Связь тождества треугольника и несамопересекающихся ломаных

Севидов А.А, Журавлёв Д.И, Труфанова С.П.

В данной работе исследуется связь тождества треугольника и количества несамопересекающихся ломанных между двумя точками на гексагональной решетке. Мотивировка предложенных результатов дана в программе майской проектной смены по математике и теоретической информатике в образовательном центре "Сириус".

Определения:

Замостим плоскость правильными шестиугольниками и рассмотрим следующие объекты:

Серединка - середина стороны шестиугольника замощения плоскости.

Полусторона - отрезок, соединяющий середину стороны и её конец.

Полукракозябра длины n - несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, состоящая ровно из $2n$ полусторон, и начинающаяся с серединки. Длина полукракозябры k обозначается $n(k)$.

Гекс - шестиугольник замощения.

Обозначим через $r(k)$ и $l(k)$ число вершин полукракозябры k, в которых она поворачивает направо и налево соответственно, если двигаться по ней от начала до конца.

Пусть p, q, r - середины общих сторон трёх шестиугольников, имеющих общую вершину, перечисленные в порядке против часовой стрелки. Они лежат в многоугольнике M, состоящем из шестиугольников замощения. Будем говорить, что для функции f выполняется тождество треугольника, если для любых p, q и r, обладающих таким свойством, выполняется равенство:

$$f(p) + \tau f(q) + \tau^2 f(r) = 0, \tag{1}$$

где $\tau = -1/2 + \sqrt{3}i/2 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{2\pi}{3})$

Теорема 1. *Пусть зафиксированы действительное число $a > 1$, комплексное число b, $|b| = 1$, многоугольник M, состоящий из шестиугольников замощения, серединка E, лежащая на границе M, а $f(F)$, определённая на множестве серединок, лежащих внутри M, – сумма $a^{-n(k)}b^{r(k)-l(k)}$ по всем полукракозябрам с началом в точке E и концом в F:*

$$f(F) = f(a, b, M, E, F) = \sum_{k \subset M:\, E \to F} a^{-n(k)}b^{r(k)-l(k)}$$

Тогда если $a = 2cos(\frac{\pi}{8})$ и $b = cos(\frac{5\pi}{24}) + isin(\frac{5\pi}{24})$, то для $f(a, b, M, E, F)$ выполняется тождество треугольника при любых описанных M и E.

Доказательство. Выберем три гекса внутри M, имеющих общую вершину, и зафиксируем p, q, r – середины их общих сторон, перечисленные против часовой стрелки. Докажем, что для этих p, q, r и функции $f(F)$ выполняется (1).

Рассмотрим множество D, состоящее из всевозможных полукракозябр с началом в E, оканчивающихся в точках p, q или r. Это множество можно разбить на непересекающиеся группы из двух или из трёх элементов. Сначала опишем группы из трёх элементов.

Рассмотрим полукракозябру k с началом в точке E и концом в одной из точек p, q, r, при этом не содержащую две другие точки. Пусть, не нарушая общности, p – её конец. Слагаемое, соответствующее этой кракозябре в $f(p)$, обозначим $g(p) = a^{-n(k)}b^{r(k)-l(k)}$.

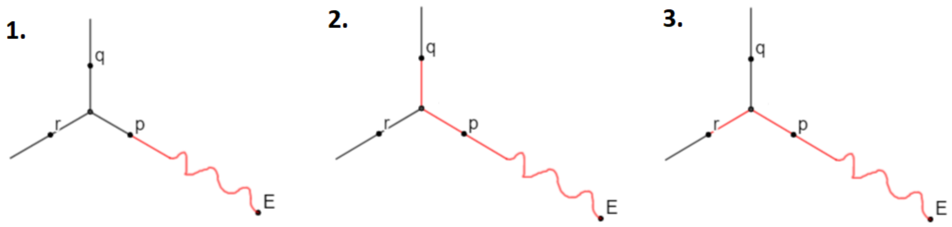

Рис. 1: Тройка путей

Поставим полукракозябре k в соответствие полукракозябру с началом в E и концами в q, и r, которые получаются, если добавить к k полукракозябру длины 1. Докажем, что вклад слагаемых, соответствующих этой тройке в (1) равен 0. Положим $x = n(k)$, а $y = r(k) - l(k)$. Тогда $g(p) = a^{-x}b^{y}$, также определим $g(q) = a^{-x-1}b^{y+1}$ и $g(r) = a^{-x-1}b^{y-1}$ – слагаемые, соответствующие этим кракозябрам в $f(q)$ и $f(r)$. Тогда:

