

## ✓ الفقرات الرئيسية المطلوبة بهذه المحاضرة

### • تحليل الحساسية

- توضيح تحليل الحساسية بيانياً.
- تعديل معاملات دالة الهدف.
- تعديل الطرف الأيمن للقيود.

بحوث  
عمليات

المرجع: بحوث العمليات - د. زياد قناية، منشورات جامعة تشرين - سوريا - 2015.

## ○ تمارين تتعلق بالمحاضرة 7

تمرين 1: لدينا مسألة البرمجة الخطية:

$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

subject to

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

بفرض تم تعديل معامل  $x_1$  في دالة الهدف من 6 إلى 7، ادرس أثر هذا التعديل على الحل الأمثل.

**الحل:** أولاً نجد الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس، وثانياً ندرس أثر التعديل المطلوب.  
الصياغة القياسية:

$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

subject to

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 16$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_5 = 48$$

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_6 = 40$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

وبالتالي جدول السمبلكس الأول هو الآتي:

القاعدة	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الحل
z	-6	-3	-2	0	0	0	0
$x_4$	4	3	1	1	0	0	16
$x_5$	8	6	1	0	1	0	48
$x_6$	8	4	3	0	0	1	40

جدول السمبلكس الأول

وبعد بضع عمليات تكرارية، نحصل على الجدول الأمثل الآتي:

القاعدة	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	الحل
z	0	0.5	0	0.5	0	0.5	28
$x_1$	1	1.25	0	0.75	0	-0.25	2
$x_5$	0	-2	0	-4	1	1	24
$x_3$	0	-2	1	-2	0	1	8

جدول السمبلكس الثالث والأمثل

نلاحظ أن الحل الأمثل هو:  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 8)$ ، والقيمة المثلى هي:  $z = 28$ ، ولدراسة أثر التعديل المفروض لمعامل  $x_1$  في دالة الهدف على الحل الأمثل، سنحتاج إلى الآتي:

- المصفوفة المحددة ضمن مستطيل مستدير الزوايا في الجدول الأمثل والتي تمثل معاملات المتحولات  $x_4, x_5, x_6$  (وهي متحولات القاعدة في الجدول الأول)، وتلك المصفوفة هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & -0.25 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- المسألة المرافقة بعد التعديل المفروض على معاملات دالة الهدف، وهي:

$$\min w = 16y_1 + 48y_2 + 40y_3$$

subject to

$$4y_1 + 8y_2 + 8y_3 \geq 7$$

$$3y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

- المتجه  $\bar{c}$  الذي يمثل معاملات المتحولات  $x_1, x_5, x_3$  في دالة الهدف بعد التعديل المفروض (وهي متحولات القاعدة في الجدول الأمثل)، وبحيث يتم ترتيب هذه المعاملات وفق ترتيب المتحولات في الجدول الأمثل، فيكون لدينا:

$$\bar{c} = (7, 0, 2)$$

والآن نحسب قيم المتحولات المرافقة  $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$  من العلاقة التالية:

$$\bar{y} = \bar{c} \cdot \bar{A}$$

ويكون لدينا:

$$(y_1, y_2, y_3) = (7, 0, 2) \cdot \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & -0.25 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = (1.25, 0, 0.25)$$

نعوض تلك القيم في قيود المسألة المرافقة ونأخذ الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لهذه القيود فنحصل على معاملات سطر دالة الهدف في الجدول الجديد الذي يراعي التعديل المفروض، وتلك المعاملات هي كالاتي:

- معامل  $x_1$ :

$$4(1.25) + 8(0) + 8(0.25) - 7 = 0$$

- معامل  $x_2$ :

$$3(1.25) + 6(0) + 4(0.25) - 3 = 1.75$$

- معامل  $x_3$ :

$$1.25 + 0 + 3(0.25) - 2 = 0$$

• معامل  $x_4$  :

$$y_1 - 0 = 1.25 - 0 = 1.25$$

• معامل  $x_5$  :

$$y_2 - 0 = 0 - 0 = 0$$

• معامل  $x_6$  :

$$y_3 - 0 = 0.25 - 0 = 0.25$$

نلاحظ أن جميع معاملات سطر دالة الهدف غير سالبة، ونظراً لكون المسألة max فإن التعديل المفروض لن يؤثر على الحل الأمثل  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 8)$ ، وأما القيمة المثلى فتصبح:

$$z = 7(2) + 3(0) + 2(8) = 30$$

**تمرين 2:** لدينا مسألة البرمجة الخطية:

$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

subject to

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 16$$

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$8x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

بفرض تم تعديل الطرف الأيمن للقيد الثالث من 40 إلى 42، ادرس أثر هذا التعديل على الحل الأمثل.

**الحل:**

أولاً نجد الحل الأمثل باستخدام خوارزمية السمبلكس (تم ايجاده بالتمرين السابق)، وثانياً ندرس أثر التعديل المطلوب. لدراسة أثر التعديل المفروض في الطرف الأيمن للقيد الثالث على الحل الأمثل، سنحتاج إلى الآتي:

- المصفوفة المحددة ضمن مستطيل مستدير الزوايا في الجدول الأمثل والتي تمثل معاملات المتحولات  $x_4, x_5, x_6$  (وهي متحولات القاعدة في الجدول الأول)، وتلك المصفوفة هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & -0.25 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- عمود الحل الجديد  $\bar{b}$  الذي يمثل ثوابت الطرف الأيمن للقيد بعد التعديل المفروض، فيكون لدينا:



$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \\ 42 \end{pmatrix}$$

والآن نحصل على عمود الحل الجديد من العلاقة:

$$b^* = \bar{A} \cdot \bar{b}$$

فيكون لدينا:

$$b^* = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 & -0.25 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^* = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 26 \\ 10 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن جميع قيم الثوابت في عمود الحل الجديد غير سالبة، وبالتالي الجدول الجديد أيضاً يعطي الحل الأمثل للمسألة بعد التعديل المفروض، وهذا يعني أن متحولات القاعدة في الجدول الأمثل لخوارزمية السمبلكس للمسألة الأصلية ستظل نفسها المتحولات التي تعطي الحل الأمثل للمسألة بعد التعديل المفروض، ولكن قيم تلك المتحولات سوف تتغير لتتوافق مع عمود الحل الجديد، ويصبح الحل الأمثل الجديد كما يلي:

$$(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 26, 10)$$

وأما القيمة المثلى فتصبح:

$$z = 6(1.5) + 3(0) + 2(10) = 29$$