

AMPHI 3: MODÈLES POISSONIENS

1. Processus de Poisson
2. Changements de probabilité : transformation de Esscher
3. Méthode de splitting et chaines réversibles avec rejet
4. Autres changements de probabilité (en compléments de Poisson, et Gaussien)

I. PROCESSUS DE POISSON

[voir livre de J.F.C. Kingman] Poisson Processes. Clarendon Press, 1992.

Présentation informelle

Soit τ_1, τ_2, \dots des v.a. indépendantes et de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

On pose

$$T_0 = 0, \quad T_1 = T_0 + \tau_1, \quad T_n = T_{n-1} + \tau_n = \sum_{i=1}^n \tau_i$$

On a: $T_0 < T_1 < \dots < T_n < \dots$ avec probabilité un.

On parle de *temps d'occurrence d'événements* pour les v.a. T_n , et de *durée d'interarrivées* pour les v.a. τ_n .

Alors si l'on compte le nombre d'événements qui se sont passés sur $[0, t]$, on a

$$\sum_n \mathbf{1}_{T_n \leq t} \sim \mathcal{P}(\lambda t) \equiv \mathcal{P}(\lambda \text{ Leb}([0, t])).$$

Un processus de Poisson N d'intensité λ est une **mesure aléatoire** t.q.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \ni A \mapsto N(A) \sim \mathcal{P}(\lambda \text{ Leb}(A)).$$

Il suffit de donner $N([0, t])$ pour $t \geq 0$; plus souvent noté : N_t .

I-1 Définitions

Processus de Poisson (sur \mathbb{R}^+) homogène de paramètre λ

Définition. $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

- ✓ $N_0 = 0$;
- ✓ pour $t > s$, $N_t - N_s$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$:

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- ✓ N est un processus à accroissements indépendants:

$$(N_t - N_s) \text{ et } (N_u - N_v) \text{ indépendants} \quad \forall v < u \leq s < t$$

En corollaire

$$N_t - N_s \text{ a même loi que } N_{t-s}$$

Soit N un processus de Poisson sur \mathbb{R}^+ . Posons

$$T_0 := 0, \quad T_n := \inf_{t \geq 0} N_t \geq n.$$

Proposition. N est le prototype de processus à sauts (sauts de taille 1 uniquement = processus de comptage) avec les temps de sauts $(T_i)_i$:

$$N_t = \sum_{i \geq 1} 1_{T_i \leq t}.$$

Les délais inter-sauts $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d. et de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice. Quelle est la loi de T_i ?

Processus de Poisson généralisé : un point de vue unificateur

Définition. Processus de Poisson généralisé sur \mathbb{R}^d

N est un processus de Poisson généralisé sur \mathbb{R}^d de paramètre $\lambda > 0$ (noté $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, \lambda)$) si N est un processus ponctuel (*distribution de points dans l'espace*) tel que

- ✓ la variable aléatoire $N(A)$ représente le nombre de points dans l'ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$,
- ✓ $N(A)$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda|A|_d$ où $|A|_d$ est la mesure de Lebesgue de A dans \mathbb{R}^d ,
- ✓ pour (A_1, \dots, A_n) ensembles disjoints, $N(A_1), \dots, N(A_n)$ sont des v.a. indépendantes.

Corollaire. Processus de Poisson standard sur \mathbb{R}^+ Soit N un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}, \lambda)$ avec $\lambda > 0$.

Alors $N_t := N([0, t])$ pour $t \geq 0$ définit un processus de Poisson standard d'intensité λ .

I-2. Quelques propriétés du processus de Poisson généralisé

Prop 1. projection Soit N un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, 1)$. Soit $\lambda > 0$ et posons $M(A) := N(A \times]0, \lambda])$ pour $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$: M est un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^{d-1}, \lambda)$.

Preuve. Découle de la définition.

Prop 2. superposition Si N_λ un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, \lambda)$ et N_μ un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, \mu)$ indépendants. Alors $N_\lambda + N_\mu$ est un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, \lambda + \mu)$. Preuve. Réaliser N_λ et N_μ comme $N(\cdot \times]0, \lambda])$ et $N(\cdot \times]\lambda, \lambda + \mu])$ avec pour N un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^{d+1}, 1)$, les sommer et appliquer à nouveau la projection.

