1. Сигма алгебра
   Множество $\mathbb{F}$, элементами которого являются подмножества множества Ω (не обязательно все) наз-ся σ-алгеброй (событий), если выполнены следующие условия:

   - $\Omega \in \mathbb{F}$ (σ-алгебра событий содержит достоверное событие)
   - если $A \in \mathbb{F}$, то $\overline{A} \in \mathbb{F}$ (вместе с любым событием σ-алгебра содержит противоположное событие)
   - если $A_1, A_2, ... \in \mathbb{F}$, то $A_1 \cup A_2 \cup ... \in \mathbb{F}$ (вместе с любым счетным набором событий σ-алгебра содержит их объединение)

2. Вероятность
   Пусть Ω - пр-во элементарных исходов, $F - \sigma$-алгебра его подмножеств (событий). Вероятностью на $(\Omega, \mathbb{F})$ называется функция $P : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, обладающая св-вами:

   - $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \mathbb{F}$
   - для любого счетного набора попарно несовместных событий $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathbb{F}$ имеет место равенство

   $$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

   - Вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$

3. Вероятностное пр-во
   Вероятностное пр-во - тройка $\langle \Omega, \mathbb{F}, P \rangle$, в которой Ω - пр-во элементарных исходов, $\mathbb{F}$ - σ-алгебра его подмножеств и P - вероятностная мера на $\mathbb{F}$

4. Условная вероятность
   Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, наз-ся число

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

   Условная вероятность определена только в том случае, когда $P(B) > 0$

5. Формула Байеса
   Пусть $H_1, H_2, ...$ - полная группа событий, и A - некоторое событие, вероятность которого положительна. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по ф-ле

   $$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

6. Случайная величина
   Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ наз-ся случайной величиной, если для любого борелевского множества $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ множество $\xi^{-1}(B)$ является событием, т. е. принадлежит σ-алгебре $\mathbb{F}$

7. Функция вероятности. Св-ва функции вероятности
   Функцией распределения случайной величины ξ наз-ся функция $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, при каждом $x \in \mathbb{R}$ равная вероятности случайной величине ξ принимать значения, меньшие x

   $$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P\{w : \xi(w) < x\}$$

   Свойства:

   - Она не убывает: если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$
   - Существут пределы $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$
   - Она в любой точке непрерывна слева: $F_\xi(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$

8. Дискретная случайная величина
Случайная величина ξ является дискретной (имеет дискретное распределение), если существует конечный или счетный набор чисел $a_1, a_2, ...$ такой, что для всех i
$$P(\xi = a_i) > 0$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi = a_i) = 1$$
9. Попарная независимость случайных величин
Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ наз-ся попарно независимыми, если независимы любые две из них
10. Независимость в совокупности для случайных величин
Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ называют независимыми (в совокупности), если для любого набора борелевских множеств $B_1, ..., B_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ имеет место равенство
$$P(\xi_1 \in B_1, ..., \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot ... \cdot P(\xi_n \in B_n)$$
11. Абсолютно непрерывная случайная величина
Случайная величина ξ является абсолютно непрерывной (имеет абсолютно непрерывное распределение), если существует неотрицательная функция $f_\xi(x)$ такая, что для любого борелевского множества B имеет место равенство
$$P(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx$$
12. Математическое ожидание в общем случае
Пусть задано вероятностное пр-во $\langle \Omega, \mathbb{F}, P \rangle$ и $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - заданная на нем случайная величина. Если существует интеграл Лебега от ξ по пр-ву Ω, то он наз-ся математическим ожиданием
$$E\xi = \int\limits_\Omega \xi(w) \cdot P(d\omega)$$
13. Математическое ожидание для дискретной случайной величины
Математическим ожидание $E\xi$ случайной величины ξ с дискретным распределением наз-ся число
$$E\xi = \sum_k a_k p_k = \sum_k a_k P(\xi = a_k),$$
если данный ряд абсолютно сходится, т. е. если $\sum |a_i| p_i < \infty$. Иначе говорят, что математическое ожидание не существует.
14. Математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины
Математическим ожидание $E\xi$ случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением наз-ся число
$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$$
если этот интеграл абсолютно сходится, т. е. если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx < \infty$
15. Дисперсия
Пусть $E|\xi|^k < \infty$. Число $E\xi^k$ наз-ся моментом порядка k или k-м моментом случайной величины ξ, число $E|\xi|^k$ наз-ся абсолютным k-м моментом, $E(\xi - E\xi)^k$ наз-ся центральным k-м моментом, и $E|\xi - E\xi|^k$ - абсолютным центральным k-м моментом случайной величины ξ.
Число $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ (центральный момент второго порядка) наз-ся дисперсией случайной величины ξ