$$g(p) + \tau g(q) + \tau^2 g(r) = a^{-x}b^{y} + \tau a^{-x-1}b^{y+1} + \tau^2 a^{-x-1}b^{y-1} = a^{-x}b^{y}(1 + \tau a^{-1}b + \tau^2 a^{-1}b^{-1})$$

Нетрудно убедиться, что $1 + \tau a^{-1}b + \tau^2 a^{-1}b^{-1} = 0$ при заданных нами значениях a, b.

Рассмотрев тем же образом всевозможные полукракозябры с концами в одной из точек p, q, r, не содержащие две другие точки, разобьём все полукракозябры из множества D, содержащие не более двух точек из p, q, r, на непересекающиеся тройки и получим, что вклад всех этих полукракозябр в (1) нулевой.

Опишем оставшиеся полукракозябры. Рассмотрим полукракозябру α, идущую сначала через точку p, затем через r с концом в q. Тогда есть еще и полукракозябра β, которая получается при замене полукракозябры длины 1 из точки p в точку r, на полукракозябру длины 1 из точки p в точку q.

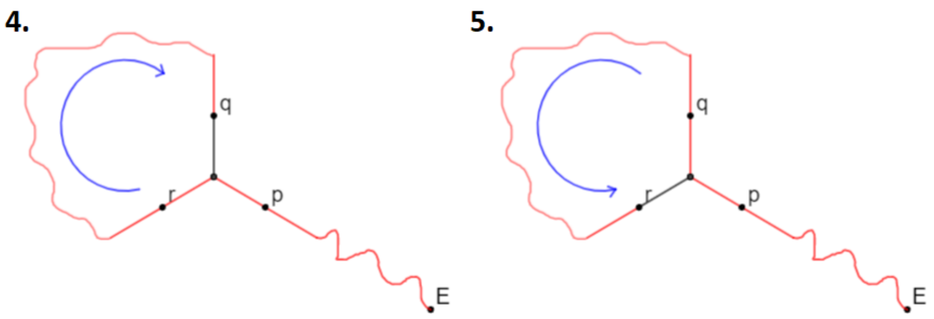

Рис. 2: Биекция путей

Пусть длина участка полукракозябры α от точки r до q равна x, а разность числа поворотов направо и поворотов налево на участке от r до q пути α равна y. Заметим, что тогда для участка полукракозябры β от точки r до q, разность поворотов будет равна $-y$, так как мы обходим этот участок пути в обратном направлении, и все повороты направо заменяются поворотами налево, и наоборот, а длина участка тоже будет равняться x. Положим, что участки полукракозябр α и β от точки E до p совпадает с полукракозяброй k, проведённой из точки E до p. Тогда выразим суммарный вклад этой пары путей:

$$g(p)a^{-x-1}b^{y-1} + \tau g(p)a^{-x-1}b^{1-y} = g(p)a^{-x-1}(b^{y-1} + \tau b^{1-y}) \tag{2}$$

Рассмотрим многоугольник T, ограниченный частью полукракозябры α, заключенной между точками q и r, и полукракозяброй длины 1, соединяющей точки r, q.

Лемма 1. *Внутри многоугольника T лежит шестиугольник, на рёбрах которого лежат точки r и q.*

Доказательство. Заметим, что шестиугольник, содержащий точки r и q, и шестиугольники, содержащие точку p, не могут одновременно лежать внутри T или снаружи T, так как по точкам q и r проходит граница многоугольника T.

Пусть шестиугольники, содержащие p, лежат внутри многоугольника T. E не лежит на границе T, иначе из E должно выходить 2 ребра, но E – это начало полукракозябры. Тогда допустим, что точка E лежит вне этого многоугольника. Для того, чтобы провести полукракозябру из точки E до точки p, нужно пройти сквозь границу многоугольника T. Но это невозможно: граница и ломаная являются частью одной полукракозябры из точки E до точки r или q. Значит, точка E лежит строго внутри многоугольника T. Но это тоже невозможно: E лежит на границе многоугольника M. Противоречие. □

Лемма 2. *В приведенных выше обозначениях $y = 5$*

Доказательство. Докажем индукцией по n, количеству гексов внутри T, что $y = 5$.