Prop 3. couplage "trajectoriel" Soit N un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, 1)$ et $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. Alors les deux processus $N_{\lambda_1} = N(\cdot \times]0, \lambda_1])$ et $N_{\lambda_2} = N(\cdot \times]0, \lambda_2])$ sont deux $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^{d-1}, \cdot)$ de paramètres λ_1, λ_2 tels que $N_{\lambda_1}(A) \leq N_{\lambda_2}(A), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^{d-1}$.

Prop 4. loi des points Si N est un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^d, \lambda)$, alors conditionnellement à $N(A) = n$, la loi des n points dans A est celle de n points indépendants de loi uniforme sur A .

Preuve dans le cas $d = 1$. En utilisant la loi de $(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1})$, faire un changement de variable pour obtenir la loi de (T_1, \dots, T_n) . En observant que $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$, en déduire une expression de la loi de (T_1, \dots, T_n) sachant $\{N_t = n\}$. Comparer cette expression à celle des statistiques d'ordre de n v.a. uniformes sur $[0, t]$.

I-3. Simulation de processus de Poisson standard sur \mathbb{R}^+

$$N_t = \sum_{i \geq 1} 1_{T_i \leq t}, \quad t \geq 0.$$

Possibilité de simuler **toute** la trajectoire (car constante par morceaux).

I-3.1 SIMULATION PROGRESSIVE.

Poser $T_0 := 0$ et répéter pour $i \geq 0$

- ✓ Simuler une v.a. τ_{i+1} de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ indépendante du passé.
- ✓ Poser $T_{i+1} := T_i + \tau_{i+1}$.
- ✓ Définir $N_t = i$ pour $t \in [T_i, T_{i+1}[$.

I-3.2 SIMULATION À REBOURS.

Proposition. Sachant N_T , les points de saut sont uniformes sur $[0, T]$.

Algorithme de simulation.

- ✓ Simuler $N_T \sim \mathcal{P}(\lambda T)$ et obtenir un nombre k .
- ✓ Simuler $U_1, \dots, U_k \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{U}([0, T])$.
- ✓ En les triant, on obtient $T_1 < T_2 < \dots < T_k$. Coût du tri $O(k \log(k))$.

I-3.3 SIMULATION APPROCHÉE PAR DISCRÉTISATION EN TEMPS.

Pas de temps h , temps de discrétisation:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_{(i+1)h} - N_{ih} = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \\ \mathbb{P}(N_{(i+1)h} - N_{ih} = 1) = \lambda h + o(h), \\ \mathbb{P}(N_{(i+1)h} - N_{ih} > 1) = o(h). \end{cases}$$

▮ **Algorithme de simulation approchée:** sur chaque intervalle $[ih, (i+1)h[$, N saute de 1 avec probabilité λh et reste constant sinon.

Quand $h \rightarrow 0$, la loi du processus de comptage simulé converge vers celle d'un processus de Poisson.

I-4. Processus de Poisson inhomogène sur \mathbb{R}^+

Définition. Soit $\lambda : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ localement intégrable. On dit que $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène de taux instantané $\lambda(t)$ si

- ✓ N est un processus de comptage,
- ✓ N à accroissements indépendants,
- ✓ $\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h), \quad \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = o(h).$

Proposition (construction) Soit M un $\mathbf{PP}(\mathbb{R}^2, 1)$. Alors

$$N_t := M\left(\{(x, y) : 0 < x \leq t, y \leq \lambda(x)\}\right)$$

définit un processus de Poisson non-homogène de taux instantané $\lambda(t)$.

