✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة

- **البرجمة غير الخطية المقيدة**

  - **طريقة مضاريب لاغرانج**

    - استخدام الشرط الكافي وفق هيسيان
    - استخدام الشرط الكافي وفق هيسيان المحددة.

مقدمة

سندرس حالة دالة غير خطية مع قيود مساواة، والمسألة المدروسة في هذه الحالة تأخذ الصياغة الرياضية الآتية:

$$\begin{aligned} &\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\textit{subject to} \;\; g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ &\qquad\qquad\;\; g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ &\qquad\qquad\;\; g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{aligned}$$

ومن أجل هذه المسألة، فإن طريقة مضاريب لاغرانج تقتضي بتشكيل دالة جديدة كالآتي:

$$L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

تسمى $L(x,\lambda)$ دالة لاغرانج، وتسمى $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ مضاريب لاغرانج، وهذه المضاريب تقيس معدل التغير في قيمة دالة الهدف نتيجة إدخال تعديلات صغير على القيود، وبذلك تؤول المسألة المدروسة إلى مسألة مكافئة تأخذ الصياغة التالية:

$$\min_{x\in R^n, \lambda \in R^m} L(x,\lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) - b_i)$$

المرجع: بحوث العمليات – د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2015.

- **تتلخص طريقة مضاريب لاغرانج بالآتي:**

1- تشكيل دالة لاغرانج:

$$L(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(g_i(x)-b_i)$$

2- إيجاد النقاط الساكنة، وذلك بحل جملة المعادلات:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}=0\,,\qquad j=1,2,\dots,n$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}=g_i(x)-b_i=0\,,\qquad i=1,2,\dots,m$$

3- التحقق من طبيعة النقطة الساكنة المناسبة بالاعتماد على اختبارات الشروط الكافية.

عندما لا نستطيع تحديد طبيعة النقطة الساكنة بتطبيق اختبارات الشروط الكافية وفق مصفوفة هيسيان، ننتقل إلى مصفوفة هيسيان المحددة (Bordered Hessian Matrix) التي تعرف كالآتي:

$$H^B(x,\lambda)=\left(\begin{array}{c|c}0 & P(x)\\ \hline P^t(x) & H_L(x,\lambda)\end{array}\right)$$

حيث:

- $$H_L(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$
- $P(x)=\begin{pmatrix}\nabla g_1(x)\\ \vdots\\ \nabla g_m(x)\end{pmatrix}$ مصفوفة سطرها رقم i هو تدرج القيد رقم i.
- المصفوفة P^t هي منقول المصفوفة P.

بعد إيجاد النقاط الساكنة لدالة لاغرانج، وكون المسألة المدروسة هي min ، فيكون علينا دراسة طبيعة النقطة الساكنة التي تعطينا أقل قيمة لدالة الهدف مقارنة مع باقي النقاط الساكنة، وبفرض تلك النقطة هي (x^*,λ^*)، عندئذ نجد $H^B(x^*,\lambda^*)$ ، ونهتم فقط بالمحددات الرئيسية التي تبدأ بالمرتبة $(2m+1)$، ثم المرتبة $(2m+2)$ حتى نصل إلى المحدد من الرتبة $(m+n)$، وبذلك يكون عدد المحددات الرئيسية التي تهمنا يبلغ $(n-m)$، ونحصل على تلك المحددات بحذف الأسطر والأعمدة الأخيرة من المصفوفة $H^B(x^*,\lambda^*)$ ، والشرط الكافي لتكون النقطة x^* نقطة صغرى هو عندما تكون جميع تلك المحددات تمتلك إشارة توافق إشارة القيمة $(-1)^m$.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 12

تمرين 1: استخدم طريقة مضاريب لاغرانج لحل المسألة الآتية:

$$\min f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2+25$$
$$\text{subject to} \quad x_1+2x_2=7$$

الحل:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2-8x_1-8x_2+25-\lambda(x_1+2x_2-7)$$

نجد النقاط الساكنة، وذلك بحل جملة المعادلات:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}&=2x_1-8-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}&=2x_2-8-2\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=x_1+2x_2-7=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&x^*=(x_1^*,x_2^*)=(3,2)\ ,\quad \lambda^*=-2\\ &f(x^*)=-2\end{aligned}$$

النقطة x^* ساكنة، وبتطبيق اختبارات الحل الأمثل وفق مصفوفة هيسيان نجد:

$$H_L(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow D_1=2>0,\ D_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0$$

وبالتالي النقطة x^* هي الحل الأمثل.

