты эксперимента №2 (без сопротивления и с сопротивлением)?

Глава 6. Компьютерное моделирование экологических процессов

§ 1. Самые страшные эпидемии в истории человечества

Эпидемия в переводе с греческого означает «повальная болезнь среди народа». Так с давних времён называют заболевания, которые прогрессировали во времени и в пространстве и превышали обычный уровень заболеваемости на данной территории. Эпидемии «истребляли» человечество много веков. Они уничтожали целые нации, забирали такое количество жизней, которое не забирала даже война, более того, чаще всего эпидемии играли решающую роль в ходе истории. Рассмотрим самые страшные эпидемии в истории человечества.

1) **480 г. до н.э. Эпидемия оспы** поразила Средиземноморье. Больше всех пострадала Персия, где болезнь выкосила всю армию, включая и правящего там царя Ксеркса.

2) **431 г. до н.э. Эпидемия «Чума Фукидида»**, эта неизвестная болезнь, погубила в течение года практически треть населения Древней Греции. Названа в честь историка Фукидида, оставившего потомкам описание этой загадочной болезни, убивавшей человека после недели мучительной агонии.

3) **551г. Эпидемия «Юстинианова чума»**, эта эпидемия бушевала в Восточной Римской империи почти три десятка лет, и за это время от болезни погибло более 20 млн. человек — почти половина всего населения империи.

4) **736г. Первая эпидемия оспы в Японии**, которая едва не уничтожила всех предков японцев. Как считают ученые, именно под влиянием мора в Японии получил распространение буддизм.

5) **1090г. «Киевский мор»** — это эпидемия чумы, привезенная купцами с Востока, убила за две недели свыше 10 тысяч человек — столица Киевской Руси тогда опустела.

6) **1348г. - «Черная смерть»**, это эпидемия бубонной чумы, занесенная в Европу Китая. Только в течение года от нее погибло почти 15 млн. человек, что составляло четверть всего населения Европы.

7) **1486г. «Английская потливая горячка»**. Эпидемия вспыхнула в Лондоне и всего за несколько дней охватила всю страну, вызвав огромные опустошения в городах — неизвестная зараза справлялась с человеком в течение одного дня. Всего за XV — XVI века по Европе прошло пять эпидемий этой болезни, а затем «потливая горячка» внезапно исчезла.

8) **1494г. Первая эпидемия сифилиса**, завезена в Европу из только что открытой Америки. Сифилис порастил всю Европу, дошел до Руси и уничтожил миллионы людей в Индии.

9) **1518г. Эпидемия «Пляски Святого Витта»**. Больные были охвачены многодневным припадком безумия, заставлявшим их без устали танцевать. Умерли десятки тысяч людей.

10) **1521г. Эпидемия оспы в Америке**. Последствия этой болезни опустошительны — вымерли целые племена. В Центральной Мексике, по разным оценкам, умерло от 40 до 60 процентов населения за один год.

11) **1664г. «Лондонская чума»** — это эпидемия бубонной чумы, унесла жизнь каждого пятого англичанина.

12) **1771г. Эпидемия «Чумный бунт в Москве».** Это самая сильная эпидемия чумы в России, вызвавшая панику и восстания среди населения. Всего за месяц эпидемии в Москве и ее окрестностях погибло около 200 тысяч человек.

13) **1817г. Начало первой пандемии холеры.** Сперва началась эпидемия в Индии, вызвав неисчислимые жертвы среди населения и британских колониальных войск. В следующем году холера проникла в Китай, а через год — в Иран, Турцию, Аравию, Закавказье. Во многих городах погибла половина населения.

14) **1918г. Эпидемия «Испанки»**, вируса гриппа, убившего в течение двух лет свыше 50 млн. человек. Сегодня медики говорят, что «испанка» была тем же птичьим гриппом, которому удалось мутировать в человеческую форму.

15) **1974 г. Эпидемия оспы в Индии.** В период с января по май того же года от оспы умерло более 15 000 человек. Многие остались калеками на всю жизнь. Были предприняты попытки сдержать болезнь и предотвратить её дальнейшее распространение. Последний случай оспы в стране был зарегистрирован 24 мая 1975 года. Пять лет спустя болезнь была полностью искоренена.

16) **В феврале 2014 года** мир всколыхнула новая угроза пандемии – **вирус Эбола**. Первые случаи заболевания были зафиксированы в Гвинее, после чего лихорадка быстро распространилась на соседние государства – Либерию, Нигерию, Сьерра-Леоне и Сенегал. Эта вспышка названа сильнейшей в истории вируса Эбола. Уровень смертности от этой лихорадки, по данным ВОЗ, достигает 90%, и врачи не имеют действенного лекарства против вируса. В Западной Африке погибли от этой болезни более 2700 человек, при этом эпидемия продолжает распространяться по миру, охватывая, государства ранее не тронутые этим вирусом.

§ 2. История появления моделей эпидемии

Медиков всегда интересовало, как можно бороться с эпидемиями, погубившими миллионы людей. Когда этим заинтересовались математики, появились первые математические модели, которые служили целям прогноза и относились к области медицины. Начало применению математических методов при изучении эпидемий было положено Даниилом Бернулли в середине XVII века. Он впервые применил простейший математический аппарат для оценки эффективности профилактических прививок против натуральной оспы. Затем уже в середине XIX века английский ученый Уильям Фара изучал и моделировал статистические показатели смертности населения Англии от эпидемии натуральной оспы. Этот ученый впервые получил математические модели показателей «движения» эпидемии натуральной оспы в 1837 – 1939 годах в виде статистических закономерностей, что позволило ему в итоге составить прогностическую модель этой эпидемии.

В начале XX века сначала в России, а затем в Англии были сформулированы основы современной теории математического моделирования эпидемий, разработаны

первые прогностические модели эпидемий (корь, ветрянка, малярия и др.), изучены их основные свойства, получены аналитические формулы для прогнозирования эпидемий.

С появлением в середине 50-х годов XX века первых электронно-вычислительных машин оформился следующий этап в развитии моделей эпидемий, число научных работ и публикаций по математическому и компьютерному моделированию эпидемий стало быстро увеличиваться. В работах того времени стали появляться все более сложные математические модели, в которых существенную роль играли *случайные факторы эпидемического процесса*, поэтому большинство моделей этого периода имели стохастический (вероятностный) характер, а рабочим аппаратом была теория вероятностей и случайных процессов.

§ 3. Простейшая модель процесса развития эпидемии

В третьей и четвертой главах данного пособия были рассмотрены математические и компьютерные модели трех физических процессов. В этом параграфе рассмотрим простейшую модель процесса развития эпидемии, этот процесс уже относится к области экологии и медицины. За многие годы существования человечества огромное число людей погибло от различных эпидемий, и медиков всегда интересовало, как развивается эпидемия, какие факторы влияют на ее развитие, как с ней бороться. Поэтому модель развития процесса эпидемии, или проще, модель эпидемии нужна, чтобы служить целям прогноза. В такой модели можно учесть влияние самых различных факторов:

- вероятность встречи инфицированных и здоровых людей;
- степень восприимчивости к инфекции различных людей;
- законы, управляющие деятельностью клеток и т.д.

Но это будет очень сложная модель, ее построение и изучение потребует много времени и средств. Для учебных целей построим простую модель естественного развития эпидемии, предполагая, что никакие противоэпидемические мероприятия не проводятся.

Постановка задачи: имеется группа из N здоровых людей. В момент $t = 0$ в нее попадает один заболевший, т.е. источник инфекции, и в группе начинается эпидемия. Будем считать, что человек становится источником инфекции сразу после заражения, что удаление людей из группы не происходит, т.е. в ней нет умерших, выздоровевших и изолированных, и процесс развития эпидемии заканчивается, когда все люди в группе заболеют. Определить, через какое время эпидемия закончится, и в какой момент ее скорость достигнет максимума.

3.1 Математическая модель эпидемии

Для ответа на вопрос задачи построим математическую модель развития эпидемии, для этого «переведем» на язык математики, условия задачи. Обозначим через

$x(t)$ – число заболевших людей в момент времени t ;

$y(t)$ – число здоровых людей в момент времени t .

Из условий задачи следует, что

$$x(t) + y(t) = N + 1 \quad (1)$$

$$x(0) = 1, \quad (2)$$

а через какое-то время T заболеют все люди в группе. Разобьем отрезок времени $[0, T]$ на n частей и обозначим

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

Выясним, какой прирост больных Δx появятся за время Δt . Очевидно, что

1) $\Delta x \sim \Delta t$, то есть, Δx пропорционально Δt ,

2) $\Delta x \sim x(t) \cdot y(t)$, то есть, Δx пропорционально числу встреч здоровых ($y(t)$) и больных ($x(t)$) людей.

На языке математики это запишется так:

$$\Delta x(t) = \alpha \cdot x(t) \cdot y(t) \Delta t \quad (3),$$

где α – это коэффициент пропорциональности, для каждой эпидемии он свой и определяется опытным путем.

Выразим из формулы (1) число здоровых людей $y(t)$

$$y(t) = N + 1 - x(t),$$

подставим полученное выражение в формулу (3), и проведем ряд преобразований

$$\Delta x = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \cdot \Delta t \rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \rightarrow$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)]) = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)].$$

Из последнего выражения имеем

$$x(t)' = \alpha \cdot x(t) \cdot [N + 1 - x(t)] \quad (4)$$

Уравнение (4) – это **простейшая математическая модель развития эпидемии**, она связывает исходные данные эпидемии, т.е. число людей в опытной группе - N , коэффициент пропорциональности - α с выходными данными, то есть числом заболевших в момент времени t - $x(t)$ и скоростью развития эпидемии в этот момент - $x'(t)$. Эта модель по принципам построения является **детерминированной**, по целям моделирования является **дескриптивной**, так как лишь описывает развитие эпидемии.

