1

Теорема Герона, экстремальное свойство световых лучей: Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от этой прямой. Найдите на прямой точку X, сумма расстояний которой до точек A и B имеет наименьшее возможное значение

Решение

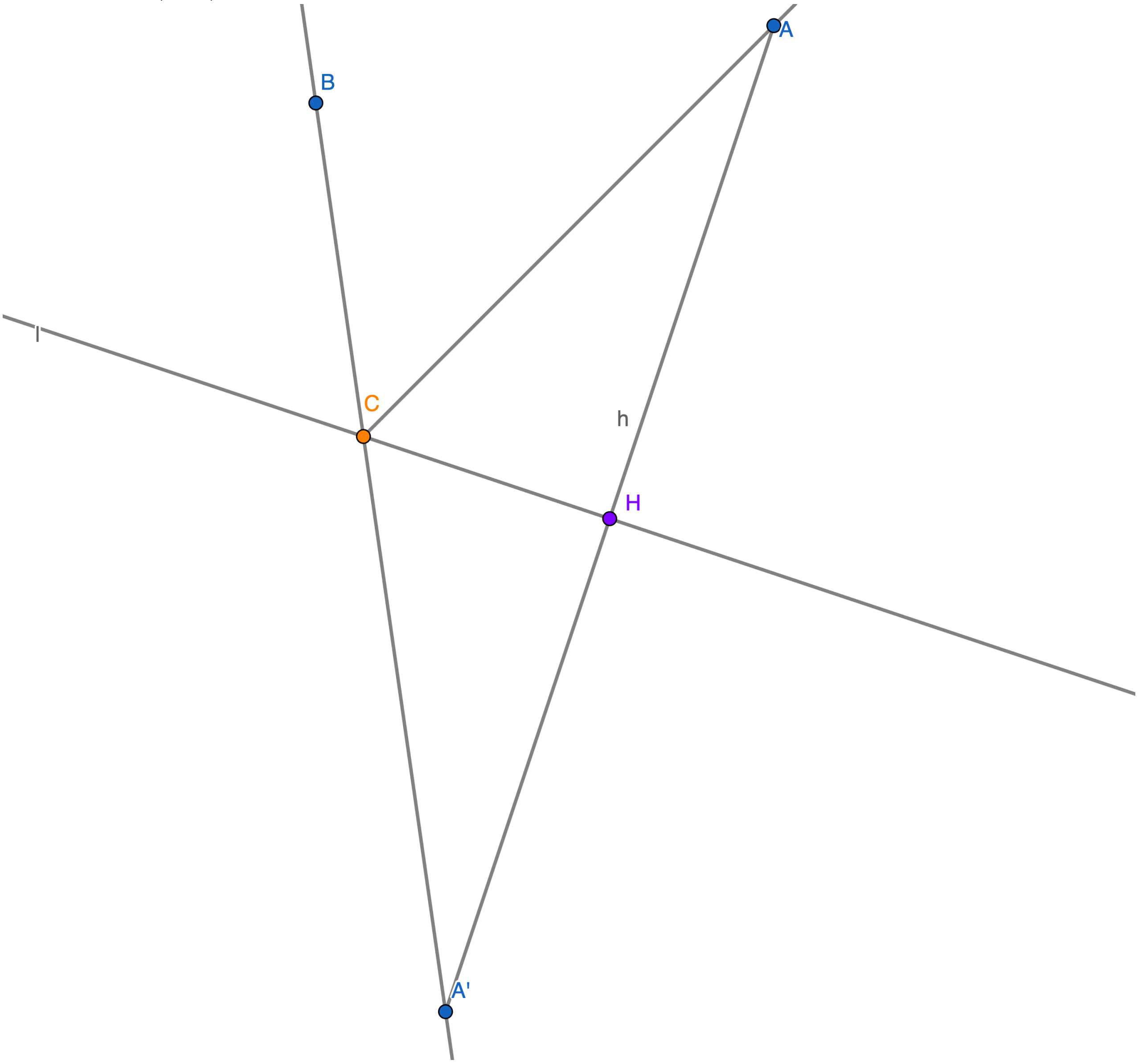
Дано

$$\begin{aligned}
&l - \text{прямая} \\
&A, B \in \text{Одной полуплоскости относительно } l \\
&- \\
&X \in l \\
&|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)
\end{aligned}$$

Построение

1. Опустим $h \perp l; A \in h$
2. Пусть $H = h \cap l$
3. Пусть $A' : \begin{cases} A' \in h \\ |HA'| = |HA| \\ A' \neq A \end{cases}$