En particulier, $N_t - N_s \stackrel{\text{loi}}{=} \text{Loi de Poisson}(\int_s^t \lambda(x)dx).$

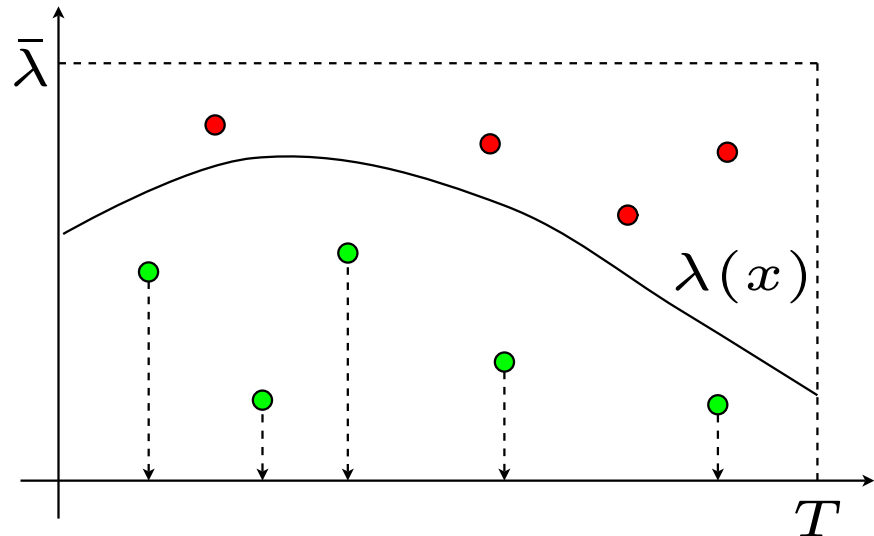
Simulation : Algorithme de *thinning* (simulation par choc fictif)

Supposons que $\sup_t \lambda(t) \leq \bar{\lambda}$.

- ✓ Simuler $M(]0, T] \times [0, \bar{\lambda}]) \rightsquigarrow n$
- ✓ Simuler n points indépendants de loi uniforme dans $]0, T] \times [0, \bar{\lambda}]$.
- ✓ Ne garder que ceux de coordonnées (x, y) tels que $y \leq \lambda(x) \rightsquigarrow N_T$ points.

Simulation du Poisson inhomogène par thinning:

- ✓ 9 points simulés (rouge et vert)
- ✓ 5 points gardés (vert)
- ✓ les abscisses sont les temps de saut



⚡ De manière équivalente, on peut simuler un Poisson d'intensité $\bar{\lambda}$ et garder chaque temps de saut T_i avec probabilité $\lambda(T_i)/\bar{\lambda}$.

II. CHANGEMENTS DE PROBABILITÉ

DANS LES MODÈLES POISSONIENS

II-1. Processus de Poisson composé

Définition. Processus de Poisson composé $(X_t)_t$ est un processus de Poisson composé de caractéristiques (λ, ν) si

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

avec

- ✓ $(Y_i)_i$ des v.a. i.i.d. de loi ν ,
- ✓ N un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
- ✓ $(Y_i)_i$ et N sont indépendants.

Cas particulier : lorsque $Y_i = 1$ avec probabilité 1 (i.e. $\nu \equiv \delta_1$), alors $X_t = N_t$.

Intérêt en modélisation: Modéliser non seulement les dates aléatoires d'arrivée d'évènements (via N) mais aussi leurs amplitudes aléatoires (via Y).

Proposition. Fonction caractéristique

$(X_t)_t$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

La loi de X_t est donnée par sa fonction caractéristique :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E} \left[e^{iuX_t} \right] = e^{\lambda t \mathbb{E}(e^{iuY} - 1)}.$$

En particulier, si Y est d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y)$.

Si Y est de variance finie, on a $\text{Var}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y^2)$.

Preuve. Voir Annexes (et amphi)

II-2. Changement de loi: Transformation de Esscher

II-2.1 LE PROBLÈME

Soit $(X_t)_t$ un Poisson composé de caractéristiques (λ, ν) sous \mathbb{P} .

On fait les changements de loi

$$\checkmark \quad \nu \rightarrow \nu_f$$

$$\nu_f(dy) := \frac{\exp(f(y)) \nu(dy)}{\int \exp(f(u)) \nu(du)}$$

où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int \exp(f(y)) \nu(dy) < \infty$;

$$\checkmark \quad \mathbf{PP}(\mathbb{R}, \lambda) \rightarrow \mathbf{PP}(\mathbb{R}, \lambda_f).$$

Notations : sous \mathbb{P}_f , $(X_t)_t$ est un Poisson composé de caractéristiques (λ_f, ν_f) .

