Решения

1

Теорема Герона, экстремальное свойство световых лучей: Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой точку X, сумма расстояний которой до точек A и B имеет наименьшее возможное значение

Решение

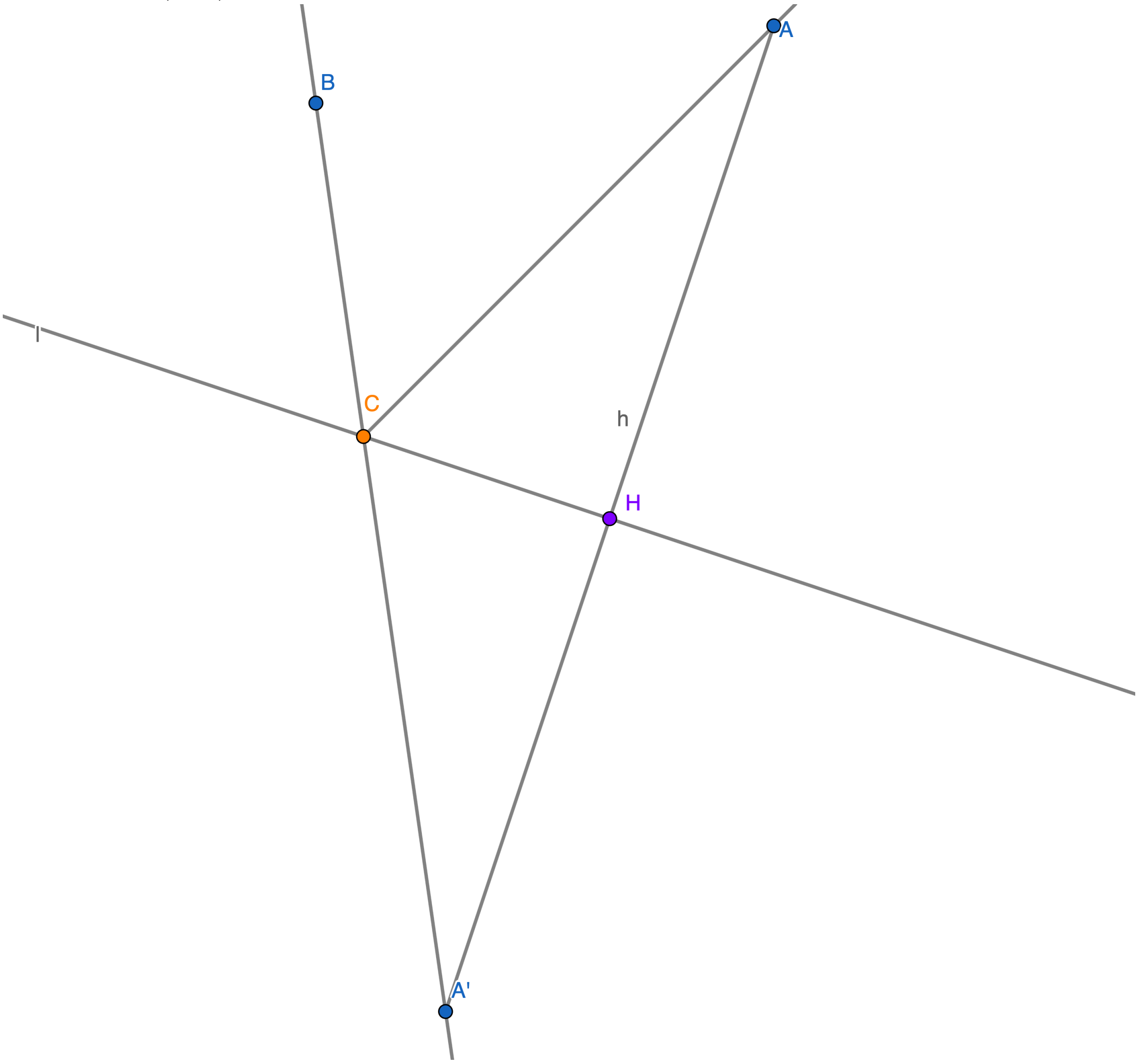
Дано

$$
\begin{aligned}
&l - \text{прямая} \\
&A, B \in \text{Одной полуплоскости относительно } l \\
&- \\
&X \in l \\
&|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)
\end{aligned}
$$

Построение

1. Опустим $h \perp l; A \in h$
2. Пусть $H = h \cap l$
3. Пусть $A' : \begin{cases} A' \in h \\ |HA'| = |HA| \\ A' \neq A \end{cases}$

4. Пусть $C = (AB) \cap l$



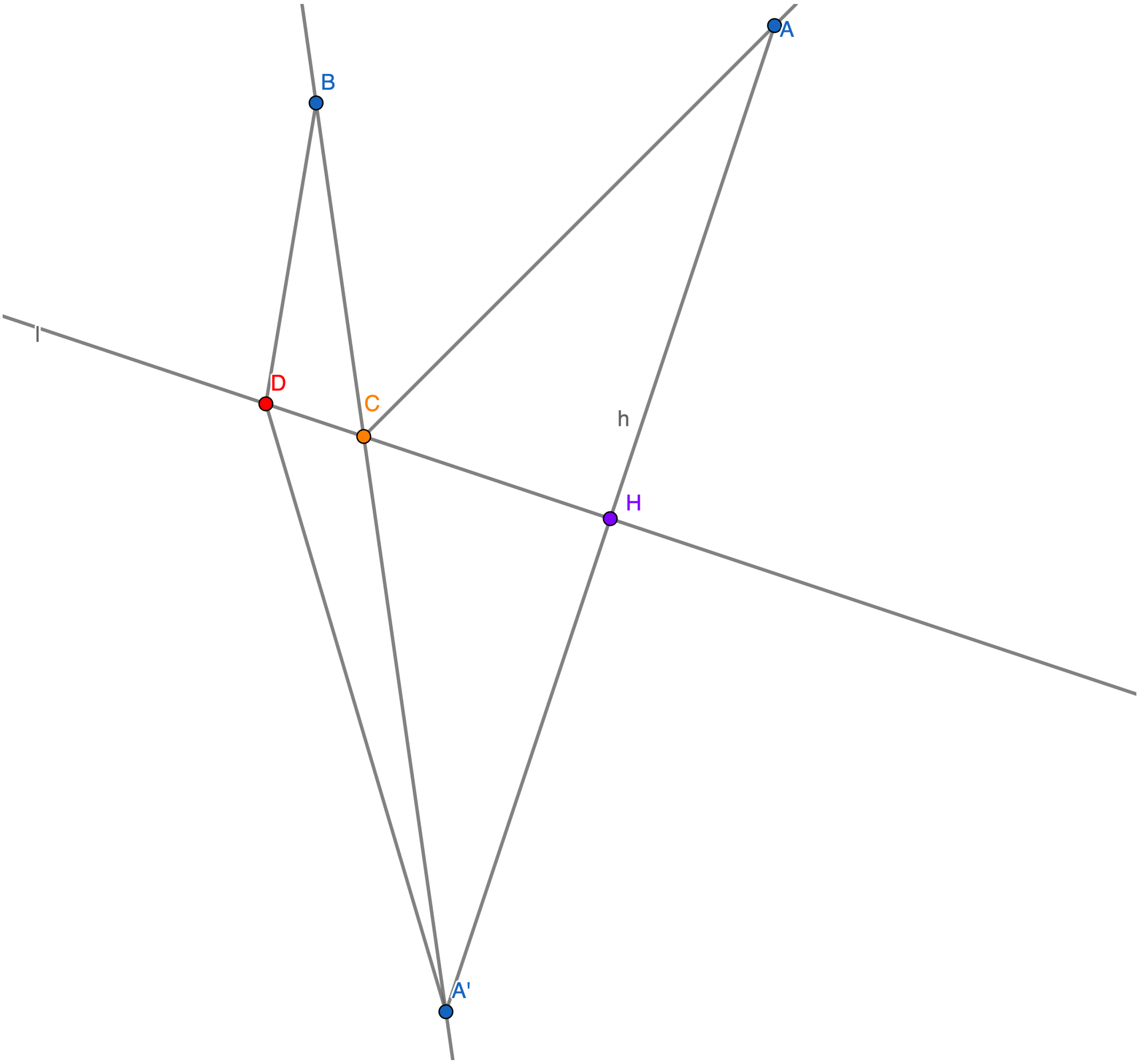
Утверждается, что C - искомая

Доказательство

От противного.

Пусть C не соответствует условию $|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)$.

Тогда $\exists D$: $\begin{cases} |AD| + |BD| < |AC| + |BC| \\ D \neq C \\ D \in l \end{cases}$



Заметим, что $C \in (A'B)$ $(\text{по построению}) \Rightarrow \exists \triangle A'DB : C \in [A'B]$.

Из геометрии мы знаем что в $\triangle ABC \begin{cases} |AB| < |AC| + |BC| \\ |BC| < |AB| + |AC| \Rightarrow \\ |AC| < |AB| + |BC| \end{cases}$

$$\Rightarrow |A'B| < |A'D| + |BD| \Rightarrow |A'C| + |BC| < |A'D| + |BD|$$

$$\begin{cases} l \perp h \\ A, A' \in h \\ A, A' \text{ равноудалены от } l \end{cases} \Rightarrow l - \text{Сер.пер. } [AA'] \Rightarrow \forall \triangle XAA' - \text{р/б}$$

Где X - Любая точка, такая что $\begin{cases} X \in l \\ X \notin h \end{cases}$

Засетим, что D, C удовлетворяют условиям X

$\Rightarrow \triangle DAA', \triangle CAA' - \text{р/б} \Rightarrow |DA| = |DA'|; |CA| = |CA'|$

Подставим в ранее полученное выражение:

$$|A'C| + |BC| < |A'D| + |BD| \Leftrightarrow |AC| + |BC| < |AD| + |BD|$$

А это противоречит условию.

Ч.Т.Д.

2

а) Среди треугольников с заданной площадью и заданной стороной найдите тот, для которого сумма двух других сторон наименьшая.

Решение

Дано

$$\begin{aligned}
&\triangle ABC \\
&|AB| \\
&S_{\triangle ABC} \\
&|AC| + |BC| = \min(|AC| + |BC|)
\end{aligned}$$

Решение

Формула площади треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|AB| * h_{AB}}{2}$$

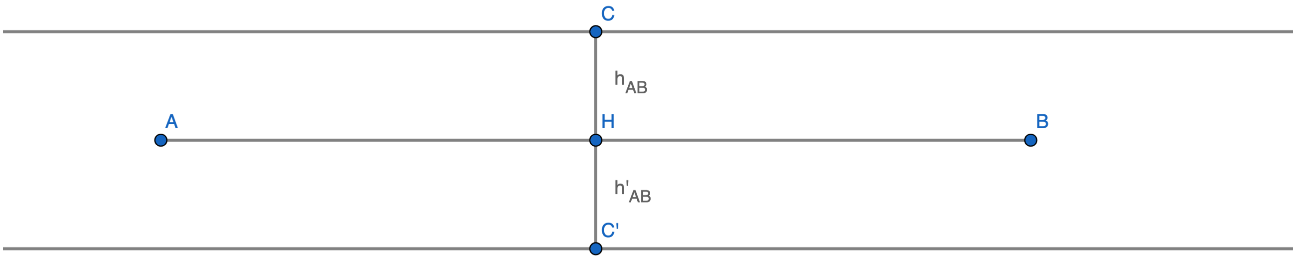
Где h_{AB} - высота треугольника, опущенная на сторону AB
Тогда можем выразить h_{ab}:

$$h_{AB} = 2\frac{S_{\triangle ABC}}{|AB|}$$

Заметим, что все переменные, стоящие по правую сторону равенства заданы по условию. Тогда из условия мы всегда можем получить h_{AB}. $*$) Будем считать, что она дана.

