# Решения

**1**

Теорема Герона, экстремальное свойство световых лучей: Дана прямая $l$ и две точки $A$ и $B$ по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой точку $X$, сумма расстояний которой до точек $A$ и $B$ имеет наименьшее возможное значение

## Решение

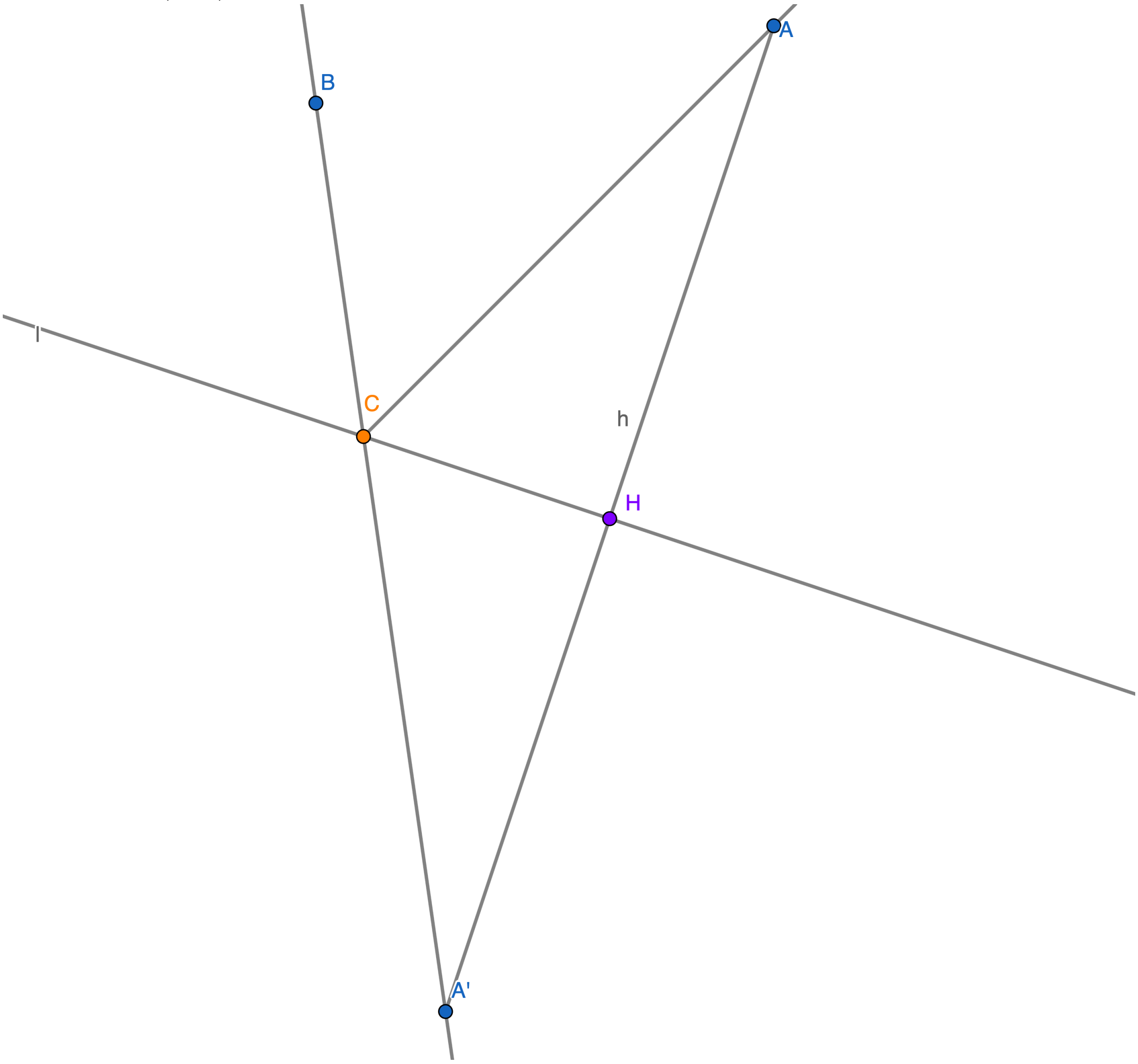
### Дано

$$\begin{aligned}
&l - \text{прямая} \\
&A, B \in \text{Одной полуплоскости относительно } l \\
&- \\
&X \in l \\
&|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)
\end{aligned}$$

### Построение

1. Опустим $h \perp l; A \in h$
2. Пусть $H = h \cap l$
3. Пусть $A' : \begin{cases} A' \in h \\ |HA'| = |HA| \\ A' \neq A \end{cases}$

4. Пусть $C = (AB) \cap l$



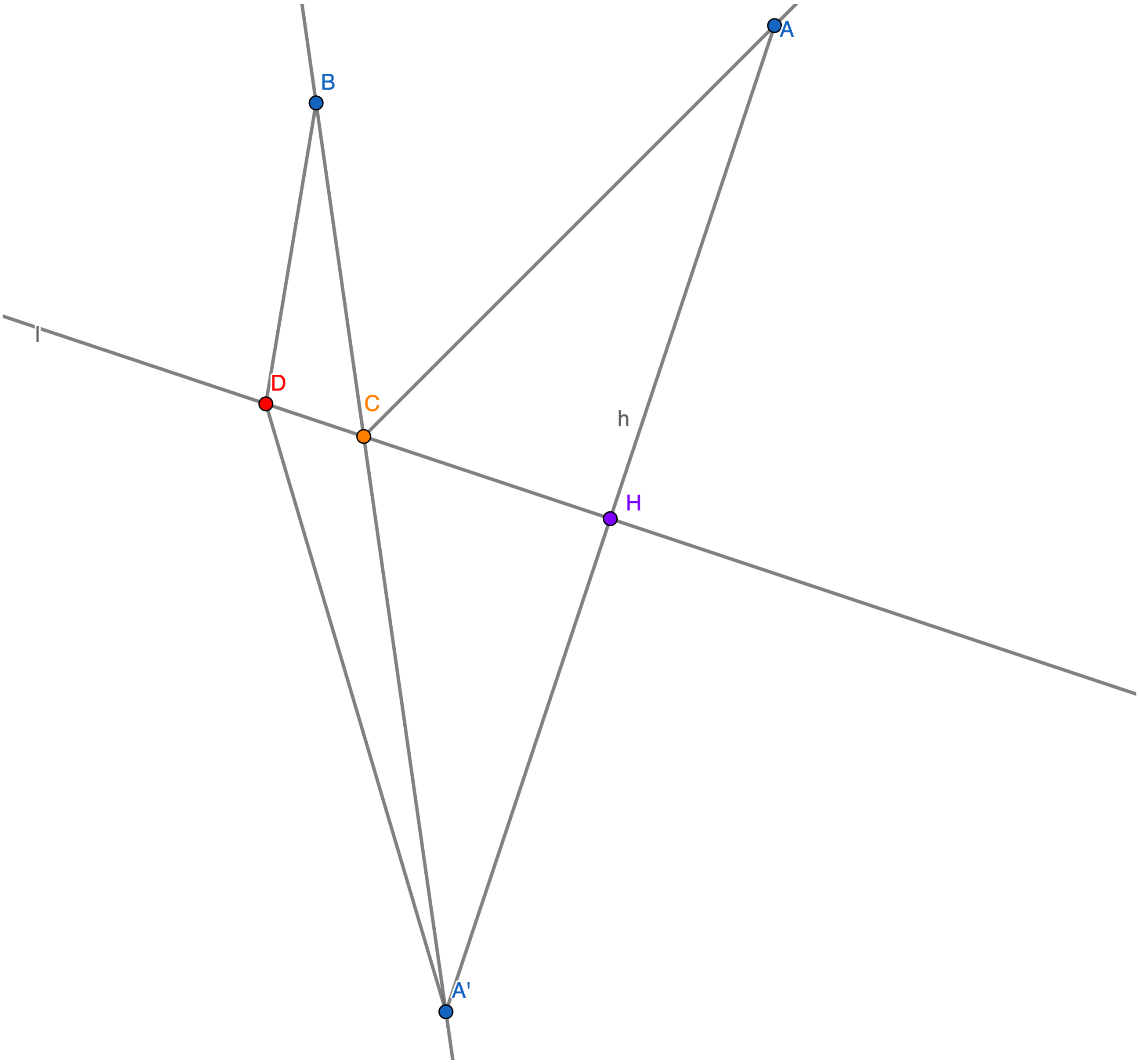

Утверждается, что $C$ - искомая

## Доказательство

От противного.

