Ch3.在二維與三維運動(Motion in Two and Three Dimensions)

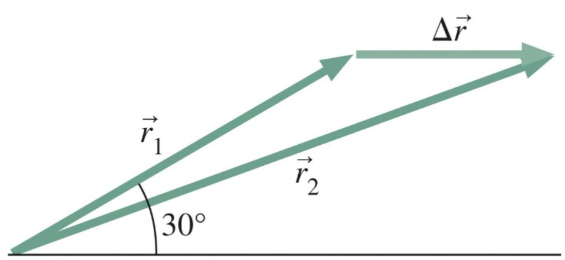
3.1 Vectors(向量)

A Vector can be represented by an arrow whose length corresponds to the Vector's magnitude.
一個向量可以用一個箭頭來表示，它的長度對應於向量的大小。

> **Position(位置)**：Position is a Vector quantity. 位置是一個向量

Vector Arithmetic(向量計算)

- Vector Addition(向量加法)



$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$$

- Vector subtract(向量減法)

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

向量乘除純量

- For a positive scalar the direction is unchanged.
  正向量乘正純量向量不改方向
- For a negative scalar the direction reverses.
  正向量乘負向量向量改方向

Unit Vectors(單位向量)

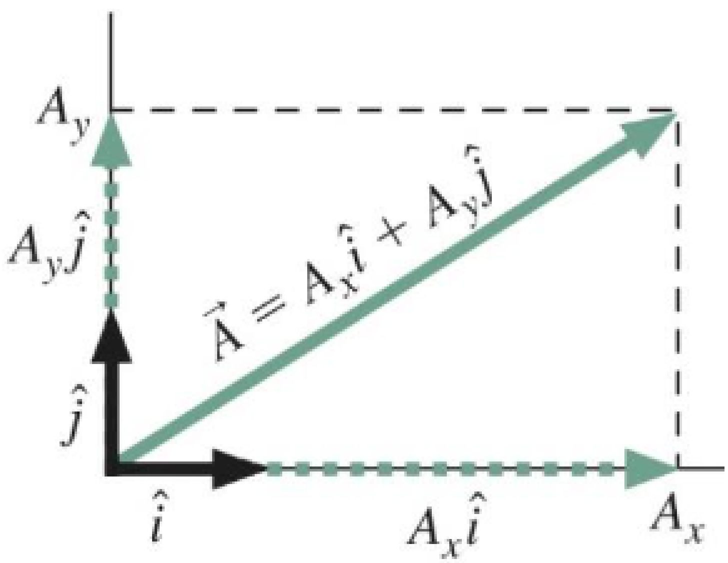
- **計算**
  已知 $\vec{A}$ 為一向量， $|\bar{A}|$ 則為向量的長度，則該向量的單位向量為：

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\bar{A}|}$$

- 常用單位向量

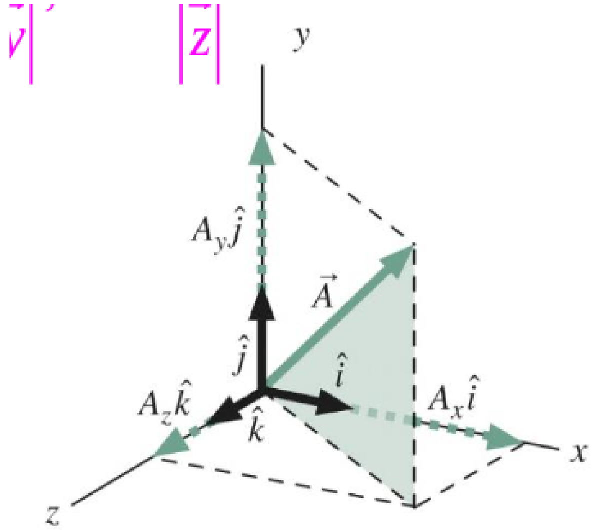
向量	**說明**
$\hat{i}$	表示x軸向量
$\hat{j}$	表示y軸向量
$\hat{k}$	表示z軸向量

