✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة

- **البرمجة غير المقيدة بعدة متحولات**
  - تعاريف
  - خوارزمية التدرج
  - خوارزمية نيوتن

- **بعض الأسئلة المهمة:**
  - ما الشروط الكافية لتكون x^* نقطة صغرى محلية للتابع f. **(Page 190)**
  - ما الشروط الكافية لتكون x^* نقطة عظمى محلية للتابع f. **(Page 190)**
  - اكتب خطوات خوارزمية التدرج انطلاقا من المعطيات. **(Page 200)**
  - اكتب خطوات خوارزمية نيوتن انطلاقا من المعطيات. **(Page 202)**

المرجع: بحوث العمليات – د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين – سوريا – 2015.

○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 11

تمرين 1: استخدم خوارزمية التدرج لحل المسألة الآتية:

$$\min_{x\in R^2} f(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1+1$$

حيث: النقطة الابتدائية $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=(2,1)$.

الحل:

نجد المشتقات الجزئية الأولى:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=2x_1-2,\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=2x_2$$

نلاحظ أن:

$$\nabla f(x)=(2x_1-2,2x_2)\ \Rightarrow\ \nabla f(x^{(0)})=(2,2)$$

ولذلك:

$$d^{(0)}=(-2,-2)$$

وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned}f(x^{(0)}+sd^{(0)})&=f(2-2s,1-2s)\\&=(2-2s)^2+(1-2s)^2-2(2-2s)+1\\&=(1-2s)^2+(2-2s)^2-2(2-2s)+1\\&=(1-2s)^2+(2-2s)(-2s)+1\\&=(1-2s)^2+4s^2-4s+1\\&=(1-2s)^2+(1-2s)^2\\&=2(1-2s)^2\end{aligned}$$

نحل المسألة:

$$\min f(x^{(0)}+sd^{(0)})=2(1-2s)^2$$
$$subject\ to\ \ s>0$$

$$f(s)=2(1-2s)^2\Rightarrow f'(s)=-8(1-2s),f'(s)=0\Rightarrow s=\frac{1}{2},f''(s)=16>0$$

وبالتالي الحل الأمثل هو: $s^*=\frac{1}{2}$.

وبذلك نعين النقطة الجديدة $x^{(1)}$ من العلاقة:

$$x^{(1)}=x^{(0)}+s^{*}d^{(0)}$$

فنجد:

$$x^{(1)}=(2,1)+\frac{1}{2}(-2,-2)\Rightarrow x^{(1)}=(1,0)$$

نلاحظ أن $\nabla f(x^{(1)})=(0,0)$

وهكذا تكون النقطة $x^{(1)}=(1,0)$ هي الحل الأمثل.

تمرين 2: استخدم خوارزمية نيوتن لحل المسألة الآتية:

$$\min_{x\in R^2} f(x)=x_1^2+x_1^2x_2^2+3x_2^2$$

حيث: النقطة الابتدائية $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)})=(1,1)$.

الحل:

تدرج دالة الهدف:

$$\nabla f(x)=(2x_1+2x_1x_2^2\ ,\ 2x_1^2x_2+6x_2)$$

نلاحظ أن:

$$\nabla f(x^{(0)})=(4,8)$$

نجد مصفوفة هيسيان:

$$H_f(x)=\begin{pmatrix}2+2x_2^2 & 4x_1x_2\\ 4x_1x_2 & 2x_1^2+6\end{pmatrix}$$

وبالتالي:

$$H_f(x^{(0)})=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

$$D_1=4>0,\ D_2=32-16=16>0$$

وبالتالي $H_f(x^{(0)})$ معرفة موجبة.

$$H_f^{-1}(x^{(0)})=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8 & -4\\ -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

وبذلك نعين النقطة الجديدة $x^{(1)}$ من العلاقة:

$$x^{(1)}=x^{(0)}-\nabla f(x^{(0)})[H_f^{-1}(x^{(0)})]$$

فنجد:

$$x^{(1)} = (1,1) - (4,8)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = (1,0)$$

لدينا:

$$\nabla f(x^{(1)}) = (2,0)$$

$$H_f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 2 > 0,\ D_2 = 16 > 0$$

وبالتالي $H_f(x^{(1)})$ معرفة موجبة.

$$H_f^{-1}(x^{(1)}) = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

وبذلك نعين النقطة الجديدة $x^{(2)}$ من العلاقة:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \nabla f(x^{(1)})[H_f^{-1}(x^{(1)})]$$

فنجد:

$$x^{(2)} = (1,0) - (2,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(2)} = (0,0)$$

نلاحظ أن: $\nabla f(x^{(2)}) = (0,0)$ ، وهكذا تكون النقطة $x^{(2)} = (0,0)$ هي الحل الأمثل.
