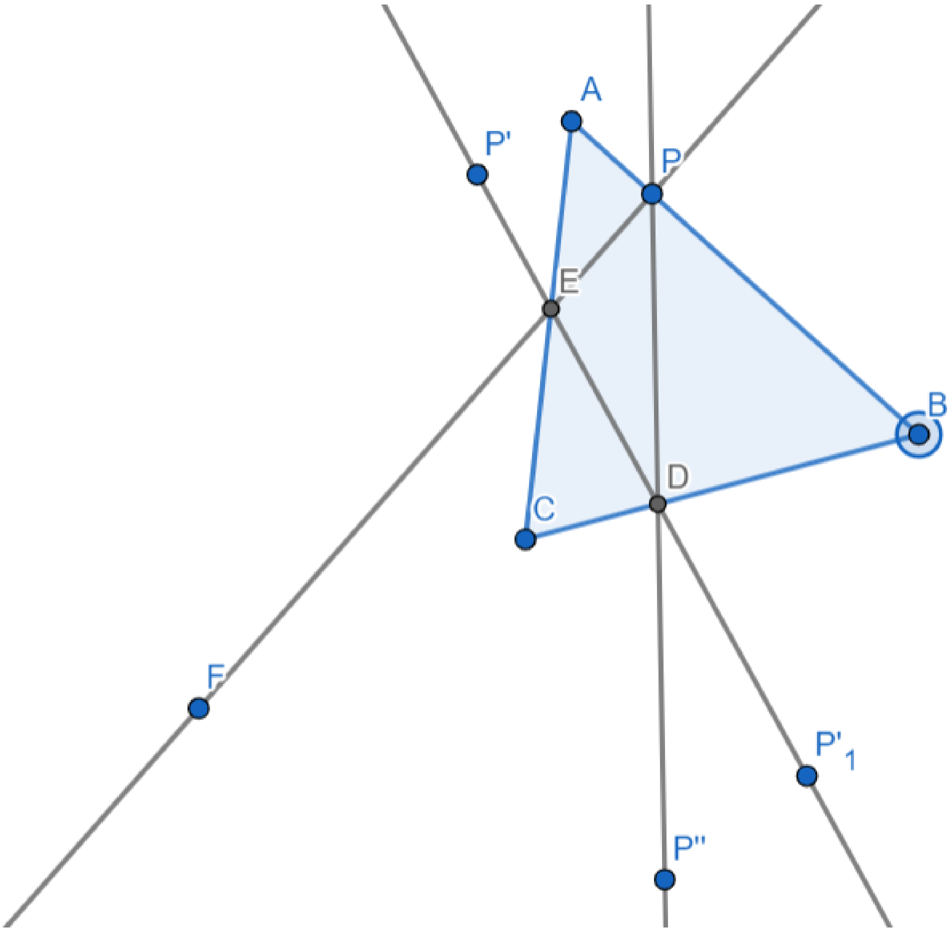
9

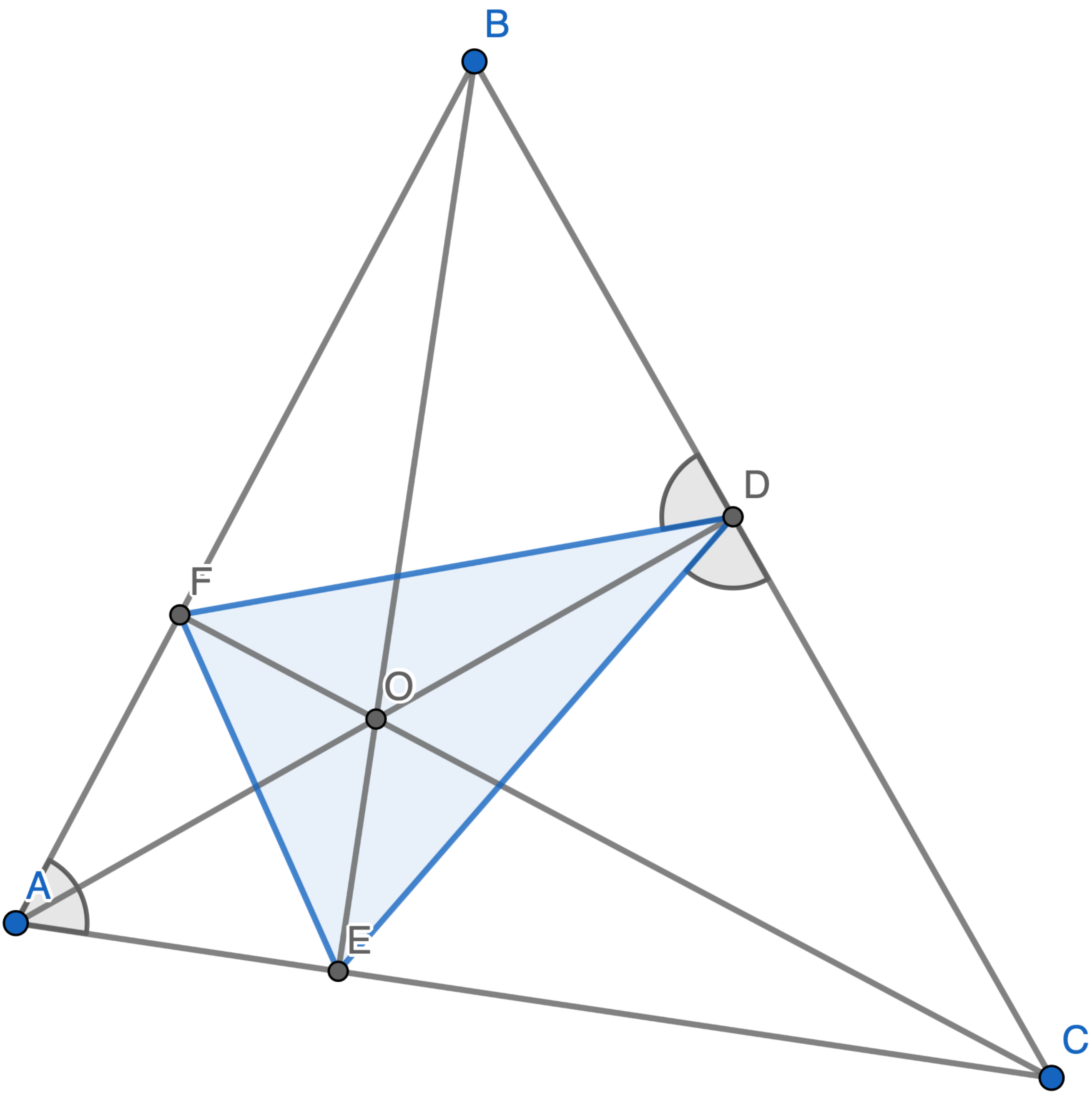
а) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, одна из вершин P которого фиксирована и лежит на стороне AB, и периметр которого имеет наименьшее возможное значение



Построение:

1. Пусть P' - отражение P от одной из сторон (не AB) (Пусть это будет AC)
2. Пусть P'' - отражение P' от второй стороны (не AB) (По остаточному принципу это будет BC)
3. Пусть $D = (P''P) \cap [BC]$
4. Пусть $E = (P'D) \cap [AC]$
   Утверждается, что $\triangle PDE$ - искомый