3.2 Теоретическое исследование математической модели эпидемии

С точки зрения математики построенная модель (4) — это дифференциальное уравнение 1-го порядка, исследуем модель, т.е. решим это уравнение. Для этого введем новую переменную:

$$u(t) = \frac{1}{x(t)} \rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{x^2(t)} \cdot \frac{dx}{dt} = u^2(t) \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{u^2(t)} \frac{du}{dt}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4), получим

$$-\frac{1}{u^2(t)} \frac{du}{dt} = \frac{\alpha}{u(t)} \left(N + 1 - \frac{1}{u(t)} \right) \rightarrow \frac{du}{dt} = -\alpha(N + 1) \cdot u(t) + \alpha$$

Последнее уравнение – это неоднородное дифференциальное уравнение, его общее решение известно, оно имеет вид

$$u(t) = Ce^{-\alpha(N+1)t} + \frac{1}{1+N} \quad (5)$$

где C – некоторая константа. Вернемся к искомой функции $x(t)$.

$$x(t) = \frac{N+1}{C \cdot (N+1) \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1} \quad (6)$$

Формула (6) – это общее решение модели (4), чтобы найти частное решение, определим константу C , используя начальное условие $x(0) = 1$:

$$x(0) = \frac{N+1}{C \cdot (N+1) + 1} = 1 \rightarrow N+1 = C \cdot (N+1) + 1 \rightarrow C = \frac{N}{N+1}$$

$$x(t) = \frac{N+1}{N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1} \quad (7)$$

Функция $x(t)$, определенная формулой (7), есть точное решение математической модели (4). Из нее следует, что зависимость количества заболевших людей $x(t)$ от значения времени t является экспоненциальной. Продолжим исследование модели.

1) Из формулы (7) следует, что при увеличении значения t знаменатель дроби убывает, а значит, число заболевших $x(t)$ возрастает. Выясним, как долго продолжается этот рост. Продифференцировав формулу (7), получим выражение для скорости распространения эпидемии:

$$x'(t) = v(t) = \frac{\alpha(N+1)^2 N \cdot e^{-\alpha(N+1)t}}{(N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1)^2} \quad (8)$$

2) Чтобы узнать, как меняется сама скорость эпидемии $v(t)$, продифференцируем уже формулу (8):

$$v'(t) = \frac{\alpha^2 (N+1)^3 N [N \cdot e^{-2\alpha(N+1)t} - e^{-\alpha(N+1)t}]}{(N \cdot e^{-\alpha(N+1)t} + 1)^3} \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что производная скорости $V'(t) = 0$, если

$$N e^{-2\alpha(N+1)t} - e^{-\alpha(N+1)t} = 0 \rightarrow N = e^{\alpha(N+1)t}$$

3) Прологарифмируем последнее выражение:

$$\ln(N) = \alpha(N+1)t \rightarrow t = \frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)} \quad (10)$$

Таким образом, при значении времени t , определенном формулой (10), производная скорости $v'(t) = 0$.

Пусть $t \in \left[0, \frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)}\right)$, тогда из формулы (9) следует, что $v'(t) > 0$, то есть,

функция $v(t)$ на этом промежутке возрастает.

Пусть $t \in \left[\frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)}, \infty \right)$, тогда из формулы (9) следует, что $v'(t) < 0$, то есть, функция $v(t)$ на этом промежутке убывает.

Вывод: скорость эпидемии $v(t)$ сначала возрастает, достигает своего максимума при значении t , определенном формулой $t = \frac{\ln(N)}{\alpha(N+1)}$, затем начинает убывать. Этот вывод, полученный теоретическим исследованием математической модели эпидемии, подтверждается жизненным опытом человечества. Все эпидемии сначала бурно развиваются, а потом затихают.

4) Продолжим исследование. Подставим выражение t , определенное формулой (10), в формулу (7), тогда получим:

$$x(t) = \frac{N+1}{2}$$

Отсюда следует вывод, что в тот момент времени t , когда скорость эпидемии достигает максимума, заболеют приблизительно половина людей из опытной группы. Значит за время

$$T = \frac{2\ln(N)}{\alpha(N+1)} \quad (11)$$

заболеет все люди в группе. Промежуток времени T , определенный формулой (11), называется «заразным периодом эпидемии». По его окончанию все люди в группе заболеют, и эпидемия перестанет распространяться.

Итак, построив матмодель развития эпидемии и исследовав ее теоретически, мы получили ответ на вопрос задачи.

3.3 Использование метода Эйлера – Коши для решения математической модели эпидемии

Для построенной матмодели развития эпидемии найдено точное решение. Но, как правило, для большинства моделей, представленных дифференциальными уравнениями, не удастся найти точное решение, поэтому для их решения используют приближенные методы решения. К ним, в частности, относится метод Эйлера-Коши, который позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в численном виде. Рассмотрим, как можно использовать этот метод применительно к матмодели (4).

Рассмотрим прежде идею метода. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (12)$$

где y' - производная функции $y(x)$, $f(x, y)$ - некоторая функция. Требуется найти его решение, то есть функцию $y(x)$, удовлетворяющую начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \quad (13)$$

Для нахождения решения строится система равноудаленных друг от друга точек $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots$ где $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), а h - достаточно малый шаг. В этих

точках *поочередно* вычисляется значение искомой функции по формулам, предложенным Эйлером и Коши:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^* &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k); \\ y_{k+1} &= y_k + h (f(x_k, y_k) + f(x_k, y_{k+1}^*)) / 2; \end{aligned} \quad (14)$$

Для использования этого метода математическую модель эпидемии (4) представим в виде

$$x'(t) = f(x), \text{ где } f(x) = \alpha x(t) [N+1 - x(t)], \quad (15)$$

здесь искомая функция - $x(t)$, она является решением модели эпидемии. Для уравнения (15) формулы Эйлера-Коши приобретают более простой по сравнению с формулой (14) вид

$$\begin{aligned} x_{k+1}^* &= x_k + h \cdot f(x_k); \\ x_{k+1} &= x_k + h (f(x_k) + f(x_{k+1}^*)) / 2; \\ t_{k+1} &= t_k + h; \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

3.4 Компьютерная модель развития эпидемии

В компьютерной модели развития эпидемии решение задачи находится методом Эйлера – Коши, то есть, в ее основе лежит алгоритм, определенной формулами (16).

```

program Epidemia;
  uses Crt, Graph;
  var gD, gM, i, j, k, bg, bv, g0k, v0k, tk, xk, vk: integer;
      a, t0, t1, tt, x0, xp, x1, dt, b, x2, ag, av, kg, kv, v: real;
      ags, avs, ts: string; N: longint; t, x, z: array [1..2000] of real;
function f (x: real): real;
  begin f:=a*x*(N+1-x); end;
BEGIN
  clrscr;
  write ('Ведите число людей в группе N '); readln (N);
  write ('Введите коэффициент пропорциональности a '); readln (a);
  write ('Введите шаг времени dt '); readln (dt);
  write ('Введите время начала эпидемии t0 '); readln (t0);
  write ('Введите число источников инфекции x0 '); readln (x0);
  i:=0; v:=0;
  repeat
    i:=i+ 1; t[i]:=t0; x[i]:=x0; z[i]:=v;
    xp:=x0+dt*f(x0); x1:=x0+dt*(f(x0)+f(xp))/2; v:=f(x0);
    t0:=t0+dt; x0:=x1;
  until round (x0 +1) >= N +1;
  clrscr;

```

```

writeln(' Шаг i   Время t   Число заболевших x   Скорость v');
if i < 25 then k:=1 else if i<40 then k:=2 else k:= round(i/20);
for j:=1 to i do if (j mod k = 0) then
    writeln('      ',j:3,'      ',t[j]:5:2,'      ',x[j]:5:0,'      ',z[j]:5:0);
writeln('      ',i:3,'      ',t[i]:5:2,'      ',x[i]:5:0,'      ',z[i]:5:0);
readln;
gD:=Detect; Initgraph(gD, gM, '      ');
g0k:=20; v0k:=420;
setbkcolor(15); setcolor(1);
bg:=30; bv:=100; ag:=1.5; av:=260; kg:=bg/ag; kv:=bv/av;
line(10,v0k,620,v0k); line(615,v0k-5,620,v0k);
line(615,v0k+5,620,v0k); outtextxy(625,v0k-10,'t');
line(g0k,10,g0k,450); line(g0m-5,15,g0k,10);
line(g0k+5,15,g0k,10); outtextxy(5,5,'X/V');
outtextxy(5,v0k+10,'O');
for j:=1 to 25 do line(g0k+j*bg, v0k+5, g0k+j*bg, v0k-5);
for j:=1 to 4 do line(g0k-5, v0k-j*bv, g0k+5, v0k-j*bv);
str(ag:2:1,ags); outtextxy(g0k-10+bg,v0k+10,ags);
str(av:3:0,avs); outtextxy(g0k+10,v0k-bv,avs);
for j:=1 to i do
    begin
        tk:=round(g0k + kg*t[j]);
        xk:=round(v0k - kv*x[j]);
        vk:=round(v0k - kv*z[j]);
        setcolor(2); circle(tk,xk,1);
        setcolor(5); circle(tk,vk,1);
    end;
str(N:6,ags); str (a:6:3,avs); str(t0:6:2,ts);
setcolor(1);
outtextxy(50,450, 'N =' + ags + ' a =' + avs + ' Заразный период T =' + ts);
tt:= 2*ln(N)/(a*(N + 1)); str(tt:6,ts);
outtextxy(50, 460, 'Теоретический заразный период T =' + ts);
readkey; closegraph;

```

END.

Результаты работы программы выводятся:

1) Сначала в виде таблицы, в который выведены:

- а) дискретные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$;
- б) число заболевших в эти моменты времени $x(t_1), \dots x(t_n)$;
- в) скорость эпидемии в эти моменты времени $v(t_1), \dots v(t_n)$.

2) Затем в виде графиков зависимости $x(t)$ и $v(t)$ от t , построенных по данным, взятым из соответствующих массивов.

Таблица и графики являются соответственно табличными и графическими моделями развития эпидемии.

Если в программу ввести данные $N=1000$, $a=0.001$, $dt=0.001$, $t_0=0$, $x_0=1$, то итогом работы программы будет таблица, приведенная ниже на Рис. 56, и графики, изображенные на Рис.57.

Шаг i	Время t	Число заболевших x	Скорость эпидемии v
100	0.99	3	2
200	1.99	7	7
300	2.99	20	19
400	3.99	52	48
500	4.99	130	112
600	5.99	289	204
700	6.99	525	250
800	7.99	751	188
900	8.99	892	98
1000	9.99	958	41
1100	10.99	985	16
1200	11.99	995	6
1300	12.99	999	2
1400	13.99	1000	0

Рис.56 - Модель – таблица развития эпидемии

Из таблицы-модели следует, что цикл, моделирующий процесс эпидемии, выполнится 1400 раз, на экран выводится данные, полученные на каждом шаге, кратном 100. «Заразный» период эпидемии составляет 13.99 ед. времени, это могут быть часы, дни, недели, месяцы, за это время заболеют все люди в группе. Максимальное значение скорости = 250 чел./ед.вр. приходится на середину заразного периода.

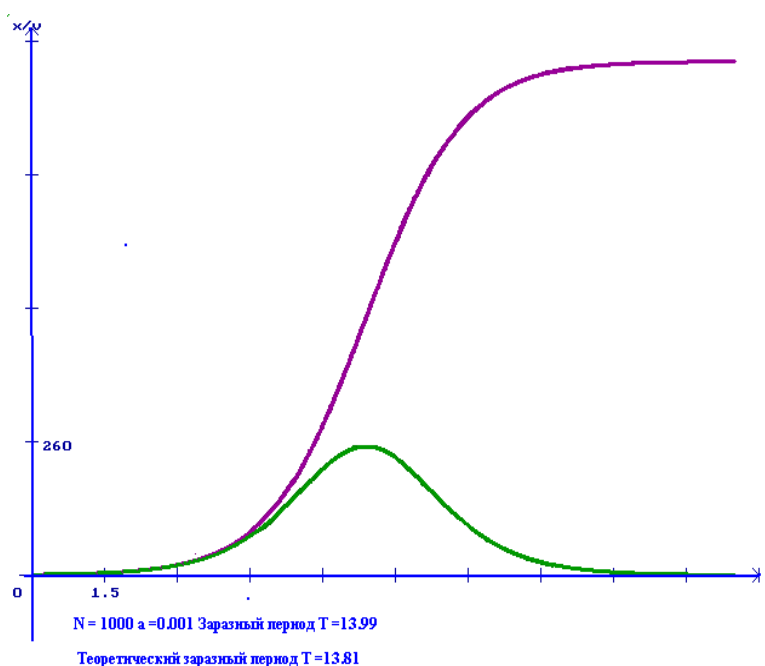


Рис. 57 - Модель – график развития эпидемии

Как следует из модели – графика число заболевших сначала резко возрастает и примерно через 10 единиц времени практически уже не меняется.

§ 4. Модели развития популяции

Популяция — это совокупность особей одного вида, находящихся во взаимодействии между собой и совместно заселяющих общую территорию.

Основные характеристики популяции: численность или биомасса, плотность, рождаемость, смертность, темп роста и др.



Рис. 58 - Популяция мелких особей



Рис. 59 - Популяция крупных особей

Биомасса — это суммарный вес всех особей популяции, **численность** — это количество всех особей популяции.

Если популяция состоит из мелких особей (саранча, тараканы, пчелы- Рис. 58), то характеризуется биомассой, если из крупных особей (люди, тигры, слоны – Рис. 59) , то популяция характеризуется численностью.

Рождаемость характеризует скорость появления новых особей в популяции.

Смертность характеризует скорость убывания численности популяции, вследствие гибели особей от хищников, болезней, старости, плохой экологии и т.д.

В современной экологии часто возникает задача определения численности или биомассы той или иной популяции животных в какой – то промежуток времени. Эта задача не только теоретического плана, она имеет и практическое значение, от ответа на вопрос задачи зависит планирование рыбного улова, отлова пушных зверей, создание заповедников и т.д. Кроме того, важной задачей является прогноз численности животных, которым грозит уничтожение как биологического вида в силу природных условий или истребления человеком. Для решения таких и подобных задач строятся модели развития популяций.



Историю применения математики в экологии принято исчислять с выхода в свет в 1798 книги австралийского священника учёного, демографа и экономиста Томаса Мальтуса (1766 – 1834). В книге «Опыт о законе народонаселения» автор впервые чётко сформулировал мысль, что численность населения, которому предоставлена возможность неограниченно размножаться, растёт в геометрической прогрессии, тогда как увеличение экономических благ – в арифметической, и неконтролируемый рост народонаселения должен (Рис. 60) привести к голоду на Земле.

Рис. 60 - Томас Мальтус

4.1. Модель неограниченного роста численности популяции (модель Мальтуса)

Все живые организмы теоретически способны к очень быстрому увеличению численности. При неограниченных ресурсах и отсутствии гибели от болезней, хищников и т.п. популяция любого вида за сравнительно короткий срок может так вырасти, что покроет весь земной шар.

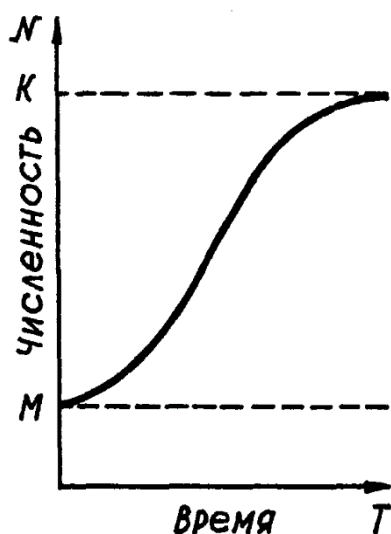
Максимальное число потомков, которое производит особь за всю жизнь, называется **биотическим потенциалом** вида.

Он зависит от:

- рождаемости;
- способности к расселению;
- способности захвата новых мест расселения;
- защитных механизмов особей;
- способности выдерживать неблагоприятные условия

У разных видов биотический потенциал разный: у крупных млекопитающих (слонов) численность может возрасть в год лишь в 1,05 - 1,1 раза, а у мелких насекомых

(рачков, дафний) численность в год может возрасти в 1010-1030 раз. А у бактерий и одноклеточных водорослей еще быстрее. Во всех этих случаях, при идеальных условиях численность будет расти в геометрической прогрессии, и график изменения численности будет представлять собой экспоненту. Рост численности в геометрической прогрессии называется **экспоненциальным ростом** (Рис.61).



В лабораторных условиях наблюдать экспоненциальный рост можно в популяциях дрожжей, водоросли хлореллы, бактерий на начальных стадиях роста. В природе такой рост наблюдается при вспышках саранчи, непарного шелкопряда и других насекомых. Экспоненциально может расти численность животных, заселенных в новую местность, где у них мало врагов и много пищи (классический пример - рост численности кроликов, завезенных в Австралию). Во всех этих случаях экспоненциальный рост наблюдается в течение коротких промежутков времени, после чего скорость роста численности снижается.

Рис. 61 - Экспонента роста

Постановка задачи. Пусть имеется популяция с неограниченными пищевыми и территориальными ресурсами и N_0 численность популяции в момент времени $t=0$, пусть $N(t)$ – численность популяции в момент времени t , α – коэффициент рождаемости, β – коэффициент смертности. Определить, как изменяется популяция во времени.

Для ответа на этот вопрос построим математическую модель развития популяции.

Прирост популяции ΔN за время Δt определяется как разница между числом родившихся и умерших особей:

$$\Delta N = \alpha N \Delta t - \beta N \Delta t = (\alpha - \beta) N \Delta t = a N \Delta t;$$

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (\alpha - \beta) N;$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\alpha - \beta) N;$$

$$\boxed{N'(t) = (\alpha - \beta) N} \quad (1)$$

Уравнение (1) – математическая модель Мальтуса неограниченного роста популяции, эта модель связывает исходные данные, то есть коэффициенты рождаемости и смертности α и β , с выходными данными – численностью популяции $N(t)$ в момент времени t и – скоростью изменения численности $N'(t)$ в этот момент времени. Эта модель по принципам построения является **детерминированной**, по целям моделирования является **дескриптивной**, так как лишь описывает рост популяции.

Коэффициенты α и β обычно определяются опытным путем для каждой популяции и статистически обрабатываются.

4.2. Теоретическое исследование модели Мальтуса

Математическая модель (1) – это дифференциальное уравнение 1-го порядка. Запишем его в виде

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dN}{N} = (\alpha - \beta)dt \rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int (\alpha - \beta)dt \rightarrow \ln|N| + (\alpha - \beta)t + \ln c \rightarrow$$

$$\ln |N| - \ln C = (\alpha - \beta)t; \rightarrow \ln \frac{N}{C} = at; \rightarrow \frac{N}{C} = e^{(\alpha - \beta)t}; \rightarrow$$

$$N(t) = Ce^{(\alpha - \beta)t};$$

Определим C из начального условия

$$N(0) = N_0; N(0) = Ce^0 = C; \rightarrow C = N_0;$$

Получим частное решение модели

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t} \quad (2)$$

Из последней формулы следует, что популяция изменяется во времени по экспоненте. Но при $\alpha = \beta$ численность остается постоянной, равной N_0 . Равновесие между рождаемостью и смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства $\alpha = \beta$ приводит с течением времени к все большему отклонению функции $N(t)$ от равновесного значения N_0 . При $\alpha < \beta$ численность популяции убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а при $\alpha > \beta$ растет по экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при $t \rightarrow \infty$ (Рис.62).

