✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

- **أنظمة العد (النظام الثنائي)** ←——————— **(المحاضرة 2)**

  - **مقدمة**
  - **النظام العشري والنظام الثنائي**
  - **التحويل من النظام الثنائي إلى العشري**
  - **التحويل من النظام العشري إلى الثنائي**
  - **العمليات الحسابية في النظام الثنائي**

المرجع:

- **مبادئ عمل الحواسيب – الجزء النظري، د. زياد قناية، د. سهيل محفوض، د. محمد أسعد، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2013.**

• مقدمة

للتعبير عن أي عدد ضمن نظام عد معين نحتاج إلى تحديد الآتي:

- مجموعة الرموز المستخدمة في هذا النظام.
- أساس النظام، وهو عدد الرموز المستخدمة في النظام.

إذا استخدمنا الرمز b لأساس النظام فإننا نستطيع التعبير عن مجموعة رموز النظام كالآتي:

$$\mathcal{D}_b=\{\ d_0\ ,\ d_1\ ,\ d_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ d_{b-1}\ \}$$

حيث d_i رقم أو حرف وذلك من أجل $i \in \{0,1,2,\dots,b-1\}$.

إن أي عدد صحيح x يمكن تمثيله في نظام يمتلك الأساس b من خلال سلسلة من رموز هذا النظام وذلك على النحو التالي:

$$x = \pm(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0)_b$$

حيث $x_i \in \mathcal{D}_b$ وذلك من أجل $i = 0, 1, \dots, n$ ، ويكون لدينا

$$\pm(x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0)_b = \pm\left(\sum_{i=0}^{n} x_i b^i\right)_{10}$$

ونلاحظ أن الطرف الأيمن يمثل قيمة العدد الصحيح في النظام العشري، حيث b^i هو وزن الخانة.

ملاحظة: من أجل الانتقال من أي نظام عد إلى النظام العشري نأخذ ناتج مجموع ضرب قيمة كل خانة بوزنها.

• النظام العشري

أساس النظام العشري هو الرقم 10، ومجموعة الرموز المستخدمة في هذا النظام هي:

$$\mathcal{D}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ويتم التعبير عن عدد صحيح في النظام العشري باستخدام سلسلة من الخانات حيث كل خانة تأخذ إحدى رموز النظام ويكون لها وزن محدد، وحسب ترتيب الخانة يحدد وزنها بالقيمة b^i ، حيث b هو أساس النظام و i يمثل رقم الخانة. ورقم الخانة يبدأ من الصفر للخانة الأولى من اليمين.

ويحدد وزن الخانة في النظام العشري على النحو التالي:

- وزن الخانة في الصورة الأسية

$$10^0 \text{ ، } 10^1 \text{ ، } 10^2 \text{ ، } . . .$$

- وزن الخانة كمعامل من 10

$$1 \text{ ، } 10 \text{ ، } 100 \text{ ، } . . .$$

فمثلاً نجد أن أوزان الخانات للعدد $(3192)_{10}$ كالتالي:

	3	1	9	2
الخانة ←	3	1	9	2
الوزن ←	10^3	10^2	10^1	10^0
	1000	100	10	1

ولدينا

$$(3192)_{10} = 2*10^0 + 9*10^1 + 1*10^2 + 3*10^3$$

وللتعبير عن عدد كسري في النظام العشري نستطيع استخدام الفاصلة الثابتة وعدد من الخانات على يسارها تمثل الجزء الصحيح، وعدد من الخانات على يمينها تمثل الجزء الكسري. وحسب ترتيب الخانة يحدد وزنها على النحو التالي:

الأوزان يسار الفاصلة				الأوزان يمين الفاصلة			
...	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...

مثال على العدد الكسري $(315.07)_{10}$ ، تكون الأوزان كما يلي:

الخانة ←	3	1	5	0	7
الوزن ←	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}
	100	10	1	0.1	0.01

وبناءً على ذلك لدينا

$$(315.07)_{10} = 3*10^2 + 1*10^1 + 5*10^0 + 0*10^{-1} + 7*10^{-2}$$

• النظام الثنائي

في نظام العد الثنائي لدينا ما يلي:

- الأساس $b = 2$.
- مجموعة الرموز المستخدمة $\mathcal{D}_2 = \{ 0 , 1 \}$.