$|AC| + |BC|$ является суммой расстояния от одной точки (C) до двух других (A; B).

Поскольку точка C уже задана высотой, то она может располагаться только на одной из двух прямых, параллельных прямой (AB) и находящихся на расстоянии h_{AB} от них



Тогда точка C с минимальной суммой расстояний будет точка, являющаяся пересечением сер.пера к $[AB]$ и обозначенного ранее ГМТ

> $\triangle ABC$ - искомый

б) Среди треугольников с заданной стороной и заданной суммой двух дрегих сторон найдите треугольники с наибольшей и наименьшей площадью

Решение

Дано

$$\triangle ABC$$
$$|AB|$$
$$|AC| + |BC|$$

1. $S_{\triangle ABC} = \min(S_{\triangle ABC})$
2. $S_{\triangle ABC} = \max(S_{\triangle ABC})$

Решение

Заметим, что условия $\begin{cases} |AB| \\ |AC| + |BC| \end{cases}$ Задают ГМТ C, которое соответствует эллипсу, а максимальная "толщина" элипса достигается в его пересечении с сер.пером к отрезку, который соединяет фокусы.
Итого максимальная возможная высота $\triangle ABC$ (а значит и максимальная площадь т.к. они прямо пропорциональны) достигается в точке пересечения сер.пера к отрезку $[AB]$ с эллипсом $e = \{M \ | \ |AM| + |BM| = |AC| + |BC|\}$

3

Дан острый угол, образованный двумя прямыми, а так же две точки P и Q, лежащие внутри угла. Найдите кратчайший маршрут $PABQ$, где A принадлежит первой прямой, а B - второй. Не упустите 2 случая и укажите критерий, в каком случае какой маршрут минимален

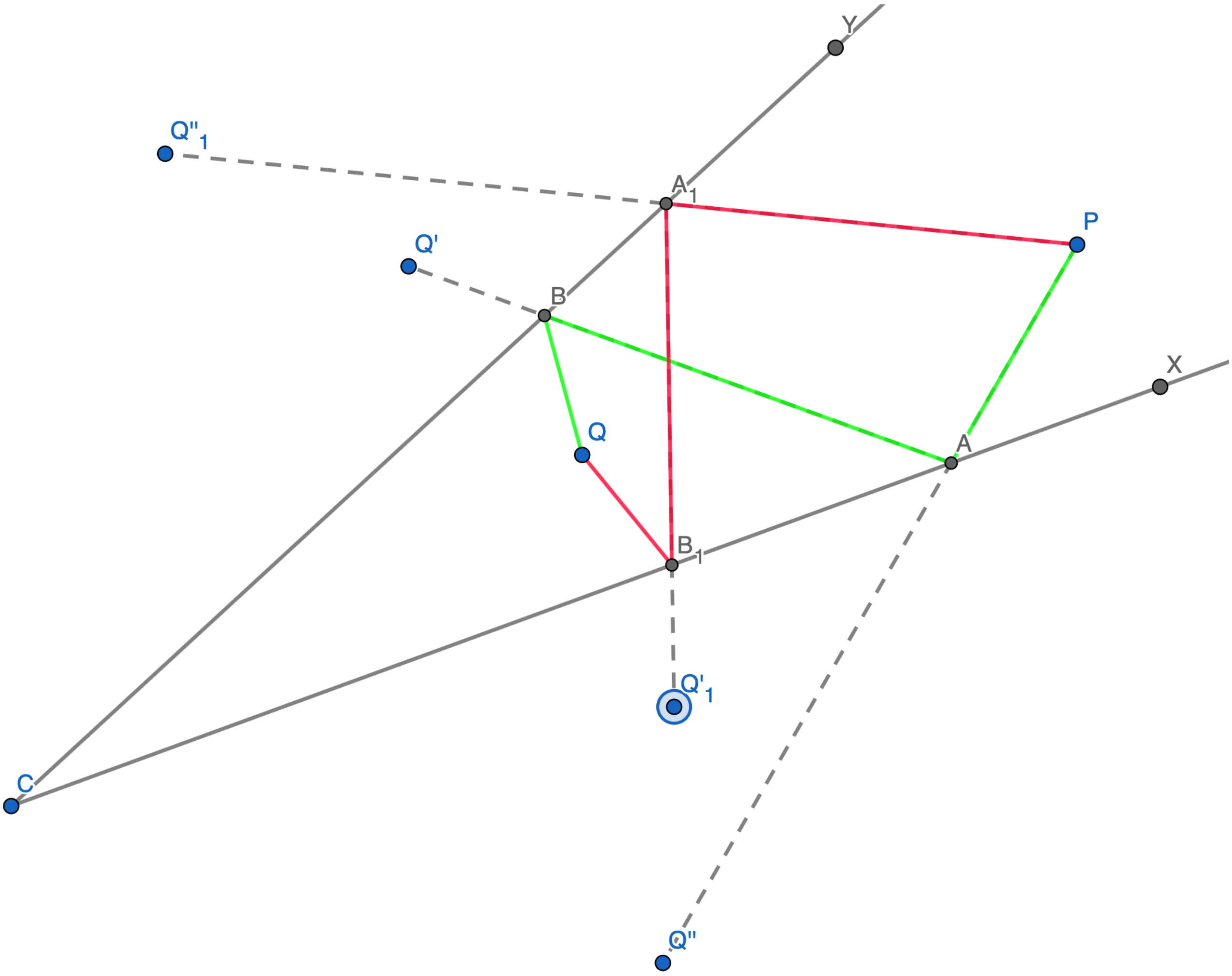
Решение

Дано

$\angle xCy$
P, Q
$A \in (Cx)$
$B \in (Cy)$
$\rho(PABQ) = \min$

$A, B = ?$

Решение



1. Построим отражение Q относительно Cy, назовем эту точку Q'.
2. Построив минимальный маршрут к Q' и отразив его от Cy, мы получим необходимый маршрут
3. Для построения маршрута воспользуемся результатом из предыдущей задачи с целью "Построить минимальный маршрут от P к Q', проходящий через Cx"

Итак, последовательное построение:

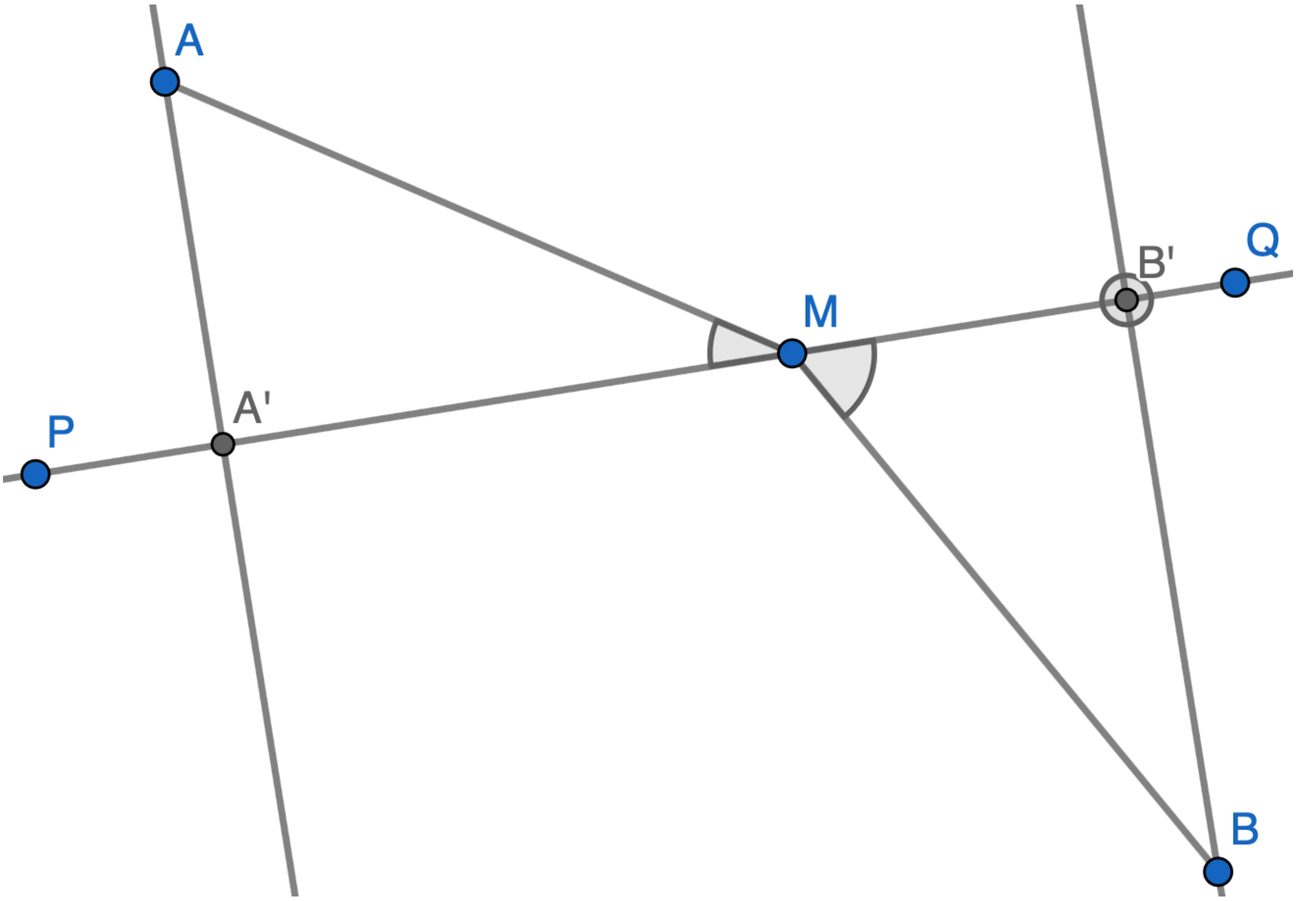
1. Пусть Q' - отражение Q относительно Cy
2. Пусть Q'' - отражение Q' относительно Cx
3. Пусть $A = (PQ'') \cap (Cx)$
4. Пусть $B = (AQ') \cap (Cy)$
   Утверждается, что $(PABQ)$ - искомый маршрут

Примечание

Может быть построено два таких маршрута - в зависимости от того, какой луч мы считаем первым (Cx), а какой вторым (Cy)

Дана прямая (PQ) и точки A и B так, что A и B находятся по разные стороны от (PQ), а P и Q Находятся по разные стороны от (AB). Докажите, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где $a > 0, b > 0$ имеет наименьшее знасение для такой точки $M \in (PQ)$, что $\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}$

