Ans:

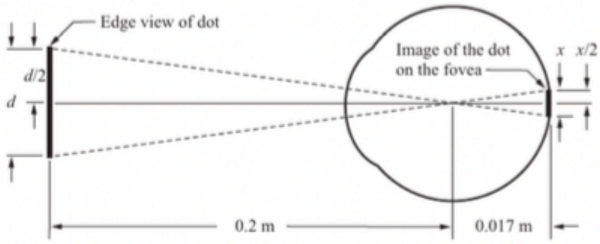
下圖中的幾何圖形展示如何獲得在視網膜形成之影像大小，其中水晶體聚焦中心和視網膜之間沿視軸的距離約為 17mm，因此根據題目所問當物體在距離 0.2m 的地方，其幾合關係如下

$$\frac{d/2}{0.2} = \frac{x/2}{0.017}$$

因此我們可得 x = 0.085d。

假設 Fovea 是一個 邊長 1.5mm 的 square，在該區域錐狀體的密度有 150,000 元素/mm^2，因此在此區域中央的錐狀體數目大約為 1.5x1.5x150,000 = 337500，所以在此方形區域錐狀體分佈為 581 x 581，在此我們假設錐狀體的間隔等於錐狀體大小，所以在邊長 1.5mm 的長度，有 581 個錐狀體和 580 個間隔，因此我們可推得錐狀體的長約為 1.5mm / (581 + 580) = 1.3 x 10^{-6} m。

若投射到點的大小小於錐狀體的 single resolution，我們假設這點對眼睛來說是看不到的，因此當 x = 0.085d < 1.3x10^{-6}m 時，也就是當 d < 15.3x10^{-6} m 時，眼睛是看不到的。



Ans:

參考 Fig2.3，我們可藉由其幾何關係得到如下算式

$$\frac{0.5m/2}{1m} = \frac{s/2}{0.2m}$$

因此可知成像的邊長為 s = 0.1m = 100mm，題目希望符合最小的 resolution 是 5 line pairs per mm，也就是 10 lines per mm，因此此 CCD 最少需要 d x d = (100*10) x (100*10) = 1000 x 1000 的 sensing elements。

(a) Scaling and translation (假訂是先作 scaling 然後再作 translation)

座標轉換可表示為如下

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & t_x \\ 0 & c_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

座標方程式為

$$x' = c_x x + t_x$$
$$y' = c_y y + t_y$$

(b) Scaling, translation, and rotation (先作 scaling，再作 translation，再作 rotation)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & 0 & t_x \\ 0 & c_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_x\cos\theta & -c_y\sin\theta & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ c_x\sin\theta & c_y\cos\theta & t_x\cos\theta + t_y\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

座標方程式為

$$x' = c_x\cos\theta\, x - c_y\sin\theta\, y + t_x\cos\theta - t_y\sin\theta$$
$$y' = c_x\sin\theta\, x + c_y\cos\theta\, y + t_x\cos\theta + t_y\sin\theta$$

(c) Vertical shear, scaling, translation, and rotation (先作 vertical shear，再作 scaling，再作 translation，再作 rotation)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s_v & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & c_x s_v & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & c_x s_v & t_x \\ 0 & c_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_x\cos\theta & c_x s_v\cos\theta - c_y\sin\theta & t_x\cos\theta - t_y\sin\theta \\ c_x\sin\theta & c_x s_v\sin\theta + c_y\cos\theta & t_x\cos\theta + t_y\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

座標方程式

$$x' = c_x\cos\theta\, x + \left(c_x s_v\cos\theta - c_y\sin\theta\right)y + t_x\cos\theta - t_y\sin\theta$$
$$y' = c_x\sin\theta\, x + (c_x s_v\cos\theta + c_y\cos\theta)y + t_x\cos\theta + t_y\sin\theta$$

(d) 不同矩陣乘法的 order 會造成不一樣的結果，用下面兩矩陣乘法當例子

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & t_x \\ 0 & c_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x & 0 & c_x t_x \\ 0 & c_y & c_y t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩陣乘法一的座標方程式如下

$$x' = c_x x + t_x$$
$$y' = c_y y + t_y$$

矩陣乘法二的座標方程式如下

$$x'' = c_x x + c_x t_x$$
$$y'' = c_y y + c_y t_y$$

由此我們可明顯看出在矩陣運算的順序不同，導致了在 offset 上有不同的效果，因此可支持我們一開始說的「不同矩陣乘法的 order 會造成不一樣的結果」。