关于刚体转动惯量张量的几个定理及其应用

岳　曾　元

（北京大学地球物理系）

一、从一个简单例子谈起

设有一个正三角形的均匀的无限薄片刚体(图1)，其边长为 a，中心点为 o，面密度为 σ. 由对称性的考虑，我们立即知道该薄片刚体绕 OA, OB, OC 三轴的转动惯量相等. 通过简单的计算，可得出这些量为

$$I_{OA} = I_{OB} = I_{OC} = \frac{\sigma a^4}{32\sqrt{3}} \qquad (1.1)$$

现在我们问：如果过 o 点在该平面内作任一直线 MN (图1)，该薄片刚体绕 MN 的转动惯量 I_{MN} 等于多少？经过比较麻烦的计算和化简，竟发现这一结果与 MN 和 OA 的夹角 α 无关，而有

$$I_{MN} = \frac{\sigma a^4}{32\sqrt{3}} \qquad (1.2)$$

因此

$$I_{MN} = I_{OA} = I_{OB} = I_{OC} \qquad (1.3)$$

于是我们自然问：能否避免这种麻烦的计算而直接得到(1.2)或(1.3)式？换言之，(1.3)式是否有着深一层的道理？

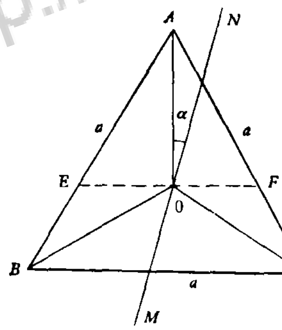

图　1

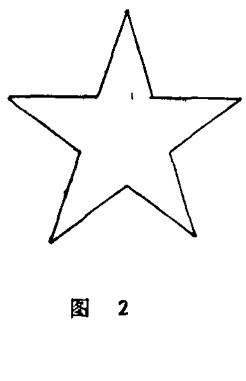

图　2

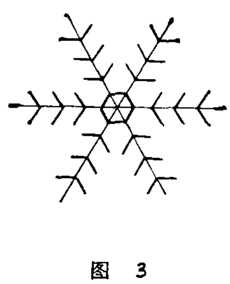

图　3

对于如图2—图4所示的各种形状的平面刚体，有没有统一的办法来给出它们绕过各自中心的不同直线的转动惯量之间的关系呢？这就是下面定理1所回答的. 我们并将在定理2—定理4中讨论三维刚体的有关情形.

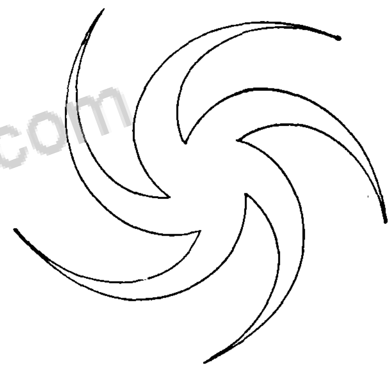

图　4

二、关于刚体惯量张量的几个定理及其应用

定理1　设无限薄平面刚体在绕其上某点 o、在自身平面内转动某一角度 φ ($\varphi \neq \pi$ 的整数倍)后，质量分布恰与转动前相同，则

(i) o 点必为该薄片刚体之质量中心；

(ii) 该薄片刚体关于 o 点的惯量椭球必为旋转椭球，其对称轴为过 o 点与薄片垂直的直线. 于是，该薄片刚体绕过 o 点且位于该平面内的任一直线的转动惯量相等.

证明

(i) 我们先来证明 o 点必为质心. 事实上，倘若 o 点不是质心，则必在该平面刚体上有另一点 C 为质心. 现将该刚体绕 o 点在自身平面内转动 φ 角，则 C 点转至另一点 C'. 由于 $\varphi \neq \pi$ 的整数倍，C' 点必不与 C 点重合. 显然，转动后 C' 点为质心. 但另一方面，由于转动后质量分布恰与转动前一致，因此转动后 C 点仍为质心. 这就是说，转动后，刚体有两个不相重合的质心. 这是不可能的(质心的定义使它具有唯一性)，

因此 o 点必为质心.