Решение



1. Опустим перпендикуляр к (PQ) через A и B, их основания обозначим как A' и B' соответственно
2. По геометрическому определению косинуса имеем, что

$$\begin{matrix} \cos \angle AMP = \frac{|AM|}{|A'M|} \\ \cos \angle BMQ = \frac{|BM|}{|B'M|} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} AM = A'M \cdot \cos \angle AMP \\ BM = B'M \cdot \cos \angle BMQ \end{matrix}$$

3. Подставим результат в исходное выражение, получим

$$b \cdot A'M \cdot \cos \angle AMP + a \cdot B'M \cdot \cos \angle BMQ$$

4. В этом выражении $A'M + B'M$ - константа, т.к. точки A, B, P, Q зафиксированы по условию
5. Заметим, что если $\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}$, то

$$\begin{matrix} \cos \angle AMP = a \cdot k \\ \cos \angle BMQ = b \cdot k \end{matrix}$$

где k - некий коэффциент подобия

6. Подставим полученное в выражение

$$b \cdot A'M \cdot a \cdot k + a \cdot B'M \cdot b \cdot k = 2k \cdot a \cdot b \cdot (A'M + B'M)$$

7. В полученном выражении все переменные константы, а следовательно оно четко задает точку M (Удовлетворяющую исходному условию) так же утверждается, что это выражение минимально

5

а) Рассмотрим две точки F_1, F_2, прямую l, а так же точку D такую, что величина $F_1D + F_2D$ минимально возмоная для всех точек прямой l. Докажите, что эллипс с фокусами F_1 и F_2, проходящий через точку D, касается прямой l (тог есть имеет только одну точку пересечения)

Решение

1. По определению эллипса, эллипс - ГМТ таких, что сумма расстояний от них до фокусов равна константе
2. Т.к. точка D подобрана так, что сумма расстояний от нее до фокусов эллипса минимальна для всех точек на прямой и она единственна, то не найдется не одной точки M такой, что $M \in l; F_1M + F_2M = F_1D + F_2D$ Ч.Т.Д.

б) Докажите оптическое свойство эллипса: луч, пущенный из одного фокуса эллипса, после отражения вернётся в другой фокус

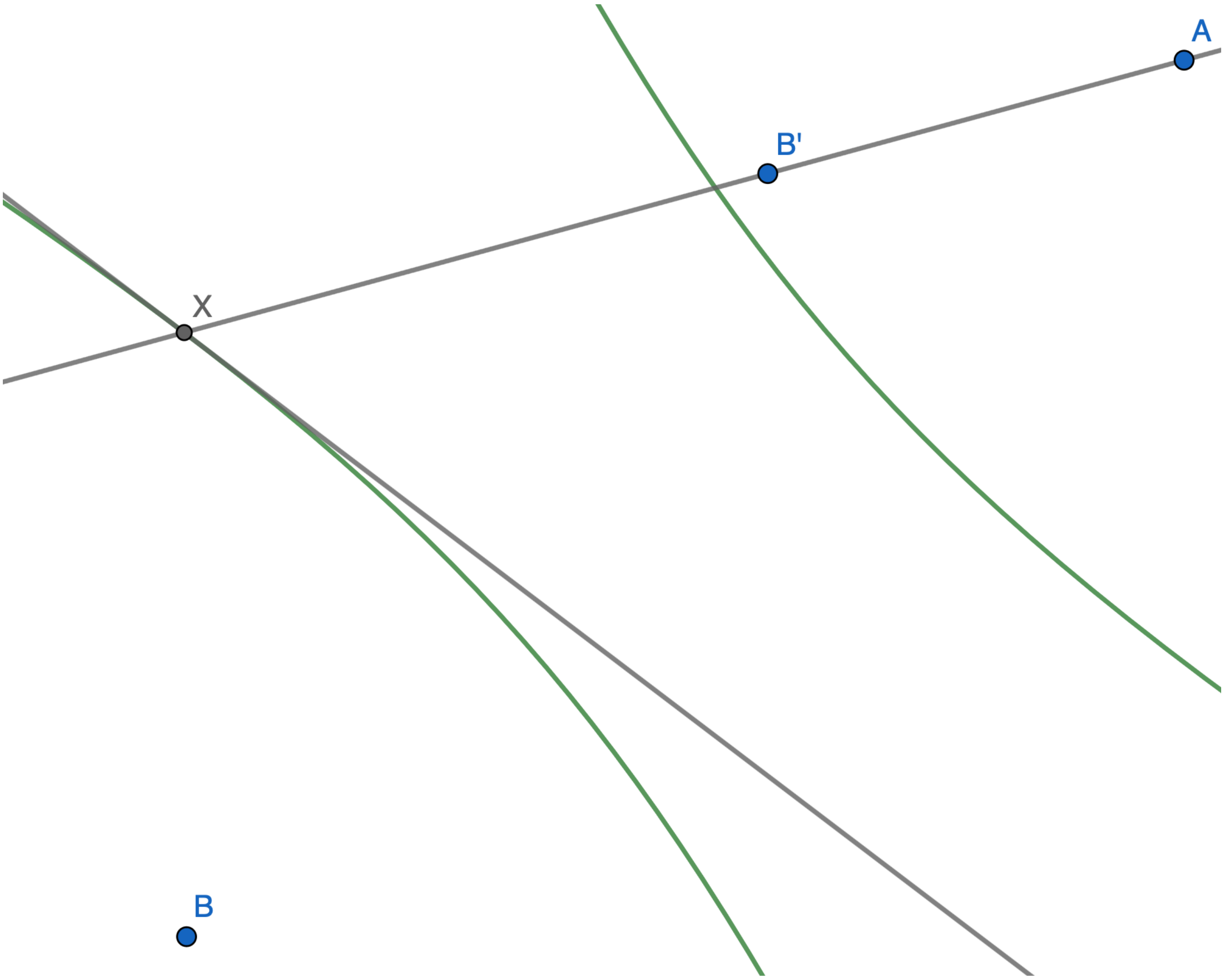
Решение

1. Проведем касательную к эллипсу, проходящую через точку отражения (назовём точку отражения D, а касательную - l)
2. "Луч отразился от эллипса" равнозначно "Луч отразился от прямой l", Следовательно этот луч имеет свойства отраженного от прямой l
3. Одно из таких свойств, что луч, отраженный от прямой прозодит наименьший маршрут
4. Следовательно пройдя расстояние равное сумме расстояний от точки на эллипсе до его фокусов, луч попадет в другой фокус

6

а) Дана прямая l и две точки A и B по разные стороны от этой прямой. Найдите на прямой точку X, такую, что абсолютная (по модулю) разница $XA - XB$ максимальна

Решение



Построение

1. Пусть B' - отражение B относительно l
2. $X = (AB') \cap l$

   Утверждается, что X - искомая точка

   Особый случай: если $\rho(A, l) = \rho(B, l)$, то $B' = A \Rightarrow AB'$ неопределена. В этом случае $X = (AB) \cap l$

б) Докажите аналог задачи 5а) и выведите оптическое свойство гиперболы: если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной поверхности гиперболы видится исходящим из другого фокуса

Решение

Перефразируем задачу 5а) и запишем её в символьном виде

$$F_1, F_2$$
$$l$$
$$D : \begin{cases} |F_1D - F_2D| = \min \\ D \in l \end{cases}$$
$$m - \text{гипербола с фокусами } F_1 \text{ и } F_2, D \in m$$
$$m \cap l = \{D\}?$$

Доказательство

1. По определению гиперболы, гипербола - ГМТ таких, что разница расстояний от них до фокусов равна константе
2. Т.к. точка D подобрана так, что разность расстояний от нее до фокусов гиперболы минимальна для всех точек на прямой и она единственна, то не найдется не одной точки M такой, что $M \in l; |F_1M - F_2M| = |F_1D - F_2D|$
   Ч.Т.Д.
   Второй вопрос доказывается аналогично пункту а)

7

а) Рассмотрите ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом. Докажите, что для любой точки внутри этого ГМТ отрезок виден под бОльшим углом

Решение

Было разобрано на парах планиметрии 9 класса и предоставляется читателю в качестве упражнения

Вспомним теорему косинусов:

$$\triangle ABC$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cos(\angle ABC) \cdot |AB| \cdot |AC|$$

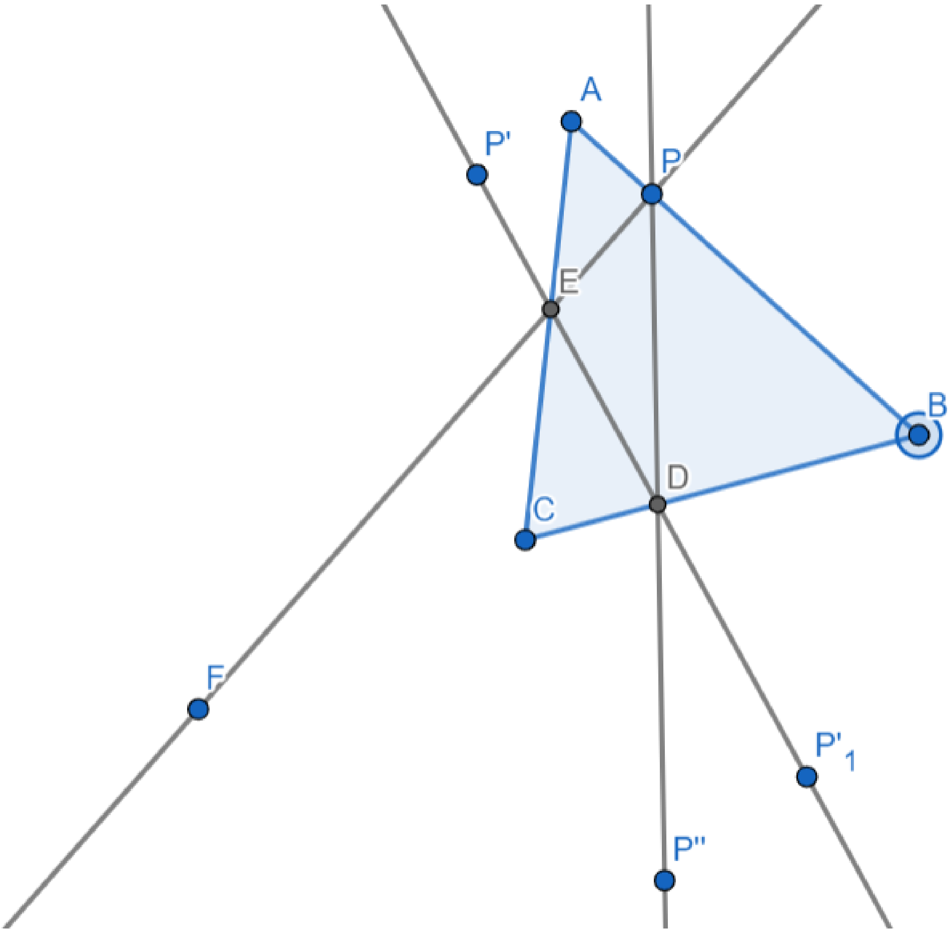
В свое же время данное ГМТ представляет из себя две равные дуги, ограниченные заданным отрезком и лежащие по разные стороны от него