يتكون العدد في النظام الثنائي من سلسلة من الخانات الثنائية، ويكون لكل خانة وزن يحدد حسب ترتيب الخانة بالقيمة b^i أي الأساس مرفوعاً لأس بقيمة رقم الخانة. ولتوضيح وزن الخانة نميز بين حالتين:

a. من أجل عدد صحيح، يبدأ رقم الخانة من الصفر للخانة الأولى من اليمين، ثم الرقم 1 وهكذا. فمثلاً نجد أوزان العدد الثنائي $(110101)_2$ كما يلي:

الخانة ←	1	1	0	1	0	1
الوزن ←	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	32	16	8	4	2	1

b. من أجل عدد كسري، يبدأ رقم الخانة للجزء الصحيح من الصفر للخانة الأولى من اليمين ثم الرقم 1 وهكذا. أما رقم الخانة للجزء الكسري فيبدأ من الرقم 1- للخانة الأولى من اليسار ثم الرقم 2- وهكذا. وبالنسبة للعدد الثنائي $(11101.011)_2$ تكون الأوزان كالآتي:

الخانة ←	1	1	0	1	0	1	1	1
الوزن ←	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

• التحويل من النظام الثنائي إلى العشري

يتم الانتقال من النظام الثنائي إلى النظام العشري بالاعتماد على قيمة الخانة ووزنها، حيث نأخذ ناتج مجموع ضرب قيمة كل خانة بوزنها. نطبق هذه القاعدة من أجل الانتقال من أي نظام (الثنائي، الثماني، الست عشري) إلى النظام العشري.

مثال 1: أوجد القيمة المكافئة للعدد $(110101)_2$ في النظام العشري.

الحل:

$$\begin{aligned}(110101)_2 &= 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0\\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1\\ &= (53)_{10}\end{aligned}$$

مثال 2: حول العدد $(1100111)_2$ إلى النظام العشري.

الحل:

$$\begin{aligned}(1100111)_2 &= 1*2^6+1*2^5+0*2^4+0*2^3+1*2^2+1*2^1+1*2^0\\ &= 64 + 32 + 4 + 2 + 1\\ &= (103)_{10}\end{aligned}$$

وبشكل عام يمكن تمثيل أي عدد كسري في النظام الثنائي على النحو التالي:

$$(x_{n-1}\cdots x_1x_0\,.\,x_{-1}x_{-2}\cdots x_{-m})_2 \quad ; \; x_i \in \mathcal{D}_2$$

حيث i رقم الخانة، n عدد خانات الجزء الصحيح، m عدد خانات الجزء الكسري. ويتم تحويل هذا العدد إلى النظام العشري باستخدام العلاقة التالية:

$$(x_{n-1}\cdots x_1x_0\,.\,x_{-1}x_{-2}\cdots x_{-m})_2 = (\sum_{i=-m}^{n-1} x_i 2^i)_{10}$$

مثال 3: أوجد القيمة المكافئة في النظام العشري للعدد $(11101.011)_2$.

الحل: لدينا $m=3$ ، $n=5$ وبالتالي:

$$\begin{aligned}(11101.011)_2 &= 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0\\ &\quad + 0*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-3}\\ &= 16 + 8 + 4 + 0 + 1\\ &\quad + 0 + 0.25 + 0.125\\ &= (29.375)_{10}\end{aligned}$$

مثال 4: حول العدد $(101.11)_2$ إلى النظام العشري.