(ii) 第二步，我们来证明过 o 点与薄片相垂直的直线必为关于 o 点的惯量张量的主轴.

事实上，如取直角坐标系 $oxyz$，使 oz 轴与薄片垂直. 则因所有质量皆集中在 $z=0$ 平面，于是有

$$I_{zy}=\int zydm=0 \tag{2.1}$$

$$I_{zx}=\int zxdm=0 \tag{2.2}$$

因此 z 轴是关于 o 点惯量张量的主轴.

(iii) 最后，我们再来证明，该薄片刚体关于 o 点的惯量椭球为以 oz 轴为对称轴的旋转椭球.

由惯量主轴的性质可知，既然 oz 轴为主轴，必有另二主轴位于 oxy 平面内，且互相垂直. 无妨将它们分别取作 ox 轴与 oy 轴. 于是在主轴坐标系 $oxyz$ 中，关于 o 点的惯量张量的分量为

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别为薄片刚体绕 ox, oy, oz 轴的主转动惯量. 我们下面只需证明

$$I_1=I_2 \tag{2.4}$$

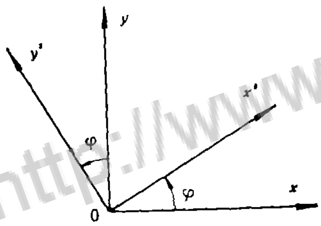

图 5

将该薄片刚体绕 oz 轴转过 φ 角之后，ox 轴和 oy 轴分别转到 ox' 轴和 oy' 轴的位置（图5）. 于是，转动后 $ox'y'z$ 为主坐标系. 并且，这时关于 o 点的惯量张量在 $ox'y'z$ 坐标系中的分量为 (2.3) 式. 特别，有

$$I_{x'x'}=I_1 \tag{2.5}$$

其中 $I_{x'x'}$ 为转动后薄片刚体关于 x' 轴的主转动惯量. 但另一方面，由于转动后的质量分布与转动前一致，因此，在转动后，$oxyz$ 仍为主坐标系，且关于 o 点的惯量张量在 $oxyz$ 坐标系中的分量仍为 (2.3) 式. 这样，由张量分量的转换法则可知

$$\begin{aligned} I_{x'x'} &= (\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0)\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi \end{aligned} \tag{2.6}$$

比较 (2.5) 和 (2.6) 式，得

$$I_1=I_1\cos^2\varphi+I_2\sin^2\varphi \tag{2.7}$$

即

$$(I_1-I_2)\sin^2\varphi=0 \tag{2.8}$$

由 $\varphi\neq\pi$ 的整数倍，知

$$\sin^2\varphi\neq 0 \tag{2.9}$$

因此必须

$$I_1=I_2 \tag{2.10}$$

定理 1 证完.

作为定理 1 的应用，我们立即得知，图 1—图 4 所示的所有薄片物体关于其中心 O 的惯量椭球皆为旋转椭球，且旋转椭球的"赤道面"就是薄片刚体所在平面. 于是，绕过中心 O 且位于该平面内的任一直线的转动惯量皆相等. 如果需要计算，则可挑选一个较容易计算的方向算一次就够了[1].

作为定理 1 的一个简单的推广，我们给出

定理 2 设一三维刚体存在一个对称平面，并且当刚体绕与对称平面垂直的某轴转过某一角度 φ（$\varphi\neq\pi$ 的整数倍）后，刚体上的质量分布与转动前相同，则

（i）该轴与对称平面之交点 O 必为刚体质心；

（ii）该轴必为刚体关于 O 点惯量张量之主轴；

（iii）刚体关于 O 点的惯量椭球为以该轴为对称轴的旋转椭球.