б) Дан отрезок $|PQ|$ и прямая l, его не пересекающая. Найдите точку $S \in l$ такую, что $\angle PSQ$ максимальный

8

9

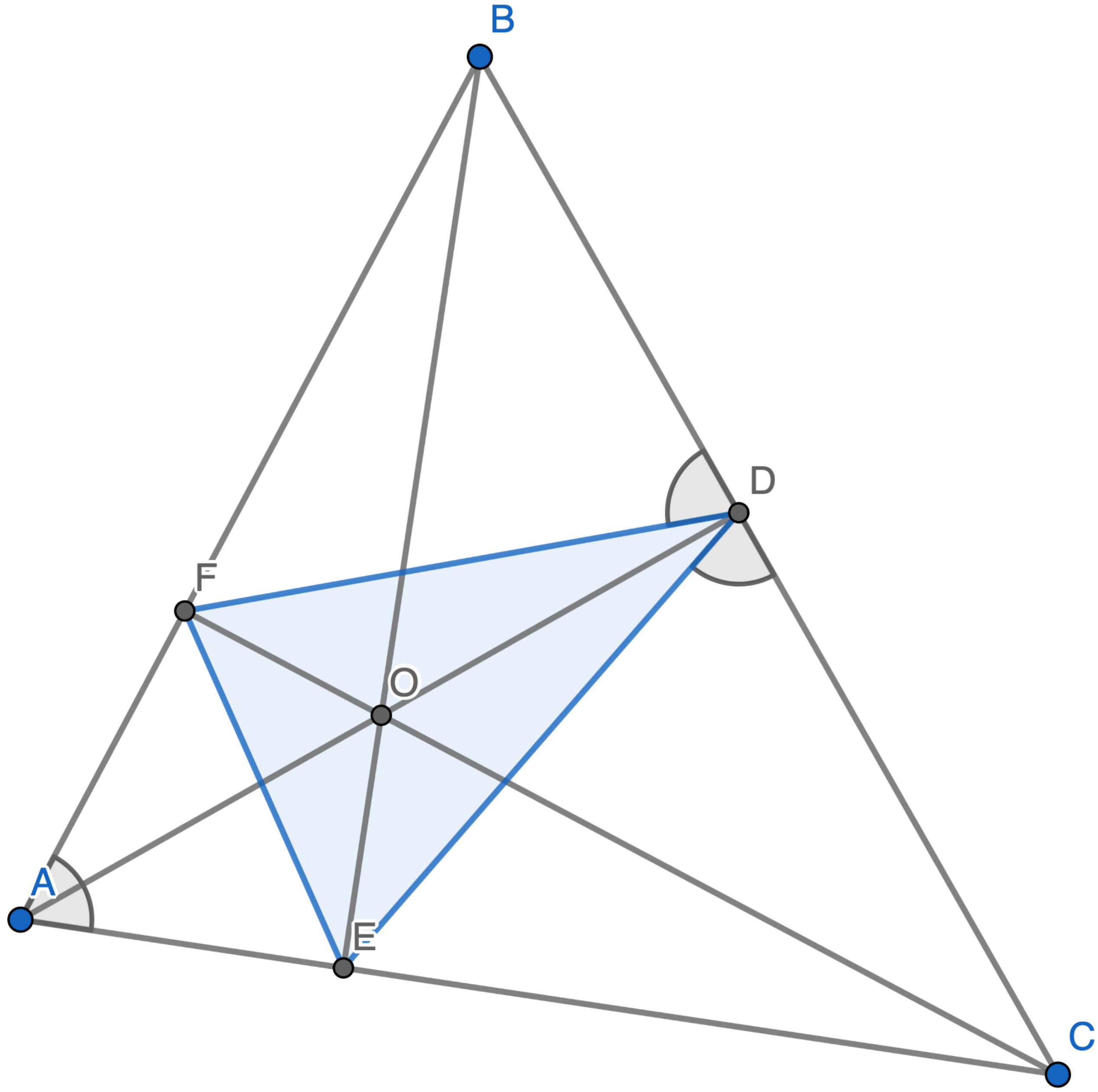
а) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, одна из вершин P которого фиксирована и лежит на стороне AB, и периметр которого имеет наименьшее возможное значение



Построение:

1. Пусть P' - отражение P от одной из сторон (не AB) (Пусть это будет AC)
2. Пусть P'' - отражение P' от второй стороны (не AB) (По остаточному принципу это будет BC)
3. Пусть $D = (P''P) \cap [BC]$
4. Пусть $E = (P'D) \cap [AC]$
   Утверждается, что $\triangle PDE$ - искомый

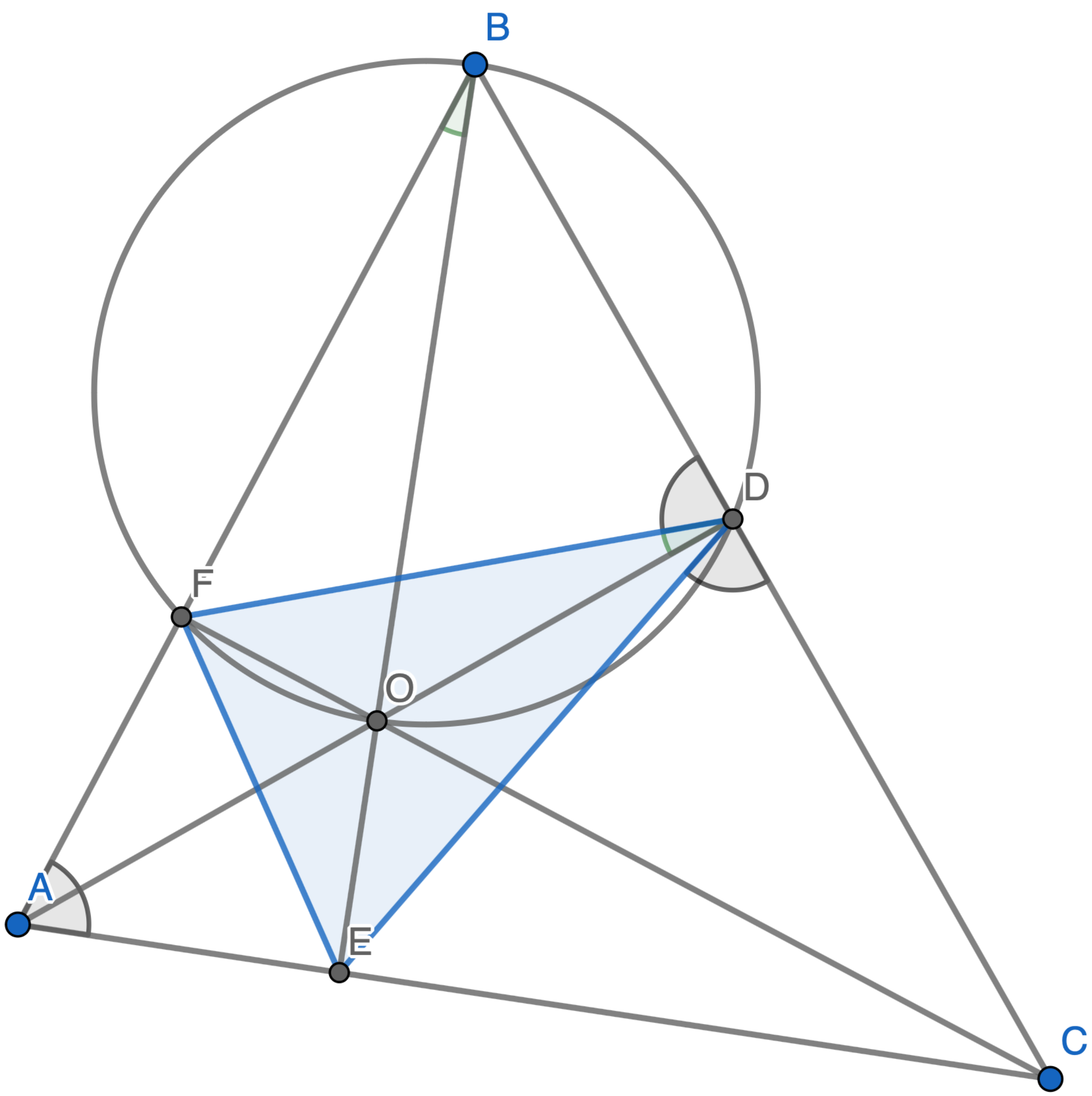
б) **Треугольник Шварца:** Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что получившийся треугольник - высотный (образован основаниями высот)



Докажем лемму:

В каждой из вершин D, E, F (которые являются основаниями высот треугольника) две стороны высотного треугольника образуют одинаковые углы со стороной исходного треугольника.
Каждый из этих углов равен углу при противоположной вершине исходного треугольника.
Например, $\angle CDE = \angle BDF = \angle BAC$ и т. д.