16. Ковариация
Ковариацией $cov(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η наз-ся число $cov(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

17. Коэффициент корреляции
Коэффициентом корреляции $\rho(\xi, \eta)$ случайных величин ξ и η, дисперсии которых существуют и отличны от нуля, наз-ся число
$$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

18. Квантиль. Медиана
Пусть задано вероятностное пр-во $\langle \Omega, \mathbb{F}, P \rangle$ с заданным распределением P^ξ случайной величины ξ. Пусть фиксировано $\alpha \in (0, 1)$. Тогда квантилем уровня α распределения P^ξ наз-ся число $x_\alpha \in \mathbb{R}$, такое что
$$\begin{cases} P(\xi \le x_\alpha) \ge \alpha, \\ P(\xi \ge x_\alpha) \ge 1 - \alpha \end{cases}$$
Медианой распределения случайной величины ξ наз-ся любое из чисел μ таких, что
$$\begin{cases} P(\xi \le \mu) \ge \frac{1}{2}, \\ P(\xi \ge \mu) \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

19. Биномиальная случайная величина
$\xi \sim Bin(n, p)$
Распределение вероятностей $P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $n \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1),\ k = 0, 1, ...n$
Мат. ожидание $E\xi = np$
Дисперсия $D\xi = np(1-p)$

20. Геометрическая случайная величина
$\xi \sim Geom(p)$
Распределение вероятностей $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$, $p \in (0, 1),\ k = 1, 2, 3...$
Мат. ожидание $E\xi = \frac{1}{p}$
Дисперсия $D\xi = \frac{1-p}{p^2}$

21. Пуассоновская случайная величина
$\xi \sim Pois(\lambda)$
Распределение вероятностей $P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, ...$
Мат. ожидание $E\xi = \lambda$
Дисперсия $D\xi = \lambda$

22. Равномерная случайная величина
$\xi \sim U(a, b)$ (равномерное непрерывное распределение)
Плотность
$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a, b], \\ 0,\ x \notin [a, b] \end{cases}$$
Мат. ожидание $E\xi = \frac{a+b}{2}$
Дисперсия $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$

23. Показательная случайная величина
$\xi \sim Exp(\alpha)$
Плотность
$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x},\ x \ge 0, \\ 0,\ x < 0 \end{cases}$$
Мат. ожидание $E\xi = \frac{1}{\alpha}$
Дисперсия $D\xi = \frac{1}{\alpha^2}$

24. Гамма случайная величина
 $\xi \sim \Gamma(\lambda, \alpha)$
 Плотность $(\alpha > 0, \lambda > 0)$
$$f_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, \\ 0,\ x \leq 0 \end{cases}$$
 $c = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}$, где $\Gamma(\lambda) = (\lambda-1)\Gamma(\lambda-1)$ - гамма-функция Эйлера, $\Gamma(1) = 1$
 Мат. ожидание $E\xi = \lambda\alpha$
 Дисперсия $D\xi = \lambda\alpha^2$

25. Нормальная случайная величина
 $\xi \sim N(\alpha, \sigma^2)$
 Плотность $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}$
 Мат. ожидание $E\xi = \alpha$
 Дисперсия $D\xi = \sigma^2$

26. Производящая функция для дискретной неотрицательной случайной величины
 Если ξ является дискретной случайной величиной, принимающей неотрицательные целочисленные значения $\{0, 1, ...\}$, то производящая функция вероятностей от случайной величины ξ определяется как
$$\psi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) z^x$$
 где p - функция вероятности ξ. Указанный степенной ряд сходится, по крайней мере, для всех комплексных чисел z, т. ч. $|z| \leq 1$, иначе не обязательно сходится.