Пусть $C$ не соответствует условию $|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)$.

Тогда $\exists D$ : $\begin{cases} |AD| + |BD| < |AC| + |BC| \\ D \neq C \\ D \in l \end{cases}$




Заметим, что $C \in (A'B)$ (по построению) $\Rightarrow \exists\triangle A'DB : C \in [A'B]$.

Из геометрии мы знаем что в $\triangle ABC \begin{cases} |AB| < |AC| + |BC| \\ |BC| < |AB| + |AC| \Rightarrow \\ |AC| < |AB| + |BC| \end{cases}$

$$\Rightarrow |A'B| < |A'D| + |BD| \Rightarrow |A'C| + |BC| < |A'D| + |BD|$$

$$\begin{cases} l \perp h \\ A, A' \in h \\ A, A' \text{ равноудалены от } l \end{cases} \Rightarrow l - \text{Сер.пер. } [AA'] \Rightarrow \forall\triangle XAA' - \text{р/б}$$

Где $X$ - Любая точка, такая что $\begin{cases} X \in l \\ X \notin h \end{cases}$

Засетим, что $D, C$ удовлетворяют условиям $X$

$\Rightarrow \triangle DAA', \triangle CAA' - \text{р/б} \Rightarrow |DA| = |DA'|; |CA| = |CA'|$

Подставим в ранее полученное выражение:

$$|A'C| + |BC| < |A'D| + |BD| \Leftrightarrow |AC| + |BC| < |AD| + |BD|$$

А это противоречит условию.

Ч.Т.Д.

## 2

а) Среди треугольников с заданной площадью и заданной стороной найдите тот, для которого сумма двух других сторон наименьшая.

# Решение

## Дано

$$\begin{aligned}
&\triangle ABC \\
&|AB| \\
&S_{\triangle ABC} \\
&|AC| + |BC| = \min(|AC| + |BC|)
\end{aligned}$$

## Решение

Формула площади треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|AB| * h_{AB}}{2}$$

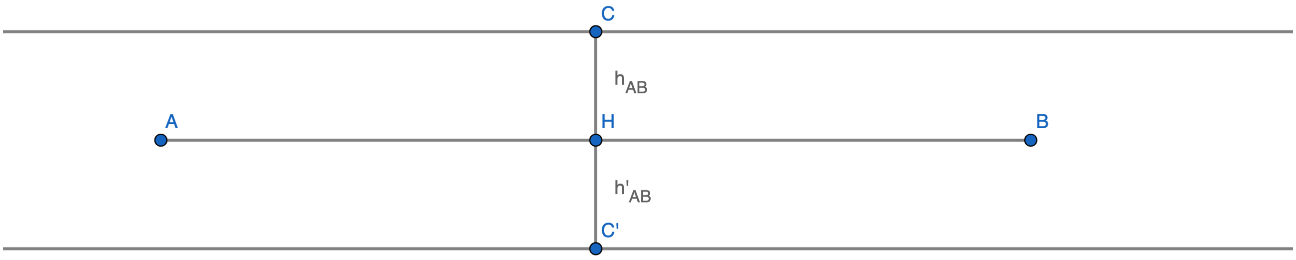
Где $h_{AB}$ - высота треугольника, опущенная на сторону $AB$
Тогда можем выразить $h_{ab}$:

$$h_{AB} = 2\frac{S_{\triangle ABC}}{|AB|}$$

Заметим, что все переменные, стоящие по правую сторону равенства заданы по условию. Тогда из условия мы всегда можем получить $h_{AB}$. $*$) Будем считать, что она дана.

$|AC| + |BC|$ является суммой расстояния от одной точки ($C$) до двух других ($A$; $B$).

Поскольку точка $C$ уже задана высотой, то она может располагаться только на одной из двух прямых, параллельных прямой $(AB)$ и находящихся на расстоянии $h_{AB}$ от них




Тогда точка $C$ с минимальной суммой расстояний будет точка, являющаяся пересечением сер.пера к $[AB]$ и обозначенного ранее ГМТ

> $\triangle ABC$ - искомый

---

б) Среди треугольников с заданной стороной и заданной суммой двух дрегих сторон найдите треугольники с наибольшей и наименьшей площадью

# Решение

## Дано

$$\triangle ABC \\ |AB| \\ |AC| + |BC|$$

1. $S_{\triangle ABC} = \min(S_{\triangle ABC})$
2. $S_{\triangle ABC} = \max(S_{\triangle ABC})$

## Решение

Заметим, что условия $\begin{cases} |AB| \\ |AC| + |BC| \end{cases}$ Задают ГМТ $C$, которое соответствует эллипсу, а максимальная "толщина" элипса достигается в его пересечении с сер.пером к отрезку, который соединяет фокусы.
Итого максимальная возможная высота $\triangle ABC$ (а значит и максимальная площадь т.к. они прямо пропорциональны) достигается в точке пересечения сер.пера к отрезку $[AB]$ с эллипсом $e = \{M \mid |AM| + |BM| = |AC| + |BC|\}$

3

Дан острый угол, образованный двумя прямыми, а так же две точки $P$ и $Q$, лежащие внутри угла. Найдите кратчайший маршрут $PABQ$, где $A$ принадлежит первой прямой, а $B$ - второй. Не упустите 2 случая и укажите критерий, в каком случае какой маршрут минимален

