教学讨论

刚体定点转动的张量描述

尹海峰，曾春花，岳 莉

（凯里学院 理学院，贵州 凯里 556011）

摘要：通过引入转动张量来描述刚体的定点转动，避免了在用角位移描述刚体定点转动时所遇到的问题，即角位移在它是有限大小和无限小时属性发生了变化. 验证了对于刚体定点无限小转动，可以分别采用角位移矢量和转动张量描述，两者是等价的.

关键词：定点转动；张量；矢量

中图分类号：O 311.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-0712(2010)10-0012-02

在讲授理论力学和大学物理中的刚体力学部分时，涉及到一个重要的描写刚体定点转动的物理量. 现行教材[1-3]普遍采用角位移来描述这个物理量，并且认为有限大小转动的角位移不是矢量，而无限小转动的角位移是矢量. 为什么一个物理量在它是无限小时是矢量，而有限大小时又不是矢量呢？一个物理量怎么可以有两种截然不同的属性？如何解决这一疑问，使学生对描述刚体定点转动的物理量有一个比较深入和全面的理解是一个很值得研究的问题. 一些大学物理教师对此也作了探讨[4-7]，但仍没有解决这一疑问. 本文通过引入转动张量来描述刚体的定点转动，证明了刚体两次有限大小的转动张量一般是不对易的；在忽略二阶小量的情况下，刚体的两次无限小的转动张量是对易的. 对于刚体的无限小转动，在忽略二阶小量的情况下，可以分别用转动张量和角位移矢量来描述刚体的定点转动，本文验证两者是等价的.

1 刚体定点转动的张量描述

采用 3×3 矩阵来表示刚体定点转动的转动张量. 将定点取作直角坐标系的原点，设刚体绕轴 $\boldsymbol{n}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$（$\alpha,\beta,\gamma$ 是 $\boldsymbol{n}$ 轴的方向余弦）转过角度 ϕ，则刚体内一质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$ 将变为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 坐标之间的关系是[5]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) & 2(e_1e_3+e_0e_2) \\ 2(e_1e_2+e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3-e_0e_1) \\ 2(e_1e_3-e_0e_2) & 2(e_2e_3+e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

其中 $e_0=\cos\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$，$e_1=\alpha\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$，$e_2=\beta\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$，$e_3=\gamma\sin\left(\dfrac{\phi}{2}\right)$. 转动张量

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2-e_0e_3) & 2(e_1e_3+e_0e_2) \\ 2(e_1e_2+e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3-e_0e_1) \\ 2(e_1e_3-e_0e_2) & 2(e_2e_3+e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix}$$

描述了刚体绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转过角度 ϕ 这一运动.

设刚体绕轴 $\boldsymbol{n}_1=\alpha_1\boldsymbol{i}+\beta_1\boldsymbol{j}+\gamma_1\boldsymbol{k}$（$\beta_1,\beta_1,\gamma_1$ 是 $\boldsymbol{n}_1$ 轴的方向余弦）转过角度 ϕ_1，则刚体内一质点的位矢 $\boldsymbol{r}_{01}=x_{01}\boldsymbol{i}+y_{01}\boldsymbol{j}+z_{01}\boldsymbol{k}$，将变为 $\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$. 坐标之间的关系是

收稿日期：2010-04-20；**修回日期**：2010-05-24

基金项目：黔教科(2008080)资助项目；凯里学院规划课题(Z0913)资助项目

作者简介：尹海峰(1982—)，男，河南汝南人，凯里学院理学院讲师，硕士，主要从事理论物理的教学和研究工作.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{01}^2+e_{11}^2-e_{21}^2-e_{31}^2 & 2(e_{11}e_{21}-e_{01}e_{31}) & 2(e_{11}e_{31}+e_{01}e_{21}) \\ 2(e_{11}e_{21}+e_{01}e_{31}) & e_{01}^2-e_{11}^2+e_{21}^2-e_{31}^2 & 2(e_{21}e_{31}-e_{01}e_{11}) \\ 2(e_{11}e_{31}-e_{01}e_{21}) & 2(e_{21}e_{31}+e_{01}e_{11}) & e_{01}^2-e_{11}^2-e_{21}^2+e_{31}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ y_{01} \\ z_{01} \end{pmatrix}$$

其中 $e_{01}=\cos\left(\frac{\phi_1}{2}\right)$，$e_{11}=\alpha_1\sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)$，$e_{21}=\beta_1\sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)$，$e_{31}=\gamma_1\sin\left(\frac{\phi_1}{2}\right)$. 转动张量