4. Пусть $C = (AB) \cap l$



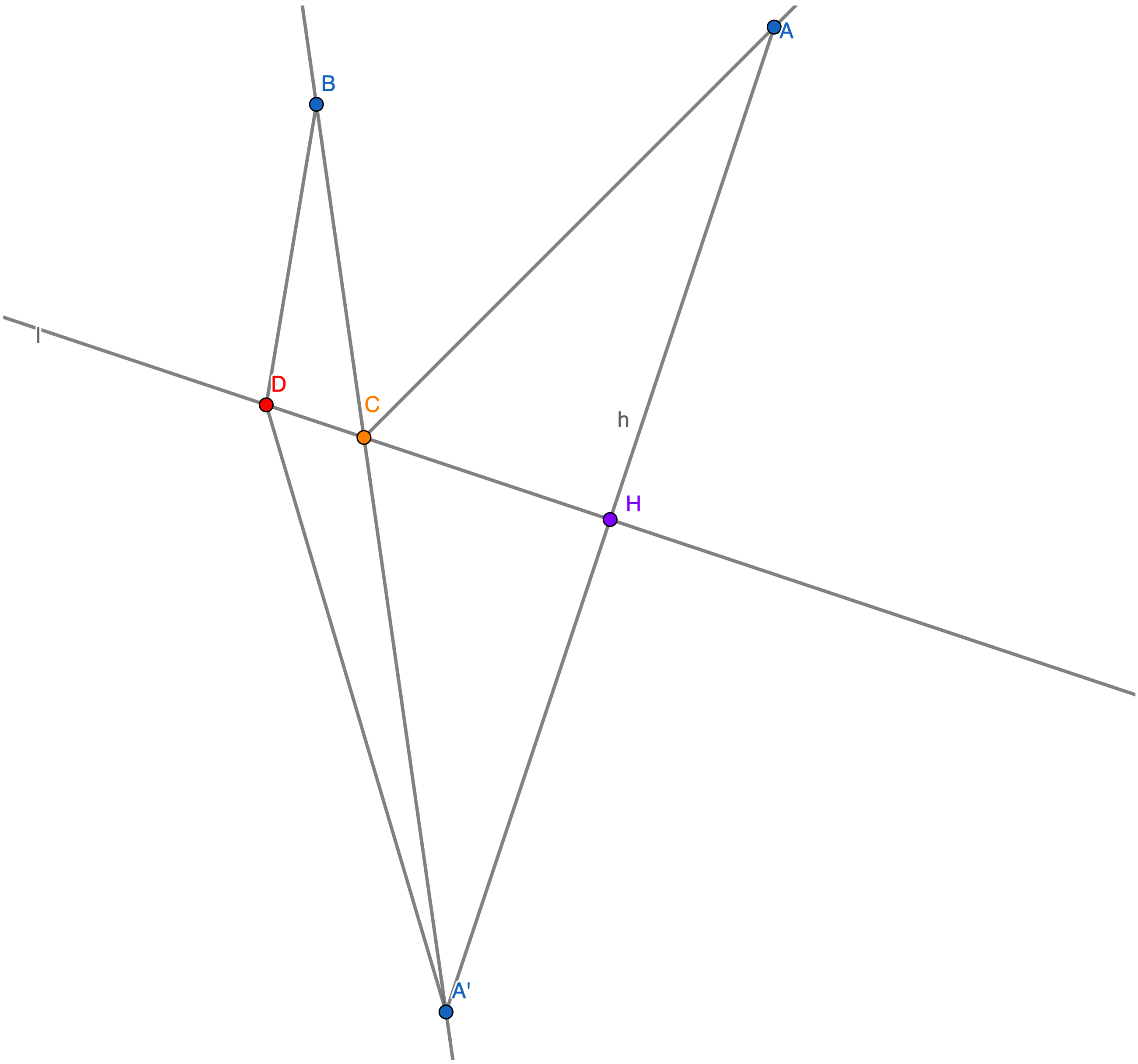
Утверждается, что C - искомая

Доказательство

От противного.

Пусть C не соответствует условию $|AX| + |BX| = \min(|AX| + |BX|)$.

Тогда $\exists D$: $\begin{cases} |AD| + |BD| < |AC| + |BC| \\ D \neq C \\ D \in l \end{cases}$



Заметим, что $C \in (A'B)$ (по построению) $\Rightarrow \exists \triangle A'DB : C \in [A'B]$.

Из геометрии мы знаем что в $\triangle ABC \begin{cases} |AB| < |AC| + |BC| \\ |BC| < |AB| + |AC| \\ |AC| < |AB| + |BC| \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |A'B| < |A'D| + |BD| \Rightarrow |A'C| + |BC| < |A'D| + |BD|$$

$$\begin{cases} l \perp h \\ A, A' \in h \\ A, A' \text{ равноудалены от } l \end{cases} \Rightarrow l - \text{Сер.пер. } [AA'] \Rightarrow \forall \triangle XAA' - \text{р/б}$$

Где X - Любая точка, такая что $\begin{cases} X \in l \\ X \notin h \end{cases}$

Засетим, что D, C удовлетворяют условиям X

$\Rightarrow \triangle DAA', \triangle CAA' - \text{р/б} \Rightarrow |DA| = |DA'|; |CA| = |CA'|$

Подставим в ранее полученное выражение:

$$|A'C| + |BC| < |A'D| + |BD| \Leftrightarrow |AC| + |BC| < |AD| + |BD|$$

А это противоречит условию.

Ч.Т.Д.