# Решение

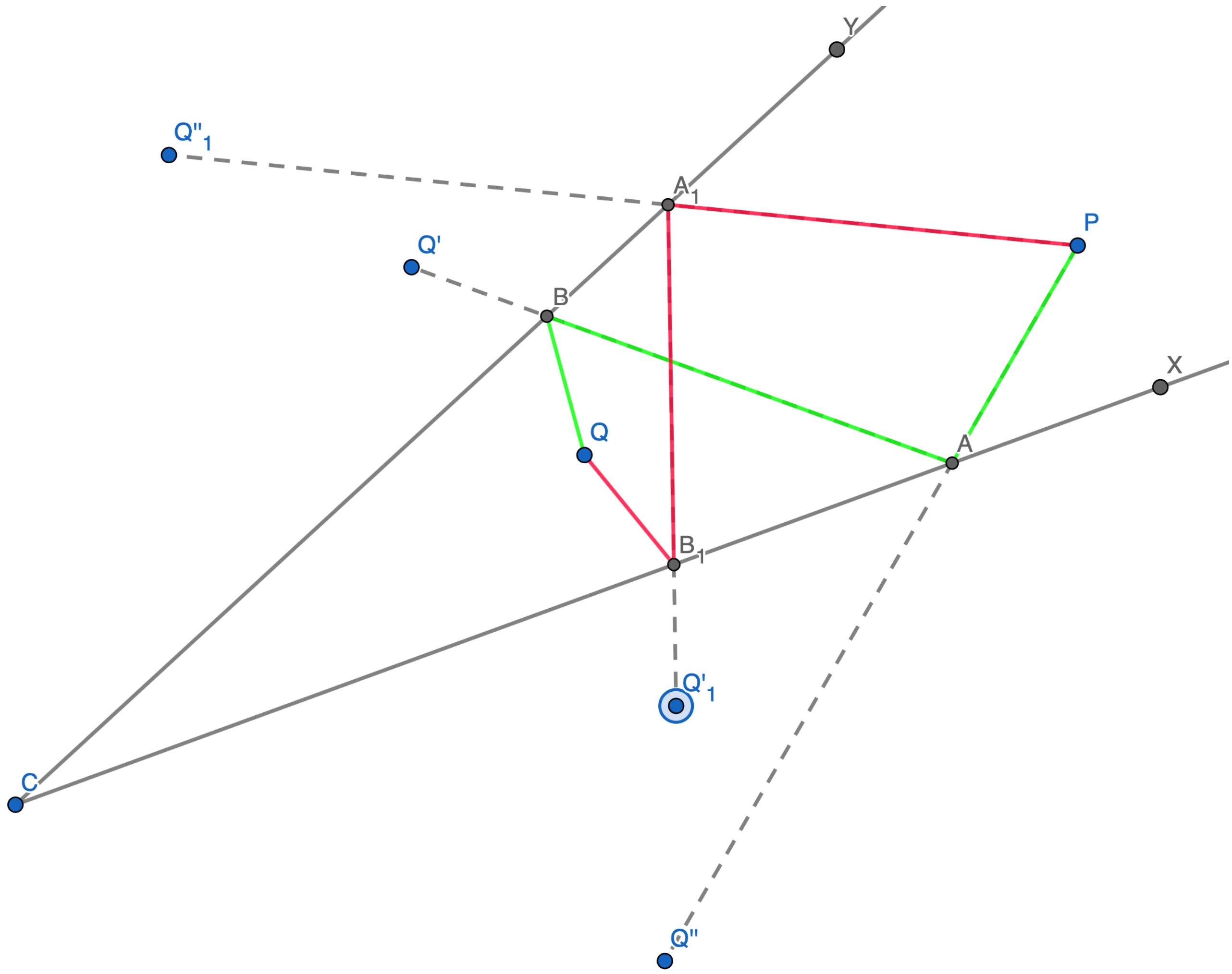
## Дано

$\angle xCy$
$P, Q$
$A \in (Cx)$
$B \in (Cy)$
$\rho(PABQ) = \min$

---

$A, B = ?$

## Решение




1. Построим отражение $Q$ относительно $Cy$, назовем эту точку $Q'$.
2. Построив минимальный маршрут к $Q'$ и отразив его от $Cy$, мы получим необходимый маршрут
3. Для построения маршрута воспользуемся результатом из предыдущей задачи с целью "Построить минимальный маршрут от $P$ к $Q'$, проходящий через $Cx$"

## Итак, последовательное построение:

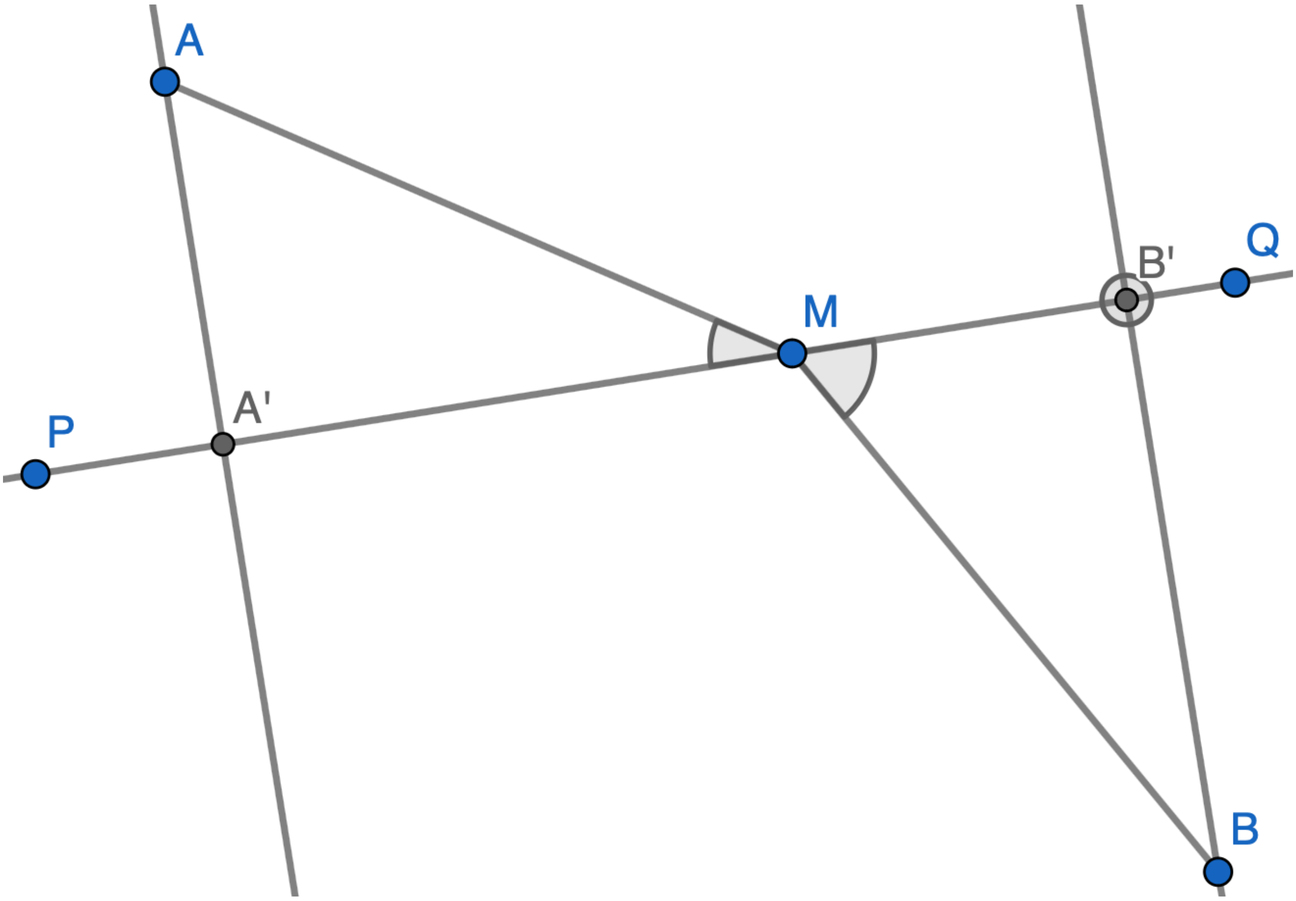
1. Пусть $Q'$ - отражение $Q$ относительно $Cy$
2. Пусть $Q''$ - отражение $Q'$ относительно $Cx$
3. Пусть $A = (PQ'') \cap (Cx)$
4. Пусть $B = (AQ') \cap (Cy)$
   Утверждается, что $(PABQ)$ - искомый маршрут

## Примечание

Может быть построено два таких маршрута - в зависимости от того, какой луч мы считаем первым $(Cx)$, а какой вторым $(Cy)$

Дана прямая $(PQ)$ и точки $A$ и $B$ так, что $A$ и $B$ находятся по разные стороны от $(PQ)$, а $P$ и $Q$ Находятся по разные стороны от $(AB)$. Докажите, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где $a > 0, b > 0$ имеет наименьшее знасение для такой точки $M \in (PQ)$, что $\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}$

## Решение




1. Опустим перпендикуляр к $(PQ)$ через $A$ и $B$, их основания обозначим как $A'$ и $B'$ соответственно
2. По геометрическому определению косинуса имеем, что

$$\begin{array}{l} \cos \angle AMP = \frac{|AM|}{|A'M|} \\ \cos \angle BMQ = \frac{|BM|}{|B'M|} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} AM = A'M \cdot \cos \angle AMP \\ BM = B'M \cdot \cos \angle BMQ \end{array}$$

3. Подставим результат в исходное выражение, получим

$$b \cdot A'M \cdot \cos \angle AMP + a \cdot B'M \cdot \cos \angle BMQ$$

4. В этом выражении $A'M + B'M$ - константа, т.к. точки $A, B, P, Q$ зафиксированы по условию
5. Заметим, что если $\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}$, то

$$\begin{array}{l} \cos \angle AMP = a \cdot k \\ \cos \angle BMQ = b \cdot k \end{array}$$

где $k$ - некий коэффциент подобия

6. Подставим полученное в выражение

$$b \cdot A'M \cdot a \cdot k + a \cdot B'M \cdot b \cdot k = 2k \cdot a \cdot b \cdot (A'M + B'M)$$

7. В полученном выражении все переменные константы, а следовательно оно четко задает точку $M$ (Удовлетворяющую исходному условию) так же утверждается, что это выражение минимально

5

а) Рассмотрим две точки $F_1, F_2$, прямую $l$, а так же точку $D$ такую, что величина $F_1D + F_2D$ минимально возмоная для всех точек прямой $l$. Докажите, что эллипс с фокусами $F_1$ и $F_2$, проходящий через точку $D$, касается прямой $l$ (тог есть имеет только одну точку пересечения)

## Решение

1. По определению эллипса, эллипс - ГМТ таких, что сумма расстояний от них до фокусов равна константе
2. Т.к. точка $D$ подобрана так, что сумма расстояний от нее до фокусов эллипса минимальна для всех точек на прямой и она единственна, то не найдется не одной точки $M$ такой, что $M \in l; F_1M + F_2M = F_1D + F_2D$ Ч.Т.Д.

