# 目录

李子龙
201818000807036

2019 年 3 月 30 日

# 1 有阻尼情况下的受驱单摆

## 1.1 极限情况的分析

运动方程是：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsin\theta - \kappa l\frac{d\theta}{dt} + f_0 cosw_0 t, \tag{1}$$

对以上方程进行无量纲化，作变换：$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}t$,$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}w_0$。从而新方程为（在新方程中，仍用$t$来标记$t_1$):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + sin\theta = Fcosw_0 t, \tag{2}$$

考虑一个可以研究的极限情况，$F \ll 1, \theta \ll 1$。此时方程可以近似为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + K\frac{d\theta}{dt} + \theta = Fcosw_0 t, \tag{3}$$

考虑到$K > 0$,等式右端为0时的齐次方程的通解为：$Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$,$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-K\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$。$\lambda_1, \lambda_2$的实部都是负的，因而以上两项都是指数衰减的函数，在$t \to \infty$时，迅速趋向于0。对于公式3的特解，可以考虑如$C_1 cosw_0 t + C_2 sinw_0 t$的形式，可以解得：$C_1 = \frac{F(1-w^2)}{K^2w^2+(1-w^2)^2}$,$C_2 = \frac{KFw}{K^2w^2+(1-w^2)^2}$,从而特解为：$\frac{F}{\sqrt{K^2w^2+(1-w^2)^2}}cos(w_0 t + \phi_0)$。所以，在$t$很大时，单摆表现出三角函数的运动周期，同时，振幅由上式给出。

以上的分析描述了单摆运动的很多情形。比如，在$F = 0.2, w_0 = 4, K = 0.2$时，由以上分析给出的振幅为0.0132，这与模拟的结果非常一致。

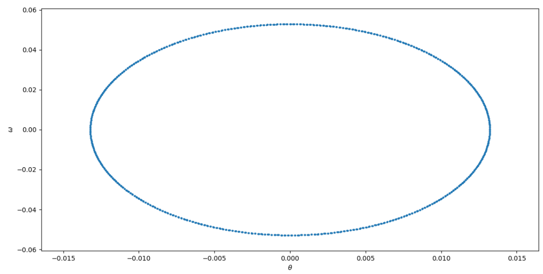


图 1: $F = 0.2, w_0 = 4$

更一般的观察发现，以上分析对$F$不是很小的某些情形也成立，这取决于$F/w_0^2$的大小，比如$F = 6, w_0 = 4, K = 0.2$时与分析的结果符合仍然很好。

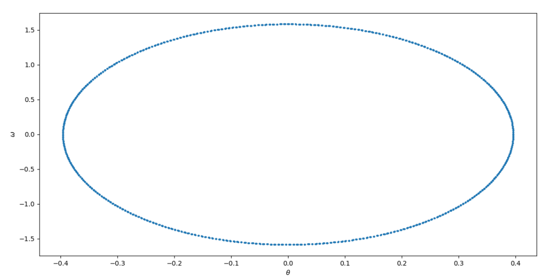


图 2: $F = 6, w_0 = 4$

## 1.2 python具体实现

equ.2可以写成两个一阶的微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -KY - \theta + Fcosw_0 t, \\ \frac{d\theta}{dt} = y, \end{cases} \tag{4}$$

首先定义了一个自己的ODE函数，它需要变量的导数方程、初始条件以及所求时间点为参数，在具体实现中采用了龙格库塔法，因为直接的欧拉法收敛的效果并不好。

```python
def my_ode(func, begin_value, time_list):
```

然后定义了一个专门求解有阻尼受迫振动单摆的对象。

```python
class pelunum_resist_drive(object):
```

对象的Pelunum函数调用ODE函数对设定的参数进行模拟，返回的是$\theta(t)$和$y(t)$。

```python
def Pelunum(self):
```

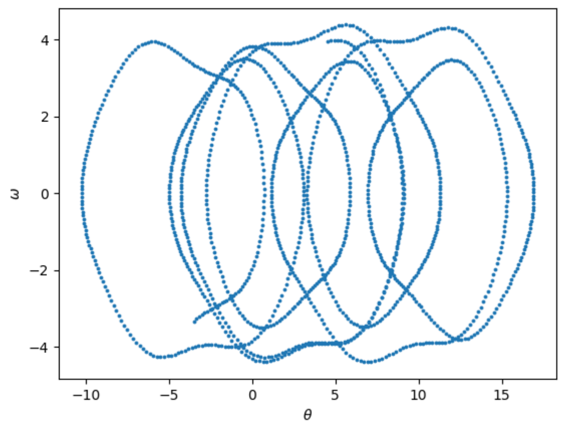


图 3: 一个混沌解$F = 3.2, w_0 = 2/3, K = 0.5$。

# 2 二阶龙格库塔法的证明

$$y(t+\tau) = y(t) + y'(t)\tau + \frac{y''(t)}{2}\tau^2 + O(\tau^3), \tag{5}$$

设,$y(t+\tau)$可以表达成以下的形式：

$$y(t+\tau) = y(t) + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2, \tag{6}$$

其中：

$$\begin{cases} \alpha_1 = \tau g(y, t), \\ \alpha_2 = \tau g(y + v_{21}\alpha_1\tau, t + v_{21}\tau). \end{cases} \tag{7}$$

比较equ.5和equ.6，可以得到：$\alpha_1+\alpha_2=1,\alpha_2 v_{21}=\frac{1}{2}$,在此限制下可以取：$\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2},v_{21}=1$。

证毕。$\square$