Barrages et Risques d'Inondation

Zian Chen & Ruikai Chen

24 mai 2024

1 Introduction

Un barrage est un ouvrage artificiel ou naturel, établi en travers du lit d'un cours d'eau, retenant ou pouvant retenir de l'eau. Les barrages ont plusieurs fonctions, par exemple : la régulation de cours d'eau ; l'irrigation des cultures ; la lutte contre les incendies, etc. La rareté des accidents est le résultat d'efforts attentifs depuis un siècle.

Dans ce projet, nous allons étudier les risques d'inondation en utilisant des méthodes probabilistes. Nous allons modéliser les volumes des lacs, et étudier les risques d'inondation avec plusieurs algorithmes de simulation. Plus précisement, nous allons trouver les seuils de volumes pour que les barrages soient en sécurité avec une probabilité très élevée (par exemple, 99.9999%). Dans la deuxième section, nous allons modéliser les volumes des lacs en compte de l'apport de l'eau et la lâchers d'eau. Dans la troisième section, nous étudions les risques d'inondation avec des algorithmes différentes et considérons quelques situations différentes. Dans la quatrième section, nous présentons les résultats de simulation numérique.

2 Modélisation

Nous supposons que, dans une région montagneuse, deux vallées sont occupées par deux lacs artificiels créés par deux barrages B_1 et B_2. Nous allons modéliser les volumes des lacs (X_t^i) au cours du temps t en compte de l'apport de l'eau et la lâchers d'eau. Plus précisement, nous avons

$$X_t^i = x_0^i + A_t^i - \int_0^t r_i X_s^i ds, \tag{1}$$

où x_0^i est le volume initial, A_t^i est le volume total de pluie au temps t, r_i est le taux de lâchers d'eau du lac i.

Modélisation de l'apport de l'eau Nous supposons que l'apport d'eau A_t^i est essentiellement déterminé par des chutes de pluie intenses et de courte durée.

Autrement dit A_t^i est un processus de Poisson composé,

$$A_t^i = \sum_{n=1}^{N_t^i} U_n^i,$$

où N_t^i est un processus de Poisson de taux λ_i qui décrit l'arrivée de pluie, et U_n^i suit une combinaison exponentielle de paramètres δ_1 et δ_2 qui modéliser séparément des pluies de grande et petite intensité :

$$\nu(u) = b\delta_1 \exp(-\delta_1 u)\mathbf{1}_{u\geq 0} + (1-b)\delta_2 \exp(-\delta_2 u)\mathbf{1}_{u\geq 0}.$$

Nous choisissons δ_2/δ_1 de l'ordre de 10 et $\delta_2 = 0.7$.

Calculs du volume d'eau dans le lac Si nous représentons le processus de Poisson composé par une série de sauts, i.e.

$$N_t^i = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in [0, T_1[, \\ 1 & \text{pour } t \in [T_1, T_2[, \\ 2 & \text{pour } t \in [T_2, T_3[, \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

Alors la solution de Eq. 1 est donnée par

$$X_t^i = \exp(-r_i t)\left(\int_0^t \exp(-r_i s)\mathrm{d}A_s^i + x_0^i\right),$$

où

$$\mathrm{d}A_s^i = \begin{cases} U_s^i \delta_s & \text{si } s \in \{T_1, T_2, \cdots\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

au sens de distribution, autrement dit

$$X_t^i = \begin{cases} x_0^i \exp(-r_i t) & \text{pour } t \in [0, T_1[, \\ \exp(-r_i t)(x_0^i + \exp(r_i T_1)U_1^1) & \text{pour } t \in [T_1, T_2[, \\ \exp(-r_i t)(x_0^1 + \exp(r_i T_1)U_1^1 + \exp(r_i T_2)U_2^i) & \text{pour } t \in [T_2, T_3[, \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

Une illustration des évolutions de volume d'eau est donnée dans le figure 1. Nous remarquons que nous pouvons obtenir deux types des données : les volumes d'eau après chaque pluie, qui a la même longeur que les chutes de pluie, et les volumes d'eau au cours de temps. En général, le premier type de donnée est suffisant, car nous considérons principalement le rique d'inondation.

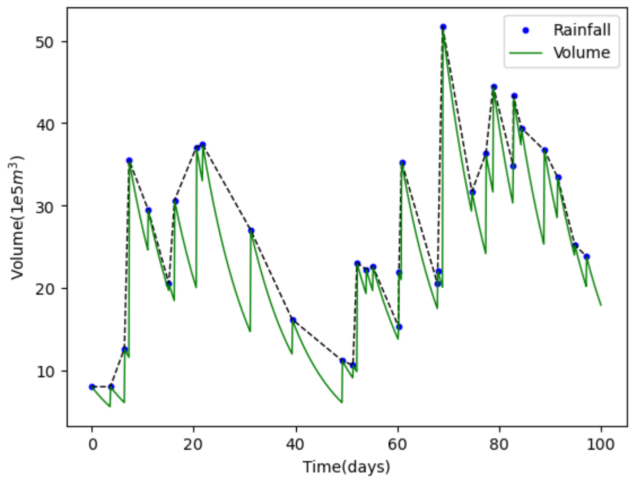

FIGURE 1 – Une simulation du volume d'eau pour $\lambda = 0.3$, $b = 0.5$, $\delta_1 = 0.07$, $\delta_2 = 0.7$, $r_i = 0.1$, $x_0^i = 8$ dans les unités de «jour» et «$10^5 m^3$». La courbe verte représente l'évolution du volume au cours du temps. Les points bleue représente les volumes d'eau après chaque pluie.