- 二維向量表示



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

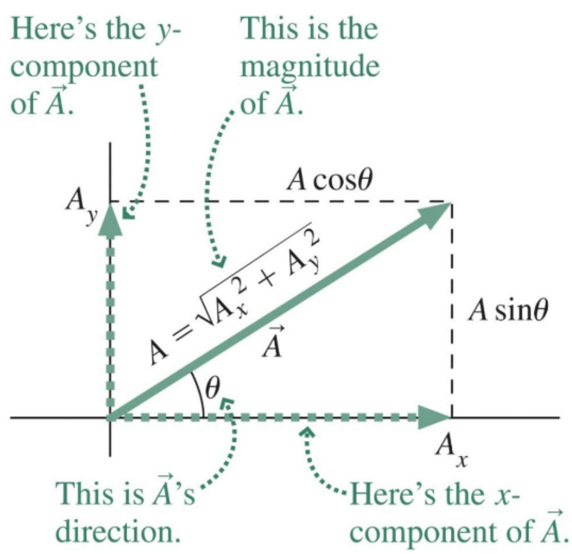
- 三維向量表示



$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y+\vec{A}_z=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$$

Vector Components(向量分量)

- 二維平面

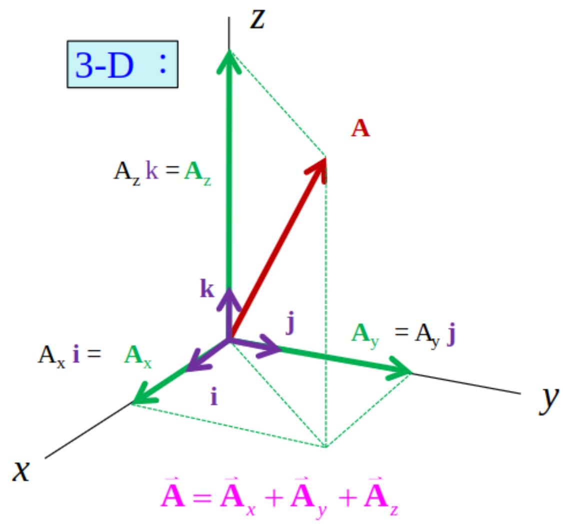


$$\begin{cases}\vec{A}_x\text{是}\vec{A}\text{的x分量}\\ \vec{A}_y\text{是}\vec{A}\text{的y分量}\end{cases}\rightarrow\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y$$

$$\begin{cases}A_x=|\vec{A}_x|=A\cos\theta\\ A_y=|\vec{A}_y|=A\sin\theta\end{cases}\rightarrow A=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2}$$

$$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x}\rightarrow\theta=\tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}$$

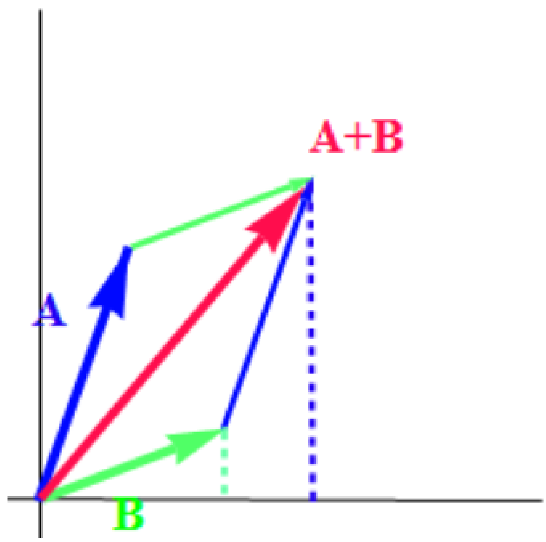
- 三維平面



$$
\begin{aligned}
\vec{A} =& \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \\
=& A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\
A =& |\vec{A}| = \sqrt{\vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z}
\end{aligned}
$$

使用單位向量進行向量計算

- $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$, $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$



> then
>
> $$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

例題3.1 Taking a Drive

You drive to a city 160km from home, going 35° N or E

Express your new your position in Unit Vector notation, using an E-W / N-S coordinate system.

你開車到離家 160 公里的城市，行駛35度 N 或 E，使用 E-W / N-S 坐標係以單位向量表示法表達您的新位置。

> $$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} \begin{cases} r_x = r\cos\theta = 160_{(Km)} \times \cos 35^\circ = 131_{(km)} \\ r_y = r\sin\theta = 160_{(Km)} \times \sin 35^\circ = 92_{(km)} \end{cases}$$
>
> $$\therefore \text{The position of the City is } \vec{r} = 131\hat{i} + 92\hat{j}$$