证明 定理 1 的证明几乎可逐字逐句搬过来，因此无需重复. 只是在证明 $I_{zy}=I_{zx}=0$（参看(2.1)，(2.2)式）时，所根据的是刚体关于对称平面（取为 xy 平面）的对称性，而不是物质只分布于 $z=0$ 平面（定理 1 情形）.

在得到定理 2 之后，我们进一步问：存在对称平面这一条件果真必要吗？例如象电炉架、螺栓（图 6，图 7）那样的物体，它们并不具有对称平面. 它们的转动性质是否也具有某种旋转对称性呢？为了回答这一问题，我们下面给出

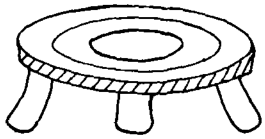

图 6

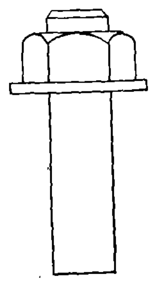

图 7

定理 3 设一三维刚体绕某一直线转动某一 φ 角（$\varphi\neq\pi$ 的整数倍）后，与转动前的质量分布相同，则

（i）刚体质心必在此直线上；

1) 与定理 1 类似的结论在 Arnold & Maunder "Gyrodynamics" 一书中曾以较直观的方式提到，但该书未包括本文定理 2—4 所讨论的三维情形.

（ii）刚体关于该直线上任一点的惯量椭球皆为以该直线为对称轴的旋转椭球.

证明 质心在该直线上的证法与定理1同，故不重复. 下面证明，在该直线上任取一点o，则刚体关于o点的惯量椭球必为以该直线为对称轴的旋转椭球. 先取直角坐标系$oxyz$，使oz轴与该直线重合. 设刚体关于o点的惯量张量在$oxyz$坐标系中的分量（注意惯量张量是对称的）为

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

我们必须且只需证明

$$d = e = f = 0 \tag{2.12}$$

和

$$a = b \tag{2.13}$$

现在我们将刚体绕oz轴转过φ角，则ox轴和oy轴分别转到ox'轴和oy'轴. 于是，转动后，在$ox'y'z$坐标系中，刚体关于o点惯量张量的分量为

$$\begin{pmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z} \\ -I_{zx'} & -I_{zy'} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

但另一方面，由于转动后与转动前质量分布相同. 因此，转动后，在$oxyz$坐标系（指转动前的位置）中，仍有(2.11)式成立. 换言之，对于转动后而言，(2.11)与(2.14)式同时成立. 另一方面，由张量分量的转换法则，有

$$\begin{pmatrix} I_{x'x'} & -I_{x'y'} & -I_{x'z} \\ -I_{y'x'} & I_{y'y'} & -I_{y'z} \\ -I_{zx'} & -I_{zy'} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

将(2.11)和(2.14)代入(2.15)，得到

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

(2.16)包含六个方程（注意到张量的对称性）：

$$a = a\cos^2\varphi + 2d\sin\varphi\cos\varphi + b\sin^2\varphi \tag{2.17}$$
$$b = a\sin^2\varphi - 2d\sin\varphi\cos\varphi + b\cos^2\varphi \tag{2.18}$$
$$c = c \tag{2.19}$$
$$d = d(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (b-a)\sin\varphi\cos\varphi \tag{2.20}$$
$$e = e\cos\varphi + f\sin\varphi \tag{2.21}$$
$$f = -e\sin\varphi + f\cos\varphi \tag{2.22}$$

这里，(2.19)为恒等式. (2.21)和(2.22)给出e和f满足的齐次代数方程组

$$\begin{cases} (1-\cos\varphi)e - \sin\varphi\cdot f = 0 & (2.23) \\ \sin\varphi\cdot e + (1-\cos\varphi)f = 0 & (2.24) \end{cases}$$

其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} = (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi > 0 \tag{2.25}$$