3 Risque d'inondation

Dans cette section, nous allons introduire de différentes approches pour simuler le rique d'inondation. Pour un premier temps, nous considérons le cas d'un seul barrage. Et puis nous prenons en compte des intersections de deux barrages.

3.1 Le cas d'un seul barrage

Quand il y a un seul barrage qui est présent, nous utilisons les notations sans indice i comme X_t et A_t. et nous formulons le problème de rique d'inondation comme suit : nous voulons trouver le seuil x^* (soit pour un certain T, on prend $X = X_T$, soit pour le volume maximum dans $[0, T]$, on prend $X = \max_{0 \leq s \leq T} X_s$) tel que

$$\mathbb{P}(X > x^*) \leq \alpha.$$

Monte-Carlo naïf La méthode de Monte-Carlo naïf pour trouver un quantile $1 - \alpha$ est de simuler N trajectoires de X, notons (X_i) et de prendre le quantile empirique. Nous rappelons que le quantile empirique est donné par

$$\hat{q}_{1-\alpha} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \hat{F}_N(x) \geq 1 - \alpha\},$$

où $\hat{F}_N$ est la fonction de répartition empirique.

$$\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{X_i \leq x}.$$

Si nous trions les valeurs de X_i comme $X_{(1,N)} \leq X_{(2,N)} \leq \cdots \leq X_{(N<N)}$, alors nous avons

$$\hat{q}_{1-\alpha} = X_{(\lceil N(1-\alpha) \rceil, N)}.$$

Cet algorithme est réalisé comme méthode `get_critical_level` dans la classe `naive_MonteCarlo`.

Importance Sampling (Esscher)

Algorithme de la dernière particule L'idée de l'algorithme de la dernière particule est de renouveler la valeur minimale d'une suite de X selon la loi de $(X|X > L)$ où $L = \min(X_i)$.

Précisément, on simule d'abord une suite, notons $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, selon la loi de X. On note le minimun temporaire $L = \min_{1 \leq i \leq n}(X_i)$, et on remet à jour ces X_i égaux à L par un échantillon indépendant selon la loi de $(X|X > L)$. En répétant ce processus $\left\lceil \frac{\log \alpha}{\log(1 - 1/n)} \right\rceil$ fois, le minimum final L est le seuil dont on a besoin.

Il nous reste à obtenir un échatillon selon la loi de $(X|X > L)$. Rappelons que X_t est obtenu du processus de Poisson composé A_t, d'où il suffit de mettre à jour A_t correspondant. L'idée est à partir d'une autre particule, on fait M itérations pour que ce soit presque indépendent de celle originale. Pour ce faire, on utilise l'algorithme de coloriage pour renouveler N_t et pour des U_i, on obtient une combinaison des valeurs originales et des échantillons indépendants si le i-ième saut est gradé, où la proportion q sera considérée dans la partie numérique.

On a deux méthodes dans la programmation, la méthode `get_new_rainfall` et l'autre `get_critical_level_and_distribution` dans la classe `last_particle`.

4 Simulation numérique

Paramètres physiques On met l'unité de temps comme 1 an et l'unité de volume comme $10^5 m^3$. On a que $r^i = 1$ et $T = 1$. On suppose qu'il pleut $\lambda = 70$ fois par an. On fixe en plus $\delta_1 = 0.07$ et $\delta_2 = 0.7$, où son unité est $(10^5 m^3)^{-1}$ et l'inverse de δ_i montre le volume moyen d'une seule pluie. Le quantile α considéré est 10^{-6}, et on prend la proportion $b = 0.1$, i.e. seule une sur dix est une grande pluie.

Maintenant on va considérer la valeur de x_0, le volume initial. On veut que x_0 soit «l'état stationnaire» pour que ce soit compatible avec le processus physique, i.e. le flux d'eau entrant et sortant est presque équilibré pendant assez longtemps. Dans la pratique, on simule 5000 fois X_{100} et puis calcule le moyen, cela nous donne $x_0 = 190$.

Cette idée peut aussi être réalisée par un calcul théorique. Pour un petit temps Δt, le flux sortant est $-(r_1 x_0)\Delta t$ alors que le flux entrant est $\mathbb{E}[\nu](\lambda_1 \Delta t)$. Pour que x_0 soit l'état stationnaire, on a forcément que $-r_1 x_0 + \lambda_1 \mathbb{E}[\nu] = 0$, d'où

$$x_0 = \frac{\lambda_1}{r_1}\left(\frac{b}{\delta_1} + \frac{1-b}{\delta_2}\right) = 190.$$