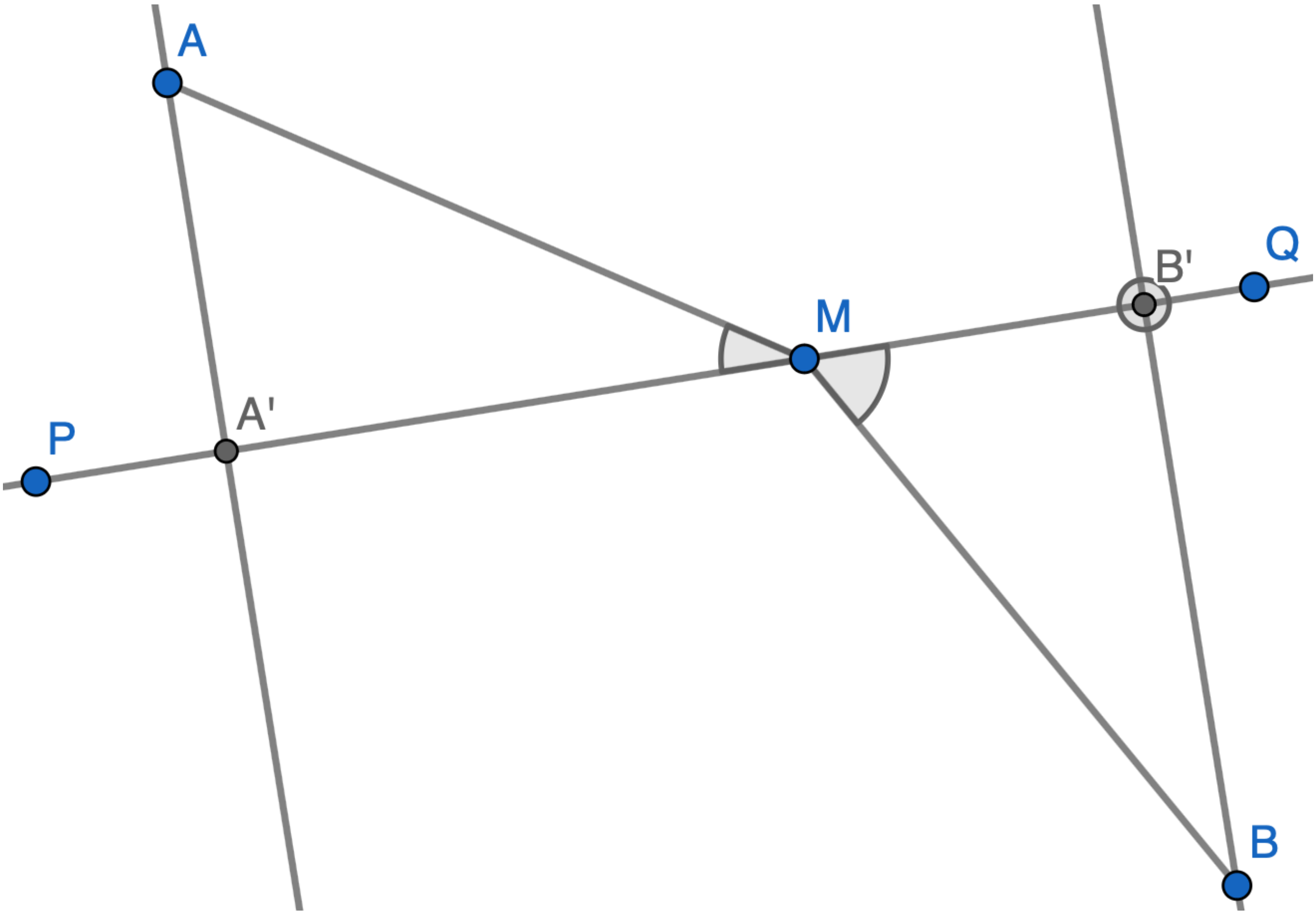
4

Дана прямая (PQ) и точки A и B так, что A и B находятся по разные стороны от (PQ), а P и Q Находятся по разные стороны от (AB). Докажите, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где $a > 0, b > 0$ имеет наименьшее знасение для такой точки $M \in (PQ)$, что $\frac{\cos \angle AMP}{\cos \angle BMQ} = \frac{a}{b}$

Решение



1. Опустим перпендикуляр к (PQ) через A и B, их основания обозначим как A' и B' соответственно
2. По геометрическому определению косинуса имеем, что

$$\begin{matrix} \cos \angle AMP = \frac{|AM|}{|A'M|} \\ \cos \angle BMQ = \frac{|BM|}{|B'M|} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} AM = A'M \cdot \cos \angle AMP \\ BM = B'M \cdot \cos \angle BMQ \end{matrix}$$

3. Подставим результат в исходное выражение, получим

$$b \cdot A'M \cdot \cos \angle AMP + a \cdot B'M \cdot \cos \angle BMQ$$

4. В этом выражении $A'M + B'M$ - константа, т.к. точки A, B, P, Q зафиксированы по условию
5. Заметим, что если $\frac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ} = \frac{a}{b}$, то

$$\cos\angle AMP = a \cdot k$$
$$\cos\angle BMQ = b \cdot k$$

   где k - некий коэффциент подобия
6. Подставим полученное в выражение

$$b \cdot A'M \cdot a \cdot k + a \cdot B'M \cdot b \cdot k = 2k \cdot a \cdot b \cdot (A'M + B'M)$$

7. В полученном выражении все переменные константы, а следовательно оно четко задает точку M (Удовлетворяющую исходному условию) так же утверждается, что это выражение минимально