---

б) Докажите оптическое свойство эллипса: луч, пущенный из одного фокуса эллипса, после отражения вернётся в другой фокус

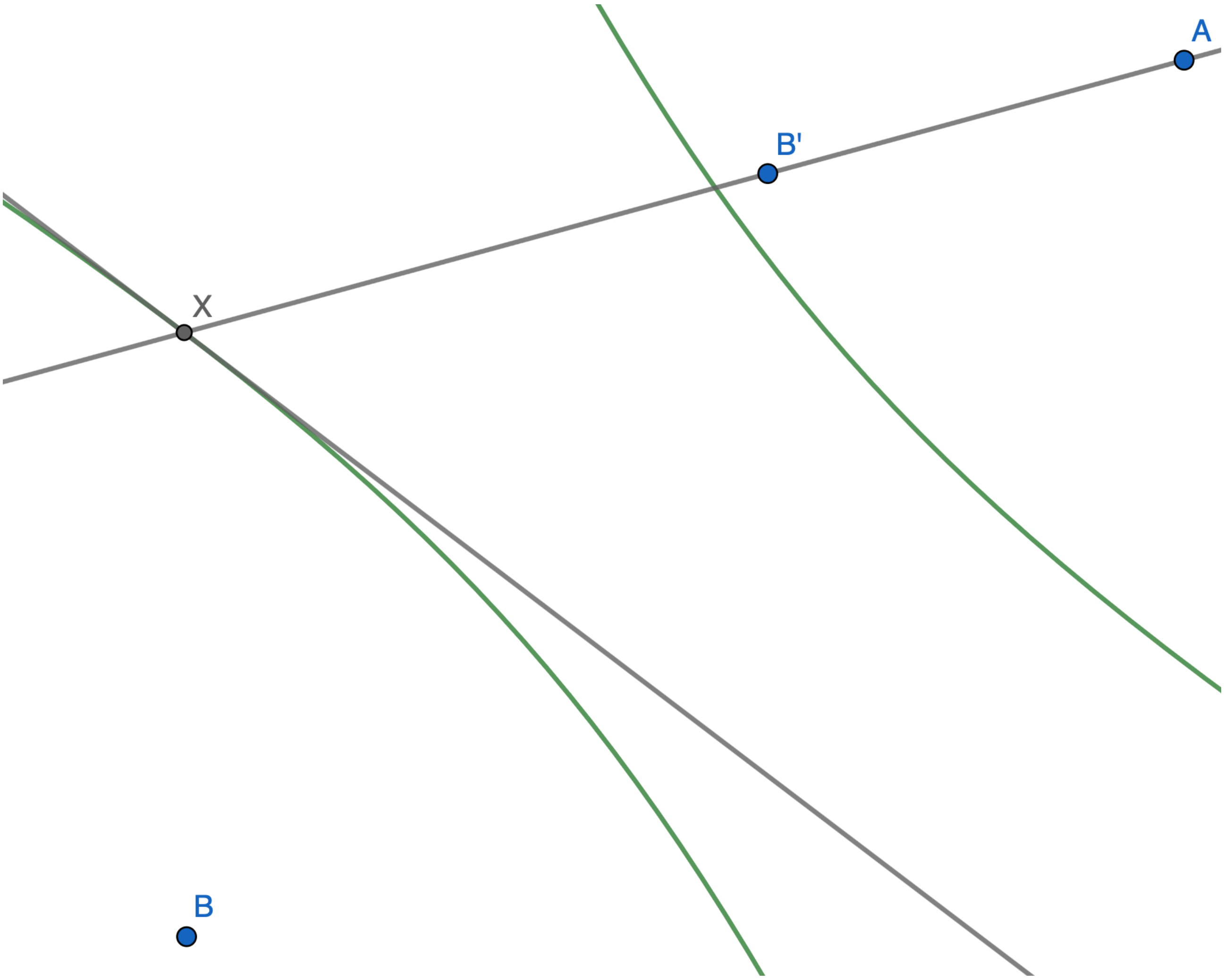
## Решение

1. Проведем касательную к эллипсу, проходящую через точку отражения (назовём точку отражения $D$, а касательную - $l$)
2. "Луч отразился от эллипса" равнозначно "Луч отразился от прямой $l$", Следовательно этот луч имеет свойства отраженного от прямой $l$
3. Одно из таких свойств, что луч, отраженный от прямой прозодит наименьший маршрут
4. Следовательно пройдя расстояние равное сумме расстояний от точки на эллипсе до его фокусов, луч попадет в другой фокус

6

а) Дана прямая $l$ и две точки $A$ и $B$ по разные стороны от этой прямой. Найдите на прямой точку $X$, такую, что абсолютная (по модулю) разница $XA - XB$ максимальна

## Решение




### Построение

1. Пусть $B'$ - отражение $B$ относительно $l$
2. $X = (AB') \cap l$

   Утверждается, что $X$ - искомая точка

   *Особый случай*: если $\rho(A,l) = \rho(B,l)$, то $B' = A \Rightarrow AB'$ неопределена. В этом случае $X = (AB) \cap l$

---

б) Докажите аналог задачи 5а) и выведите оптическое свойство гиперболы: если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной поверхности гиперболы видится исходящим из другого фокуса

## Решение

### Перефразируем задачу 5а) и запишем её в символьном виде

$$
\begin{aligned}
&F_1, F_2 \\
&l \\
&D : \begin{cases} |F_1D - F_2D| = \min \\ D \in l \end{cases} \\
&m - \text{гипербола с фокусами } F_1 \text{ и } F_2, D \in m \\
&m \cap l = \{D\}?
\end{aligned}
$$

### Доказательство

1. По определению гиперболы, гипербола - ГМТ таких, что разница расстояний от них до фокусов равна константе
2. Т.к. точка $D$ подобрана так, что разность расстояний от нее до фокусов гиперболы минимальна для всех точек на прямой и она единственна, то не найдется не одной точки $M$ такой, что $M \in l; |F_1M - F_2M| = |F_1D - F_2D|$
   Ч.Т.Д.
   Второй вопрос доказывается аналогично пункту а)

**7**

а) Рассмотрите ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом. Докажите, что для любой точки внутри этого ГМТ отрезок виден под бОльшим углом

## Решение

#### Было разобрано на парах планиметрии 9 класса и предоставляется читателю в качестве упражнения

Вспомним теорему косинусов:

$$
\begin{aligned}
&\triangle ABC \\
&BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos(\angle ABC) \cdot |AB| \cdot |AC|
\end{aligned}
$$

В свое же время данное ГМТ представляет из себя две равные дуги, ограниченные заданным отрезком и лежащие по разные стороны от него

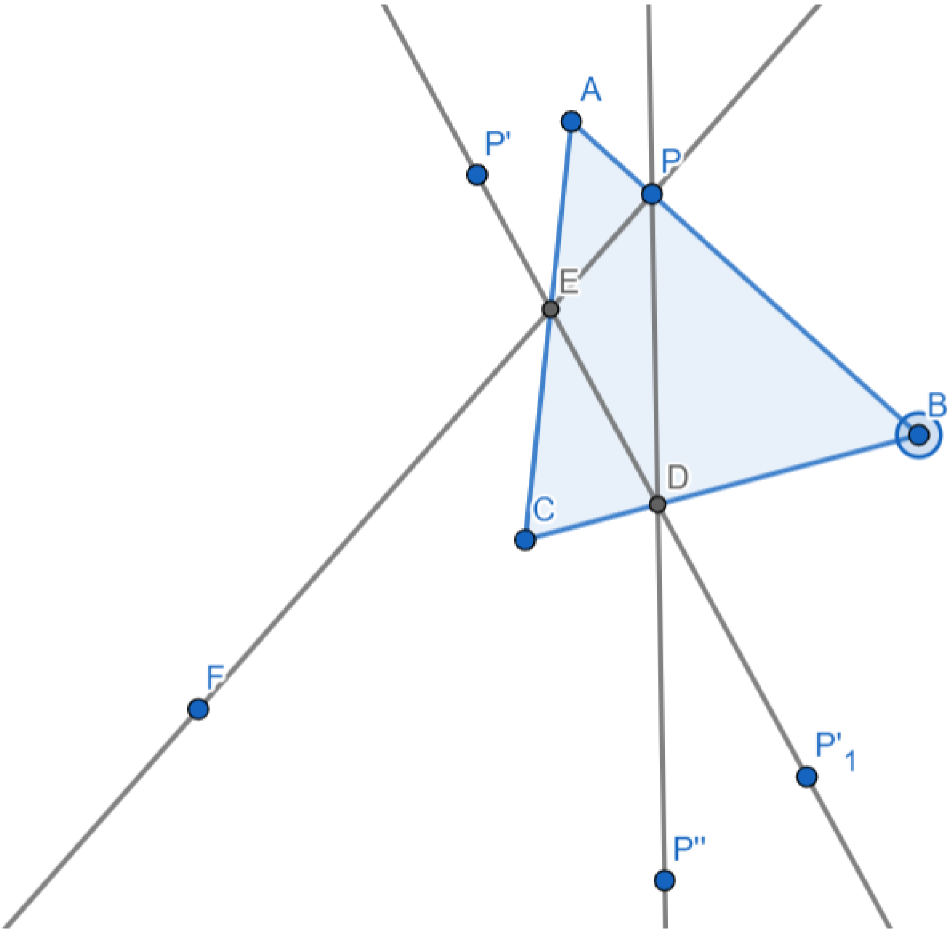
---

б) Дан отрезок $|PQ|$ и прямая $l$, его не пересекающая. Найдите точку $S \in l$ такую, что $\angle PSQ$ максимальный