因此，式(2.23)和(2.24)只有零解

$$e = f = 0. \tag{2.26}$$

在剩下的三个方程中，易知式(2.17)与(2.18)可化成相同形式，而式(2.17)和(2.20)可写成如下形式

$$\begin{cases} \sin^2\varphi\cdot(a-b) - \sin 2\varphi\cdot d = 0 & (2.17') \\ \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi\cdot(a-b) + 2\sin^2\varphi\cdot d = 0 & (2.20') \end{cases}$$

它们是$(a-b)$和d满足的线性齐次方程组，其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \sin^2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \dfrac{1}{2}\sin 2\varphi & 2\sin^2\varphi \end{vmatrix} = 2\sin^4\varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi > 0 \tag{2.27}$$

(2.25)和(2.27)式用到了$\varphi\neq\pi$的整数倍这一条件. 因此，(2.17')和(2.20')也只有零解，即

$$d = 0 \tag{2.28}$$
$$a - b = 0 \tag{2.29}$$

由(2.26)，(2.28)和(2.29)，(2.11)式右端可改写成

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

这就是说，刚体关于o点的惯量张量以x，y，z轴为主轴，并且惯量椭球是以z轴为对称轴的旋转椭球. 定理3证完.

显然，定理3可用于象图6和图7那样的物体. 作为定理3的进一步推广，我们给出

定理4 若存在两条不相重合的直线MN与$M'N'$，使刚体绕MN转动某一角度φ后质量分布与转动前一致，并且绕$M'N'$转动某一角度φ'后质量分布亦与转动前一致（φ，φ'均不为π的整数倍），则

（i）MN与$M'N'$必相交，且交点为刚体质心；

（ii）刚体关于质心o的惯量椭球为球面. 从而，关于过o点的任一直线的转动惯量皆相等.

证明

（i）由定理3可知，刚体质心o必在MN上，又必在$M'N'$上，故MN与$M'N'$必交于质心o.

（ii）由定理3知，该刚体关于o点之惯量椭球必为以MN为对称轴的旋转椭球[见(2.30)式]. 如果此旋转椭球不是球面[即，如果(2.30)式中$a\neq c$]，则显然MN将会是该惯量椭球的唯一的对称轴. 然而由定理3及本定理的条件又知，该惯量椭球又以$M'N'$为对

称轴，且$M'N'$不与MN重合．这个矛盾表明，只能$a=c$，即该惯量椭球只能为球面．定理4证完．

作为定理4的应用，我们立即知道，所有的均匀正多面体（正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体）关于其中心的惯量椭球皆为球面．换言之，它们绕其中心的转动性质，就如同均匀球体一样．

三、组合体

由于转动惯量对于物质分布而言明显地具有可加性，因此，如果刚体的物质分布可分解为几部分（总物质分布为几部分物质分布的代数和），而每部分满足上述定理的条件，则整个刚体也会具有相应的性质．例如图8所示的三条腿方桌，关于过桌面中心的铅垂线上任一点的惯量椭球为以该铅垂线为对称轴的旋转椭球．又例如图9所示的刚体，它是一个正四面体从中心挖去一个正立方体所剩下的部分，假定密度均匀，并且正立方体中心与正四面体中心重合，则该刚体关于其中心o点的惯量椭球为球面．换言之，如以某种方式将此空心四面体与o点相连接（连接线要么很轻，其质量可忽略，要么也满足定理4条件），则它绕定点o的转动性质就如同一个均匀球体一样．

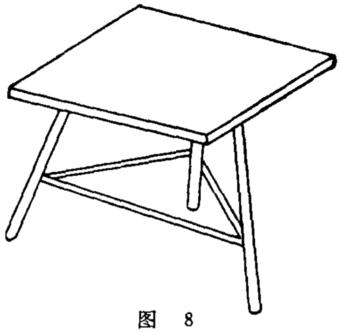

图 8

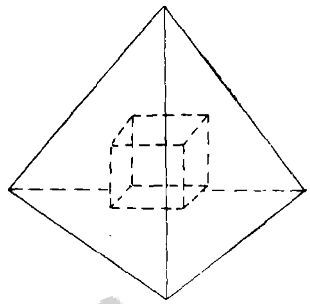

图 9

关于对惯性力的一些看法

编者按 "惯性力"是理论力学中的一个重要的基本概念，历来争论较多．本刊于1982年第一期发表了李民庆的"惯性力"一文．本期再摘登三位同志的来稿作为这一讨论的继续．

宫心喜（北京钢铁学院）

讨论惯性力的真实性问题，应将惯性系和非惯性系中力的定义与概念加以统一．力是由于物体之间的机械作用或由于物体所在参照系的运动而产生的．力使物体的运动状态或形状发生变化．这比牛顿定律所提出的：力是物体间的机械作用更为明确，适用范围也更广泛，它不但适用于惯性系，也适用于非惯性系．

在惯性系中，惯性力是由于受力物体的惯性所产生的，它能使施力物体的运动状态和形状产生变化，因此它对施力物体而言是真实存在的，但对受力物体则是假想的．把它施加于受力物体只是为了在形式上用平衡方程来求解动力学问题．

在非惯性系中，如置于加速运动的车辆中之桌面上的小球，在牵连惯性力$\boldsymbol{G}_e$作用下会改变其运动状态，$\boldsymbol{G}$并可用弹簧称测量出来；再如，一弹性圆环以其直径为定轴作转动时，圆环在惯性力作用下变为扁圆形．还可用实例说明哥氏惯性力$\bar{G}_k$也有同样的效应．因此，在非惯性系中，物体所受的惯性力是客观存在的真实力．

非惯性系中的惯性力是由于非惯性系的运动而产生的．根据前述力的概念，它不反映物体间的机械作用，可以不服从牛顿第三定律．

刘　明（辽宁阜新矿业学院）

非惯性系动力学基本方程中的$\boldsymbol{G}_e=-m\boldsymbol{a}_e$及$\boldsymbol{G}_k=-m\boldsymbol{a}_k$并不是力，也不是惯性力，而是一种具有力效果的矢量．

1．力是物体间相互的机械作用，这种作用使物体的机械运动状态发生改变，并使物体产生变形．这定义给出了判断力的充要条件．而$\boldsymbol{G}_e$与$\boldsymbol{G}_k$没有施力物体，也就没有反作用力．

2．惯性系中的惯性力是当物体在力作用下发生运动状态改变时，所给予施力物体的反作用力．而$\boldsymbol{G}_e$、$\boldsymbol{G}_k$却不是如此产生的，而是由于有牵连运动与牵连运

（下转第55页）

26. 刚体的转动惯量与惯量椭球

27. 刚体转动惯量的计算

28. 几种规则刚体转动惯量计算的探讨

29. 刚体绕定点转动定理的证明

30. 计算机软件模拟刚体转动惯量的实验

31. 微机在用刚体转动仪测刚体转动惯量实验中的应用

32. 均质并有对称面的刚体转动惯量的一个定理

33. 三线摆测量刚体转动惯量实验的改进

34. 刚体转动惯量的测量

35. 刚体定轴转动的新转动动能定理研究

36. 刚体转动惯量实验的改进

37. “刚体转动惯量的测定实验”教学探讨

38. 三线摆测刚体转动惯量的误差分析

39. 测定刚体转动惯量的实验与设计

40. 扭摆法测刚体转动惯量中的周期研究

41. 计算刚体转动惯量的一个新定理

42. 常见均匀刚体转动惯量的计算

43. 刚体的惯量主轴和主转动惯量

44. 刚体转动惯量和截面的惯性矩

45. 关于刚体转动惯量张量的几个定理及其应用

46. 刚体转动惯量的求解讨论

47. 惯量张量并矢式及其应用

48. 刚体的惯量主轴的主转动惯量

49. "刚体转动惯量的测定实验"教学探讨

50. 惯量张量的平行轴定理