15

Изопериметрическая задача: Мы докажем, что из всех возможных дифференцируемых замунутых несамопересекающихся кривых с данной длиной наибольшую площадь имеет круг. Предположим, что решение соответствующей экстремальной задачи не существует
а) Докажите, что решение изопериметрической задачи - выпуклая кривая
Пусть существует решение, которое является впуклой кривой, тогда заметим, что, соединив отрезками впуклые участки и отразив участки относительно отрезков, то мы, не поменяв длину получим кривую с большей площадью

б) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если разделить кривую двумя точками A и B так, что она поделится на куски равной длины, то отрезок $[AB]$ разделит фигуру на 2 равновеликие

в) Докажите, что из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный

г) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если O - точка на кривой, то $\angle AOB = 90^\circ$

д) Докажите изопериметрическую задачу