الحل:

لدينا $m=2$ ، $n=3$ وبالتالي:

$$
\begin{aligned}
(101.11)_2 &= 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 \\
&\quad + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} \\
&= 4 + 0 + 1 + 0.5 + 0.25 \\
&= (5.75)_{10}
\end{aligned}
$$

إن أكبر عدد صحيح يمكن تمثيله باستخدام أربع خانات ثنائية هو

$$
\begin{aligned}
(1111)_2 &= 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 \\
&= 8 + 4 + 2 + 1 \\
&= (15)_{10}
\end{aligned}
$$

وفيما يلي جدول الأعداد من 0 حتى 15 في النظام العشري وما يقابلها في النظام الثنائي:

العدد في النظام العشري	العدد في النظام الثنائي			
	استخدام 4-Bit	استخدام 3-Bit	استخدام 2-Bit	استخدام 1-Bit
0	0000	000	00	0
1	0001	001	01	1
2	0010	010	10	
3	0011	011	11	
4	0100	100		
5	0101	101		
6	0110	110		
7	0111	111		
8	1000			
9	1001			
10	1010			
11	1011			
12	1100			
13	1101			
14	1110			
15	1111			

• التحويل من النظام العشري إلى الثنائي

لتحويل عدد صحيح من النظام العشري إلى النظام الثنائي نتبع الخطوات التالية:

1- نقوم بإجراء القسمة الصحيحة للعدد على الأساس 2.

2- يكون باقي القسمة هو قيمة الخانة الأولى من اليمين للعدد المكافئ في النظام الثنائي.

3- نقوم بإجراء القسمة الصحيحة لناتج القسمة السابقة على الأساس 2، ونكرر تلك الخطوة حتى يكون الناتج صفراً.

4- نرتب باقي القسمة في كل مرة من اليمين إلى اليسار فنحصل على العدد المكافئ في النظام الثنائي.

مثال 5: حول العدد $(117)_{10}$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

نقوم بإجراء القسمة الصحيحة على 2 ونبدأ من العدد 117 ونركز على باقي القسمة فنحصل على الآتي:

القسمة الصحيحة على 2	باقي القسمة	
117÷2=58	1	← قيمة الخانة من اليمين
58 ÷2=29	0	
29 ÷2=14	1	
14 ÷2=7	0	
7 ÷2=3	1	
3 ÷2=1	1	
1 ÷2=0	1	← قيمة الخانة من اليسار

وبهذا نكون قد حصلنا على النتيجة التالية:

$$(117)_{10} = (1110101)_2$$

لتحويل عدد يحوي جزءاً كسرياً فقط من النظام العشري إلى النظام الثنائي نتبع الخطوات التالية:

1- نضرب الجزء الكسري بالأساس 2.

2- يكون الجزء الصحيح لناتج الضرب هو قيمة الخانة الأولى من اليسار للجزء الكسري المكافئ في النظام الثنائي.

3- نضرب الجزء الكسري لناتج عملية الضرب السابقة بالأساس 2 ، ونكرر تلك الخطوة حتى يكون الجزء الكسري الناتج صفراً، أو حتى نحصل على الدقة المطلوبة.

4- نرتب الجزء الصحيح لناتج الضرب في كل مرة من اليسار إلى اليمين فنحصل على الجزء الكسري المكافئ في النظام الثنائي.

مثال 6: حول العدد $(0.375)_{10}$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

ضرب الجزء الكسري بالأساس 2	الجزء الصحيح لناتج الضرب	
0.375*2=0.750	0	← قيمة الخانة من اليسار
0.750*2=1.500	1	
0.500*2=1.000	1	← قيمة الخانة من اليمين

وبعد الترتيب المناسب يكون لدينا:

$$(0.375)_{10} = (0.011)_2$$

ملاحظة: يتم تحويل عدد كسري يحوي جزء كسري وجزء صحيح من النظام العشري إلى النظام الثنائي على مرحلتين:

1- تحويل الجزء الصحيح.

2- تحويل الجزء الكسري.

مثال 7: حول العدد $(61.5625)_{10}$ إلى النظام الثنائي.