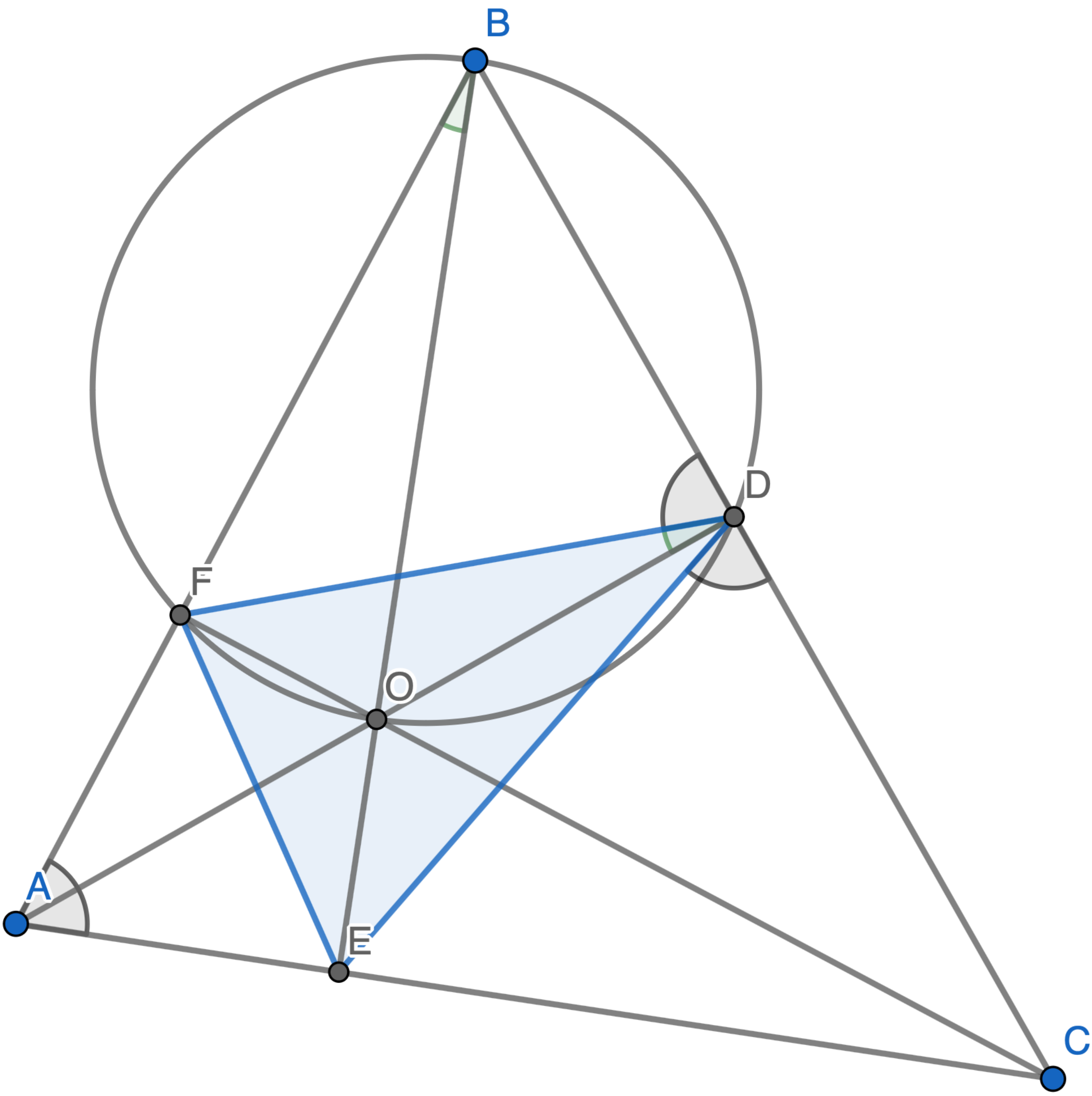
б) **Треугольник Шварца:** Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что получившийся треугольник - высотный (образован основаниями высот)



Докажем лемму:

В каждой из вершин D, E, F (которые являются основаниями высот треугольника) две стороны высотного треугольника образуют одинаковые углы со стороной исходного треугольника.
Каждый из этих углов равен углу при противоположной вершине исходного треугольника.
Например, $\angle CDE = \angle BDF = \angle BAC$ и т. д.

Доказательство



1. $\angle ADB = \angle AEB = \angle BFC = 90^\circ$ (по условию)
2. Пусть ω — окружность с диаметром OB
3. $D, F \in \omega$ (из 1) т.к. смотрят на OB под прямым углом)
4. $\angle OBF, \angle ODF$ опираются на $\breve{OF} \Rightarrow \angle OBF = \angle ODF$
5. Т.к. $\angle AEB = 90^\circ$ (из 1)), то $\triangle AEB$ - прямоугольный
   $\Rightarrow \angle EBA + \angle EAB = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ - \angle OBF$
6. Т.к. $\angle ADB = 90^\circ$ (из 1)), то
   $\angle BDF + \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = 90 - \angle ODF = \angle BAC$
   Ч.Т.Д.

Обратно к задаче

Заметим, что точки F и E - места отражения луча из D, который возвращается в неё же, при этом проходя наименьший маршрут (доказано в предыдущих задачах), а следовательно треугольник им образованный имеет наименьший возможный периметр

в) Впишите в произвольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра