✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

- **خوارزمية النقل والخوارزمية الهنغارية**
  - خوارزمية النقل.
  - تعريف مسألة التخصيص.
  - الخوارزمية الهنغارية.

- **بعض الأسئلة المهمة:**
  - اكتب الخطوات الأساسية لخوارزمية النقل. **(Page 145)**
  - اشرح كيفية اختبار أمثلية حل القاعدة في مسألة النقل. **(Page 145)**
  - اشرح كيفية تحسين حل القاعدة بمسألة النقل إذا كان غير أمثل. **(Page 150)**
  - اكتب الصياغة الرياضية لمسألة التخصيص. **(Page 158)**
  - اكتب الخطوات الأساسية للخوارزمية الهنغارية. **(Page 162)**

المرجع: بحوث العمليات – د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2015.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 9

تمرين 1: أوجد الحل الأمثل لمسألة النقل الآتية:

12	11	21	2	**21**
19	14	10	8	**28**
16	1	15	13	**11**
8	**20**	**22**	**10**	

وذلك انطلاقاً من حل القاعدة الناتج باستخدام طريقة التكلفة الأقل.

الحل:

وجدنا من المحاضرة السابقة أن الجدول الآتي يعطينا حل القاعدة الأول، ويسمى جدول النقل الأول، والخلايا الفارغة تمثل متحولات غير القاعدة، وتكلفة هذا الحل هو $w_1 = 488$

(12) 2	(11) 9	(21)	(2) 10	**21**
(19) 6	(14)	(10) 22	(8)	**28**
(16)	(1) 11	(15)	(13)	**11**
8	**20**	**22**	**10**	

نلاحظ من جدول النقل الأول أن مجموعة متحولات غير القاعدة هي: $\{x_{13}, x_{22}, x_{24}, x_{31}, x_{33}, x_{34}\}$

نكتب جميع الحلقات وتأثير التكلفة لكل حلقة ضمن جدول كالآتي:

متحولات غير القاعدة	الحلقات	تأثير التكلفة
x_{13}	$x_{13}, x_{11}, x_{21}, x_{23}$	$c_{13} - c_{11} + c_{21} - c_{23} = 18$
x_{22}	$x_{22}, x_{12}, x_{11}, x_{21}$	$c_{22} - c_{12} + c_{11} - c_{21} = -4$
x_{24}	$x_{24}, x_{14}, x_{11}, x_{21}$	$c_{24} - c_{14} + c_{11} - c_{21} = -1$
x_{31}	$x_{31}, x_{32}, x_{12}, x_{11}$	$c_{31} - c_{32} + c_{12} - c_{11} = 14$
x_{33}	$x_{33}, x_{23}, x_{21}, x_{11}, x_{12}, x_{32}$	$c_{33} - c_{23} + c_{21} - c_{11} + c_{12} - c_{32} = 22$
x_{34}	$x_{34}, x_{14}, x_{12}, x_{32}$	$c_{34} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 21$

نلاحظ وجود قيم سالبة ضمن تأثير التكلفة، وهذا مؤشر أن حل القاعدة الحالي غير أمثل، ويجب تحسين هذا الحل.

المتحول الداخل: $x_{22} \sim \min(-4,-1)$

المتحول الخارج: $x_{21} \sim \min(x_{12}, x_{21}) = \min(9,6)$

(حيث x_{21} , x_{12} هي الرؤوس ذات الترقيم الزوجي في حلقة المتحول الداخل)

نرسم حلقة المتحول الداخل في جدول النقل الأول، ونضع إشارة (+) في خلايا الرؤوس ذات الترقيم الفردي، وإشارة (−) في خلايا الرؤوس ذات الترقيم الزوجي كما يظهر بالجدول التالي:

[12] 2 +	[11] 9 −	[21]	[2] 10	**21**
[19] 6 −	[14] +	[10] 22	[8]	**28**
[16]	[1] 11	[15]	[13]	**11**
8	**20**	**22**	**10**	

جدول النقل الأول وحلقة المتحول الداخل

[12] 8	[11] 3	[21]	[2] 10	**21**
[19]	[14] 6	[10] 22	[8]	**28**
[16]	[1] 11	[15]	[13]	**11**
8	**20**	**22**	**10**	

جدول النقل الثاني وتكلفته $w_2 = 464$

متحولات غير القاعدة	الحلقات	تأثير التكلفة
x_{13}	$x_{13}, x_{12}, x_{22}, x_{23}$	$c_{13} - c_{12} + c_{22} - c_{23} = 14$
x_{21}	$x_{21}, x_{22}, x_{12}, x_{11}$	$c_{21} - c_{22} + c_{12} - c_{11} = 4$
x_{24}	$x_{24}, x_{14}, x_{12}, x_{22}$	$c_{24} - c_{14} + c_{12} - c_{22} = 3$
x_{31}	$x_{31}, x_{32}, x_{12}, x_{11}$	$c_{31} - c_{32} + c_{12} - c_{11} = 14$
x_{33}	$x_{33}, x_{23}, x_{22}, x_{32}$	$c_{33} - c_{23} + c_{22} - c_{32} = 18$
x_{34}	$x_{34}, x_{14}, x_{12}, x_{32}$	$c_{34} - c_{14} + c_{12} - c_{32} = 21$