8

9

а) Впишите в данный треугольник $ABC$ треугольник, одна из вершин $P$ которого фиксирована и лежит на стороне $AB$, и периметр которого имеет наименьшее возможное значение

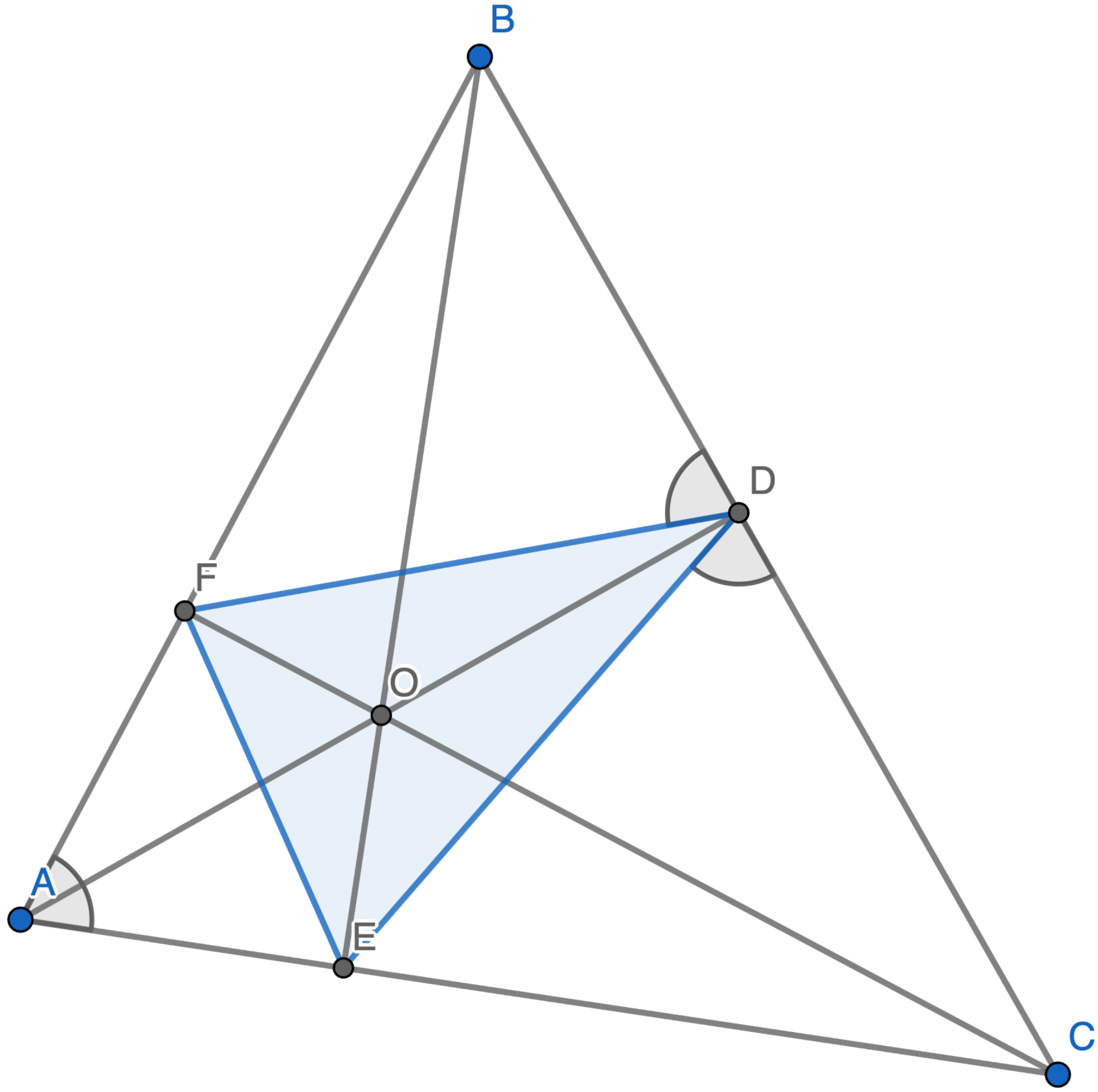



Построение:

1. Пусть $P'$ - отражение $P$ от одной из сторон (не $AB$) (Пусть это будет $AC$)
2. Пусть $P''$ - отражение $P'$ от второй стороны (не $AB$) (По остаточному принципу это будет $BC$)
3. Пусть $D = (P''P) \cap [BC]$
4. Пусть $E = (P'D) \cap [AC]$
   Утверждается, что $\triangle PDE$ - искомый

---

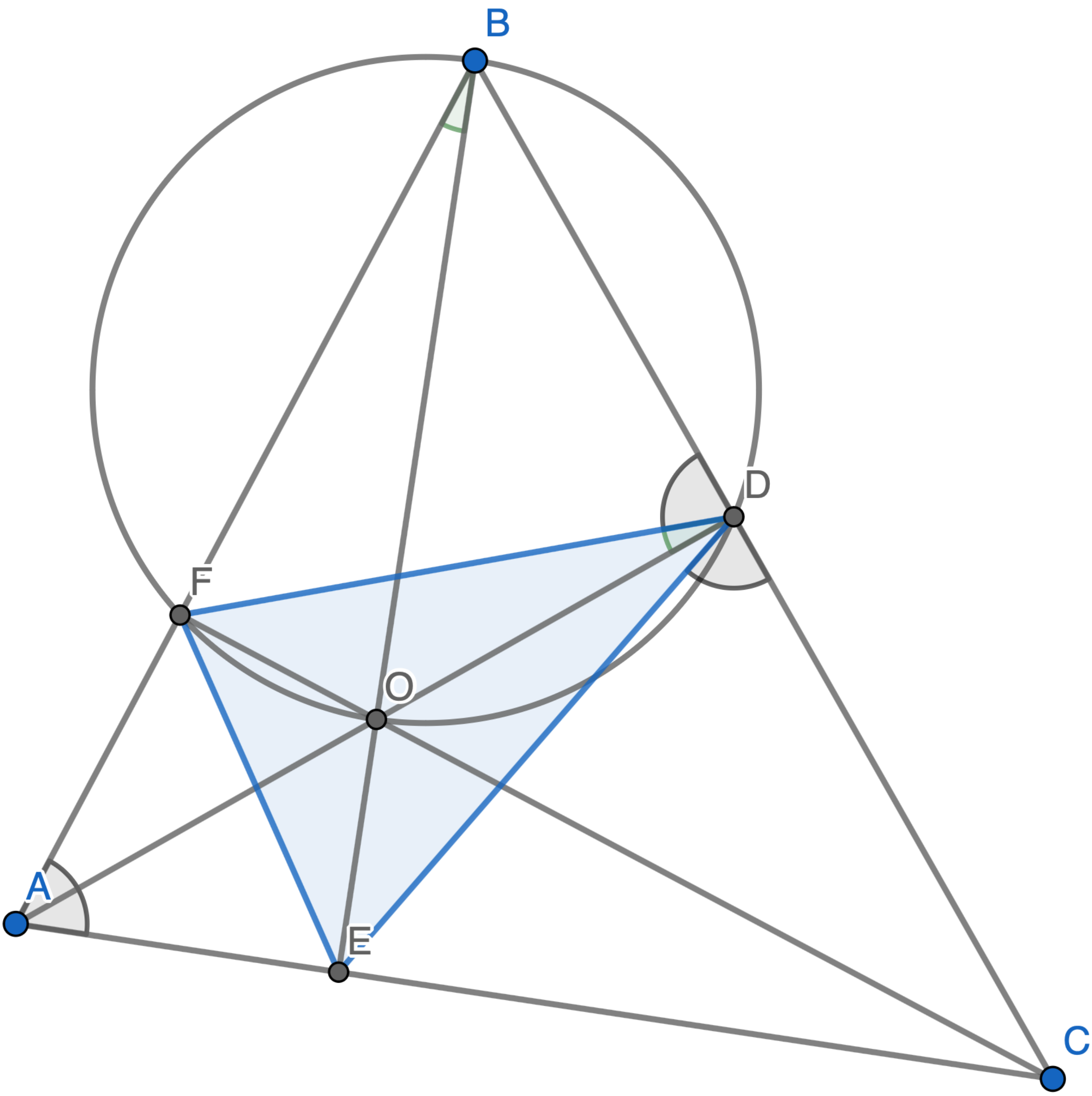
б) **Треугольник Шварца:** Впишите в данный остроугольный треугольник $ABC$ треугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что получившийся треугольник - высотный (образован основаниями высот)




