

✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

(المحاضرة 2)

• خوارزمية Simplex (المتحولات الراكدة)

- الصياغة القياسية لمسألة LP.
- متحولات القاعدة.
- المبادئ الأساسية لخوارزمية Simplex.
- خطوات خوارزمية Simplex لمسألة Max (الصياغة النظامية).

• بعض الأسئلة المهمة:

(Page 49)

- اكتب خصائص الصياغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية.

(Page 52)

- اكتب المبادئ الأساسية لخوارزمية السمبلكس.

(Page 54)

- متى يتحقق شرط الأمثلية بجدول السمبلكس من أجل مسألة Max.

(Page 54)

- كيف يتم اختيار المتحول الداخل بجدول السمبلكس لمسألة Max.

(Page 54)

- كيف يتم اختيار المتحول الخارج بجدول السمبلكس.

• خوارزمية Simplex (المتحولات الراكدة)

ويمكننا التعبير عن الصياغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية كالآتي:

$$\max (or \min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

subject to

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

حيث $b_1, b_2, \dots, b_m \geq 0$

نستطيع كتابة الصياغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية بمعالجة أمرين هما:

• معالجة القيود

أ- عندما يكون القيد معادلة (أو متباينة) طرفها الأيمن ثابت قيمته سالبة، يتم ضرب الطرفين بـ 1-.

ب- تحويل القيد الذي يعبر عنه بمتباينة من النوع (\leq) إلى معادلة، ويتم إجراء ذلك بإضافة متحول إلى الطرف الأيسر، ويسمى المتحول الراكد (slack variable).

ت- تحويل القيد الذي يعبر عنه بمتباينة من النوع (\geq) إلى معادلة، ويتم إجراء ذلك بطرح متحول من الطرف الأيسر، ويسمى المتحول الفائض (surplus variable).

• معالجة المتحولات غير محددة الإشارة

تتم معالجة كل متحول غير محدد الإشارة باستخدام متحولين غير سالبين، مثلاً إذا كان المتحول x_i غير محدد الإشارة،

$$x_i = x'_i - x''_i ; x'_i, x''_i \geq 0$$

وتتلخص خطوات خوارزمية السمبلكس لمسألة Max ذات الصياغة النظامية وبحيث تكون قيم الطرف الأيمن من القيود غير سالبة كالآتي:

الخطوة 1: كتابة الصياغة القياسية.

الخطوة 2: كتابة جدول السمبلكس الأول وتكون القاعدة هي المتحولات الراكدة.

الخطوة 3: اختبار أمثلية حل القاعدة، وإذا تحقق شرط الأمثلية نتوقف ويكون حل القاعدة الحالي هو الحل الأمثل.

الخطوة 4: اختيار المتحول الداخل والمتحول الخارج، وإذا لم نتمكن من تحديد المتحول الخارج نتوقف ويكون لدينا حل غير محدود.

الخطوة 5: كتابة جدول السمبلكس الجديد (يأخذ المتحول الداخل مكان المتحول الخارج في القاعدة)، ونعود للخطوة 3.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 2

تمرين 1: استخدم خوارزمية السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: نكتب الصياغة القياسية، وهي كالآتي:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

نكتب جدول السمبلكس الأول:

		العمود المحوري				
	القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	الحل
→ سطر دالة الهدف	z	-3	-2	0	0	0
→ سطر المتحول x_3	x_3	4	3	1	0	12
← السطر المحوري	x_4	4	1	0	1	8

جدول السمبلكس الأول

المتحول الداخل هو x_1 لأنه يمتلك أصغر المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف $\varepsilon = \min\{-3, -2\} = -3$

المتحول الخارج هو x_4 لأنه يحقق قاعدة النسبة الأصغر $\theta = \min\{\frac{12}{4}, \frac{8}{4}\} = \frac{8}{4}$

نكتب جدول السمبلكس الثاني بتنفيذ العمليات التالية:

1- يأخذ x_1 مكان x_4 في عمود القاعدة.

2- نقسم السطر المحوري على العنصر المحوري وهو القيمة 4 لنجد سطر المتحول x_1 في الجدول الثاني.

3- سطر z الجديد = سطر z القديم + (سطر المتحول x_1) $\times (3)$.

4- سطر المتحول x_3 الجديد = سطر المتحول x_3 القديم + (سطر المتحول x_1) $\times (-4)$.