تأثير التكلفة لحلقات حل القاعدة الثاني

نلاحظ عدم وجود قيم سالبة ضمن تأثير التكلفة، وهذا مؤشر أن حل القاعدة الحالي هو الحل الأمثل.

تمرين 2: أوجد الحل الأمثل لمسألة النقل الآتية:

4	8	11	**12**
11	19	18	**10**
7	10	15	**14**
11	**6**	**9**	

وذلك انطلاقاً من حل القاعدة الناتج باستخدام طريقة تقريب Vogel مع مراعاة الآتي:

- عند الاختيار بين إشباع سطر أو عمود يتم إشباع العمود.
- عند الاختيار بين غرامة سطر أو عمود يتم اختيار غرامة السطر.

الحل:

نلاحظ أن إجمالي الوحدات المعروضة $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 36\right)$ أكبر من إجمالي الوحدات المطلوبة $\left(\sum_{j=1}^{3} b_j = 26\right)$، وبإضافة عمود وهمي في جدول النقل تكون التكلفة فيه أصفاراً تصبح مسألة النقل متوازنة، ويمثل الجدول التالي حل القاعدة الابتدائي بطريقة تقريب فوغل مع مراعاة الشروط المذكورة.

	3	4		1		غرامات الأسطر			
5	(4) 11	(8)	(11) 1	(0)	**12**	4	4	$\boxed{4}$	3
2	(11) 0	(19)	(18)	(0) 10	**10**	$\boxed{11}$	$\boxed{7}$	--	--
6	(7)	(10) 6	(15) 8	(0)	**14**	7	3	3	$\boxed{5}$
	11	**6**	**9**	**10**					

غرامات الأعمدة				
	3	2	4	0
	3	2	4	--
	3	2	4	--
	--	2	4	--

جدول النقل الأول وتكلفته $w_1 = 235$

فيما يلي حلقات متحولات غير القاعدة للحل الأول بالإضافة لتأثير تكلفة كل حلقة.

تأثير التكلفة	الحلقات	متحولات غير القاعدة
2	$x_{12}, x_{13}, x_{33}, x_{32}$	x_{12}
7	$x_{14}, x_{24}, x_{21}, x_{11}$	x_{14}
6	$x_{22}, x_{32}, x_{33}, x_{13}, x_{11}, x_{21}$	x_{22}
0	$x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{21}$	x_{23}
-1	$x_{31}, x_{33}, x_{13}, x_{11}$	x_{31}
3	$x_{34}, x_{24}, x_{21}, x_{11}, x_{13}, x_{33}$	x_{34}

حلقات متحولات غير القاعدة للحل الأول وتأثير التكلفة.

المتحول الداخل: $x_{31} \sim \min(-1)$

المتحول الخارج: $x_{33} \sim \min(x_{33}, x_{11}) = \min(8,11)$

نرسم حلقة المتحول الداخل في جدول النقل الأول، ونضع إشارة (+) في خلايا الرؤوس ذات الترقيم الفردي، وإشارة (−) في خلايا الرؤوس ذات الترقيم الزوجي كما يظهر بالجدول التالي:

(4) 11 −	(8)	(11) 1 +	(0)	**12**
(11) 0	(19)	(18)	(0) 10	**10**
(7) +	(10) 6	(15) 8 −	(0)	**14**
11	**6**	**9**	**10**	

جدول النقل الأول وحلقة المتحول الداخل

الحل الثاني

(4) 3	(8)	(11) 9	(0)	**12**
(11) 0	(19)	(18)	(0) 10	**10**
(7) 8	(10) 6	(15)	(0)	**14**
11	**6**	**9**	**10**	

جدول النقل الثاني وتكلفته $w_2 = 227$

فيما يلي حلقات متحولات غير القاعدة للحل الثاني بالإضافة لتأثير تكلفة كل حلقة.

تأثير التكلفة	الحلقات	متحولات غير القاعدة
1	$x_{12}, x_{11}, x_{31}, x_{32}$	x_{12}
7	$x_{14}, x_{11}, x_{21}, x_{24}$	x_{14}
5	$x_{22}, x_{21}, x_{31}, x_{32}$	x_{22}
0	$x_{23}, x_{13}, x_{11}, x_{21}$	x_{23}
1	$x_{33}, x_{13}, x_{11}, x_{31}$	x_{33}
4	$x_{34}, x_{24}, x_{21}, x_{31}$	x_{34}

حلقات متحولات غير القاعدة للحل الثاني وتأثير التكلفة.