الحل:

المرحلة الأولى: تحويل الجزء الصحيح $(61)_{10}$ إلى النظام الثنائي

القسمة الصحيحة على 2	باقي القسمة	
61 ÷2=30	1	← قيمة الخانة من اليمين
30 ÷2=15	0	
15 ÷2=7	1	
7 ÷2=3	1	
3 ÷2=1	1	
1 ÷2=0	1	← قيمة الخانة من اليسار

وبالتالي فان:

$(61)_{10} = (111101)_2$

المرحلة الثانية: تحويل الجزء الكسري $(0.5625)_{10}$ إلى النظام الثنائي

ضرب الجزء الكسري بالأساس 2	الجزء الصحيح لناتج الضرب	
0.5625*2=1.1250	1	← قيمة الخانة من اليسار
0.1250*2=0.2500	0	
0.2500*2=0.5000	0	
0.5000*2=1.0000	1	← قيمة الخانة من اليمين

إذاً لدينا:

$(0.5625)_{10} = (0.1001)_2$

وبذلك نحصل على النتيجة التالية:

$(61.5625)_{10} = (11101.1001)_2$

• العمليات الحسابية في النظام الثنائي

يتم إجراء العمليات الحسابية في النظام الثنائي على الأعداد الموجبة وفق القواعد التالية:

1- <u>عملية الجمع</u>:

$$(0)_2 + (0)_2 = (0)_2$$
$$(0)_2 + (1)_2 = (1)_2$$
$$(1)_2 + (0)_2 = (1)_2$$
$$(1)_2 + (1)_2 = (0)_2$$

في الحالة الرابعة، الناتج هو $(10)_2$ لذلك نضع 0 في الخانة المناسبة وينقل 1 إلى الخانة التالية.

مثال 8: أوجد ناتج ما يلي $(111101)_2 + (1110101)_2 = (\qquad)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccccccl} & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & & \rightarrow & \text{المنقول} \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \end{array}$$

وبالتالي

$$(111101)_2 + (1110101)_2 = (10110010)_2$$

وبالمقارنة مع النظام العشري لدينا

$$(61)_{10} + (117)_{10} = (178)_{10}$$

2- <u>عملية الطرح</u>:

$$(0)_2 - (0)_2 = (0)_2$$
$$(1)_2 - (1)_2 = (0)_2$$
$$(1)_2 - (0)_2 = (1)_2$$
$$(0)_2 - (1)_2 = (1)_2$$

في الحالة الرابعة تم استلاف إلى المطروح منه من الخانة التالية (على اليسار) وأصبحت عملية الطرح $(10)_2 - (1)_2 = (1)_2$.

مثال 9: أوجد ناتج ما يلي: $(1110)_2 - (101)_2 = (\qquad)_2$

الحل:

$$\begin{array}{ccccl} & & 0 & 10 & \rightarrow \text{نتيجة الاستلاف} \\ 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

وبالتالي فان:

$$(1110)_2 - (101)_2 = (1001)_2$$

3- عملية الضرب:

$$(0)_2 * (0)_2 = (0)_2$$
$$(0)_2 * (1)_2 = (0)_2$$
$$(1)_2 * (0)_2 = (0)_2$$
$$(1)_2 * (1)_2 = (1)_2$$

مثال 10: أوجد ناتج ما يلي $(1010)_2 * (101)_2 = (\quad)_2$

الحل:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & * & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
+ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

إذاً لدينا:

$$(1010)_2 * (101)_2 = (110010)_2$$

4- عملية القسمة:

$$(1)_2 \div (1)_2 = (1)_2$$
$$(0)_2 \div (1)_2 = (0)_2$$

مثال 11: أوجد ناتج ما يلي $(110111)_2 \div (101)_2 = (\quad)_2$

الحل:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1011 \\
\hline
101 & 110111 \\
 & 101 \\
\hline
 & 00111 \\
 & \;\;101 \\
\hline
 & \;\;0\,101 \\
 & \;\;\;\;101 \\
\hline
 & \;\;\;\;000
\end{array}$$

وبالتالي فان:

$$(110111)_2 \div (101)_2 = (1011)_2$$