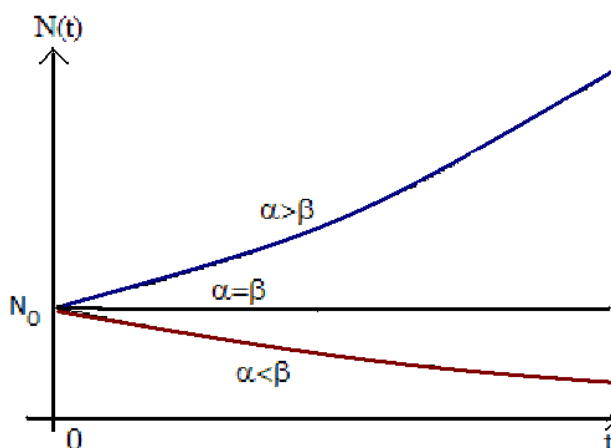


Рис. 62 - Графическая модель развития популяции

4.3. Модель ограниченного роста численности популяции (Логистическая модель Ферхюльста)

Частым явлением в природе является ограниченность ресурсов (пищевых, территориальных) и, как следствие, внутривидовая конкуренция популяций.

Постановка задачи. Пусть имеется популяция с внутривидовой конкуренцией и N_0 численность популяции в момент времени $t=0$, $N(t)$ – численность популяции в момент времени t , $r = \alpha - \beta$, – средняя скорость роста популяции. Определить, как изменяется популяция во времени.



Математическую модель развития такой популяции построил бельгийский математик Пьер Франсуа Ферхюльст (1804 – 1849) – Рис.60, ее назвали логистической моделью.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = rN - kN^2$$

где k – коэффициент встреч конкурирующих особей.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (rN - kN^2)$$

$$N' = rN - kN^2 \quad (3)$$

Рис. 63 - Ф. Ферхюльст

Это уравнение есть математическая модель изменения численности популяции. Она связывает исходные данные k и r с выходными данными – численностью популяции $N(t)$ в момент времени t и – скоростью изменения численности $N'(t)$ в этот момент времени. Эта модель по принципам построения является **детерминированной**, по целям моделирования является **дескриптивной**, так как лишь описывает развитие популяции. Коэффициенты пропорциональности k и r обычно определяются опытным путем и статистически обрабатываются. Эта модель отличается от модели Мальтуса наличием второго слагаемого, который уменьшает численность популяции.

4.4. Теоретическое исследование модели Ферхюльста

Математическая модель (3) – это дифференциальное уравнение 1-го порядка. Преобразуем уравнению:: заменим переменную $N = 1/u$ и, подставив ее в уравнение (3), выполним цепочку преобразований

$$-\frac{1}{u^2(t)} \frac{du}{dt} = \frac{r}{u(t)} - \frac{k}{u^2(t)} \rightarrow \frac{du}{dt} = -ru(t) + k \rightarrow \frac{du}{k - ru(t)} = dt$$

Последнее уравнение уже является уравнением с разделенными переменными, его решение находится интегрированием обеих частей.

$$\begin{aligned} \int \frac{d(ru)}{r(k - ru(t))} &= \int dt \Leftrightarrow -\frac{1}{r} \int \frac{d(k - ru)}{k - ru(t)} = \int dt \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{r} \ln|k - ru(t)| &= t - \ln C \Leftrightarrow \ln|k - ru| = -rt + r \ln C \Leftrightarrow \\ \ln|k - ru| - \ln C &= -rt \Leftrightarrow \ln \left| \frac{k - ru}{C} \right| = -rt \Leftrightarrow \frac{k - ru}{C_1} = e^{-rt} \\ k - ru(t) &= C_1 e^{-rt} \rightarrow u(t) = \frac{k - C_1 e^{-rt}}{r} \rightarrow N(t) = \frac{r}{r - C_1 e^{-rt}} \end{aligned}$$

Последняя формула определяет общее решение математической модели (3), найдем из него частное решение, учитывая, что $N(0) = N_0$.

$$N(0) = \frac{r}{k - C_1} = N_0 \Rightarrow C_1 = \frac{k \cdot N_0 - r}{N_0}$$

Подставляя C_1 в общее решение, получим формулу

$$N(t) = \frac{r \cdot N_0 \cdot e^{rt}}{r + k N_0 (e^{rt} - 1)} \quad (4)$$

которая является частным решением математической модели (3), из нее следует, что численность популяции $N(t)$ изменяется во времени экспоненциально, ее величина зависит от входных данных r, k, N_0 .

Продифференцировав формулу (4), получим формулу, определяющую скорость изменения численности.

$$v(t) = N'(t) = \frac{r^2 \cdot N_0 \cdot e^{rt} (r - k \cdot N_0)}{(r + k \cdot N_0 (e^{rt} - 1))^2} \quad (5)$$

Проанализируем поведение $N(t)$, используя полученную формулу (5):

- При $(r - k \cdot N_0) = 0$, а значит при $N_0 = r/k$ значение скорости $V(t)$ равно 0.
- При $N_0 > r/k$ производная $N'(t) < 0$, а значит функция $N(t)$, то есть, численность популяции убывает:

3) При $N_0 < r/k$ производная $N'(t) > 0$, а значит функция $N(t)$, то есть, численность популяции возрастает.

Выясним, до какой величины может убывать или возрастать численность популяции $N(t)$. Для этого вычислим ее предел при $t \rightarrow \infty$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r \cdot N_0 \cdot e^{rt}}{r + k N_0 (e^{rt} - 1)} = \frac{r}{k}$$

Из последнего выражения следует, что прямая $y = r/k$ является асимптотой для графика функции $N(t)$, определенной формулой (4). Графики зависимости численности $N(t)$ от времени для различных значений начальной численности N_0 приведены на Рис. 64. И в первом, и во втором случае численность популяции $N(t)$ стабилизируется, то есть, становится постоянной, приближаясь к величине r/k , но стабилизация достигается по-разному, в случае, когда $N_0 > r/k$ численность $N(t)$ уменьшается, в случае, когда $N_0 < r/k$, численность $N(t)$ увеличивается. Величина $K = r/k$ называется емкостью среды, она определяет наибольшую и наименьшую численность популяции при наличии конкурентной борьбы.

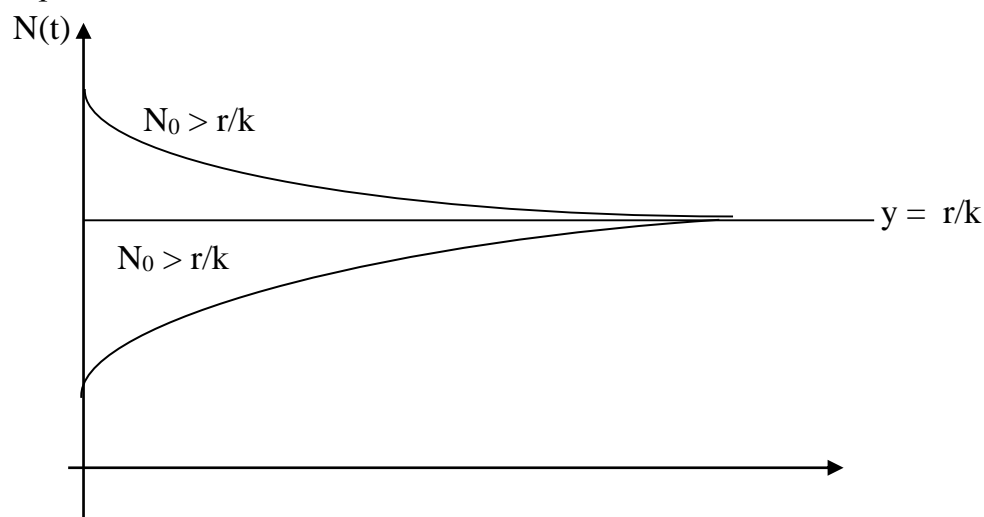


Рис. 64 - Графические модели развития популяций

4.5. Компьютерные модели развития популяции (модели Мальтуса и Ферхюльста)

Запишем математическую модель Мальтуса (2) в виде

$$N'(t) = f(N), \text{ где } f(N) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}$$

а математическую модель Ферхюльца (3) в виде

$$N'(t) = f(N), \text{ где } f(N) = rN(t) - kN^2(t)$$

где искомой функцией является $N(t)$, тогда решение модели развития популяций для этих уравнений по формулам Эйлера-Коши вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{k+1}^* &= N_k + h \cdot f(N_k); \\ N_{k+1} &= N_k + h (f(N_k) + f(N_{k+1}^*)) / 2; \end{aligned}$$

Эти формулы положены в основу компьютерной модели.

program Popul_mf;

uses Crt, Graph;

var i, j, l, z, gM, gD, bg, bv, g0k, v0k, yk, tk, Nk, vk : **integer**;

a, b, r, k, as, t0, dt, ag, av, kg, kv, Np, N0, N1: **real**; ass: **string**;

t, v, N: **array** [1..2000] **of real**; ysl: **boolean**;


```

function f (z: integer; x: real): real;
begin if z = 1 then f:= (a-b)*x; {матмодель Мальтуса}
      if z = 2 then f:= r*x - k*sqr(x); {матмодель Ферхюльста}
end;
BEGIN
  a:=0.6; b:=0.5; {исходные данные модели Мальтуса}
  r:= 0.3; k:= 0.001; {исходные данные модели Ферхюльста}
  dt:=0.01;
  for z:=1 to 2 do
    begin
      t0:=0; N0:=1000; {начальные данные обеих моделей}
      i:=1; t[1]:=t0; N[1]:=N0; v[1]:=f(z, N0);
      repeat { моделирование изменения численности популяции}
        Np:=N0+dt*f(z, N0); {формулы Эйлера}
        N1:=N0+dt*(f(z, N0)+f(z, Np))/2; { формула Эйлера-Коши}
        t0:=t0+dt; N0:=N1;
        i:=i+1; t[i]:=t0; N[i]:=N1; v[i]:=f(z,N1);
        if z = 1 then ysl:= abs(t0-10)<=0.1;
          {условие окончания цикла repeat для модели Мальтуса}
        if z =2 then ysl:= abs(N0-r/k)<= 1;
          {условие окончания цикла repeat для модели Ферхюльста}
      until ysl;
      clrscr;
      if i < 25 then l:=1 else if i < 40 then l:=2 else l:= round(i/20);
      writeln (' Шаг j   Время t   Численность N   Скорость v');
      for j:=1 to i do if (j mod l) = 0 then
        writeln(' ',j,' ',t[j]:6:3,' ',N[j]:6:0,' ',v[j]:6:0);
      writeln(' ',i,' ',t[i]:6:3,' ',N[i]:6:0,' ',v[i]:6:0);
      readln;
      gD:=Detect; Initgraph(gD, gM, ' ');
      setbkcolor(15); setcolor(1);
      g0k:=20;
      if z = 1 then v0k:=420;
      if z = 2 then v0k:=300;
      line(g0k, v0k, 620, v0k); outtextxy(620, v0k, 't');
      line (615, v0k-5, 620, v0k); line (625, v0k-5, 620, v0k);
      line (g0k, 20, g0k,470); outtextxy(g0k-10, 15, 'N/v');
      line (g0k-5, 25, g0k, 20); line (g0k+5, 25, g0k,20);
      bg:=50; bv:=50; ag:=1
      if z = 1 then av:=300;
      if z = 2 then av:=250;
      kg:=bg/ag; kv:=bv/av;

