✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

- **خوارزمية السمبلكس المرافقة**

  - **تعريف المسألة المرافقة لمسألة LP.**
  - **استنتاج الحل الأمثل للمسألة المرافقة.**
  - **خوارزمية السمبلكس المرافقة.**

- **بعض الأسئلة المهمة:**

(سيتم طرح بعض الأسئلة أثناء شرح المحاضرة)

  - **سؤال 1:**
  - **سؤال 2:**
  - **سؤال 3:**
  -

المرجع: بحوث العمليات – د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2015.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 6

تمرين 1: اكتب المسألة المرافقة للمسألة الأولية الآتية

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 40x_1 + 50x_2 \\ &\textit{subject to} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ &\qquad 4x_1 + 2x_2 \le 4 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل:

تكتب الصياغة القياسية كالآتي:

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 40x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &\textit{subject to} \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ &\qquad 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

وتكتب المسألة المرافقة كما يلي:

$$\begin{aligned} &\min \quad w = 3y_1 + 4y_2 \\ &\textit{subject to} \\ &\qquad 2y_1 + 4y_2 \ge 40 \\ &\qquad 3y_1 + 2y_2 \ge 50 \\ &\qquad y_1 \le 0, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

تمرين 2: اكتب المسألة المرافقة للمسألة الأولية الآتية

$$\begin{aligned} &\min \quad z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \\ &\textit{subject to} \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 - x_3 \le 1 \\ &\qquad -x_1 + 5x_2 - x_3 \ge -4 \\ &\qquad x_1, x_3 \ge 0 \\ &\qquad x_2 \ \text{غير محدد الإشارة} \end{aligned}$$

الحل: بضرب طرفي المتباينة التي تمثل القيد الثالث بـ -1 وبفرض $x_2 = x_2' - x_2'' \quad ; x_2', x_2'' \ge 0$، تكون الصياغة القياسية كالآتي:

$$\min\ z = -x_1 - 3x_2' + 3x_2'' - 2x_3$$

subject to

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' + x_3 + x_4 &= 2\\
x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - x_3 + x_5 &= 1\\
x_1 - 5x_2' + 5x_2'' + x_3 + x_6 &= 4\\
x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0
\end{aligned}$$

وتكتب المسألة المرافقة كما يلي:

$$\max\ w = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

subject to

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + y_3 &\le -1\\
3y_1 + 2y_2 - 5y_3 &\le -3\\
-3y_1 - 2y_2 + 5y_3 &\le 3\\
y_1 - y_2 + y_3 &\le -2\\
y_1, y_2, y_3 &\le 0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن القيدين الثاني والثالث للمسألة المرافقة يمثلان بالمعادلة الآتية: $-3y_1 - 2y_2 + 5y_3 = 3$

وبالتالي تصبح المسألة المرافقة كما يلي:

$$\max\ w = 2y_1 + y_2 + 4y_3$$

subject to

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + y_3 &\le -1\\
-3y_1 - 2y_2 + 5y_3 &= 3\\
y_1 - y_2 + y_3 &\le -2\\
y_1, y_2, y_3 &\le 0
\end{aligned}$$

تمرين 3: اكتب المسألة المرافقة للمسألة الأولية الآتية

الحل: المسألة المرافقة	**المسألة الأولية**
$\min\ z = 6y_1 + 4y_2$ *subject to* $y_1 + 5y_2 \ge 1$ $4y_1 + y_2 \ge 2$ $3y_1 + 2y_2 \ge 3$ $y_1 \ge 0$ y_2 غير محدد الاشارة	$\max\ z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ *subject to* $x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 6$ $5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

تمرين 4: لدينا المسألة الأولية الآتية:

$$\max \ z = x_1 + 9x_2 + x_3$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 15$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

المطلوب:

1- إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأولية مستخدماً خوارزمية السمبلكس.

2- اكتب المسألة المرافقة.

3- إيجاد الحل الأمثل للمسألة المرافقة مباشرة من جدول السمبلكس الأمثل للمسألة الأولية.