27. Характеристическая функция случайной величины
 Функция $\psi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$ вещественной переменной t наз-ся характеристической функцией случайной величины ξ

28. Теорема Бохнера-Хинчина.
 Пусть ϕ - непрерывная функция и $\phi(0) = 1$. Для того, чтобы ϕ была характеристической функцией некоторого случайного вектора, необходимо и достаточно, чтобы ϕ была неотрицательно определенной, то есть при каждом целом $n > 0$ для любых вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ и любых комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \phi(x_i - x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$

29. Формула свёртки двух независимых случайных величин
 Если случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют абсолютно непрерывные распределения с плотностями $f_{\xi_1}(u)$ и $f_{\xi_2}(v)$, то плотность распределения суммы $\xi_1 + \xi_2$ существует и равна "свертке" плотностей f_{ξ_1} и f_{ξ_2}:
$$f_{\xi_1+\xi_2}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u) f_{\xi_2}(t-u) du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u) f_{\xi_1}(t-u) du$$

30. Свойство характеристических функций для суммы независимых случайных величин
 Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых: если случайные величины ξ и η независимы, то по свойству матожиданий (ξ и η независимы $\Rightarrow E(\xi\eta) = E\xi E\eta$),
$$\phi_{\xi+\eta}(t) = Ee^{it(\xi+\eta)} = Ee^{it\xi} Ee^{it\eta} = \phi_\xi(t)\phi_\eta(t)$$

31. Сходимость случайных величин почти наверно
 Последовательность ξ_n сходится почти наверное к случайной величине ξ при $n \to \infty$ ($\xi_n \to \xi$ п.н.), если $P\{\omega | \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty\} = 1$

32. Сходимость случайных величин по вероятности
 Последовательность ξ_n сходится по вероятности к случайной величине ξ при $n \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$: $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \to 0$ при $n \to \infty$

33. Сходимость случайных величин в среднем порядка k
Последовательность ξ_n сходится в среднем к случайной величине ξ в L^k $(k > 0)$, если $E|\xi_n - \xi|^k \to 0$ при $n \to \infty$

34. Сходимость случайных величин по распределению
Последовательность ξ_n сходится по распределению к случайной величине ξ, если для любого x такого, что функция распределения F_ξ непрерывна в точке x, имеет место сходимость $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ при $n \to \infty$

35. Слабая сходимость случайных величин
Последовательность ξ_n сходится слабо к случайной величине ξ, если для любой функции $f(x)$, такой что $f(x)$ непрерывна, выполнено: $Ef(\xi_n) \to E(f_\xi)$ при $n \to \infty$

36. Неравенство Маркова
Если $E|\xi| < \infty$, то для любого $x > 0$:
$$P(|\xi| \geq x) \leq \frac{E|\xi|}{x}$$

37. Неравенство Чебышева
Если $D\xi$ существует, то для любого $x > 0$:
$$P(|\xi - E\xi| \geq x) \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

38. Предельная теорема Пуассона для биномиальной случайной величины
Пусть $n \to \infty$ и $p_n \to 0$ так, что $np_n \to \lambda > 0$. Тогда для любого $k \geq 0$ вероятность получить k успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p_n стремится к величине $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$:
$$P(v_n = k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

39. Закон больших чисел в форме Чебышева
Для любой последовательности $\xi_1, \xi_2, ...$ попарно независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом $E\xi_1^2 < \infty$ имеет место сходимость
$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \to E\xi_1$$

40. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин
Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ - независимые и одинаково распределенные случайные величины с конечной и ненулевой дисперсией: $0 < D\xi_1 < \infty$. Тогда имеет место слабая сходимость
$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0,1)$$
последовательности центрированных и нормированных сумм случайных величин к стандартному нормальному распределению.