تمرين 2: استخدم طريقة مضاريب لاغرانج لحل المسألة الآتية:

$$\min \quad f(x_1,x_2)=-4x_1^2x_2$$
$$\text{subject to } 8x_1^2+8x_1x_2=96$$

الحل:

بتشكيل دالة لاغرانج، نحصل على: $L(x_1,x_2,\lambda)=-4x_1^2x_2-\lambda(8x_1^2+8x_1x_2-96)$

نجد النقاط الساكنة:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}&=-8x_1x_2-16\lambda x_1-8\lambda x_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}&=-4x_1^2-8\lambda x_1=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=-8x_1^2-8x_1x_2+96=0\end{aligned}\Rightarrow \begin{aligned}&x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)})=(2,4),\ \lambda^{(1)}=-1, && f(x^{(1)})=-64\\ &x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)})=(-2,-4),\ \lambda^{(2)}=1, && f(x^{(2)})=64\end{aligned}$$

نلاحظ أن $f(x^{(1)})<f(x^{(2)})$ ، لذلك نطبق اختبارات الحل الأمثل وفق مصفوفة هيسيان على النقطة $(x^{(1)},\lambda^{(1)})=(2,4,-1)$ ولدينا:

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2} = -8x_2 - 16\lambda\,,\quad \frac{\partial^2 L(x^{(1)},\lambda^{(1)})}{\partial x_1^2} = -16$$

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 L(x^{(1)},\lambda^{(1)})}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} = -8x_1 - 8\lambda\,,\quad \frac{\partial^2 L(x^{(1)},\lambda^{(1)})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(x^{(1)},\lambda^{(1)})}{\partial x_2 \partial x_1} = -8$$

$$H_L(x^{(1)},\lambda^{(1)}) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D_1 = -16 < 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

وبذلك لا نستطيع تحديد طبيعة النقطة الساكنة بتطبيق اختبارات الشروط الكافية وفق مصفوفة هيسيان، فننتقل إلى مصفوفة هيسيان المحددة، ولدينا:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 16x_1 + 8x_2\,,\quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 8x_1\,,\quad P(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 64 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow P^t(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 64 \\ 16 \end{pmatrix},\ H_L(x^{(1)},\lambda^{(1)}) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^B(x^{(1)},\lambda^{(1)}) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 64 & 16 \\ \hline 64 & -16 & -8 \\ 16 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

وبما أن $m=1$ و $n=2$، فإن عدد المحددات الرئيسية التي نهتم بها هو $(n-m=1)$، وعليه يجب فقط اختبار إشارة المحدد $\left|H^B(x^{(1)},\lambda^{(1)})\right|$، ولدينا:

$$\left|H^B(x^{(1)},\lambda^{(1)})\right| = -12288 < 0$$

نلاحظ توافق بين إشارة المحدد وإشارة القيمة $(-1)^m = (-1)^1$، وبالتالي النقطة $x^{(1)} = (2\,,4)$ هي الحل الأمثل.

تمرين 3: استخدم طريقة مضاريب لاغرانج لحل المسألة الآتية:

$$\min \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$\text{subject to } 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 = 14$$

الحل:

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda(4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14)$$

نجد النقاط الساكنة:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x_1 + x_2^2 + 2x_3 - 14 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} & x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}) = (2\,,2\,,1),\ \lambda^{(1)} = 1 \\ & x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}) = (2\,,-2\,,1),\ \lambda^{(2)} = 1 \\ & x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}) = (2.8\,,0\,,1.4),\ \lambda^{(2)} = 1.4 \\ & f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 5,\ f(x^{(3)}) = 9.8 \end{aligned}$$

نتحقق من طبيعة النقطة $(x^{(1)},\lambda^{(1)})=(2,2,1,1)$ بالاعتماد على اختبارات الشروط الكافية وفق مصفوفة هيسيان، ولدينا:

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2^2}=2-2\lambda \quad , \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_3^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2\partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_1\partial x_3}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_3\partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_3\partial x_2}=0$$

$$H_L(x,\lambda)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2-2\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow H_L(x^{(1)},\lambda^{(1)})=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow D_1=2>0,\ D_2=0,\ D_3=0$$

وبذلك لا نستطيع تحديد طبيعة النقطة الساكنة $(x^{(1)},\lambda^{(1)})$ وفق مصفوفة هيسيان، فننتقل إلى مصفوفة هيسيان المحددة (يمكننا مباشرة تطبيق اختبارات الشروط الكافية وفق مصفوفة هيسيان المحددة)، ولدينا:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}=4,\ \frac{\partial g}{\partial x_2}=2x_2,\ \frac{\partial g}{\partial x_3}=2,\ P(x^{(1)})=\begin{pmatrix}4 & 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow P^t(x^{(1)})=\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

$$H^B(x^{(1)},\lambda^{(1)})=\left(\begin{array}{c|ccc}0 & 4 & 4 & 2\\ \hline 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)$$

عدد القيود $m=1$، وعدد متحولات القرار $n=3$، إذا عدد المحددات الرئيسية التي نهتم بها هو: $n-m=2$

وعليه يجب فقط اختبار إشارة المحددين:

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=-64<0\ ,\ \begin{vmatrix}0 & 4 & 4\\ 4 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 0\end{vmatrix}=-32<0$$

نلاحظ توافق بين إشارة المحددين السابقين وإشارة القيمة $(-1)^m=(-1)^1$، وبالتالي النقطة $x^{(1)}=(2,2,1)$ هي الحل الأمثل، والنقطة $x^{(2)}=(2,-2,1)$ هي أيضاً حلاً أمثلاً. ويمكن بسهولة التحقق من طبيعة النقطة $(x^{(2)},\lambda^{(2)})=(2,-2,1,1)$ بالاعتماد على اختبارات الشروط الكافية وفق مصفوفة هيسيان المحددة.