Доказательство

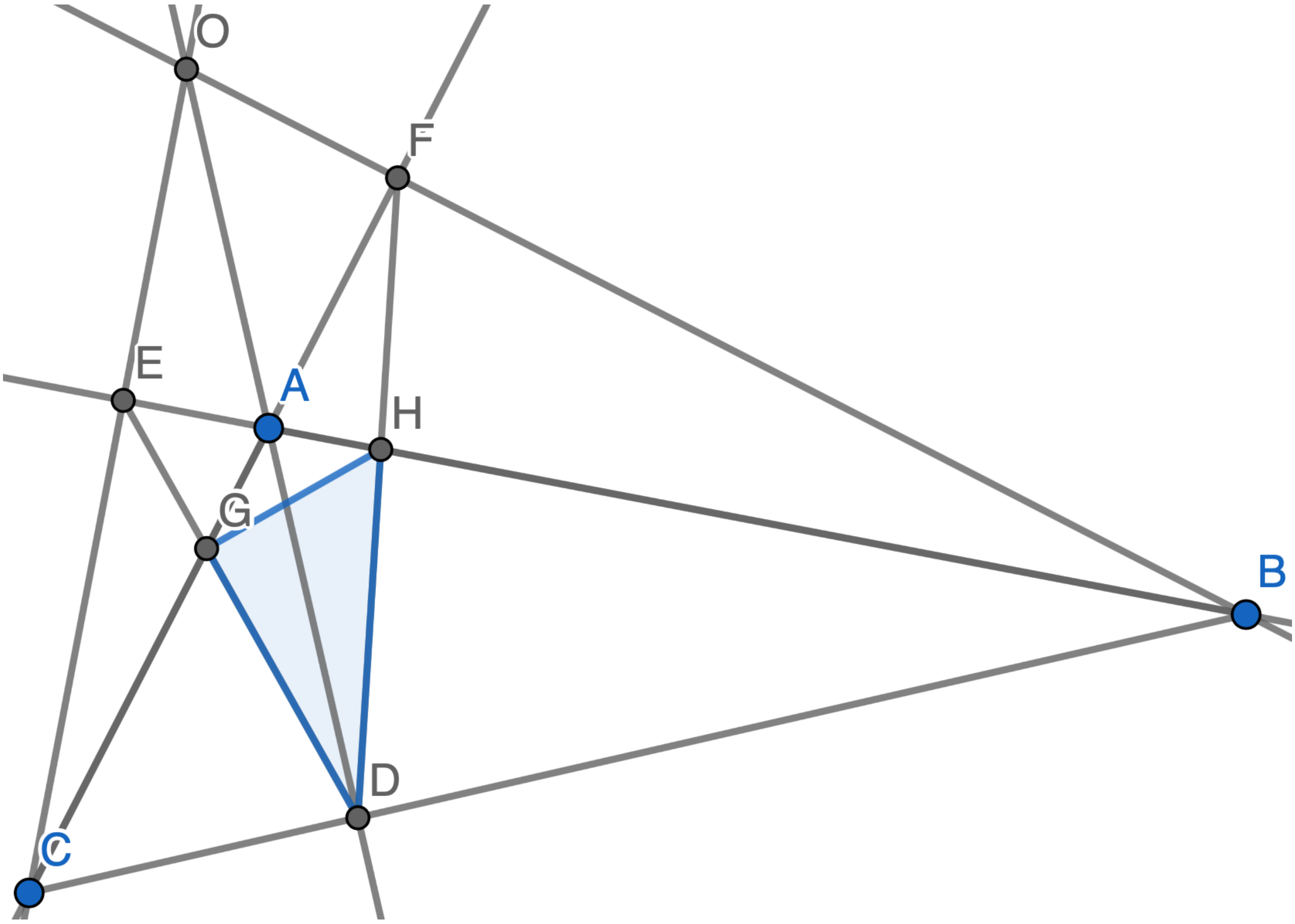


1. $\angle ADB = \angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$ (по условию)
2. Пусть $\omega -$ окружность с диаметром OB
3. $D, F \in \omega$ (из *1)* т.к. смотрят на OB под прямым углом)
4. $\angle OBF, \angle ODF$ опираются на $\breve{OF} \Rightarrow \angle OBF = \angle ODF$
5. Т.к. $\angle AEB = 90^\circ$ (из *1)*), то $\triangle AEB$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle EBA + \angle EAB = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \angle OBF$
6. Т.к. $\angle ADB = 90^\circ$ (из *1)*), то
   $\angle BDF + \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = 90 - \angle ODF = \angle BAC$
   Ч.Т.Д.

Обратно к задаче

Заметим, что точки F и E - места отражения луча из D, который возвращается в неё же, при этом проходя наименьший маршрут (доказано в предыдущих задачах), а следовательно треугольник им образованный имеет наименьший возможный периметр

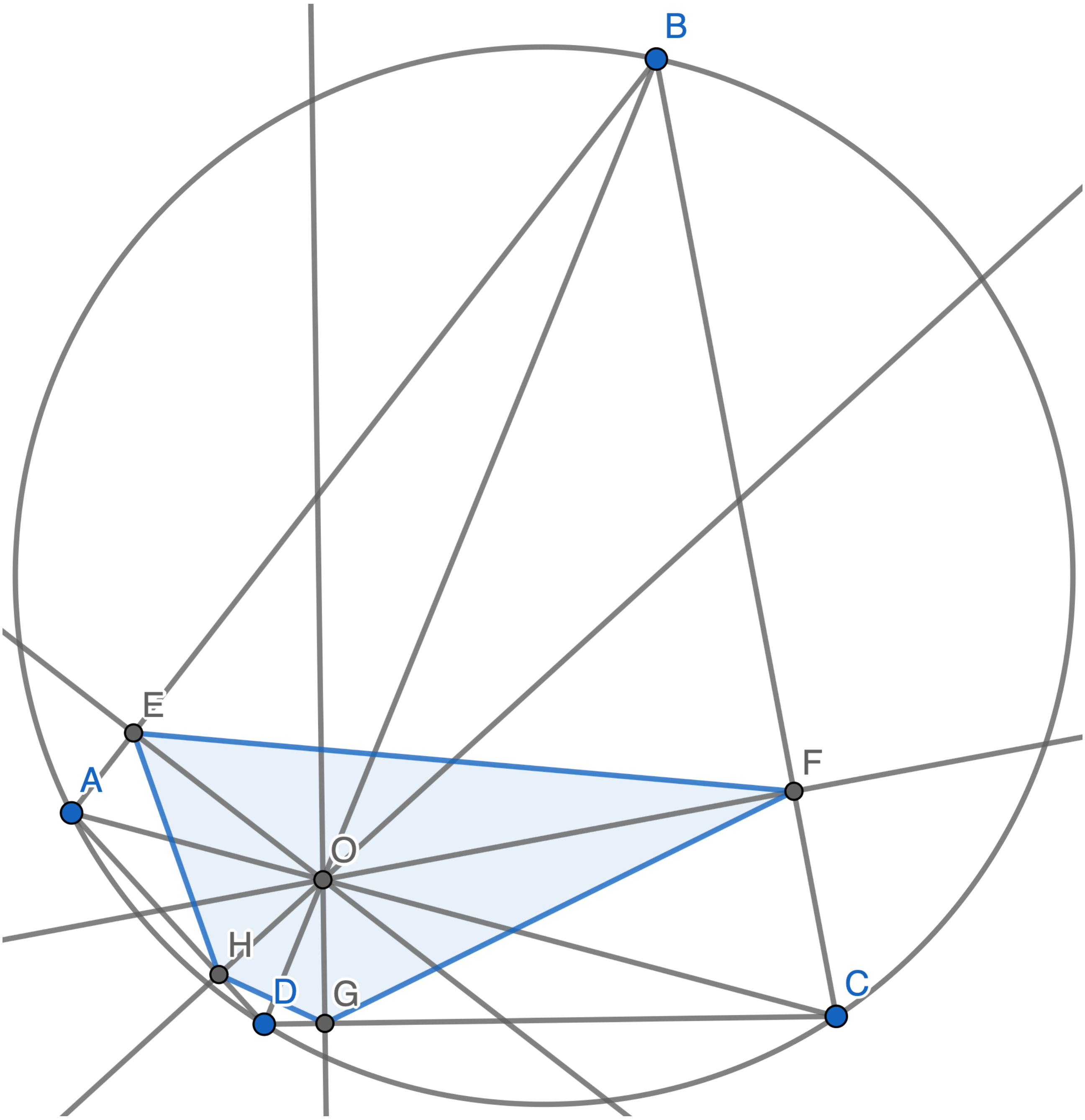
в) Впишите в произвольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра



10

а) Впишите в данный четырёхугольник четырёхугольник наименьшего возможного периметра. Выведите условие, при котором четырёхугольник не является вырожденным

Решение



Построение

1. Пусть $O \in (AC) \cap (BD)$
2. $E, F, G, H : OE \perp AB, E \in (AB); OF \perp BC, F \in (BC); OG \perp CD, G \in (CD);$
   $OH \perp DA, G \in (DA);$
   Утверждается, что $EFGH$ - искомый

Условие при котором четырёхугольник невырожденный

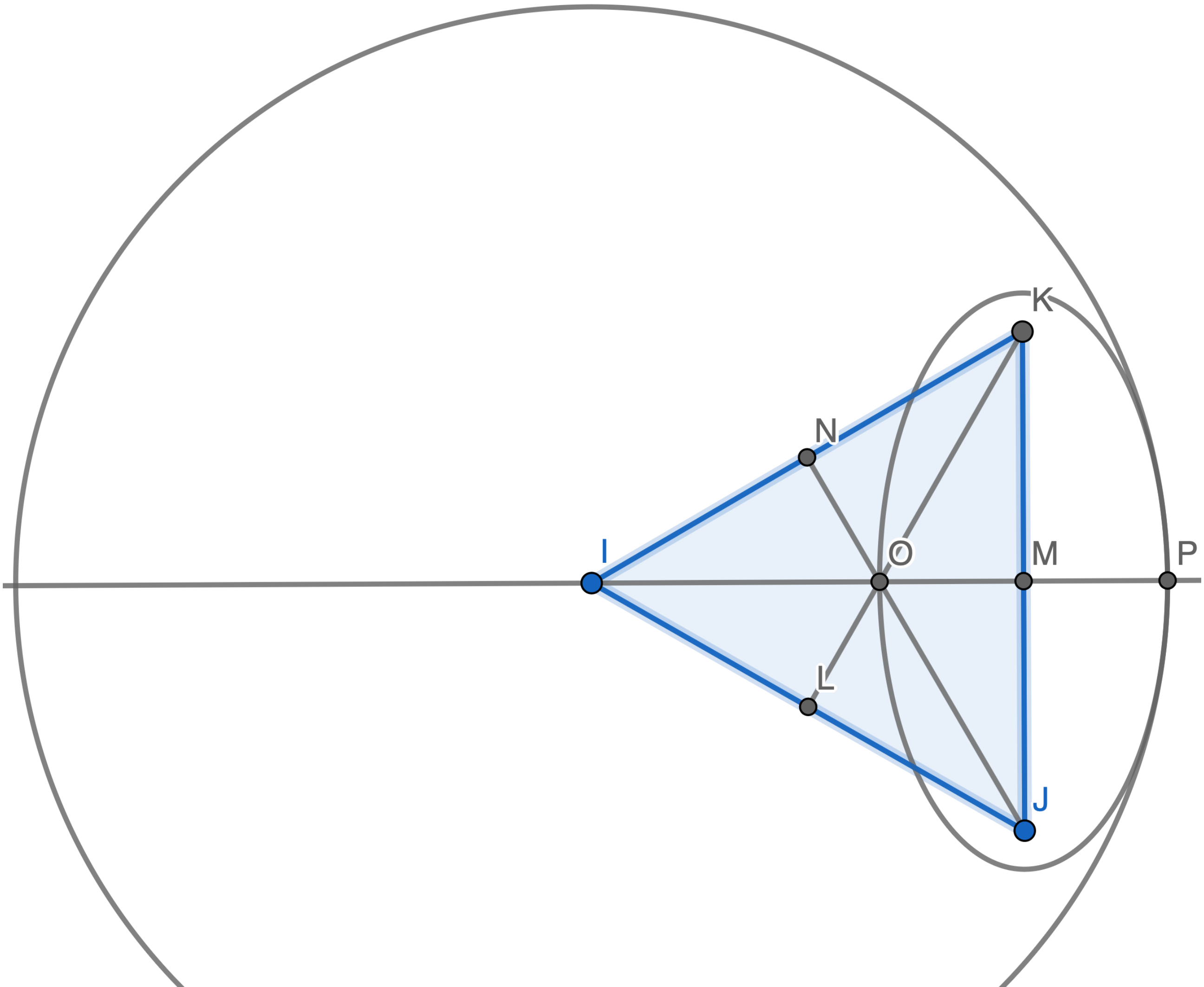
$$\begin{cases} \exists \omega : A, B, C, D \in \omega \\ \max(\breve{AB}, \overset{\frown}{\breve{B}C}, \breve{CD}, \breve{DA}) < 180^\circ \end{cases}$$

