Экстремальный список [1]

В этом списке допустимы вырожденные фигуры (треугольники, четырёхугольники со всеми вершинами на одной прямой), а также возможно, что ответа на задачу нет.

1. Теорема Герона, экстремальное свойство световых лучей: Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой точку X, сумма расстояний которой до точек A и B имеет наименьшее возможное значение.[2]

2. а) Среди треугольников с заданной площадью и заданной стороной найдите тот, для которого сумма двух других сторон наименьшая.

б) Среди треугольников с заданной стороной и заданной суммой двух других сторон найдите треугольники с наибольшой и наименьшей площадью.

3. Дан острый угол, образованный двумя прямыми, а также две точки P и Q, лежащие внутри угла. Найдите кратчайший маршрут $PABQ$, где A принадлежит первой прямой, а B - второй прямой. Не упустите из рассмотрения 2 случая и укажите критерий, в каком случае какой маршрут минимален.[3]

4. Дана прямая (PQ) и точки A и B так, что A и B находятся по разные стороны от (PQ), а P и Q находятся по разные стороны от (AB). Докажите, что сумма $b \cdot AM + a \cdot BM$, где $a > 0, b > 0$ имеет наименьшее значение для такой точки $M \in (PQ)$, что $\dfrac{\cos\angle AMP}{\cos\angle BMQ} = \dfrac{a}{b}$.[4]

5. а) Рассмотрим две точки F_1, F_2, прямую l, а также точку D такую, что величина $F_1D + F_2D$ минимально возможная для всех точек прямой l. Докажите, что эллипс с фокусами F_1 и F_2, проходящий черех точку D, касается прямой l (то есть имеет ровну одну точку пересечения).

б) Докажите оптическое свойство эллипса: луч, пущенный из одного фокуса эллипса, после отражения вернётся в другой фокус.[5]

6. а) Дана прямая l и две точки A и B по разные стороны от этой прямой. Найдите на прямой точку X, такую, что абсолютная (по модулю) разница $XA - XB$ максимальна.

б) Докажите аналог задачи 5а) и выведите оптическое свойство гиперболы: если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной поверхности гиперболы видится исходящим из другого фокуса.

---

[1] Возможно, список действительно сложный, но своё название он получил потому, что в нём рассматриваются вопросы достижения экстремумов - минимальных или максимальных значений данных величин.

[2] Решение задачи вкупе с экспериментальными данными доказывают, что световой луч при отражении от поверхности всегда выбирает наикратчайшую возможную траекторию.

[3] Свет отражается от 2 зеркал.

[4] Результат решения этой задачи воспроизводит закон преломления света: отношение синусов угла падения и угла преломления равно постоянной для данных сред величине, равной отношению скоростей света в данных средах. Характерно, что свет снова выбирает кратчайшую возможную траекторию, на этот раз с учётом скорости распространения в среде.

[5] У задачи есть интересное обобщение в эргодической теории: любой случайный луч, пущенный в эллипсе из фокуса, при бесконечных отражениях будет «затухать», в пределе стремясь к большой полуоси.

