

✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

(المحاضرة 4)

• خوارزمية السمبلكس ذات المرحلتين

- مسألة المرحلة الأولى.
- مسألة المرحلة الثانية.
- مناقشة بعض الحالات الخاصة.

• بعض الأسئلة المهمة:

- متى يتم الانتقال للمرحلة الثانية أثناء استخدام خوارزمية السمبلكس ذات المرحلتين.

(Page 68)

- هل عدد الجداول للحصول على الحل الأمثل متساوي في حالتي السمبلكس ذات التقنية M والسمبلكس ذات المرحلتين (مع التعليل).

(Page 72)

مسألة المرحلة الأولى:

هي مسألة min بدالة هدف تساوي مجموع المتحولات الاصطناعية ولها قيود المسألة الأصلية بعد كتابة تلك القيود بالصياغة القياسية الموسعة.

مسألة المرحلة الثانية:

هي مسألة بدالة هدف المسألة الأصلية ويتوافق نمطها (max or min) مع المسألة الأصلية، وتحدد قيودها من الجدول الأمثل لمسألة المرحلة الأولى بعد حذف أعمدة المتحولات الاصطناعية.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 4

تمرين 1: استخدام خوارزمية السمبلكس ذات المرحلتين لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: الصياغة القياسية الموسعة للقيود هي:

$$x_1 + x_2 - x_3 + R_1 = 8$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 + R_2 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 10$$

$$x_1, \dots, x_5, R_1, R_2 \geq 0$$

وتكون دالة الهدف للمرحلة 1 هي:

$$r = R_1 + R_2$$

ولدينا:

$$R_1 = 8 - x_1 - x_2 + x_3$$

$$R_2 = 12 - x_1 - 3x_2 + x_4$$

وبالتعويض في دالة الهدف للمرحلة 1 نجد:

$$r = -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 20$$

مسألة المرحلة 1 هي:

$$\min r = -2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 20$$

subject to

$$x_1 + x_2 - x_3 + R_1 = 8$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 + R_2 = 12$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 10$$

$$x_1, \dots, x_5, R_1, R_2 \geq 0$$

ويكون جدول السمبلكس الأول للمرحلة 1 كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r	2	4	-1	-1	0	0	0	20
R_1	1	1	-1	0	1	0	0	8
R_2	1	3	0	-1	0	1	0	12
x_5	1	1	0	0	0	0	1	10

جدول السمبلكس الأول (المرحلة 1)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	0	4
R_1	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
x_5	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	6

جدول السمبلكس الثاني (المرحلة 1)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r	0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	6
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_5	0	0	1	0	-1	0	1	2

جدول السمبلكس الثالث والأمثل (المرحلة 1)

وهذا الجدول يعطينا الحل الأمثل لمسألة المرحلة الأولى، وبما أن القيمة المثلى $r=0$ ننقل إلى المرحلة الثانية، ومن هذا الجدول وبعد حذف أعمدة المتحولات الاصطناعية نجد المعادلات التالية:

$$x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 6$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$$

$$x_3 + x_5 = 2$$

والتي تعد قيوداً لمسألة المرحلة 2، ومن القيد الأول والثاني نجد:

$$x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 + 6$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 2$$

وبالتعويض في دالة الهدف الأصلية $z = x_1 + 2x_2$ نجد:

$$z = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 10$$

لذلك يمكن كتابة مسألة المرحلة 2 كالآتي:

$$\max z = \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 10$$

subject to

$$x_1 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 6$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2$$

$$x_3 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

وبذلك يكون الجدول الأول للمرحلة 2 على النحو الآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	10
x_1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_5	0	0	1	0	1	2

جدول السمبلكس الأول (المرحلة 2)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	1	0	-2	0	0	16
x_4	2	0	-3	1	0	12
x_2	1	1	-1	0	0	8
x_5	0	0	1	0	1	2

جدول السمبلكس الثاني (المرحلة 2)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	1	0	0	0	2	20
x_4	2	0	0	1	3	18
x_2	1	1	0	0	1	10
x_3	0	0	1	0	1	2

جدول السمبلكس الثالث (المرحلة 2)

وهذا الجدول يعطينا الحل الأمثل وهو:

$$x_1 = 0, x_2 = 10$$

وتكون القيمة المثلى للمسألة الأصلية هي:

$$z = 20$$

تمرين 2: استخدام خوارزمية السمبلكس ذات المرحلتين لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{subject to } 5x_1 + x_2 &\geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ 2x_1 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل: (يتم تكملة الحل من قبل الطالب)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r								
R_1	5	1	-1	0	1	0	0	
R_2	3	1	0	-1	0	1	0	
x_5	2	0	0	0	0	0	1	

جدول السمبلكس الأول (المرحلة 1)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r								
x_1	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	
R_2	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	-1	$-\frac{3}{5}$	1	0	
x_5	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	

جدول السمبلكس الثاني (المرحلة 1)

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
r								
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{5}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	0	
x_5	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	

جدول السمبلكس الثالث والأمثل (المرحلة 1)

القاعدة						الحل
Z						
x_1						
x_3						
x_5						

جدول السمبلكس الأول (المرحلة 2)

القاعدة						الحل
Z						
x_2						
x_3						
x_5						

جدول السمبلكس الأول (المرحلة 2)

المتحول الداخل ، ونلاحظ

تمرين 3: استخدام خوارزمية السمبلكس ذات المرحلتين لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2$$

subject to

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: (يتم الحل ضمن محاضرة العملي)