✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

- **مسألة النقل (حل القاعدة الابتدائي)**
  - **تعريف مسألة النقل.**
  - **حل القاعدة الابتدائي – طريقة الزاوية الشمالية الغربية.**
  - **حل القاعدة الابتدائي – طريقة التكلفة الأقل.**
  - **حل القاعدة الابتدائي – طريقة تقريب Vogel.**

- **بعض الأسئلة**
  - **اكتب الصياغة الرياضية لمسألة النقل** (حيث عدد وحدات العرض $r_1, r_2, ..., r_h$، وعدد وحدات الطلب $q_1, q_2, ..., q_m$).
  - **هل عدد متحولات القاعدة للمسألة السابقة الذكر هو $h + m - 1$** (مع التعليل).
  -

المرجع: بحوث العمليات – د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2015.

تعدُّ مسألة النقل إحدى المسائل الخاصة في البرمجة الخطية التي تهتم بنقل وتوزيع الموارد المتاحة من عدة مصادر (مثل المخازن أو المستودعات أو مراكز العرض) إلى مواقع مختلفة (مثل مراكز التوزيع أو مراكز الطلب)، وذلك بأقل تكلفة ممكنة. وبشكل عام، تكون فرضيات ومصطلحات مسألة النقل كالآتي:

- نفرض أن هناك مجموعة من المصادر (Sources)، وهي: $S_1,S_2,...,S_m$، وأن عدد الوحدات المعروضة (المتوفرة) من منتج متجانس في تلك المصادر هي على التوالي: $a_1,a_2,...,a_m$.
- نفرض أن هناك مجموعة من المواقع (Destinations)، وهي: $D_1,D_2,...,D_n$
وأن عدد الوحدات المطلوبة من ذلك المنتج إلى تلك المواقع هي على التوالي: $b_1,b_2,...,b_n$
- لتلبية احتياجات المواقع، يجب أن يكون إجمالي الوحدات المعروضة يساوي على الأقل إجمالي الوحدات المطلوبة، وهذا يعني تحقق العلاقة الآتية: $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$
- الرمز c_{ij} يمثل تكلفة نقل الوحدة من المصدر S_i إلى الموقع D_j.
- الرمز x_{ij} يمثل عدد الوحدات التي يتم نقلها من المصدر S_i إلى الموقع D_j.
- المطلوب تحديد عدد الوحدات x_{ij}، بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

ويمكن صياغة مسألة النقل بجدول يسمى جدول النقل، ويكتب كما يلي:

					العرض
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

الجدول (1): جدول النقل.

وتكون الصياغة الرياضية العامة لمسألة النقل كما يلي:

$$\min w = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$subject\ to\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad , \quad i=1,2,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad , \quad j=1,2,...,n$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \ i=1,2,...,m; j=1,2,...,n$$

حيث:

1- الدالة w هي دالة الهدف، وتمثل تكلفة النقل الإجمالية.

2- القيد $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i$ هو قيد العرض في المصدر S_i، ويشير هذا القيد بالضرورة إلى أن يكون عدد الوحدات المنقولة من المصدر S_i إلى جميع المواقع لا يتخطى ما هو متوفر أصلاً في ذلك المصدر، ومن أجل $i = 1,2,..m$ نحصل على ما يسمى قيود العرض (Supply constraints).

3- القيد $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j$ هو قيد الطلب في الموقع D_j، ويشير هذا القيد بالضرورة إلى أن يكون عدد الوحدات المنقولة من جميع المصادر إلى الموقع D_j يلبي على الأقل الحد الأدنى من احتياجات ذلك الموقع، ومن أجل $j = 1,2,..n$ نحصل على ما يسمى قيود الطلب (Demand constraints).

4- شروط عدم السلبية محققة.