```

```

for j:=1 to 10 do line(g0k+j*bg, v0k-5, g0k+j*bg, v0k+5);
str(ag:3:0, ass); outtextxy(g0k+bg, v0k+5, ass);
for j:=1 to 10 do line(g0k-5, v0k- j*bv, g0k+5, v0k - j*bv);
for j:=1 to 5 do line(g0k-5, v0k + j*bv, g0k+5, v0k + j*bv);
str(av:2:0,ass); outtextxy(g0k-20,v0k-bv-10,ass);
if z=2 then
begin
as:=r/k; yk:= round (v0m - kv*as);
setcolor(4);
line (g0k, yk, 640, yk); { асимптота }
end;
for j:=1 to i do
begin
tm:= round(g0k+kg*t[ j]);
Nm:= round (v0k-kv*N[j]);
vk:= round (v0k-kv*V[j]);
setcolor(2); circle(tk, Nk ,1);
setcolor (13); circle (tk, vk,1);
end;
setcolor(2);
outtextxy (tk-10,Nk-10 ,'N(t)');
setcolor(13);
outtextxy(tk-10,vk+10,'v(t)');
readkey;
closegraph;
end;

```

END.

Эта программа в текстовом режиме строит модели изменения численности популяций в виде таблицы и для модели Мальтуса (Рис. 62) и для модели Фельхлюста (Рис. 63), шаг в таблицах подбирается в программе таким образом, чтобы результаты моделирования выборочно были представлены на экране вместе с последним. Для модели Мальтуса программа в таблицу вывела каждый 50 шаг и сделала 900 шагов примерно за 10 единиц времени, для модели Ферхюльста в таблицу выведен каждый 89 шаг, всего их в таблице 1785 примерно за 18 единиц времени.

Затем эти же результаты в графическом режиме представлены в графическом виде для модели Мальтуса (Рис. 65) и модели Ферхюльста (Рис. 66). Эти модели (изменения численности и изменения ее скорости) более наглядно иллюстрируют выводы, полученные выше. На Рис.65 виден экспоненциальный рост популяции от первоначального значения 1000 особей до примерно 2700 за 10 единиц времени, скорость при этом растет медленно.

Шаг j	Время t	Численность N	Скорость v
50	0.490	1050	105
100	0.990	1104	110
150	1.490	1161	116
200	1.990	1220	122
250	2.490	1283	128
300	2.990	1349	135
350	3.490	1418	142
400	3.990	1490	149
450	4.490	1567	157
500	4.990	1647	165
550	5.490	1732	173
600	5.990	1820	182
650	6.490	1914	191
700	6.990	2012	201
750	7.490	2115	211
800	7.990	2223	222
850	8.490	2337	234
900	8.990	2457	246
950	9.490	2583	258
992	9.910	2694	269

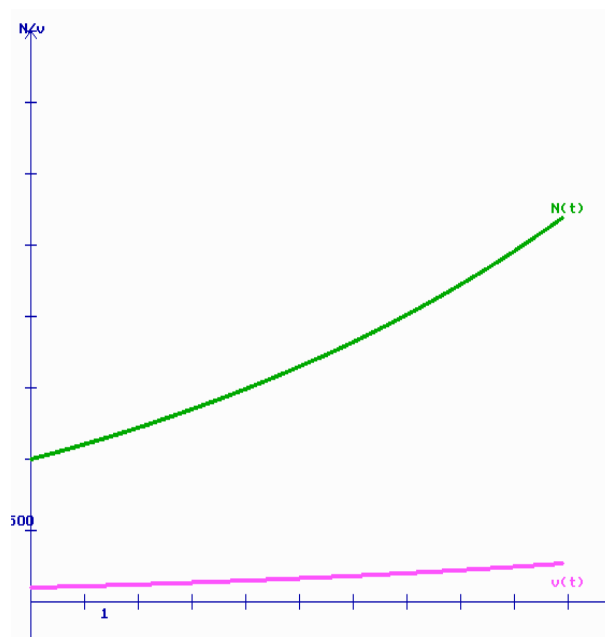


Рис. 65 - Табличная и графическая модели Мальтуса

Шаг j	Время t	Численность N	Скорость v
89	0.880	649	-226
178	1.770	510	-107
267	2.660	438	-60
356	3.550	395	-38
445	4.440	368	-25
534	5.330	349	-17
623	6.220	336	-12
712	7.110	327	-9
801	8.000	320	-7
890	8.890	315	-5
979	9.780	312	-4
1068	10.670	309	-3
1157	11.560	307	-2
1246	12.450	305	-2
1335	13.340	304	-1
1424	14.230	303	-1
1513	15.120	302	-1
1602	16.010	302	-1
1691	16.900	301	-0
1780	17.790	301	-0
1785	17.840	301	-0

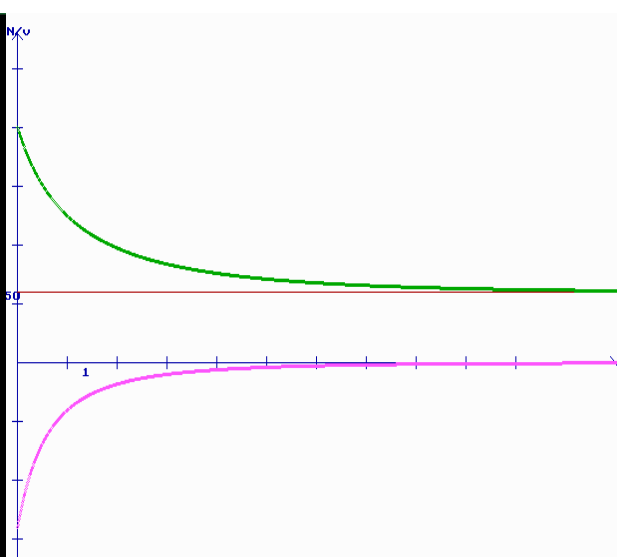


Рис.66 - Табличная и графическая модели Ферхюльста

На Рис.66 видно, что сначала популяция убывает от 1000 особей до 300 и затем стабилизируется.

Экспериментируя с этими моделями можно выяснить, как начальное количество особей популяции и коэффициенты α , β , r и k влияют на период стабилизации.

Контрольные вопросы к шестой главе

1. Как переводится слово «эпидемия»?
2. Почему математики заинтересовались борьбой с эпидемиями?
3. Кто и когда построил первую модель эпидемии?
4. Для чего она предназначалась?

5. Кто из математиков строил прогностическую модель эпидемии в 19 веке?
6. Когда и где были сформулированы основы современной теории математического моделирования эпидемий?
7. Как формулируется задача об эпидемии?
8. Как записывается математическая модель эпидемии? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
9. Чем является модель эпидемии с точки зрения математики?
10. Как выглядит решение этой модели?
11. Как изменяется число заболевших во времени?
12. Какой период эпидемии называется «заразным»?
13. Как изменяется скорость эпидемии?
14. В какой момент «заразного» периода скорость эпидемии достигает максимума?
15. Какой метод положен в основу компьютерной модели эпидемии?
16. В чем его суть? Что он позволяет найти?
17. В каком виде компьютерная модель эпидемии выводит результаты моделирования?
18. Что называется популяцией? Какие характеристики она имеет?
19. Для чего нужны модели развития популяций?
20. Что называется биотическим потенциалом вида популяции?
21. Как ставится задача о популяции с неограниченными пищевыми и территориальными ресурсами?
22. Кто построил математическую модель развития такой популяции?
23. Как она записывается? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
24. Чем является модель развития популяции с точки зрения математики?
25. Как выглядит решение этой модели? Какие выводы оно позволяет сделать?
26. Как ставится задача о популяции с внутривидовой конкуренцией?
27. Кто построил математическую модель развития такой популяции?
28. Как она записывается? Какие данные в ней являются входными? Выходными?
29. Чем является модель развития популяции с точки зрения математики?
30. Чем эта модель отличается от модели развития популяции с неограниченными ресурсами?
31. Как выглядит решение этой модели? Какие выводы оно позволяет сделать?
32. Как ведет себя популяция при увеличении времени?
33. К какой величине она стабилизируется?
34. Сколько моделей строит компьютерная модель развития популяции?
35. В каком виде она выводит результаты моделирования?

Глава 7. Компьютерное моделирование случайных процессов

§ 1. Случайные факторы в процессах и явления

При изучении явлений окружающего мира мы часто сталкиваемся с процессами и явлениями, исход которых ранее предсказать нельзя. Эта непредсказуемость вызвана влиянием случайных факторов, воздействующих на ход процесса или явления. Например, население города меняется в течение времени случайным образом под влиянием таких факторов, как рождаемость, смертность, миграция. Уровень воды в водохранилище меняется во времени случайным образом в зависимости от количества осадков, таяния снега, использования воды на нужды сельского и коммунального хозяйств. Курс акций на бирже меняется в течение дня в связи с динамикой спроса и предложения.