فنحصل على الجدول الآتي:

		العمود المحوري ↓				
	القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	الحل
→ سطر دالة الهدف	z	0	$-5/4$	0	$3/4$	6
← السطر المحوري	x_3	0	2	1	-1	4
→ سطر المتحول x_1	x_1	1	$1/4$	0	$1/4$	2

جدول السمبلكس الثاني

المتحول الداخل هو x_2 ، والمتحول الخارج هو x_3 لأنه يحقق قاعدة النسبة الأصغر $\theta = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{2}{1/4} \right\} = \frac{4}{2}$

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	الحل
z	0	0	$5/8$	$1/8$	$17/2$
x_2	0	1	$1/2$	$-1/2$	2
x_1	1	0	$-1/8$	$3/8$	$3/2$

جدول السمبلكس الثالث (الأمثل)

نلاحظ أن الجدول الثالث يعطينا الحل الأمثل لأن جميع معاملات متحولات غير القاعدة في سطر دالة الهدف غير سالبة. والحل الأمثل هو: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2$ ، أما القيمة المثلى فهي: $z = \frac{17}{2}$.

تمرين 2: استخدم خوارزمية السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

subject to

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 26$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: نكتب الصياغة القياسية، وهي كالآتي:

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

subject to

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_4 = 26$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

وجداول السمبلكس الأول هو:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	-4	-3	0	0	0	0
x_3	2	1	1	0	0	10
x_4	5	3	0	1	0	26
x_5	1	1	0	0	1	8

جدول السمبلكس الأول

x_1 هو المتحول الداخل لأنه يمتلك أصغر المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف، ولدينا قاعدة النسبة الأصغر $\theta = \min \left\{ \frac{10}{2}, \frac{26}{5}, \frac{8}{1} \right\} = \frac{10}{2}$ لذلك x_3 هو المتحول الخارج.

باستخدام التحويلات الأولية المناسبة وبحيث يأخذ المتحول الداخل مكان المتحول الخارج في عمود القاعدة نجد:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	-1	2	0	0	20
x_1	1	0.5	0.5	0	0	5
x_4	0	0.5	-2.5	1	0	1
x_5	0	0.5	-0.5	0	1	3

جدول السمبلكس الثاني

x_2 هو المتحول الداخل، ولدينا قاعدة النسبة الأصغر $\theta = \min \left\{ \frac{5}{0.5}, \frac{1}{0.5}, \frac{3}{0.5} \right\} = \frac{1}{0.5}$ لذلك x_4 هو المتحول الخارج.

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	-3	2	0	22
x_1	1	0	3	-1	0	4
x_2	0	1	-5	2	0	2
x_5	0	0	2	-1	1	2

جدول السمبلكس الثالث

x_3 هو المتحول الداخل، ولدينا قاعدة النسبة الأصغر $\theta = \min \left\{ \frac{4}{3}, \frac{2}{2} \right\} = \frac{2}{2}$ لذلك x_5 هو المتحول الخارج.

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	0	0.5	1.5	25
x_1	1	0	0	0.5	-1.5	1
x_2	0	1	0	-0.5	2.5	7
x_3	0	0	1	-0.5	0.5	1

جدول السمبلكس الرابع (الأمثل)

الحل الأمثل هو: $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 1$ ، والقيمة المثلى هي: $z = 25$.

تمرين 3: استخدم خوارزمية السمبلكس لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

subject to

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

الحل	x_4	x_3	x_2	x_1	القاعدة
0	0	0	-3	-2	z
3	0	1	1	-1	x_3
2	1	0	1	-2	x_4

جدول السمبلكس الأول

الحل	x_4	x_3	x_2	x_1	القاعدة
6	3	0	0	-8	z
1	-1	1	0	1	x_3
2	1	0	1	-2	x_2

جدول السمبلكس الثاني

الحل	x_4	x_3	x_2	x_1	القاعدة
14	-5	8	0	0	z
1	-1	1	0	1	x_1
4	-1	2	1	0	x_2

جدول السمبلكس الثالث

نلاحظ أن المتحول الداخل هو x_4 ، وبذلك يتحدد العمود المحوري، ونلاحظ أن معاملات القيود للمتحول الداخل غير موجبة، وبالتالي تفشل قاعدة النسبة الأصغر في تحديد المتحول الخارج لذلك نتوقف عن متابعة الحل تنفيذاً لخوارزمية السمبلكس، ويكون للمسألة حل غير محدود. ويمكننا التأكد من ذلك بيانياً.