База: При $n = 1$ T - в точности тот шестиугольник, который содержит r и q, а y действительно равняется 5.

Переход: Допустим, что для $k \leq n$ утверждение доказано. Докажем для $n + 1$ гекса:

Назовём гекс, принадлежащий T внешним, если хотя бы одно его ребро не касается других гексов из многоугольника T.

Составим граф из внешних гексов. Пусть вершины в нём - внешние гексы, а рёбра соединяют вершины, соответствующие гексам, у которых есть общее ребро. Этот граф связен. Поскольку в нём больше одной вершины, в его остовном дереве найдутся две висячие вершины. При удалении висячей вершины вместе с исходящим ребром связность не нарушается. А значит, можно удалить некоторый гекс из исходного многоугольника T. Если этот гекс будет содержать точки r и q, то уберём второй найденный шестиугольник. Получим многоугольник T'.

По предположению индукции для полукракозябры, являющейся частью границы T', отличной от полукракозябры длины один между r и q, $y_n = 5$. Восстановим удалённый гекс. Это может случиться пятью способами (по количеству ребер, которыми он примыкал к T). Ребра, которыми гекс примыкал к T идут подряд, так как многоугольник T' сплошной. Значит, случаев только 5.

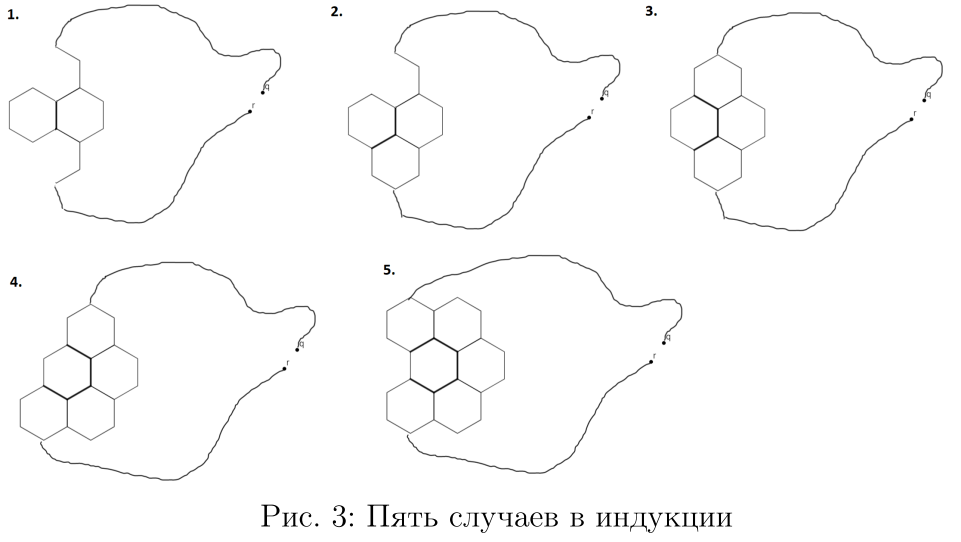

Рис. 3: Пять случаев в индукции

Если ребро было одно, y_{n+1}=5-(1+1)+(-1+1+1+1+1-1)=5
Мы убираем два правых поворота и добавляем два левых и четыре правых.

Если два, тогогда y_{n+1}=5-(1-1+1)+(-1-1+1+1+1)=5 Мы убираем два правых и один левый повороты и добавляем три правых и два левых поворота. Аналогично рассматриваются случаи с 3, 4, 5 рёбрами, а значит $y_{n+1} = 5$. □

Тогда (2) примет вид:

$$g(p)a^{-x-1}(b^4 + \tau b^{-4})$$

При подстановке $b = cos(\frac{5\pi}{24}) + isin(\frac{5\pi}{24})$ это выражение обратится в 0. Отсюда следует, что суммарный вклад полукракозябр, проходящих через точки p, q, r, в общую сумму нулевой, а значит, тождество треугольника выполняется. □