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} e_{01}^2+e_{11}^2-e_{21}^2-e_{31}^2 & 2(e_{11}e_{21}-e_{01}e_{31}) & 2(e_{11}e_{31}+e_{01}e_{21}) \\ 2(e_{11}e_{21}+e_{01}e_{31}) & e_{01}^2-e_{11}^2+e_{21}^2-e_{31}^2 & 2(e_{21}e_{31}-e_{01}e_{11}) \\ 2(e_{11}e_{31}-e_{01}e_{21}) & 2(e_{21}e_{31}+e_{01}e_{11}) & e_{01}^2-e_{11}^2-e_{21}^2+e_{31}^2 \end{pmatrix}$$

描述了刚体绕轴 $\boldsymbol{n}_1$ 转过角度 ϕ_1 这一运动.

假设刚体先绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转过角度 ϕ，再绕轴 $\boldsymbol{n}_1$ 转过角度 ϕ_1，则刚体内一质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$，将变为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 坐标之间的关系是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

若先绕轴 $\boldsymbol{n}_1$ 转过角度 ϕ_1，再绕轴 $\boldsymbol{n}$ 转过角度 ϕ，则刚体内一质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$ 将变为 $\boldsymbol{r}'=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}$，坐标之间的关系是

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

下面对刚体定点的有限转动和无限小转动分别进行分析.

1）刚体定点有限大小转动

在一般情况 $\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{n}_1$ 时，则 $\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}\neq\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1$，所以 $\boldsymbol{r}'\neq\boldsymbol{r}$，即刚体两次有限大小的转动张量一般是不对易的.

2）刚体定点无限小转动

在刚体定点无限小转动时，由于 ϕ 和 ϕ_1 都很小，则 $e_0=e_{01}=1$，$e_1=\alpha\frac{\phi}{2}$，$e_2=\beta\frac{\phi}{2}$，$e_3=\gamma\frac{\phi}{2}$，$e_{11}=\alpha_1\frac{\phi_1}{2}$，$e_{21}=\beta_1\frac{\phi_1}{2}$，$e_{31}=\gamma_1\frac{\phi_1}{2}$. 在忽略二阶小量时，转动张量

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\phi & \beta\phi \\ \gamma\phi & 1 & -\alpha\phi \\ -\beta\phi & \alpha\phi & 1 \end{pmatrix}$$

转动张量

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1\phi_1 & \beta_1\phi_1 \\ \gamma_1\phi_1 & 1 & -\alpha_1\phi_1 \\ -\beta_1\phi_1 & \alpha_1\phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\phi-\gamma_1\phi_1 & \beta\phi+\beta_1\phi_1 \\ \gamma\phi+\gamma_1\phi_1 & 1 & -\alpha\phi-\alpha_1\phi_1 \\ -\beta\phi-\beta_1\phi_1 & \alpha\phi+\alpha_1\phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\phi-\gamma_1\phi_1 & \beta\phi+\beta_1\phi_1 \\ \gamma\phi+\gamma_1\phi_1 & 1 & -\alpha\phi-\alpha_1\phi_1 \\ -\beta\phi-\beta_1\phi_1 & \alpha\phi+\alpha_1\phi_1 & 1 \end{pmatrix}$$

显然在刚体定点无限小转动时，

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}$$

所以 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$，即刚体两次定点无限小转动张量是对易的.

2　角位移矢量和转动张量描述刚体定点无限小转动的等价性

2.1　用角位移矢量描述刚体定点无限小转动

刚体绕轴 $\boldsymbol{n}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$ 转过无限小角度 ϕ 的运动，可以用一矢量 $\Delta\boldsymbol{n}=\phi\boldsymbol{n}$ 描述，其中 $\Delta\boldsymbol{n}$ 即角位移矢量[1]，它不是表示单位轴矢量 $\boldsymbol{n}$ 的增量. 刚体内位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$ 的质点位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{r}_0=(\phi\alpha\boldsymbol{i}+\phi\beta\boldsymbol{j}+\phi\gamma\boldsymbol{k})\times(x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k})=(\phi\beta z_0-\phi\gamma y_0)\boldsymbol{i}-(\phi\alpha z_0-\phi\gamma x_0)\boldsymbol{j}+(\phi\alpha y_0-\phi\beta x_0)\boldsymbol{k}$$

2.2　用转动张量描述刚体定点无限小转动

刚体绕轴 $\boldsymbol{n}=\alpha\boldsymbol{i}+\beta\boldsymbol{j}+\gamma\boldsymbol{k}$ 转过无限小角度 ϕ 时，刚体内一质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k}$ 将变为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 坐标之间的关系是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma\phi & \beta\phi \\ \gamma\phi & 1 & -\alpha\phi \\ -\beta\phi & \alpha\phi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

由计算得质点位移分量分别为 $\Delta x=\phi\beta z_0-\phi\gamma y_0$、$\Delta y=-(\phi\alpha z_0-\phi\gamma x_0)$、$\Delta z=\phi\alpha y_0-\phi\beta x_0$.

通过比较可以得出，分别用角位移矢量和转动张量描述刚体定点无限小转动时，刚体内任一点的位移是一样的，即对于刚体定点无限小转动，除了可以用转动张量描述外，还可以用角位移矢量描述. 从而验证了角位移矢量和转动张量描述刚体定点无限小转动时具有等价性.

3　结束语

本文通过引入转动张量描述刚体的定点转动，

（下转 23 页）

$$\beta=\frac{2a\rho}{a^2+\rho^2+(z-z')^2} \tag{25}$$

这里指出,规定$(-1)!!=1$.这是因为$(n+1)!!=(n+1)(n-1)!!$,令$n=0$,得$(-1)!!=1$.此解式的中间变量β关于源点坐标与场点坐标对称,因而满足格林互易定理,这个结果与文献[3]是一致的.

参考文献:

[1] 斯迈思 W R. 静电学和电动力学(上册)[M]. 戴世强,译. 北京:科学出版社,1985:340;48- 49;212-213.

[2] 张之翔. 圆环电荷的电势的几种算法及讨论[J]. 大学物理,2006,25(8):7-10.

[3] 程昌林,王慧,李业凤. 均匀带电细圆环[J]. 大学物理,2003,22(6):15-17.

[4] 奚定平. 贝塞尔函数[M]. 北京:高等教育出版社,德国:施普林格出版社,1998:168;180;179;206-207.

[5] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:科学出版社,1965:491;318;594;282;172.

[6] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京人民教育出版社,1979:604.

Application of Green's reciprocity theorem in solving electrostatic potential distribution of a uniformly changed ring

DING Jian

(Department of Physics, College of Science, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi 710064, China)

Abstract: The Green's reciprocity theorem in a special case is obtained from the general Green's reciprocity theorem of electrostatic field. By employing the Green's reciprocity theorem in a special case, a number of solutions in different forms for electrostatic potential distribution of a uniformly changed ring are derived.

Key words: electrostatic field; Green's reciprocity theorem; uniformly charged ring; electrostatic potential distribution

(上接 13 页)

可以避免在用角位移描述刚体定点转动时所遇到的问题,即角位移在它是有限大小和无限小时属性发生了变化.转动张量可以全面地描述刚体的定点转动,因此对于描述刚体定点转动的物理量,应采用转动张量.本文还验证了刚体定点无限小转动的情况,可以分别采用角位移矢量和转动张量描述,两者是等价的.

参考文献:

[1] 周衍柏. 理论力学教程[M]. 北京:高等教育出版社,1985:159.

[2] 金尚年. 理论力学[M]. 北京:高等教育出版社,2002:103.

[3] 戈德斯坦 H. 经典力学[M]. 陈为恂,等译. 北京:科学出版社,1986:152.

[4] 石晓斌. 刚体定点运动的有限转角应是轴矢量[J]. 黄淮学刊,1996,12(1):68-71.

[5] LKM. 有限角位移真是轴矢量吗[J]. 黄淮学刊,1996,12(3):67-69.

[6] 王智平. 无限小转动是矢量的证明[J]. 延安大学学报(自然科学版),1998,17(1):75-77.

[7] 廖耀发,廖彬. 角位移矢量性的一种初等阐述[J]. 物理与工程,2003,13(2):51-52.

A tensor description of a rigid body motion with a fixed point

YIN Hai-feng, ZENG Chun-hua, YUE Li

(College of Science, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, China)

Abstract: This paper describes a rigid body motion with a fixed point by rotated tensor and avoids the meted problem that when one describes a rigid body motion with a fixed point by angular displacement, namely, the attribute of it is different for finite and infinitesimal sizes. We also verify that both the angular displacement vector and rotated tensor can describe respectively the motion of an infinitesimal rigid body rotation with a fixed point. Both are equivalent.

Key words: rotation around a fixed point; tensor; vector