2

а) Среди треугольников с заданной площадью и заданной стороной найдите тот, для которого сумма двух других сторон наименьшая.

Решение

Дано

$$\triangle ABC$$
$$|AB|$$
$$S_{\triangle ABC}$$
$$|AC| + |BC| = \min(|AC| + |BC|)$$

Решение

Формула площади треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{|AB| * h_{AB}}{2}$$

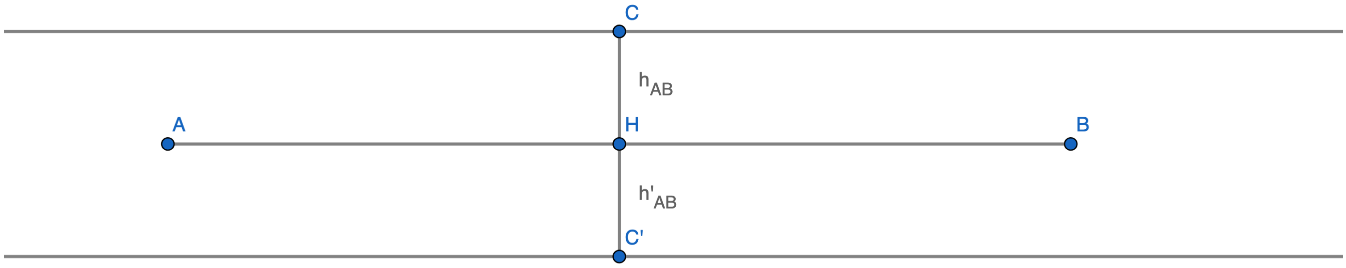
Где h_{AB} - высота треугольника, опущенная на сторону AB
Тогда можем выразить h_{ab}:

$$h_{AB} = 2\frac{S_{\triangle ABC}}{|AB|}$$

Заметим, что все переменные, стоящие по правую сторону равенства заданы по условию. Тогда из условия мы всегда можем получить h_{AB}. $*)$ Будем считать, что она дана.

$|AC| + |BC|$ является суммой расстояния от одной точки (C) до двух других (A; B).

Поскольку точка C уже задана высотой, то она может располагаться только на одной из двух прямых, параллельных прямой (AB) и находящихся на расстоянии h_{AB} от них



Тогда точка C с минимальной суммой расстояний будет точка, являющаяся пересечением сер.пера к $[AB]$ и обозначенного ранее ГМТ

> $\triangle ABC$ - искомый

б) Среди треугольников с заданной стороной и заданной суммой двух дрегих сторон найдите треугольники с наибольшей и наименьшей площадью

Решение

Дано

$$\begin{aligned}&\triangle ABC\\&|AB|\\&|AC|+|BC|\end{aligned}$$

1. $S_{\triangle ABC} = \min(S_{\triangle ABC})$
2. $S_{\triangle ABC} = \max(S_{\triangle ABC})$

Решение

Заметим, что условия $\begin{cases} |AB| \\ |AC| + |BC| \end{cases}$ Задают ГМТ C, которое соответствует эллипсу, а максимальная "толщина" элипса достигается в его пересечении с сер.пером к отрезку, который соединяет фокусы.
Итого максимальная возможная высота $\triangle ABC$ (а значит и максимальная площадь т.к. они прямо пропорциональны) достигается в точке пересечения сер.пера к отрезку $[AB]$ с эллипсом $e = \{M \ \mid \ |AM| + |BM| = |AC| + |BC|\}$