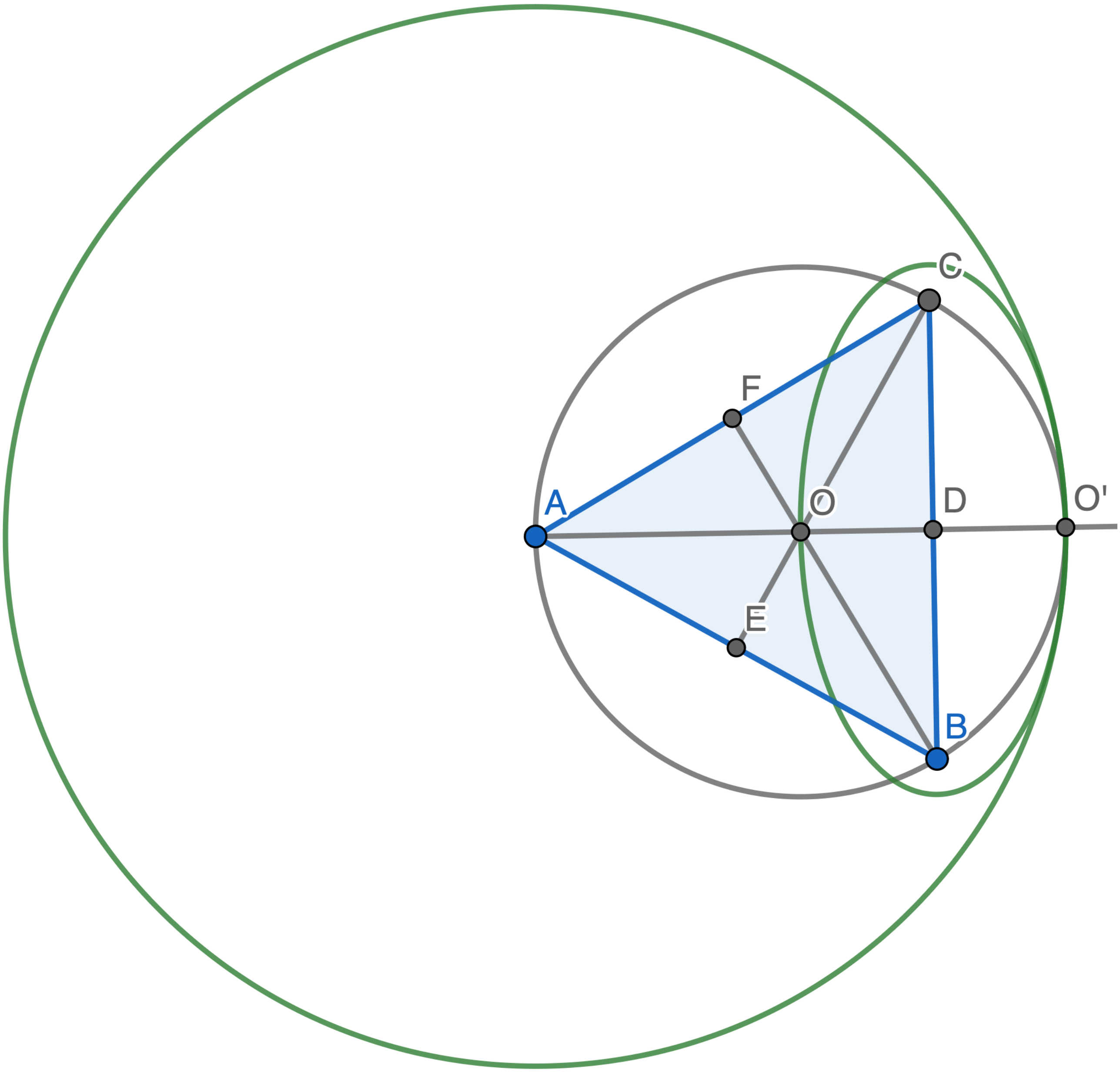
б) Докажите, что задача из пункта а) имеет невырожденное решение тогда и только тогда, когда четырёхугольник можно вписать в окружность

в) Докажите, что в пункте б) бесконечно много решений

11

а) Пусть ABC - равносторонний треугольник, M - точка. Докажите, что $MA \leq MB + MC$. В каком случае достигается равенство?

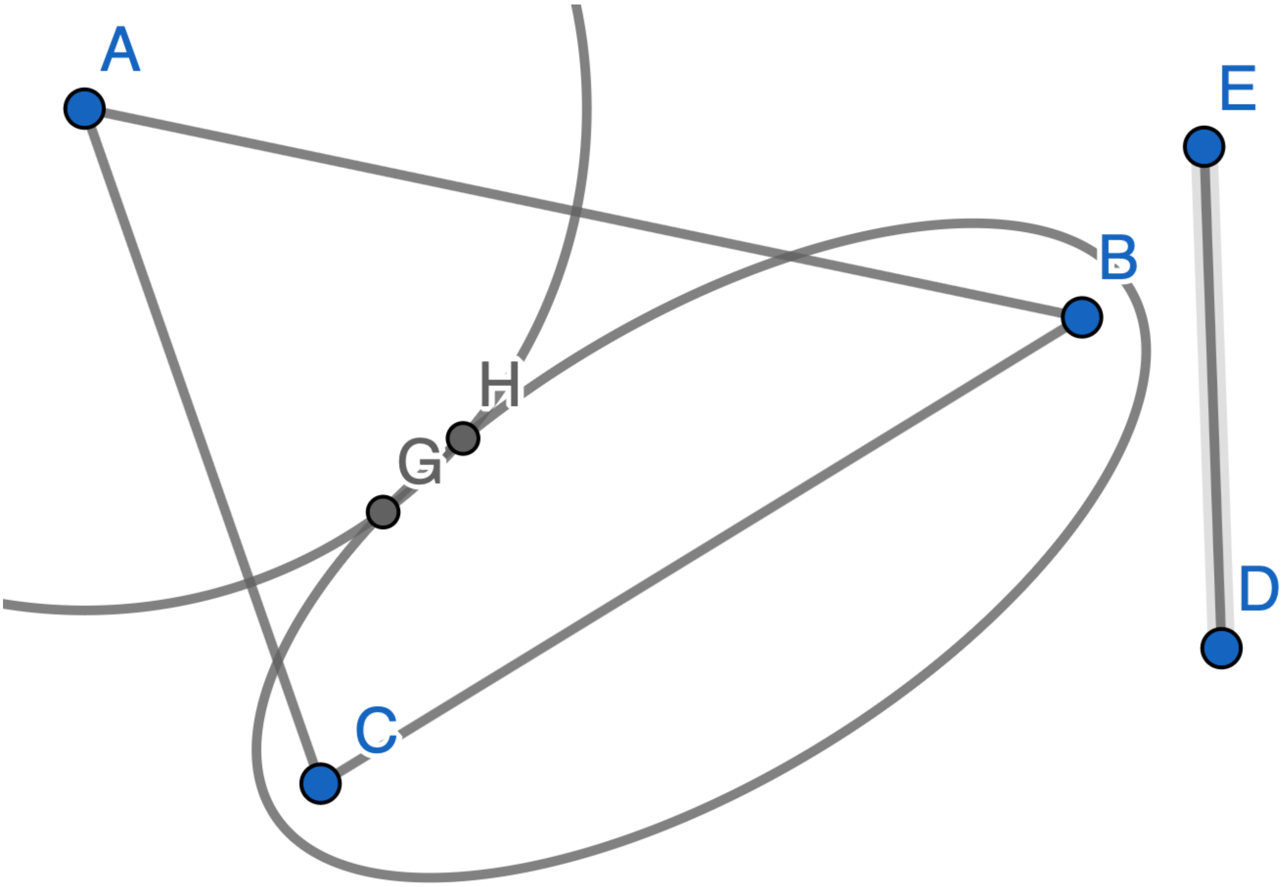

K
N
I
O
M
P
L
J



Когда достигается равенство

1. Пусть ω – окружность; $A, B, C \in \omega$
2. Тогда утверждается, что равенство достигается если $M \in \breve{CB}$

б) **Задача Штейнера:** Найдите внутри остроугольного треугольника ABC точку X такую, что её сумма расстояний до вершин треугольника будет минимальной. Докажите, что из этой точки все отрезки в треугольнике видны под одинаковым углом.



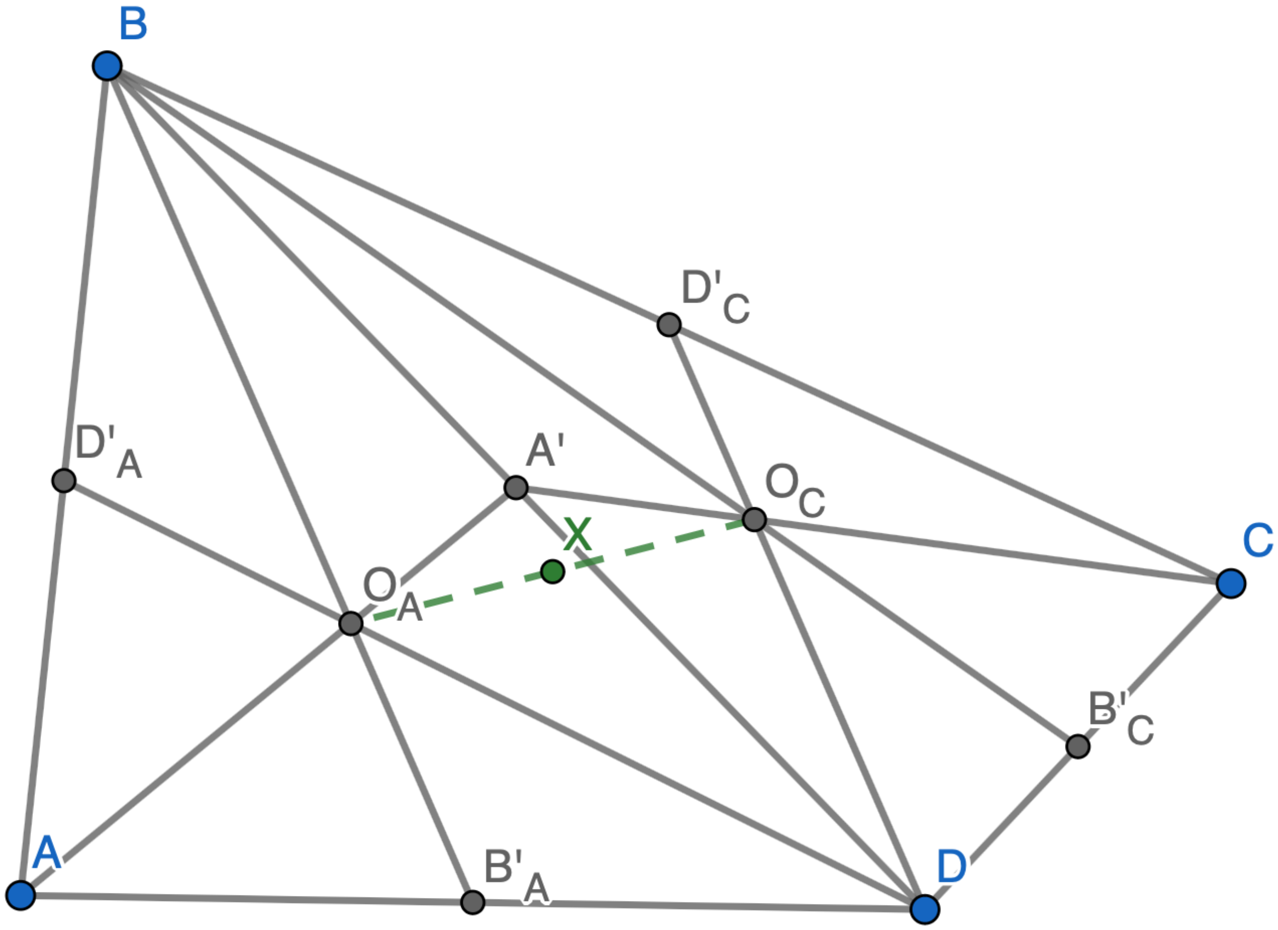
в) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но для произвольного треугольника

г) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но точка ищется на всей плоскости

12

Найдите:
а) В плоскости четырёхугольника $ABCD$;
б) Внутри четырёхугольника $ABCD$
точку X, сумма расстояний которой от вершин четырёхугольника является наименьшей

Решение а)



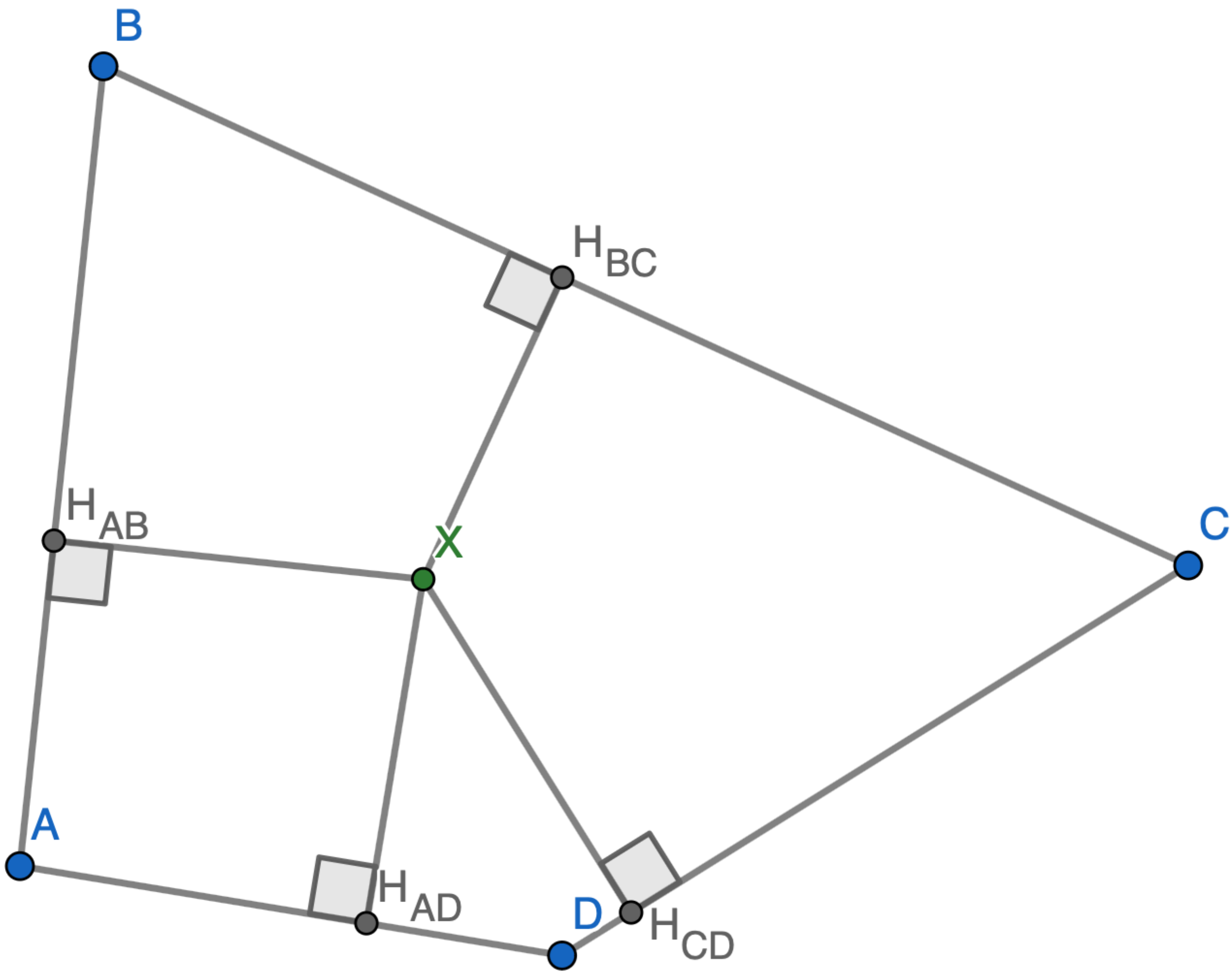
Утверждается, что искомая точка - центр масс четырёхугольника

Построение

1. Отметим середины сторон - $D'_A \in AB$; $D'_C \in BC$; $B'_C \in CD$; $B'_A \in AD$;
2. Проведем диагональ и отметим её середину: $A' \in BD$;
3. В треугольниках $\triangle ABD, \triangle CBD$ найдём точки пересечения медиан: $O_A \in [AA'] \cap [BB'_A] \cap [DD'_A]$; $O_C \in [CC'] \cap [BB'_C] \cap [DD'_C]$
4. Пусть X - середина $[O_A O_C]$
   Утверждается, что X - искомая точка

б)

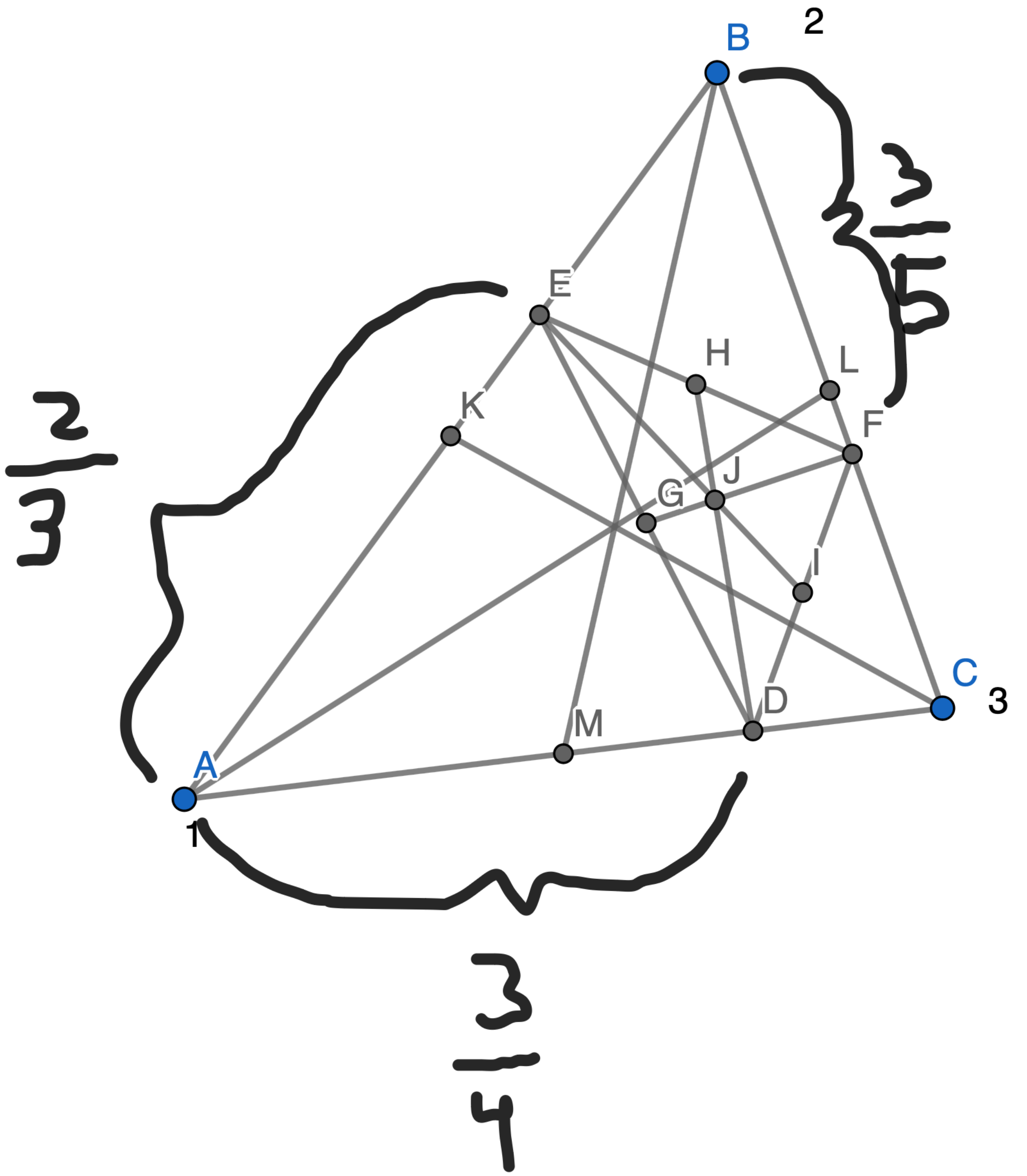
Образно: Если точка X из предыдущего пункта $\in ABCD$, то все хорошо, иначе



1. Опустим перпендикуляры из X на стороны $ABCD$:
    1. $H_{AB} : \begin{cases} H_{AB} \in [AB] \\ (H_{AB}X) \perp (AB) \end{cases}$
    2. $H_{BC} : \begin{cases} H_{BC} \in [BC] \\ (H_{BC}X) \perp (BC) \end{cases}$
    3. $H_{CD} : \begin{cases} H_{CD} \in [CD] \\ (H_{CD}X) \perp (CD) \end{cases}$
    4. $H_{AD} : \begin{cases} H_{AD} \in [AD] \\ (H_{AD}X) \perp (AD) \end{cases}$
2. Обозначим величины перпендикуляров:
    1. $h_{AB} = |XH_{AB}|$
    2. $h_{BC} = |XH_{BC}|$
    3. $h_{CD} = |XH_{CD}|$
    4. $h_{AD} = |XH_{AD}|$
3. Возьмём наименьшее существующее значение длин $h_{AB}, h_{BC}, h_{CD}, h_{AD}$, а точнее основание перпендикуляра, к которому они привязаны ($H_{AB}, H_{BC}, H_{CD}, H_{AD}$)
4. Утверждается, что выбранная точка - искомая

13

Найдите в плоскости треугольника ABC такую точку X, что величина $m \cdot XA + n \cdot XB + p \cdot XC (m, n, p > 0)$ имела наименьшее значение (подсказка: докажите аналог задачи 11а) для треугольника, чьи стороны относятся как $m : n : p$)