ونلاحظ عدم وجود قيم سالبة ضمن تأثير التكلفة لحلقات متحولات غير القاعدة في الحل الثاني، وهذا مؤشر أن الحل الثاني هو الحل الأمثل.

تمرين 3: لتكن مسألة تخصيص أربع مهام على أربعة آلات تمتلك المعطيات التالية:

الآلات

4	3	6	5
5	4	7	3
6	3	3	4
4	6	5	3

أوجد الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الهنغارية.

الحل:

بطرح أصغر عنصر في كل سطر من عناصر ذلك السطر يصبح جدول المعطيات كالآتي:

1	0	3	2
2	1	4	0
3	0	0	1
1	3	2	0

بطرح أصغر عنصر في العمود الأول من عناصر ذلك العمود نحصل على الجدول التالي:

0	0	3	2
1	1	4	0
2	0	0	1
0	3	2	0

ومن الجدول السابق، نجد أربعة عناصر صفرية لا يتواجد أي اثنين منها في نفس السطر أو العمود، وتلك العناصر تظهر مظللة في الجدول التالي:

0	0	3	2
1	1	4	0
2	0	0	1
0	3	2	0

ويتوافق هذا التخصيص بالاعتماد على المعطيات الأصلية للمسألة مع الجدول التالي:

الآلات

4	3	6	5
5	4	7	3
6	3	3	4
4	6	5	3

وبالتالي التخصيص الأمثل هو: المهمة الأولى للآلة الثانية، والمهمة الثانية للآلة الرابعة، والمهمة الثالثة للآلة الثالثة، والمهمة الرابعة للآلة الأولى، وتكون التكلفة الناتجة عن هذا التخصيص هي: $w=3+3+3+4=13$.

تمرين 4: استخدم الخوارزمية الهنغارية لإيجاد التخصيص الأمثل لمجموعة عمال لتنفيذ مجموعة مهام بحيث يخصص لكل عامل مهمة واحدة، والجدول التالي يمثل زمن تنفيذ العامل للمهمة المكلف بها:

مهام

10	8	12	9	7	10
5	7	9	10	8	7
3	11	10	12	10	9
8	7	12	9	10	11
12	5	10	6	8	7
9	7	7	6	9	7

الحل:

بطرح أصغر عنصر في كل سطر من عناصر ذلك السطر نحصل على مصفوفة التكلفة التالية:

3	1	5	2	0	3
0	2	4	5	3	2
0	8	7	9	7	6
1	0	5	2	3	4
7	0	5	1	3	2
3	1	1	0	3	1

في الجدول السابق، نطرح أصغر عنصر في كل عمود من عناصر ذلك العمود فنحصل على الجدول التالي:

3	1	4	2	0	2
0	2	3	5	3	1
0	8	6	9	7	5
1	0	4	2	3	3
7	0	4	1	3	1
3	1	0	0	3	0

بالاعتماد على العناصر الصفرية في الجدول السابق، يمكن تخصيص أربعة عمال فقط، لذلك نغطي جميع العناصر الصفرية في هذا الجدول بأقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والرأسية، ونحدد أصغر عنصر غير مغطى وهو القيمة 1، ويظهر هذا في الجدول التالي:

3	1	4	2	0	2
0	2	3	5	3	1
0	8	6	9	7	5
1	0	4	2	3	3
7	0	4	1	3	1
3	1	0	0	3	0

بتنفيذ التعليمات المناسبة نحصل على الجدول التالي:

3	1	3	1	0	1
0	2	2	4	3	0
0	8	5	8	7	4
1	0	3	1	3	2
7	0	3	0	3	0
4	2	0	0	4	0

نجد ستة عناصر صفرية لا يتواجد أي اثنين منها في نفس السطر أو العمود، وتلك العناصر تظهر بالجدول الآتي:

3	1	3	1	**0**	1
0	2	2	4	3	**0**
0	8	5	8	7	4
1	**0**	3	1	3	2
7	0	3	**0**	3	0
4	2	**0**	0	4	0

وبالتالي التخصيص الأمثل هو: العامل الأول لتنفيذ المهمة الخامسة، والعامل الثاني لتنفيذ المهمة السادسة، والعامل الثالث لتنفيذ المهمة الأولى، والعامل الرابع لتنفيذ المهمة الثانية، والعامل الخامس لتنفيذ المهمة الرابعة، والعامل السادس لتنفيذ المهمة الثالثة.

باستخدام المعطيات الأصلية للمسألة، نجد أن التكلفة الناتجة عن هذا التخصيص هي:

$$w = 7+7+3+7+6+7 = 37$$