## Докажем лемму:

В каждой из вершин $D, E, F$ (которые являются основаниями высот треугольника) две стороны высотного треугольника образуют одинаковые углы со стороной исходного треугольника.
Каждый из этих углов равен углу при противоположной вершине исходного треугольника.
Например, $\angle CDE = \angle BDF = \angle BAC$ и т. д.

## Доказательство



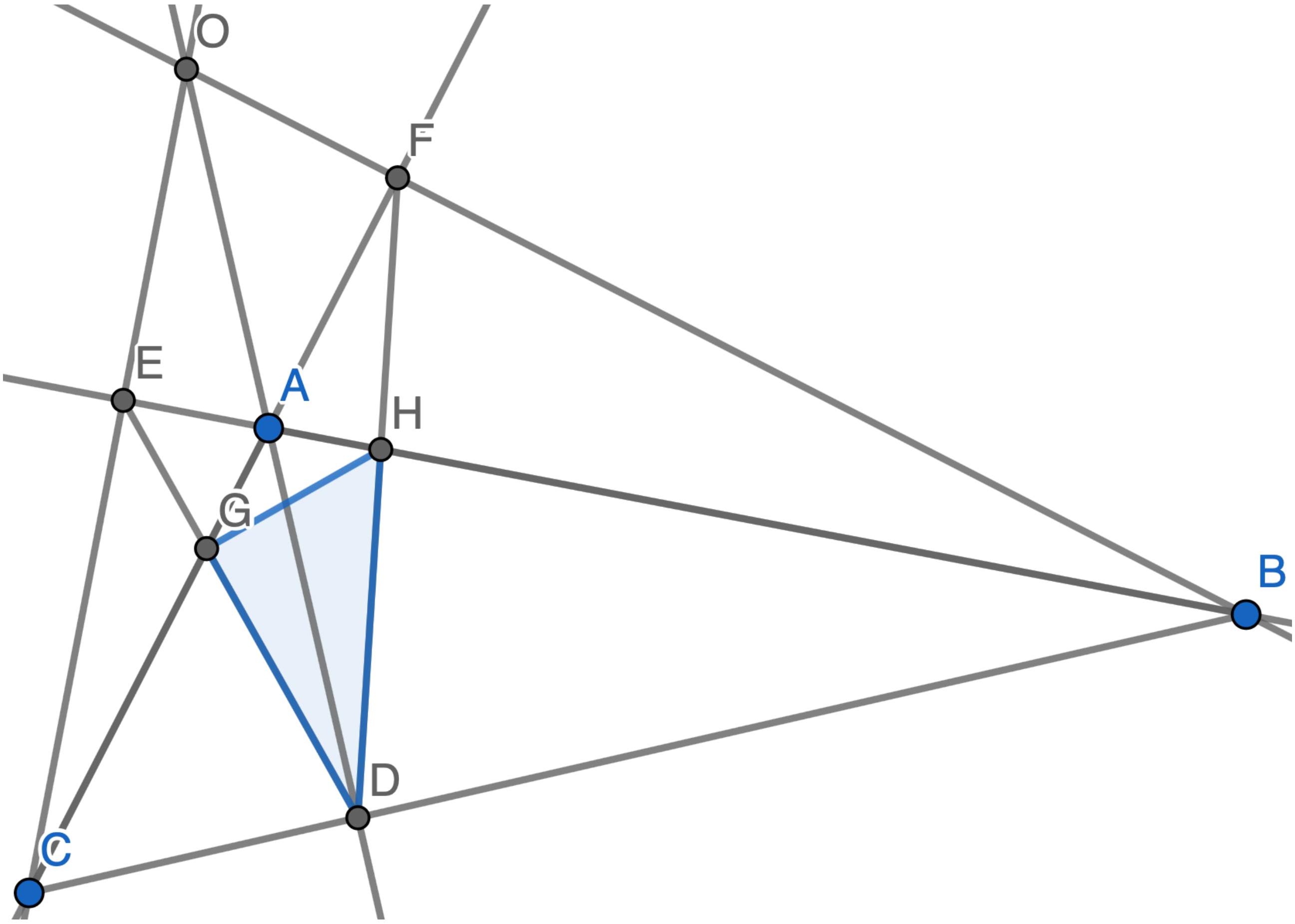

1. $\angle ADB = \angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$ (по условию)
2. Пусть $\omega -$ окружность с диаметром $OB$
3. $D, F \in \omega$ (из *1)* т.к. смотрят на $OB$ под прямым углом)
4. $\angle OBF, \angle ODF$ опираются на $\breve{OF} \Rightarrow \angle OBF = \angle ODF$
5. Т.к. $\angle AEB = 90^\circ$ (из *1)*), то $\triangle AEB$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle EBA + \angle EAB = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \angle OBF$
6. Т.к. $\angle ADB = 90^\circ$ (из *1)*), то $\angle BDF + \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = 90 - \angle ODF = \angle BAC$
   Ч.Т.Д.

## Обратно к задаче

Заметим, что точки $F$ и $E$ - места отражения луча из $D$, который возвращается в неё же, при этом проходя наименьший маршрут (доказано в предыдущих задачах), а следовательно треугольник им образованный имеет наименьший возможный периметр

---

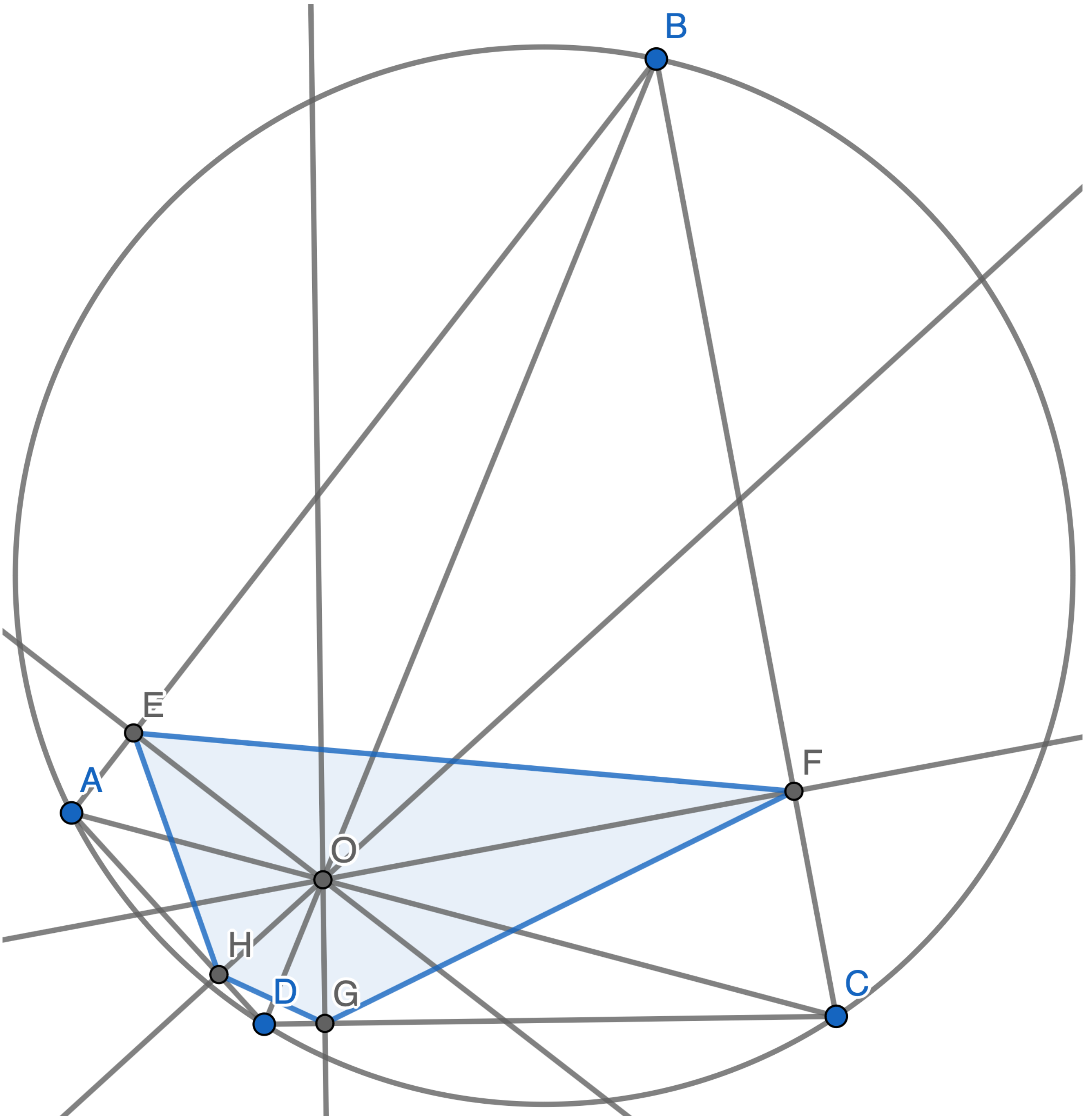
в) Впишите в произвольный треугольник $ABC$ треугольник наименьшего возможного периметра