الحل:

الطلب الأول: الصياغة القياسية للمسألة الأولية هي كالآتي:

$$\max \ z = x_1 + 9x_2 + x_3$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \quad x_5 = 15$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

وتكون جداول السمبلكس كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	-1	-9	-1	0	0	0
x_4	1	$\boxed{2}$	3	1	0	9
x_5	3	2	2	0	1	15

جدول السمبلكس الأول

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{25}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{81}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_5	2	0	-1	-1	1	6

جدول السمبلكس الثاني (الأمثل)

الحل الأمثل للمسألة الأولية هو: $x_1^* = 0, x_2^* = \frac{9}{2}, x_3^* = 0$ ، والقيمة المثلى هي: $z^* = \frac{81}{2}$.

الطلب الثاني: المسألة المرافقة هي كالآتي:

$$\begin{aligned}&\min\ w = 9y_1 + 15y_2\\&\textit{subject to}\\&\quad y_1 + 3y_2 \ge 1\\&\quad 2y_1 + 2y_2 \ge 9\\&\quad 3y_1 + 2y_2 \ge 1\\&\quad y_1, y_2 \ge 0\end{aligned}$$

الطلب الثالث:

المتحول المرافق y_1 يناظر المتحول x_4، والمتحول المرافق y_2 يناظر المتحول x_5، وبالتالي نحصل على الحل الأمثل للمسألة المرافقة من معاملات x_4, x_5 في سطر دالة الهدف ضمن جدول السمبلكس الأمثل وهو: $y_1^* = \frac{9}{2}, y_2^* = 0$، أما القيمة المثلى للمسألة المرافقة فهي: $w^* = \frac{81}{2}$.

تمرين 5: استخدم خوارزمية السمبلكس المرافقة لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned}&\max z = -x_1 - x_2\\&\textit{subject to}\\&\quad 2x_1 - x_2 \ge 2\\&\quad 2x_1 + 4x_2 \ge 8\\&\quad 6x_1 + 5x_2 \le 30\\&\quad x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

الحل:

نكتب المسألة بالصياغة النظامية كالآتي:

$$\begin{aligned}&\max z = -x_1 - x_2\\&\textit{subject to}\\&\quad -2x_1 + x_2 \le -2\\&\quad -2x_1 - 4x_2 \le -8\\&\quad 6x_1 + 5x_2 \le 30\\&\quad x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

ستصبح المسألة كالآتي:

$$\max z = -x_1 - x_2$$

$$\textit{subject to}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= -2 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_4 \quad &= -8 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_5 &= 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل القاعدة الابتدائي $(x_3, x_4, x_5) = (-2, -8, 30)$ لا يحقق شروط عدم السلبية، ويكون الجدول الأول للسمبلكس المرافقة كالآتي:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	1	1	0	0	0	0
x_3	−2	1	1	0	0	−2
x_4	−2	$\boxed{-4}$	0	1	0	−8
x_5	6	5	0	0	1	30

الجدول الأول للسمبلكس المرافقة

x_4 هو المتحول الخارج لأنه متحول قاعدة ويمتلك أصغر المعاملات السالبة في عمود الحل $\varepsilon = \min\{-4, -8\} = -8$، وبذلك يتحدد السطر المحوري، ولدينا قاعدة النسبة الأكبر $\theta = \max\{\frac{1}{-2}, \frac{1}{-4}\} = \frac{1}{-4}$ لذلك نختار x_2 ليكون المتحول الداخل، وبذلك يتحدد العمود المحوري ، وبالتالي يتحدد العنصر المحوري. باستخدام التحويلات الأولية المناسبة نجد الجدول الثاني للسمبلكس المرافقة:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0.5	0	0	0.25	0	−2
x_3	$\boxed{-2.5}$	0	1	0.25	0	−4
x_2	0.5	1	0	−0.25	0	2
x_5	3.5	0	0	1.25	1	20

الجدول الثاني للسمبلكس المرافقة

المتحول الخارج هو x_3 حيث $\varepsilon = \min\{-4, -, -\}$، المتحول الداخل هو x_1 حيث $\theta = \max\{\frac{0.5}{-2.5}, -\}$.

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	0.2	0.3	0	−2.8
x_1	1	0	−0.4	−0.1	0	1.6
x_2	0	1	0.2	−0.2	0	1.2
x_5	0	0	1.4	1.6	1	14.4

الجدول الثالث (الأمثل) للسمبلكس المرافقة

الحل الأمثل هو: $x_1^* = 1.6, x_2^* = 1.2, x_3^* = 0$، والقيمة المثلى هي: $z^* = -2.8$.