7. а) Рассмотрим ГМТ точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Докажите, что для любой точки внутри этого ГМТ отрезок виден под бОльшим углом.
б) Дан отрезок [PQ] и прямая l, его не пересекающая. Найдите точку $S \in l$ такую, что $\angle PSQ$ максимальный.
8. *(обобщение предыдущих задач, не для сдачи)* а) Пусть C - замкнутая дифференцируемая кривая, P - точка вне её. Тогда если PX - минимально возможное расстояние от точки P до точки на кривой C, то (PX) перпендикулярна касательной к кривой C в точке X.
б) Дана дифференцируемая кривая C и множество дифференцируемых соотношений вида $f(x, y) = a$ с параметром a такое, что любая точки плоскости принадлежит одному и ровно одному соотношению такого вида (для какого-то a). Пусть X - точка на кривой C такая, что $f(x, y)$ достигает экстремума в этой точке, и этот экстремум равен b. Тогда кривые $f(x, y) = b$ и C касаются[6] в точке X.[7]
в) Осознайте, почему задачи 5 а) с аналогом в 6 б) и задача 7 б) являются частными случаями задачи 8 б).
9. а) Впишите в данный треугольник ABC треугольник, одна из вершин P которого фиксированная и лежит на стороне AB, и периметр которого имеет наименьшее возможное значение.
б) **Треугольник Шварца:** Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра. Докажите, что получившийся треугольник — высотный (образован основаниями высот)
в) Впишите в произвольный треугольник ABC треугольник наименьшего возможного периметра.
10. а) Впишите в данный четырёхугольник четырёхугольник наименьшего возможного периметра. Выведите условие, при котором четырёхугольник не является вырожденным.
б) Докажите, что задача из пункта а) имеет невырожденное решение тогда и только тогда, когда четырёхугольник можно вписать в окружность.
в) Докажите, что в пункте б) бесконечно много решений.
11. а) Пусть ABC — равносторонний треугольник, M — точка. Докажите, что $MA \leq MB + MC$. В каком случае достигается равенство?
б) **Задача Штейнера:** Найдите внутри остороугольного треугольника ABC точку X такую, что её сумма расстояний до вершин треугольника будет минимальной. Докажите, что из этой точки все отрезки в треугольнике видны под одинаковым углом.
в) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но для произвольного треугольника.
г) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но точка ищется на всей плоскости.
12. Найдите:
а) В плоскости четырёхугольника ABCD;
б) Внутри четырёхугольника ABCD
точку X, сумма расстояний которой от вершин треугольника является наименьшей.
13. Найдите в плоскости треугольника ABC такую точку X, что величина $m \cdot XA +$

---

[6] Кривые касаются, если касательные в точке совпадают.
[7] Приведенный принцип является центральным в общей теории экстремальных задач.

$n{\cdot}XB{+}p{\cdot}XC$ $(m, n, p > 0)$ имела наименьшее значение (подсказка: докажите аналог задачи 11а) для треугольника, чьи стороны соотносятся как $m : n : p$).

14. *(Внимание! Составитель не уверен, что задача решается школьными методами! Однако просит попробовать её решить)* Рассмотрим квадрат ABCD. Постройте сеть дорог, состоящую из отрезков, по которой из любой вершины квадрата можно попасть в любую другую и которая имеет минимальную длину.[8]

15. Изопериметрическая задача: Мы докажем, что из всех возможных дифференцируемых замкнутых несамопересекающихся кривых с данной длиной наибольшую площадь имеет круг. Предположим, что решение соответствующей экстремальной задачи существует.[9]

а) Докажите, что решение изопериметрической задачи - выпуклая кривая.

б) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если разделить кривую двумя точками A и B так, что она поделится на куски равной длины, то отрезок [AB] разделит фигуру на 2 равновеликие.

в) Докажите, что из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет прямоугольный.

г) Докажите, что решение изопериметрической задачи обладает следующим свойством: если O - точка на этой кривой, то $\angle AOB = 90°$.

д) Докажите изопериметрическую задачу.

16. Найдите дугу кривой минимальной длины, соединяющую две точки A, B и вместе с прямолинейным отрезком AB ограничивающую наперёд заданную площадь.

17. Даны две прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите на каждой из них по точке A и B и затем соедините эти точки кривой линией так, чтобы при заданной площади, ограниченной кривой и обеими прямыми, длина дуги была бы минимальной.

---

[8]Эта задача основана на красивом принципе, следующем из задачи Штейнера - минимально возможная дорожная сеть «стремится» делать перекрёстки из трёх дорог под равными углами.

[9]Это предположение существенно и может привести к ошибкам. Например, докажем, что 1 - это наибольшее целое число. Пусть наибольшее целое число существует, обозначим его за x. От противного: пусть $x > 1$, тогда также верно $x^2 > x$, чего быть не может быть. Значит, 1 - наибольшее целое число. К сожалению, честное решение вопроса существования решения уводит нас слишком глубоко в дебри матанъа