Вообще в природе не существует процессов, в которых совсем нет случайных факторов, но есть процессы, на ход которых случайные факторы влияют очень мало и ими можно пренебречь. Например, на движение планет вокруг Солнца не влияют такие случайные события, как появление в Солнечной системе мелких астероидов, извержение вулканов на планетах, запуски космических ракет и т.д. С другой стороны, существуют процессы, где случайность играет основную роль, например, броуновское движение частиц.

Между двумя этими крайними случаями находятся процессы, для которых случайность играет большую или меньшую роль. Учет случайных событий в таких процессах зависит от задачи, решение которой связано с этим процессом. Например, если решается задача составления расписания авиарейсов между двумя пунктами, то движение самолета между ними можно считать прямолинейным и равномерным, хотя это далеко не так, на движение самолета влияет ветер, облачность, давление, коридор полета, высота – это все случайные факторы полета. Если же решается задача моделирования автопилота на этом пути, то все эти факторы необходимо учитывать, хотя и в том, и в другом случае процесс один и тот же – полет самолета от пункта А к в пункт Б.

Вообще, понятие «случайный фактор» - одно из самых фундаментальных как в математике, так и в повседневной жизни.

Событие (фактор) называется случайным, если оно достоверно непредсказуемо, а предсказуемо с какой-то вероятностью.

Например, бросая игральную кость, нельзя сказать, какой гранью кверху она упадет, это случайный фактор, но можно утверждать, что вероятность появления каждой грани равна одной шестой. Нельзя указать пол неродившегося ребенка (если не делать УЗИ), это случайный фактор, но можно утверждать, вероятность рождения девочки и мальчика равна одной второй.

§ 2 Случайные числа

Во многих моделях, в которых необходимо учитывать случайные факторы, используются случайные числа.

Число называется случайным, если оно получено случайным образом из некоторого набора чисел.

Если вероятность получения любого числа из набора одинакова для этих чисел, то случайные числа из этого набора имеют **равномерное распределение вероятностей**.

Рассмотрим способы, которыми можно получить набор случайных чисел.

1) **С помощью рулетки**: при вращении рулетки ее стрелка и диск вращаются независимо друг от друга и останавливаются случайным образом, при этом стрелка указывает на какое-то число, считается, что оно выбрано случайным образом, причем, вероятность выбора одинакова для всех чисел на диске. Вращая неоднократно барабан, можно получить **последовательность случайных чисел с равномерным распределением**.

2) **С помощью розыгрышей лотерей**: числа, определяющие выигрышные номера, считаются полученными случайным образом, так как извлечение любого шара с числом является равновероятным, **то случайные числа, полученные таким образом, будут иметь равновероятное распределение**.

3) **С помощью готовых таблиц**: уже более 100 лет назад математики разными способами начали составлять таблицы случайных чисел. Этих таблиц очень много, входить в любую таблицу можно с любой точки, но затем числа надо **брать подряд по строкам или столбцам, ничего не пропуская**.

4) **С помощью компьютера**: случайные числа может генерировать компьютер с помощью функции *random()*, которая генерирует случайные числа из промежутка $[0,1]$, считается, что **последовательность получаемых случайных чисел равномерно распределена на этом промежутке**. Если в Паскале использовать процедуру *randomize*, то последовательность таких чисел при каждом запуске программы будет всякий раз другая.

§ 3. Системы массового обслуживания

3.1 Понятие системы массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) — это такие системы, в которые;

- в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание;
- поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания (приборы, люди, линии связи);
- обслуживание заявок продолжается какое-то случайное время;
- после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки.

Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок, они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными; в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Примерами СМО служат телефонные станции, автомастерские, магазины, билетные кассы и т.д. Работа любой СМО состоит в обслуживании поступающего в нее

потока требований - вызовы абонентов, приход покупателей в магазин, заявки на выполнение работы в автомастерской и т.д.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий: прихода новой заявки, окончания обслуживания, момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь.

Любая СМО имеет ряд характеристик:

- среднее время обслуживания;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее время пребывания в СМО;
- средняя длина очереди;
- среднее число заявок в СМО;
- количество каналов обслуживания;
- интенсивность входного потока заявок;
- относительная пропускная способность;
- абсолютная пропускная способность;
- среднее число занятых каналов;
- среднее число свободных каналов;

Системы массового обслуживания классифицируются по разным признакам, например, *по ожиданию обслуживания*.

- системы с отказами (допускающие отказ, когда все каналы заняты) ;
- системы с ожиданием (допускающие неограниченную очередь);
- системы с ограниченной длиной очереди (допускающие очередь с ограниченной длиной);
- системы с ограниченным временем ожидания (допускающие ограниченный срок пребывания в очереди).

По числу каналов или приборов системы делятся на **одноканальные и многоканальные**.

Для исследования сложных систем, процессов, явлений, в которых случайные факторы играют существенную роль, очень часто невозможно построить аналитическую математическую модель, поэтому строят имитационную.

Имитационное моделирование — это метод, позволяющий моделировать процесс или явление с сохранением его логической структуры и последовательным чередованием составляющих его процессов во времени.

Для оценки искомых величин может быть использована любая информация, циркулирующая в модели, если только она доступна регистрации и обработке.

Искомые величины при имитационном моделировании обычно определяются как средние значения по данным большого числа реализаций процесса. Если число реализаций достаточно велико, то получаемые оценки приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве приближенных значений искомых величин. Рассмотрим имитационную модель СМО.

3.2. Компьютерная модель системы массового обслуживания

Постановка задачи. Имеется двухканальная СМО с отказами, на которую поступает два произвольных потока заявок. Поток заявок I имеет интенсивность поступления λ_1 , интенсивность обслуживания этих заявок μ_1 . Поток заявок II имеет интенсивности λ_2 и μ_2 . Заявки I имеют перед Заявками II приоритет, состоящий в том, что если Заявка I приходит в систему, когда все каналы заняты и хотя бы один из них обслуживает Заявку II, то пришедшая Заявка I «вытесняет» Заявку II, становится на её место, а та покидает систему необслуженной. Если Заявка I приходит в момент, когда оба канала обслуживают Заявки I, то она получает отказ и покидает СМО. Заявка II получает отказ, если она приходит в систему в момент, когда оба канала заняты безразлично какими заявками. Смоделировать поведение системы и вычислить основные характеристики её эффективности. Меняя время работы СМО T от меньших значений к большему, найти изменения критерия эффективности функционирования и выбрать оптимальный.

Анализ задачи:

1. Рассматриваемая в задаче СМО имеет:

- два канала;
- два входа, на один из которых поступают случайный поток Заявок I, на другой – поток Заявок II.

2. Время поступления и обслуживания заявок генерируются случайным образом.

3. Интенсивности поступления и обслуживания выбираются случайным образом из заданных промежутков.

Критерии эффективности функционирования СМО:

- a. Вероятность отказа;
- b. Относительная пропускная способность;
- c. Абсолютная пропускная способность.

Ниже приведена программа, которая строит модель этой СМО.

program СМО;

uses Crt;

type canal = (free, zanz1, zanz2); {перечисляемый тип - свободен,
занят заявкой 1, занят заявкой 2}

var

can1, can2: canal; trab, t, tz1, tz2 : **integer**; l1, l2, n1, n2 : **integer**;

serv1, not_serv1, serv2, not_serv2, S : **integer**; m, n, i: **integer**

symtrab, symz, symz1, symz2, symnz: **integer**;

srin, sraps, srops, srotk: **real**;

mt, mpz, mz1, mz2, mnz: **array**[1..10] **of integer**;

min, maps, mops, mvot: **array**[1..10] **of real**;

function ZP(l: **integer**):**boolean**

begin if random < 1/60 then ZP := true else ZP := false; **end**;

function TZ(t, n: **integer**):**integer**;

```

begin TZ:= t +round(60/n); end;
BEGIN
clrscr; m:=0; randomize; t:=0;
write('Введите число реализаций СМО '); readln(n);
repeat
  m:=m+1;
  clrscr;
  writeln(m, '- тая реализация работы СМО');
  can1:=free; can2:=free;
  l1:= random(5) +1; l2:= random(3) +1;
  n1:=random(3) +1; n1:=random(3) +1;
  serv1:=0; not_serv1:=0; serv2:=0; not_serv2:=0;
  write(' Введите время работы СМО в ',m,'-той реализации');
  readln(trab);
  repeat
    if ZP(l1) then
      begin
        writeln('Поступила заявка типа 1');
        if can1=free then
          begin
            can1:=zanz1;
            writeln('Канал 1 принял заявку типа 1');
            tc1:=TZ(t,n1);
          end
        else
          if can2=free then
            begin
              can2:=zanz1;
              writeln('Канал 2 принял заявку типа 1');
              tc2 := TZ(t,n1
            end
          else
            if can1=zanz2 then
              begin
                can1:=zanz1;
                writeln('Канал1 принял заявку1 вместо заявки2')
                tc1:=TZ(t,n1);
                inc(not_serv2);
                writeln('Заявка 2 не обслужена ');
              end
            else
              if can2=zanz2 then

```

```
begin
    can2:=zanz1;
    writeln('Канал2 принял заяв.1 вместо2');
    tc2 := TZ(t,n1);
    inc(not_serv2
end
    else
begin
    inc(not_serv1);
    writeln('Заявка 1 не обслужена ');
end;
end;

if ZP(l2) then
begin
    writeln('Поступила заявка 2');
    if can1=free then then
begin
    can1:=zanz2;
    writeln('Канал 1 принял заявку 2 ');
    tc1 :=TZ(t,n2);
end
    else
    if can2=free then then
begin
    can2:=zanz2;
    writeln('Канал 2 принял заявку 2 ');
    tc2 := TZ(t,n2);
end
    else
begin
    inc(not_serv2);
    writeln('Заявка 2 не обслужена ');
end;
end;
if tz1=t then
begin
    if can1 = zanz1 then inc(serv1) else inc(serv2);
    can1:=free;
    writeln('Канал 1 выполнил заявку');
end;
if tz2=t then
begin
```

```

    if can2 = zanz1 then inc(serv1) else inc(serv2);
    can2:=free;
    writeln(' Канал 2 выполнил заявку ');
end;
inc(t);
until trab=t;
S:=serv1 + not_serv1 + serv2 + not_serv2;
mt[m]:=trab; mpz[m]:=s; mz1[m]:= serv1; mz2[m]:= serv2;
mnz[m]:=not_serv1+not_serv2;min[m]:=S/trab;
maps[m]:=(serv1+serv2)/trab; mops[m]:=(serv1+serv2)/S;
mvot[m]:=(not_serv1+not_serv2)/S*100;
writeln('Нажмите клавишу для продолжения');
readln;
until m>=n;
clrscr;
writeln('          l1=',l1, ' l2=',l2, ' n1=',n1, ' n2=',n2);
writeln('=====');
writeln('Номер| Время |Кол-во| Кол-во| Кол-во | Кол-во |Интен-ть|Абсол| Относ|Вероят');
writeln('реали-|работы|пост-х | обсл-х | обсл-х |необс-х |поступ-я |пропу |пропу |отказ');
writeln('зации | СМО |заявок | кан-м1 |кан-м 2 | заявок | заявок |способ |спосо|СМО' );
writeln('=====');
for i:=1 to m do writeln(i:3,mt[i]:7,mpz[i]:7,mz1[i]:6,mz2[i]:9,mnz[i]:9,
                        min[i]:10:2,maps[i]:10:2,mops[i]:9:2,mvot[i]:9:2);
for i:=1 to m do
begin
    symtrab:= symtrab +mt[i];
    symz:= symz+ mpz[i];
    symz1:=symz1+ mz1[i];
    symz2:=symz2+ mz2[i];
    symmnz:=symmnz + mnz[i];
    srin:=srin+ min[i];
    sraps:=sraps + maps[i];
    srops:=srops + mops[i];
    srotk:=srotk + mot[i];
end;
srin:=srin/m; sraps:= sraps/m; srops:=srops/m; srotk:=srotk/m;
writeln('=====');
writeln(m:3, symtrab:7, symz:7, symz1:6, symz2:9, symmnz:9, srin:10:2, sraps:10:2,
        srops:9:2, srotk:9:2);
readln;
END.

```

§ 4. Метод Монте - Карло

Одним из методов имитационного моделирования является метод Монте–Карло, или по-другому, метод статистических испытаний. Это метод имитационного моделирования, который позволяет по известным законам моделировать функционирование системы или развитие процесса с помощью набора случайных чисел.

Суть этого метода заключается в том, что для решения математической задачи выбирается некоторая величина X , зависящая от случайных факторов. Проведя достаточное количество раз эксперимент (испытание), позволяющий вычислить значение этой величины, можно найти решение задачи как среднее значение результатов эксперимента.

Надо отметить, что этот метод позволяет найти лишь приближенное значение решения задач, его точность напрямую зависит от количества испытаний, поэтому этот метод имеет второе название – **метод статистических испытаний**.

Создателями этого метода являются американские математики Джон фон-Нейман и С. Улама, которые предложили его в 1949 году. Нужно отметить, что теоретическая основа метода была известна до 1949 года, уже тогда некоторые задачи статистики рассчитывались иногда с помощью случайных выборок, то есть фактически методом Монте-Карло. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную - очень трудоемкая работа. Таким образом, возникновение метода Монте-Карло как весьма универсального численного метода стало возможным только благодаря появлению ЭВМ.

Название метода происходит от столицы княжества Монако, известной своими игорными домами. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка

§ 5. Задача о случайном блуждании

Для иллюстрации метода Монте – Карло рассмотрим классическую задачу о случайном блуждании.

Постановка задачи: в городе в полночь из зоопарка сбежал крокодил, направление передвижения он выбирал **случайным образом**, так как ему все равно куда идти. За час он проходил один квартал, блуждал он до 5 часов утра, потом началось движение транспорта, и крокодил спрятался. **Определить район поиска крокодила.**

Это чисто **математическая** задача, ее решением является число. Если бы крокодил, выйдя из зоопарка, все время шел в одном направлении, то он ушел бы на расстояние пяти кварталов от зоопарка, в этом случае решение задачи находится сразу: **«Крокодила нужно искать в пяти ближайших кварталах от зоопарка»**. Но крокодил выбирал направление движения случайным образом, поэтому, неизвестно, как далеко он мог уйти.

Будем решать эту задачу методом Монте – Карло. Искомой величиной X является число кварталов для поиска крокодила, это число зависит от такого случайного фактора, как выбор направления через каждый час блужданий. Экспериментом или испытанием в

данной задаче является побег крокодила, очевидно, что при каждом побеге крокодил может спрятаться в разных местах города, поэтому значение X будет разным. И чем больше число испытаний, то есть, чем больше побегов мы отследим, тем точнее будет ответ.

Для использования этого метода нужно получить набор случайных чисел и связать с каждым числом такое случайное событие, как выбор направления движения. Будем определять случайные числа как выигрыши в Спортлото 5 из 36. В этой лотерее разыгрываются 36 видов спорта, каждый под своим номером. Нужно угадать 5 номеров.

Поставим в соответствие каждому числу, участвующему в розыгрыше, какое-либо направление, которое выберем сами (Таблица № 6).

Таблица №6

Разыгрываемые числа									Направление
1	5	9	13	17	21	25	29	33	Север
2	6	10	14	18	22	26	30	34	Юг
3	7	11	15	19	23	27	31	35	Запад
4	8	12	16	20	24	28	32	36	Восток

В качестве случайных чисел возьмем выигрышные номера Спортлото 5 из 36 за 1987 год (Таблица №7).

Таблица № 7

Месяц розыгрыша	Выигрышные номера	Направление движения
Февраль	9, 15, 12, 8, 6	север, запад, восток, восток, юг
Март	34, 11, 4, 5, 7	юг, запад, восток, север, запад
Апрель	14, 29, 9, 6, 8	юг, север, север, юг, восток
Июнь	22, 31, 32, 12, 1	юг, запад, восток, восток, север
Июль	16, 20, 32, 22, 18	восток, восток, восток, юг, юг
Август	3, 13, 36, 11, 6	запад, север, восток, запад, юг

В третьем столбце Таблицы №7 составлена *словесная*, состоящая из направлений движения, *имитационная модель* шести вариантов блужданий крокодила. Уже из нее ясно, что крокодила надо искать в ближайших 3 кварталах от зоопарка, так как самый «длинный» пробег крокодила «восток- восток- восток» имеется в первом и пятом испытаниях.

§ 6. Компьютерная модель блужданий

Программа «Crocodil» строит компьютерную модель блужданий крокодила, случайные числа в ней генерирует компьютер с помощью функции **random**.

Program Crocodil;

uses Crt, Graph;

var x, y, x1, y1, j, i, z, k, gkv, vkv, gM, gD, S, R, gkv, vkv: **integer**;

js : **string**; kv: **array**[1..5000] **of integer**;

BEGIN

```

randomize;
clrscr;
writeln('Введите число побегов (экспериментов) k'); readln (k);
gD:= Detect; InitGraph(gD,gM,' ');
setbkcolor(15); setcolor(1);
setfillstyle(1,1);
y:=25; S:=0;
for i:=0 to 8 do
  begin
    x:=100;
    for j:=0 to 8 do bar(x+j*50, y+i*50, x+25+j*50, y+25+i*50);
  end;
setcolor(2);
rectangle(300,225,325,250);setfillstyle(1,2); floodfill(312,240,2);
setcolor(15); outtextxy(300,230,'300'); outtextxy(300,240,'PARK');
setlinestyle(1,1,1);
for j:=1 to k do
  begin
    x:=300; y:=225;
    if j <=15 then
      begin
        setcolor(j); circle(x,y,1); readkey;
        setcolor(0); circle(x,y,1);
      end;
    for i:=1 to 5 do
      begin
        z:= random(4)+1;
        if z=1 then begin y1:=y-50; x1:=x; end; { север}
        if z=2 then begin y1:=y+50; x1:=x; end; { юг}
        if z=3 then begin y1:=y; x1:=x-50; end; { запад}
        if z=4 then begin y1:=y; x1:=x+50; end; { восток}
        if j <=15 then
          begin
            setcolor(j); line(x,y,x1,y1);circle(x1,y1,1);
            readkey; setcolor(0); circle(x1,y1,1);
          end;
        x:=x1;y:=y1
      end;
    if j<=15 then
      begin
        setcolor(j); if j =1 then setcolor(15);

```

```

        circle(x1+12,y1+12,6);
        str(j,js); outtextxy(x1+9,y1+9,js);
    end;
    gkv:= round(abs(x-300)/50);
    vkv:= round(abs(y-225)/50);
    if gkv > vkv then kv[ j ]:= gkv else kv[ j ]:= vkv ;
    S:=S + kv[j];
end;
R:=round(S/k); if R < S/k then R:=R+1;
setcolor(5); setlinestyle(0,1,3);
rectangle(300 – R*50, 225 – R*50, 325 + R*50, 250 + R*50);
readkey;
closegraph;
writeln ('Номер эксперимента   Число кварталов');
writeln;
if k < 25 then i:=1 else if k <40 then i:=2 else i:=round(k/20);
for j:=1 to k do if (j mod i =0) then writeln('   ',j:5, '   ', kv[j]:3);
writeln('   ',i:5, '   ',kv[i]:3);
writeln;
writeln('Крокодила нужно искать в ближайших ', R, 'кварталах
        от зоопарка ');
readln;

```

END.

Результатом работы программы является графическая модель (Рис. 67), в которой схематично изображены кварталы города и «траектории» блужданий крокодила по этим кварталам. Каждая траектория задана пунктирной линией определенного цвета, кружком с номером N обозначено место, где крокодил спрятался в конце N-го блуждания. Сплошной линией обведен квадратный район поиска крокодила. Число испытаний в программе можно задавать любое (но не более 3000), но на модели для наглядности отображаются «траектории» только первых 15-ти блужданий, чтобы не перегружать рисунок. На Рис.67 видно, что не все места блужданий попали в квадрат, это естественно, так как метод Монте-Карло обрабатывает данные статистически и район поиска определяется как среднее значение всех вариантов побегов.

