✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

- **خوارزمية Simplex (ذات التقنية M)** ⟵ **(المحاضرة 3)**
  - الصياغة القياسية الموسعة لمسألة LP.
  - مناقشة صياغة تابع الهدف بالصياغة الموسعة.
  - توضيح الخوارزمية بحل أمثلة عددية.

- **بعض الأسئلة المهمة:**
  - ما الهدف من الصياغة القياسية الموسعة. **(Page 62)**
  - كيف نحصل على الصياغة القياسية الموسعة من الصياغة القياسية. **(Page 62)**
  - ما الخيارات الممكنة لاستخدام خوارزمية السمبلكس لحل مسألة Min. **(Page 65)**
  -

جواب السؤال الثاني: نحصل على الصياغة القياسية الموسعة من الصياغة القياسية بإتباع الآتي:

1- إضافة متحولات اصطناعية (artificial variables) غير سالبة إلى الطرف الأيسر لكل معادلة كانت في الأصل قيد من النوع (=) أو (≥).

2- إدخال المتحولات الاصطناعية في دالة الهدف بمعاملات $(-M)$ في مسألة Max وبمعاملات $(+M)$ في مسألة Min، حيث M قيمة موجبة كبيرة جداً وتمثل الغرامة التي نضعها على المتحول الاصطناعي.

جواب السؤال الثالث: يمكن حل مسألة Min باستخدام خوارزمية السمبلكس باتباع أحد الخيارين:

- تحويل مسألة Min إلى مسألة Max حيث: $\text{Min } z = -\text{Max } (-z)$.
- إجراء تعديل وحيد على خوارزمية السمبلكس يتعلق باختيار المتحول الداخل بحيث يتم اختياره من بين متحولات غير القاعدة التي تمتلك أكبر المعاملات الموجبة في سطر دالة الهدف، ويصبح شرط الأمثلية أن تكون جميع معاملات متحولات غير القاعدة في سطر دالة الهدف غير موجبة.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 3

تمرين 1: استخدم خوارزمية السمبلكس ذات التقنية M لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية

$$\max z = x_1 + 2x_2$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + x_2 \ge 8$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 12$$
$$x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل: نكتب الصياغة القياسية الموسعة، وهي كالآتي:

$$\max z = x_1 + 2x_2 - MR_1 - MR_2$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + R_1 = 8$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 + R_2 = 12$$
$$x_1 + x_2 + x_5 = 10$$
$$x_1, \dots, x_5, R_1, R_2 \ge 0$$

متحولات القاعدة هي: R_1, R_2, x_5. ولدينا:

$$R_1 = 8 - x_1 - x_2 + x_3$$
$$R_2 = 12 - x_1 - 3x_2 + x_4$$

وبالتعويض في دالة الهدف للصياغة القياسية الموسعة نجد:

$$z = (1+2M)x_1 + (2+4M)x_2 - Mx_3 - Mx_4 - 20M$$

وبالتالي جدول السمبلكس الأول هو:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
z	$-1-2M$	$-2-4M$	M	M	0	0	0	$-20M$
R_1	1	1	−1	0	1	0	0	8
R_2	1	$\boxed{3}$	0	−1	0	1	0	12
x_5	1	1	0	0	0	0	1	10

جدول السمبلكس الأول

نلاحظ أن المتحول الداخل هو x_2 لأنه يمتلك أصغر المعاملات السالبة في سطر دالة الهدف $\varepsilon = \min\{-1-2M, -2-4M\}$

وبما أن $\theta = \min\{\frac{8}{1}, \frac{12}{3}, \frac{10}{1}\} = \frac{12}{3}$ فإن المتحول الخارج هو R_2، وباستخدام التحويلات الأولية المناسبة وبحيث يأخذ المتحول x_2 مكان المتحول R_2 في عمود القاعدة نجد جدول السمبلكس الثاني:

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
z	$-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}M$	0	M	$-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}M$	0	$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}M$	0	$8-4M$
R_1	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
x_5	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	6

جدول السمبلكس الثاني

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+M$	$\frac{1}{2}+M$	0	10
x_1	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	6
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_5	0	0	1	0	-1	0	1	2

جدول السمبلكس الثالث

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
z	1	0	-2	0	$2+M$	M	0	16
x_4	2	0	-3	1	3	-1	0	12
x_2	1	1	-1	0	1	0	0	8
x_5	0	0	$\boxed{1}$	0	-1	0	1	2

جدول السمبلكس الرابع

القاعدة	x_1	x_2	x_3	x_4	R_1	R_2	x_5	الحل
z	1	0	0	0	M	M	2	20
x_4	2	0	0	1	0	-1	3	18
x_2	1	1	0	0	0	0	1	10
x_3	0	0	1	0	-1	0	1	2

جدول السمبلكس الخامس (الأمثل)

الحل الأمثل هو: $x_1 = 0, x_2 = 10$، والقيمة المثلى هي: $z = 20$.

ملاحظة:

في جدول السمبلكس الثالث، كان يمكننا اختيار x_3 ليكون المتحول الداخل، وعندها يكون المتحول الخارج هو x_5، ونتابع خطوات السمبلكس حتى الحصول على الحل الأمثل.

تمرين 2: استخدم خوارزمية السمبلكس ذات التقنية M لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية

$$\min z = x_1 - 3x_2$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + 2x_2 \ge 2$$
$$3x_1 + x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

الحل: نحول المسألة أولاً إلى مسألة max بكتابة دالة الهدف كالآتي $\max\ -z = -x_1 + 3x_2$

نكتب الصياغة القياسية الموسعة، وهي كالآتي (حيث متحولات القاعدة هي R, x_4):

$$\max -z = -x_1 + 3x_2 - MR$$
$$subject\ to$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + R = 2$$
$$3x_1 + x_2 + x_4 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, R \ge 0$$

ومن القيد الثاني نجد $R = 2 - x_1 - 2x_2 + x_3$ ، وبالتعويض في دالة الهدف للصياغة القياسية الموسعة نجد:

$$-z = (-1+M)x_1 + (3+2M)x_2 - Mx_3 - 2M$$

القاعدة	x_1	x_2	x_3	R	x_4	الحل
$-z$	$1-M$	$-3-2M$	M	0	0	$-2M$
R	1	$\boxed{2}$	-1	1	0	2
x_4	3	1	0	0	1	3

جدول السمبلكس الأول

القاعدة	x_1	x_2	x_3	R	x_4	الحل
$-z$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}+M$	0	3
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_4	$\frac{5}{2}$	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	2

جدول السمبلكس الثاني

القاعدة	x_1	x_2	x_3	R	x_4	الحل
$-z$	10	0	0	M	3	9
x_2	3	1	0	0	1	3
x_3	5	0	1	-1	2	4

جدول السمبلكس الثالث (الأمثل)

الحل الأمثل هو: $x_1 = 0, x_2 = 3$ ، والقيمة المثلى هي: $-z = 9$ وبالتالي $z = -9$.

تمرين 3: استخدم خوارزمية السمبلكس ذات التقنية M لحل مسألة البرمجة الخطية الآتية (توقف عند تحديد العنصر المحوري في الجدول الثاني):

$$\max z = -2x_1 - 3x_2$$
$$subject\ to$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$
$$x_1 + x_2 = 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل: (يتم الحل ضمن المحاضرة من قبل الطلاب)

القاعدة	x_1	x_2	x_4	x_3	R_1	R_2	الحل
z							
x_3							
R_1							
R_2							

جدول السمبلكس الأول

القاعدة	x_1	x_2	x_4	x_3	R_1	R_2	الحل
z							
x_3							
x_2							
R_2							

جدول السمبلكس الثاني