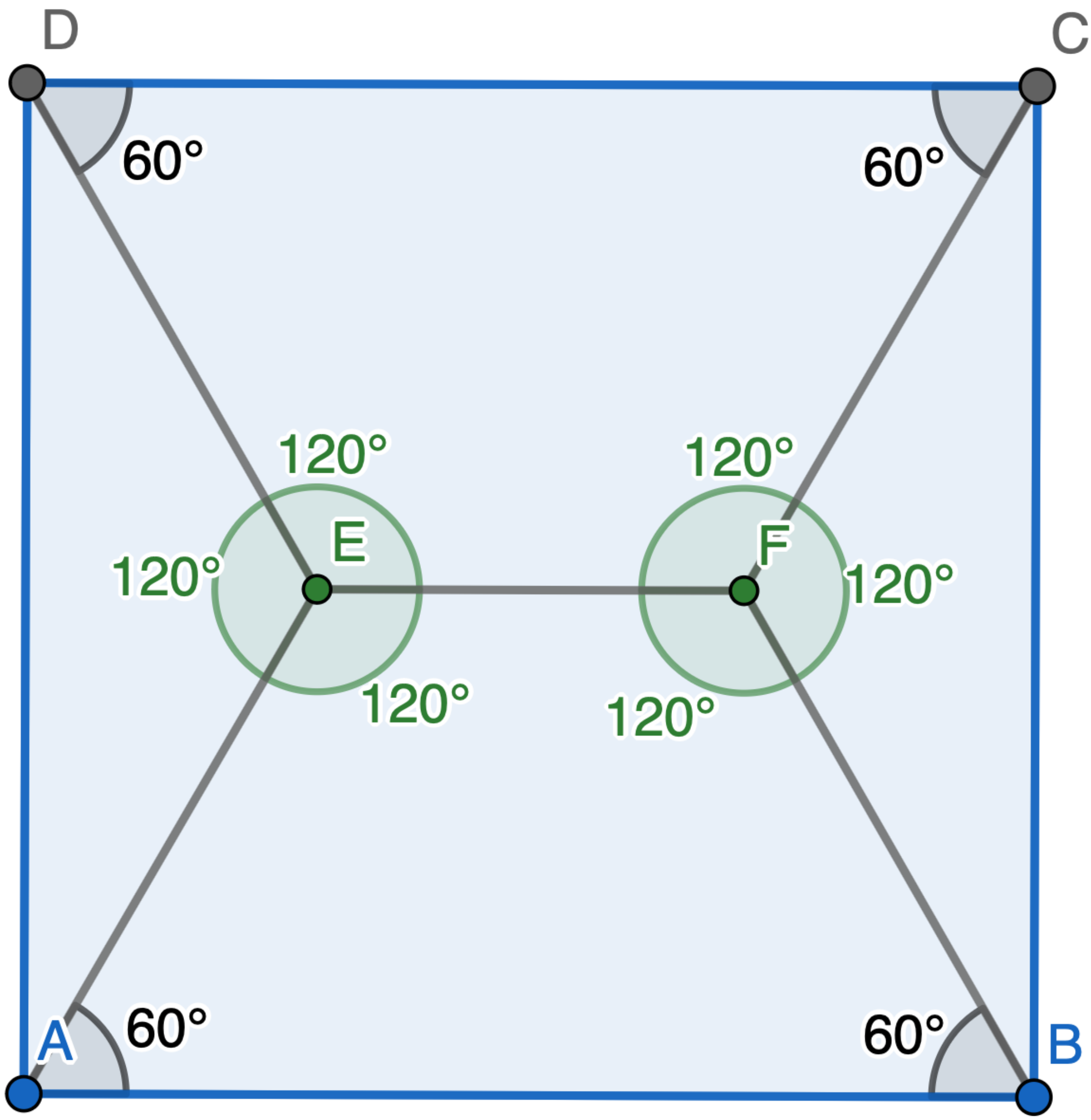


14

(Внимание! Составитель не уверен, что задача решается школьными методами! Однако просит попробовать её решить) Рассмотрим квадрат $ABCD$. Постройте

сеть дорог, состоящую из отрезков, по которой из любой вершины квадрата можно попасть в любую другую и которая имеет минимальную длину

Решение



Дано

$ABCD$ - квадрат
Найти сеть дорог наименьшей длины, соединяющую A, B, C, D

Построение

1. Отложим A', B', C', D' такие, что $\angle BAA' = \angle ABB' = \angle DCC' = \angle CDD' = 60^\circ = \frac{1}{3}\pi$

2. Пусть $E \in AA' \cap DD'; F \in BB' \cap CC'$
3. Утверждается, что $[AE], [BF], [CF], [DE], [EF]$ — искомая сеть дорог
4. Из 1) вычислим $\angle DAE = \angle CBF = \angle BCF = \angle ADE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$
5. Из предыдущего пункта следует, что $\triangle AED, \triangle BFC$ - равнобедренные $\Rightarrow$ $\angle AED = \angle BFC = \pi - 2\frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$
6. Из 1) $ABFE, CFED$ - равнобокие трапеции $\Rightarrow \angle AEF = \angle BFE = \angle CFE = \angle DEF = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi = \angle AED = \angle BFC$
7. $\angle AEF = \angle AED = \angle DEF; \angle BFE = \angle BFC = \angle CFE \Rightarrow$ отрезки от вершин к E, F идут под прямым углом $\Rightarrow$ это наименьший маршрут
   Ч.Т.Д.

15

Изопериметрическая задача: Мы докажем, что из всех возможных дифференцируемых замунутых несамопересекающихся кривых с данной длиной наибольшую площадь имеет круг. Предположим, что решение соответствующей экстремальной задачи не существует
а) Докажите, что решение изопериметрической задачи - выпуклая кривая

Решение

Пусть существует решение, которое является впуклой кривой, тогда заметим, что, соединив отрезками впуклые участки и отразив участки относительно отрезков, то мы, не поменяв длину получим кривую с большей площадью

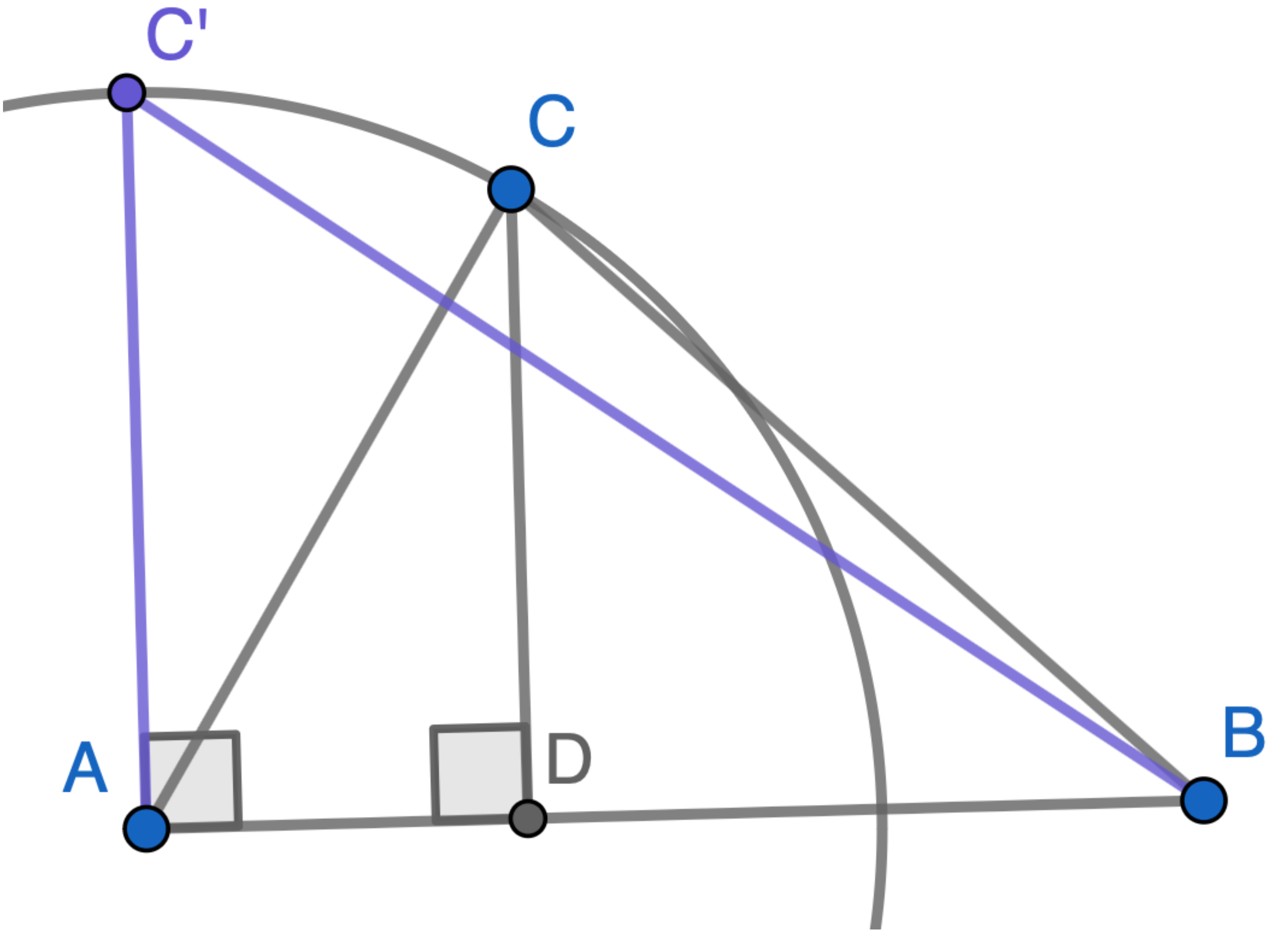
б) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если разделить кривую двумя точками A и B так, что она поделится на куски равной длины, то отрезок $[AB]$ разделит фигуру на 2 равновеликие

Решение

От обратного
Пусть существует такое решение, что оно является выпуклой кривой, разделённой точками A, B на две равные по длине части, но не разделяемая отрезком $[AB]$ на равновеликие
Тогда одна из частей будет больше по площади, чем другая, а значит фигура с меньшей площадью выбрана не оптимально

в) Докажите, что из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный

Решение



1. По условию нам даны две величины - стороны искомого треугольника, обозначим их за a, b
2. Возьмем на плоскости отрезок $AB; |AB| = a$. Это будет одной из сторон искомого треугольника
3. Построим окружность ω с центром в точке A и радиусом b. Утверждается, что она представляет из себя ГМТ всех возможных M, которые являются вершинами $\triangle ABM$ со сторонами $AB = a; AM = b$
4. Выберем из полученного ГМТ точку C такую, что $\triangle ABC \equiv \triangle ABM \text{ с наибольшей площадью}$
    1. Заметим, что площадь $\triangle ABM$ задается произведением $AB = a = \text{const}$ и высотой (назовем её MD)
    2. Тогда, поскольку AB - константа, то площадь пропорциональна высоте
    3. Точка, дающая наибольшую высоту - точка, максимально удаленная от прямой, содержащей отрезок
    4. Для окружности это точка касания параллельной отрезку прямой, т.е. образующая прямой угол с центром

5. Следовательно $\angle BAC = 90^\circ$

5. $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ - прямоугольный

Ч.Т.Д.

г) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если O - точка на кривой, то $\angle AOB = 90^\circ$

д) Докажите изопериметрическую задачу

16

Найдите дугу кривой минимальной длины, соединяющую две точки A, B и вместе с прямолинейным отрезком AB ограничивающую наперёд заданную площадь

Решение

17

Даны две прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите на каждой из них по точке A и B и затем соедините эти точки кривой линией так, чтобы при заданной площади, ограниченной кривой и обеими прямыми, длина дуги была бы минимальной