В программе Crocodil для каждого испытания – побега определяется число кварталов по горизонтали и вертикали, на которое крокодил отделился от зоопарка, из этих чисел выбирается максимальное. В программе эти максимальные значения суммируются, затем находится их среднее значение, которое является ответом на поставленный вопрос. Функция **random(4)+1** определяет случайный выбор направления движения через каждый час из 5 часов блужданий.

После рисунка модель блужданий выводится в виде таблицы, представленной на Рис.68, шаг таблицы подбирается в программе, он зависит от числа испытаний. Например, при числе испытаний равном 1000, в таблицу выводится каждое 56 значение

числа кварталов. Под таблицей выводится результат моделирования, который является ответом на вопрос задачи.

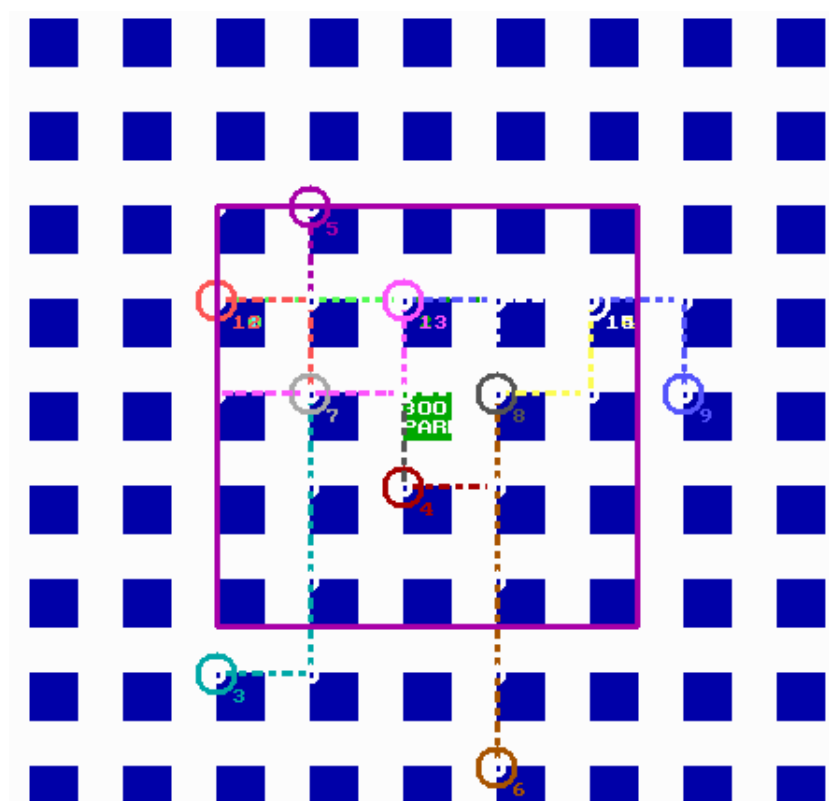


Рис. 67 - Модель блужданий крокодила по городу

Номер эксперимента	Число кварталов от зоопарка
56	2
112	1
168	1
224	2
280	2
336	2
392	1
448	2
504	1
560	1
616	2
672	3
728	1
784	2
840	1
896	4
952	1
1000	3

Крокодила надо искать в ближайших 2кварталах

Рис. 68 - Табличная модель блужданий крокодила

Контрольные вопросы к седьмой главе

1. Какое событие начинается случайным (примеры)?
2. Какое число называется случайным?
3. Какое распределение случайных чисел в наборе называется равномерным?
4. Каким образом можно получить набор случайных чисел?
5. Что называется системой массового обслуживания (СМО)?
6. Примеры СМО?
7. Какие характеристики имеют СМО?
8. По каким признакам можно классифицировать СМО?
9. На какие виды делятся СМО по ожиданию обслуживания? По числу каналов?
10. Как ставится задача о моделировании работы СМО?
11. В каком виде программа строить модель СМО?
12. В чем суть метода Монте -Карло?
13. Как ставится задача о блуждании крокодила?
14. В каком виде программа Crocodil моделирует случайные блуждания крокодила?

Литература

1. Андреева Н.М. Практикум по информатике. Учебное пособие./ Н.П. Андреева, Н.И. Пак, Н.Н. Василюк, Е.К. Хенер . – С. Петербург: Лань, 2018.- 248 с.
2. Алексеев Д.В. Введение в компьютерное моделирование физических задач: Использование Microsoft Visual Basic / Д.В. Алексеев. - М.: Ленанд, 2019. - 272 с.
3. Боев В.Д. Имитационное моделирование систем : учеб. пособие для прикладного бакалавриата // М. : Издательство Юрайт, 2017. 253 с. (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). Режим доступа: <http://simulation.su/uploads/files/default/2017-uch-posob-boev.pdf>.
4. Гербеков Х.А., Башкаева О.П. Место математического и компьютерного моделирования в системе современного общего образования // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. 2017. Том 14. С.17-23. Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/mesto-matematicheskogo-i-kompyuternogo-modelirovaniya-v-sisteme-sovremennogo-obshchego-obrazovaniya>
5. Горностаева Т.Н. Компьютерное моделирование [Текст]: учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 Физико-математическое образование / Т. Н. Горностаева. М-во образования и науки Российской Федерации, Дальневосточный федеральный ун-т. – Владивосток, Изд. Дальневосточный федеральный ун-т, 2013. - 116 с.
6. Горностаева Т.Н. «Курс Компьютерное моделирование в подготовке учителя двухпрофильного бакалавриата // Сборник трудов международной конференции «Актуальные вопросы развития образования и науки в АРТ». [Электронный ресурс]. - Владивосток: Издательство Дальневосточный федеральный университет.-2018 г. С. 121-123. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38352816>
7. Градов В.М. Компьютерное моделирование: Учебник / В.М. Градов, Г.В. Овечкин, П.В. Овечкин и др. - М.: Инфра-М, 2016. - 784 с.
8. Заварыкин В.И. Численные методы [Текст]: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педагогических вузов / В.И. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик . – М.: Просвещение, 2008. – 158с.
9. Казачков И.А., Гусева Е.Н. Компьютерная модель «Хищник-Жертва» // Современные научные исследования и инновации. 2017. № 1 [Электронный ресурс]. URL: <http://web.snauka.ru/issues/2017/01/77530> (дата обращения: 11.12.2019).
10. Колупаева С.Н.. Математическое и компьютерное моделирование. Учебное пособие / С.Н. Колупаева. – Томск, Школьный университет, 2008. – 208с.
11. Кострицына И.П. Томас Мальтус и его научные труды. Эссе. Сайт SLY.ru. Режим доступа <https://www.syl.ru/article/324139/tomas-maltus-i-ego-nauchnyie-trudyi>.
12. Королев А.Л. Компьютерное моделирование. Лабораторный практикум / А.Л. Королев. - М.: Бином, 2015. - 296 с.
13. Лапчик М.П. Численные методы (1-е изд.). Учебник/ М.П. Лапчик.- М.: Академия, 2018.- 256с.

14. Майер Р.В. Компьютерное моделирование: учебно-методическое пособие для студентов педагогических вузов [Электронное учебное издание на компакт диске]. - Глазов: Глазов. гос. пед. институт, 2015.-120с. Режим доступа: http://maier-rv.glazov.net/Komp_model.htm
15. Майер Р.В. Компьютерное моделирование: моделирование как метод научного познания. Компьютерные модели и их виды // Научный электронный архив. URL: <http://econf.rae.ru/article/6722> (дата обращения: 12.12.2019).
16. Могилев А.В. Информатика [Текст]: учебник для осуществления образовательной деятельности по направлению «Педагогическое образование» / А.В. Могилев, Н. И. Пак, Е. К. Хеннер. - Москва : Академия, 2016. - 330 с.
17. Овечкин, Г.В. Компьютерное моделирование: Учебник / Г.В. Овечкин. - М.: Академия, 2018. - 432 с.
18. Пермяков П.С., Репин О.И. Математическое моделирование физических процессов // Международный студенческий научный вестник. – 2018. – № 6.; URL: <http://eduherald.ru/ru/article/view?id=19442> (дата обращения: 14.12.2019).
19. Пуанкаре А.О. О науке: Пер. с фр./Под ред. Л. С. Понтрягина.— 2-е изд., стер.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.— 736 с. Режим доступа: <http://ilib.mccme.ru/Poincare/O-nauke.htm>
20. Пак Н.И. Компьютерное моделирование в примерах и задачах: /Учебное пособие. - Красноярск, КГМУ, 1994. – 120с. Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26742174>

Горностаева Татьяна Николаевна

Горностаев Олег Михайлович

Математическое и компьютерное моделирование

Учебное пособие издано в авторской редакции

Сетевое издание

Главный редактор – Кирсанов К.А.

Вёрстка – Кирсанов К.К.

Ответственный за выпуск - Алимова Н.К.

Учебное издание

Системные требования:

операционная система Windows XP или новее, macOS 10.12 или новее, Linux.

Программное обеспечение для чтения файлов PDF.

Объем данных 3,87 Мб

Принято к публикации «27» декабря 2019 года

Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/50MNNPU19.pdf> свободный. – Загл. с экрана. - Яз. рус.,
англ.

ООО «Издательство «Мир науки»

«Publishing company «World of science», LLC

Адрес:

Юридический адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

Почтовый адрес — 127055, г. Москва, пер. Порядковый, д. 21, офис 401.

<https://izd-mn.com/>

**ДАННОЕ ИЗДАНИЕ ПРЕДНАЗНАЧЕНО ИСКЛЮЧИТЕЛЬНО ДЛЯ ПУБЛИКАЦИИ НА
ЭЛЕКТРОННЫХ НОСИТЕЛЯХ**