3.2 Velocity and Acceleration Vectors(速度與加速度向量)

- **Velocity** is the rate of change of Position.
  速度是位置變化的速率
  - The **average velocity** over a time interval Δt is the change in the position vector $\Delta\vec{r}$ divided by the time interval Δt.
    在某段時間內的平均速度是位置向量的變化(位移)除以時間的變化量

$$\bar{\vec{\mathrm{v}}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

  - **Instantaneous velocity** is the time derivative of position:
    瞬間速度是位置和時間的導函數

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}$$

- **Acceleration** is the rate of change of velocity.
  加速度是速度變化的速率
  - 平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

  - (瞬間)加速度

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Velocity and Acceleration in Two Dimensions(在二維的速度和加速度)

- An acceleration $\vec{a}$ acting for time Δt produces a velocity change.
  加速度作用於時間時會產生速度的變化

$$\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$$

3.3 Relative Motion(相對運動)

- Motion is Relative $\rightarrow$ requires frame of reference
  基於參考系統，運動是相對的
- An object moves with velocity $\vec{v'}$ relative to the first frame of reference.
  某物體以相對於第一參考系的速度v'移動
- The first frame moves at $\vec{V}$ relative to the second reference frame.
  第一參考系的物品相對於第二參考系的速度為V
- Then the velocity of the object relative to the second frame is $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}$
  那麼物體相對於第一參考系的速度為v=v'+V

3.4 Constant Acceleration(等加速度)

等加速度方程式

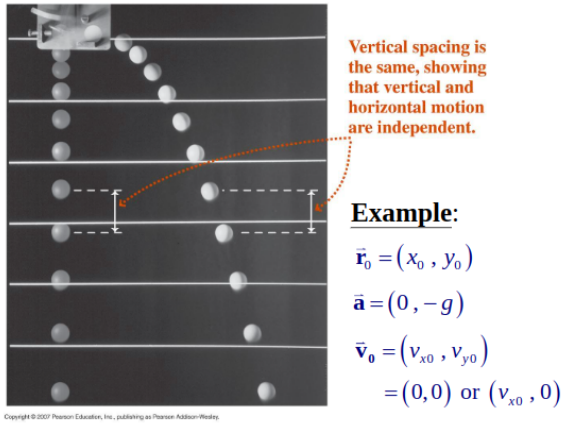
- With constant acceleration, the equations for one dimensional motion apply independently in each direction.
  在恆定加速度的情況下，一維運動的方程在每個方向上獨立應用。
- When motion in two or three dimensions each motion equation stands for 2D or 3D separate equations.
  當在二維或三維中運動時，每個運動方程代表 2D 或 3D 單獨的分量。

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

- For example, in two dimensions, the x and y-components of the position vector $\vec{r}$ can be written as:
  例如，在二維中，位置向量r 的 x 和 y 分量可以寫成：

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{y0}y + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{cases}$$

自由落體



> 垂直下落與拋體運動下落間距相同，表明垂直和水平運動是獨立的。

- 垂直下落

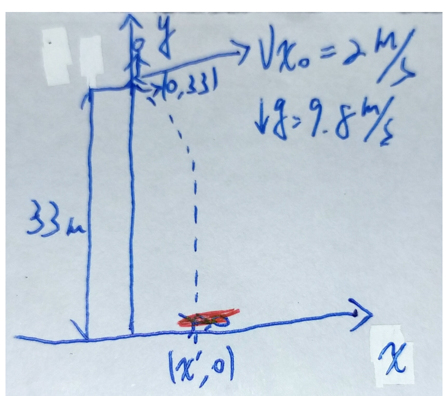
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- 拋體運動

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t \\ y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

例題 suicide

某生想從頂樓跳下來，假設該樓有33公尺，已知重力加速度 $g = 9.8(m/s^2)$ ，求該生會在空中滯空幾秒？若該生向前跳的速度為 $(2m/s)$ ，他會跳得多遠？



$$\begin{cases} x' = 0 + 2t \\ 0 = 33 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\therefore t = \pm 2.6s = 2.6s$$
$$\rightarrow x = 5.2m$$

3.5拋體運動

- Motion under the influence of gravity near Earth's surface has essentially constant acceleration $\vec{g}$ whose magnitude is $g = 9.8(m/s^2)$, and whose direction is downward.
  在地球表面的物體受向下的重力加速度影響，它的大小g=9.8米/秒平方
- 拋體運動方程在y軸垂直向上的座標中：

$$\begin{cases} V_x = v_{x0} \\ v_y = v_{y0} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}t \\ y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$