**10**

а) Впишите в данный четырёхугольник четырёхугольник наименьшего возможного периметра. Выведите условие, при котором четырёхугольник не является вырожденным

## Решение




## Построение

1. Пусть $O \in (AC) \cap (BD)$
2. $E, F, G, H : OE \perp AB, E \in (AB); OF \perp BC, F \in (BC); OG \perp CD, G \in (CD);$
   $OH \perp DA, G \in (DA);$
   Утверждается, что $EFGH$ - искомый

## Условие при котором четырёхугольник невырожденный

$$\begin{cases} \exists \omega : A, B, C, D \in \omega \\ \max(\breve{A}B, \widehat{\breve{B}C}, \breve{C}D, \breve{D}A) < 180^\circ \end{cases}$$

---

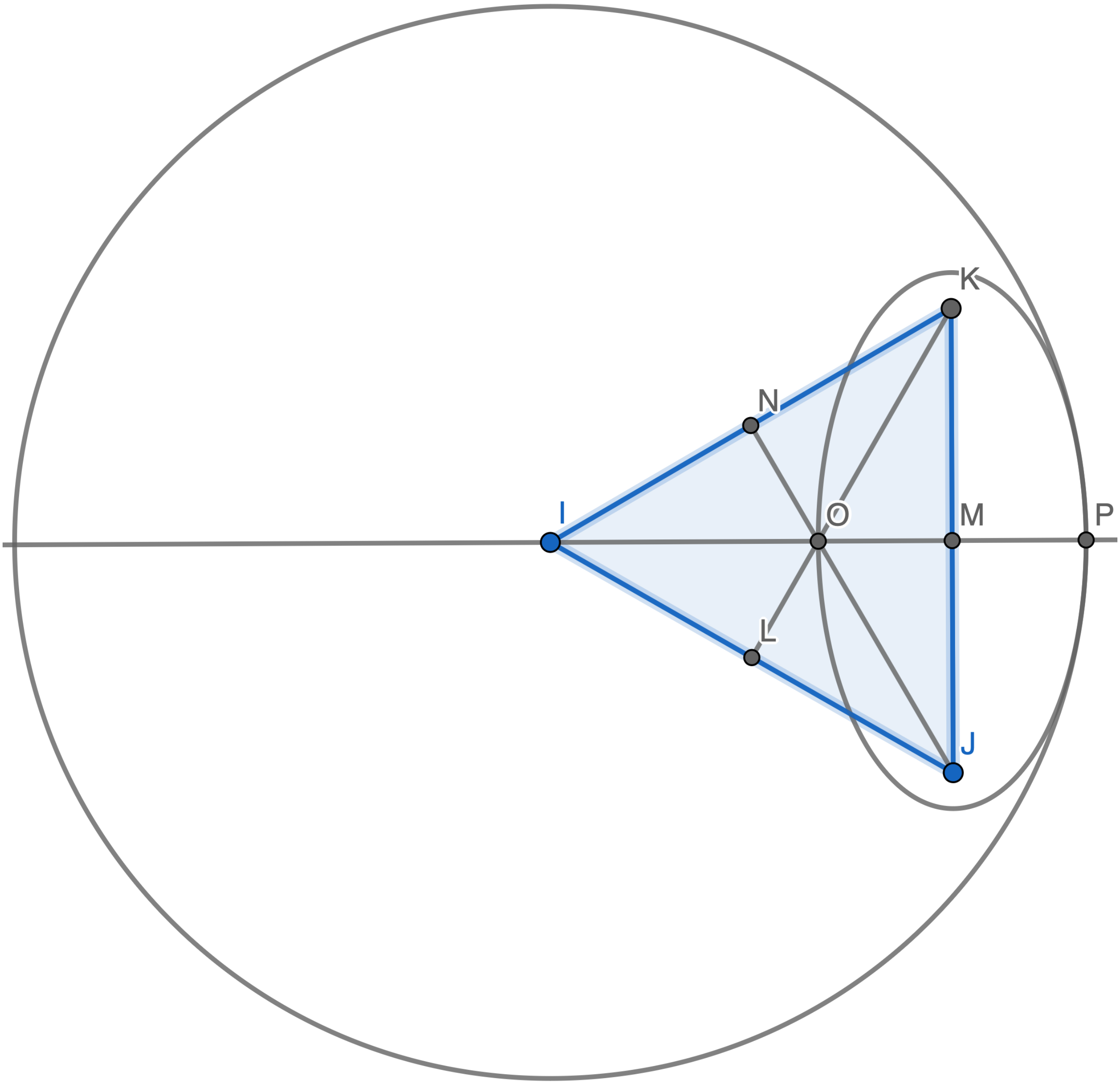
б) Докажите, что задача из пункта а) имеет невырожденное решение тогда и только тогда, когда четырёхугольник можно вписать в окружность