ونقول عن مسألة النقل التي يكون فيها إجمالي الوحدات المعروضة يساوي إجمالي الوحدات المطلوبة ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) إنها **مسألة متوازنة** (Balanced problem)، وعندئذ تصبح قيود العرض وقيود الطلب معادلات، كما أن مسألة النقل تصبح في الصياغة القياسية كالآتي:

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} \ge 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m; \ j = 1,2,\ldots,n$$

يتركز اهتمامنا على حل مسألة النقل المتوازنة، وإذا لم تكن كذلك نبدأ بتحويلها لمسألة متوازنة، وهذا ممكن دائماً ويتلخص بحالتين:

- **الحالة الأولى:**

تظهر في مسألة النقل التي يكون فيها إجمالي الوحدات المعروضة أكبر من إجمالي الوحدات المطلوبة ($\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$)، ويتم تحويلها لمسألة متوازنة بإضافة عمود وهمي (يمثل هذا العمود طلباً وهمياً بعدد الوحدات $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$) في جدول النقل تكون التكلفة فيه أصفاراً كما يلي:

					العمود الوهمي	العرض
	c_{11} ، x_{11}	c_{12} ، x_{12}	$\cdots$	c_{1n} ، x_{1n}	0 ، x_{1n+1}	a_1
	c_{21} ، x_{21}	c_{22} ، x_{22}	$\cdots$	c_{2n} ، x_{2n}	0 ، x_{2n+1}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1} ، x_{m1}	c_{m2} ، x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} ، x_{mn}	0 ، x_{mn+1}	a_m
الطلب	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	b_{n+1}	

الجدول (2): جدول النقل مضافاً إليه عمود وهمي.

- **الحالة الثانية:**

تظهر في مسألة النقل التي يكون فيها إجمالي الوحدات المعروضة أقل من إجمالي الوحدات المطلوبة ($\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$)، ويتم تحويلها لمسألة متوازنة بإضافة سطر وهمي في جدول النقل تكون التكلفة فيه أصفاراً كما يلي:

					العرض
	c_{11} ، x_{11}	c_{12} ، x_{12}	$\cdots$	c_{1n} ، x_{1n}	a_1
	c_{21} ، x_{21}	c_{22} ، x_{22}	$\cdots$	c_{2n} ، x_{2n}	a_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1} ، x_{m1}	c_{m2} ، x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} ، x_{mn}	a_m
السطر الوهمي	0 ، $x_{m+1\,1}$	0 ، $x_{m+1\,2}$	$\cdots$	0 ، $x_{m+1\,n}$	a_{m+1}
الطلب	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

الجدول (3): جدول النقل مضافاً إليه سطر وهمي.

ويمثل السطر الوهمي عرضاً وهمياً بعدد الوحدات:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 8

تمرين 1: أوجد حل القاعدة الابتدائي لمسألة النقل الآتية باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

12	11	21	2	21
19	14	10	8	28
16	1	15	13	11
8	20	22	10	

الحل:

نلاحظ أن مسألة النقل متوازنة لأن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 60$$

وجدول النقل هو كالآتي:

12	11	21	2	
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	**21**
19	14	10	8	
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	**28**
16	1	15	13	
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	**11**
8	**20**	**22**	**10**	

جدول النقل

نبدأ من الزاوية الشمالية الغربية ونراعي الاشباع حتى نصل الى حل القاعدة الابتدائي بالجدول التالي:

	1	3	5	6	
2	12	11	21	2	
	8	13			~~**21**~~ ~~**13**~~
4	19	14	10	8	
		7	21		~~**28**~~ ~~**21**~~
	16	1	15	13	
			1	10	~~**11**~~ ~~**10**~~
	~~**8**~~	~~**20**~~	~~**22**~~	~~**10**~~	
		~~**7**~~	~~**1**~~		

نلاحظ أن حل القاعدة الابتدائي يتضمن متحولات القاعدة:

$$x_{11}=8, x_{12}=13, x_{22}=7, x_{23}=21, x_{33}=1, x_{34}=10$$

وعدد هذه المتحولات يحقق الشرط:

$$m+n-1=3+4-1=6$$

أما متحولات غير القاعدة فتأخذ القيمة صفر، وهي محددة بالخلايا المظللة:

$$x_{13}=0, x_{14}=0, x_{21}=0, x_{24}=0, x_{31}=0, x_{32}=0$$

وتكون تكلفة النقل لحل القاعدة الابتدائي كالآتي:

$$w=8\times12+13\times11+7\times14+21\times10+1\times15+10\times13=692$$

تمرين 2: أوجد حل القاعدة الابتدائي لمسألة النقل الآتية باستخدام طريقة التكلفة الأقل:

12	11	21	2	21
19	14	10	8	28
16	1	15	13	11
8	20	22	10	

الحل:

بما أن المسألة متوازنة، نبدأ بالبحث عن الخلية ذات التكلفة الأقل، ونراعي الاشباع ونتابع بالفكرة ذاتها حتى نصل الى حل القاعدة الابتدائي بالجدول التالي:

	6	4	3	2	
5	2 (12)	9 (11)	(21)	10 (2)	~~21~~ ~~11~~ ~~2~~
	6 (19)	(14)	22 (10)	(8)	~~28~~ ~~6~~
1	(16)	11 (1)	(15)	(13)	~~11~~
	~~8~~ ~~6~~	~~20~~ ~~9~~	~~22~~	~~10~~	

ويكون حل القاعدة الابتدائي لمسألة النقل المدروسة باستخدام طريقة التكلفة الأقل:

$$x_{11}=2, x_{12}=9, x_{13}=10, x_{21}=6, x_{23}=22, x_{32}=11$$

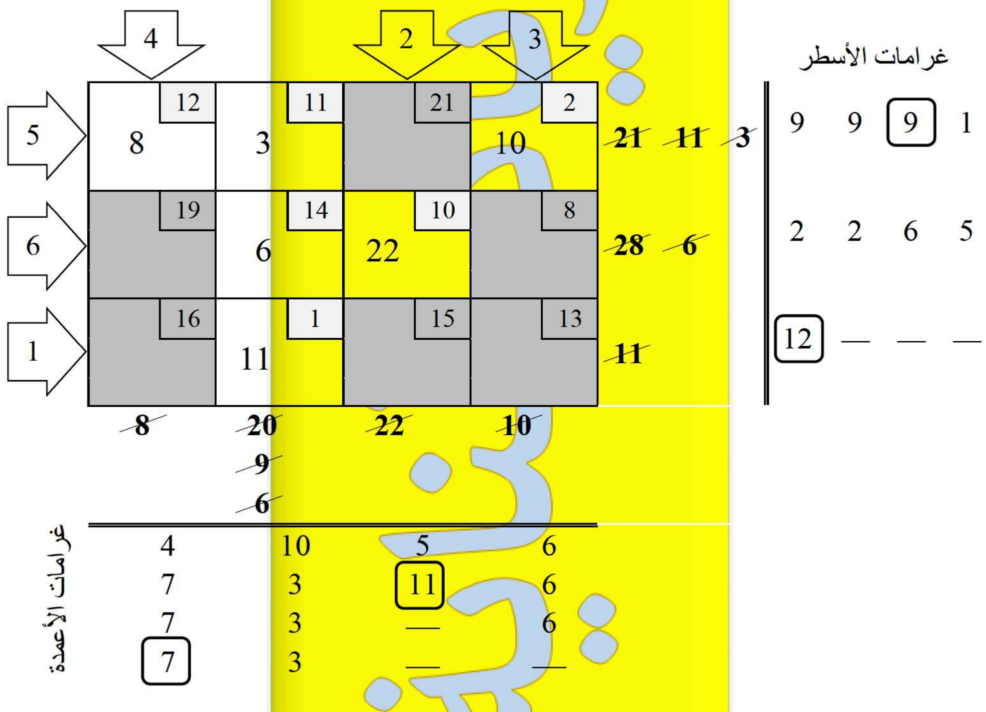
وتكلفة النقل لهذا الحل كالآتي:

$$w=2\times 12+9\times 11+10\times 2+6\times 19+22\times 10+11\times 1=488$$

تمرين 3: أوجد حل القاعدة الابتدائي لمسألة النقل الآتية باستخدام طريقة تقريب فوغل:

12	11	21	2	21
19	14	10	8	28
16	1	15	13	11
8	20	22	10	

الحل:



ويكون حل القاعدة الابتدائي لمسألة النقل المدروسة كما يلي:

$$x_{11}=8, x_{12}=3, x_{14}=10, x_{22}=6, x_{23}=22, x_{32}=11$$

وتكلفة النقل لهذا الحل كالآتي:

$$w=8\times 12+3\times 11+10\times 2+6\times 14+22\times 10+11\times 1=464$$