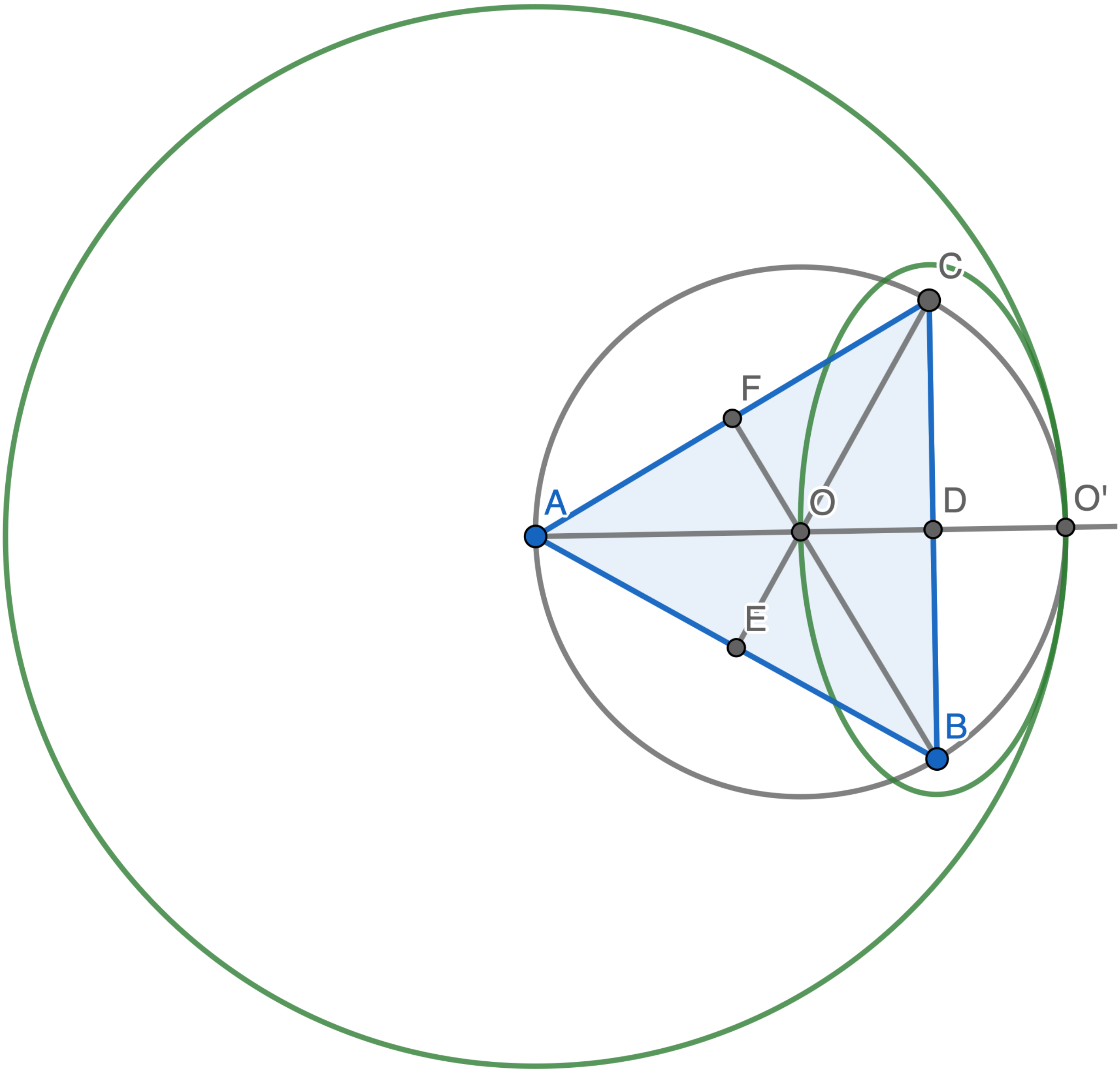
---

в) Докажите, что в пункте б) бесконечно много решений

**11**

а) Пусть $ABC$ - равносторонний треугольник, $M$ - точка. Докажите, что $MA \leq MB + MC$. В каком случае достигается равенство?


K
N
I
O
M
P
L
J

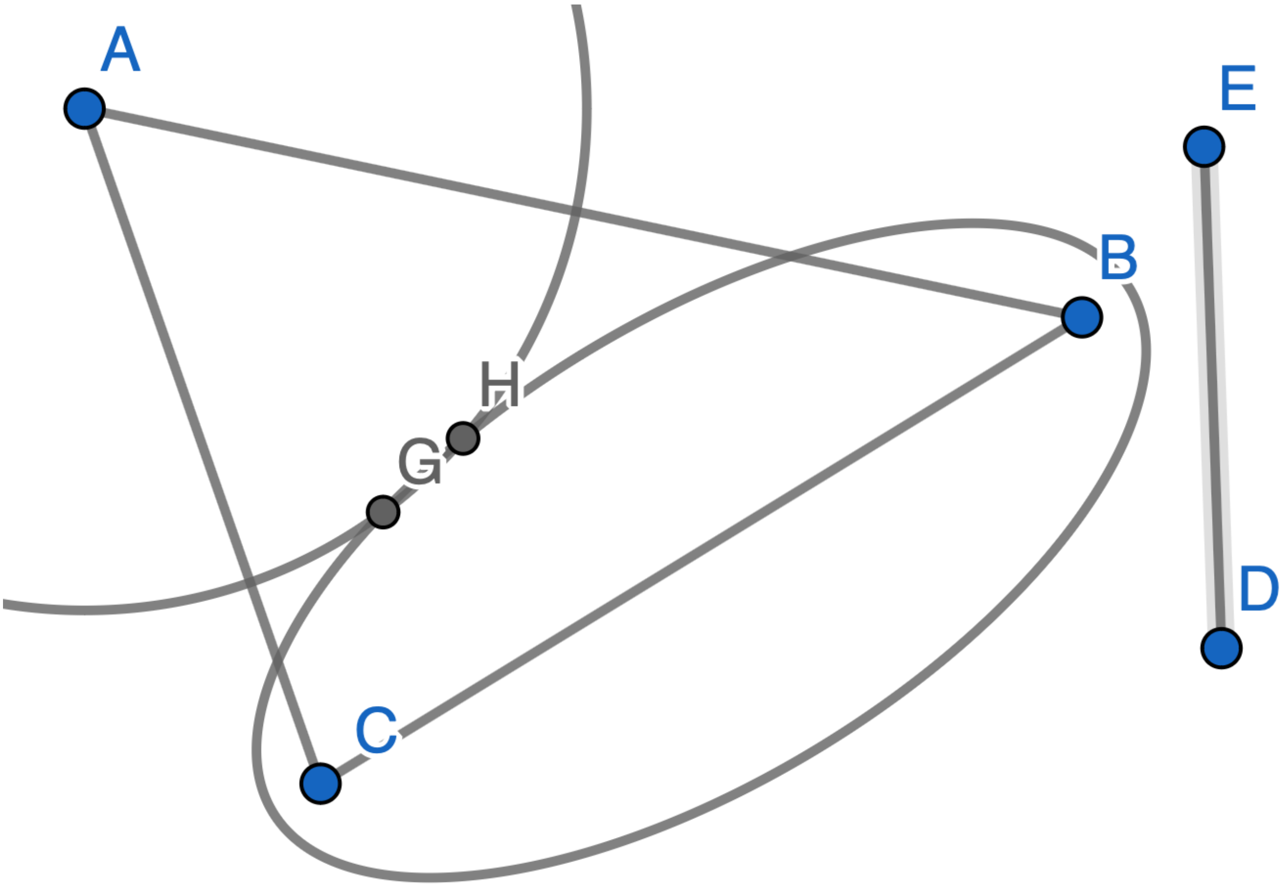



### Когда достигается равенство

1. Пусть $\omega$ – окружность; $A, B, C \in \omega$
2. Тогда утверждается, что равенство достигается если $M \in \breve{CB}$

---

б) **Задача Штейнера:** Найдите внутри остроугольного треугольника $ABC$ точку $X$ такую, что её сумма расстояний до вершин треугольника будет минимальной. Докажите, что из этой точки все отрезки в треугольнике видны под одинаковым углом.




---

в) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но для произвольного треугольника

---

г) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но точка ищется на всей плоскости

**12**

Найдите:
а) В плоскости четырёхугольника $ABCD$;
б) Внутри четырёхугольника $ABCD$
точку $X$, сумма расстояний которой от вершин треугольника является наименьшей

**13**

Найдите в плоскости треугольника $ABC$ такую точку $X$, что величина $m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC (m, n, p > 0)$ имела наименьшее значение (подсказка: докажите аналог задачи 11а) для треугольника, чьи стороны относятся как $m : n : p$ )

## 14

*(Внимание! Составитель не уверен, что задача решается школьными методами! Однако просит попробовать её решить)* Рассмотрим квадрат $ABCD$. Постройте сеть дорог, состоящую из отрезков, по которой из любой вершины квадрата можно попасть в любую другую и которая имеет минимальную длину

## 15

**Изопериметрическая задача:** Мы докажем, что из всех возможных дифференцируемых замунутых несамопересекающихся кривых с данной длиной наибольшую площадь имеет круг. Предположим, что решение соответствующей экстремальной задачи не существует
а) Докажите, что решение изопериметрической задачи - выпуклая кривая
Пусть существует решение, которое является впуклой кривой, тогда заметим, что, соединив отрезками впуклые участки и отразив участки относительно отрезков, то мы, не поменяв длину получим кривую с большей площадью

---

б) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если разделить кривую двумя точками $A$ и $B$ так, что она поделится на куски равной длины, то отрезок $[AB]$ разделит фигуру на 2 равновеликие

---

в) Докажите, что из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный

---

г) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если $O$ - точка на кривой, то $\angle AOB = 90^\circ$

---

д) Докажите изопериметрическую задачу

## 16

Найдите дугу кривой минимальной длины, соединяющую две точки $A, B$ и вместе с прямолинейным отрезком $AB$ ограничивающую наперёд заданную площадь

**17**

Даны две прямые, пересекающиеся в точке $O$. Найдите на каждой из них по точке $A$ и $B$ и затем соедините эти точки кривой линией так, чтобы при заданной площади, ограниченной кривой и обеими прямыми, длина дуги была ба минимальной