Question : A quelles conditions sur (λ_f, ν_f) , existe-t-il une v.a. $L_{f,t}$ vérifiant

$$\mathbb{E}[g(X_t)] = \mathbb{E}_f[g(X_t) L_{f,t}] \quad \forall g \text{ mesurable ?}$$

II-2.2 CHANGEMENT DE LOI

Posons

$$\lambda_f := \lambda \int \exp(f(y)) \, d\nu(y), \quad \nu_f(dy) \propto \exp(f(y)) \, \nu(dy).$$

Proposition. Pour toute fonction mesurable bornée g et tout $T > 0$, on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{g}(\mathbf{X}_T)] = \mathbb{E}_f \left[\mathbf{g}(\mathbf{X}_T) \exp \left((\lambda_f - \lambda) T - \sum_{i=1}^{N_T} \mathbf{f}(\mathbf{Y}_i) \right) \right].$$

Preuve. voir amphi

On rappelle que sous \mathbb{P}_f , $(X_t)_t$ est un processus de Poisson composé de caractéristiques (λ_f, ν_f) .

En conséquence, on a

$$\mathbb{E}_f \left[\exp \left((\lambda_f - \lambda) T - \sum_{i=1}^{N_T} \mathbf{f}(Y_i) \right) \right] = 1$$

II-2.3 MONTE CARLO PAR ECHANTILLONNAGE D'IMPORTANCE

Pour approcher $\mathbb{E}[g(X_T)]$, on déduit deux stratégies Monte Carlo de la relation

$$\mathbb{E}[g(X_T)] = \mathbb{E}_f \left[g(X_T) \exp \left((\lambda_f - \lambda)T - \sum_{i=1}^{N_T} f(Y_i) \right) \right].$$

Monte Carlo naïf

✓ Simuler M processus de Poisson composés $(X_t^{(m)})_t$ de caractéristiques (λ, ν) .

✓ Poser

$$\mathbb{E}[g(X_T)] \approx \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_T^{(m)})$$

Monte Carlo par Echantillonnage d'importance

✓ Simuler M proc. de Poisson composés $(X_t^{(m)})_t$ de caractéristiques (λ_f, ν_f) .

✓ Poser

$$\mathbb{E}[g(X_T)] \approx \exp((\lambda_f - \lambda)T) \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(X_T^{(m)}) \exp \left(- \sum_{i=1}^{N_T^{(m)}} f(Y_i^{(m)}) \right)$$

Exemple 1 : $\nu = \delta_1$ et $f(y) = c$

- ✓ Proba d'origine : $\nu = \delta_1$: les sauts sont de taille 1. Dans ce cas, $X_T = N_T$.
- ✓ Changement de loi : le nouveau Poisson composé a pour caractéristiques

$$\lambda_f := \exp(c) \lambda, \quad \nu_f(dy) := \delta_1 = \nu(dy).$$

Sous \mathbb{P}_f , les sauts Y_i sont encore de taille 1 mais l'intensité du Poisson $(N_t)_t$ est multipliée par un facteur $\exp(c)$. En particulier, cela modifie la moyenne et la variance du processus de Poisson (composé) d'un facteur $\exp(c)$.

Application. On veut calculer $\mathbb{P}(X_T > x)$ pour x grand. On prend $c > 0$ pour augmenter la fréquence de saut et rendre l'évènement $\{X_T > x\} = \{N_T > x\}$ plus probable sous \mathbb{P}_f . Méthode numérique :

$$\mathbb{P}(X_T > x) \approx \exp(\lambda T(\exp(c) - 1)) \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_{N_T^{(m)} > x} \exp(-c N_T^{(m)})$$

où les $(N_T^{(m)})_m$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda_f T)$.

Application numérique. $\lambda = T = 1, x = 6$.

$$\mathbb{P}(N_1 > 6) = 5.94 \cdot 10^{-4}$$

- ✓ Monte Carlo naif ($M = 1000$ simulations) : IC = $[-9.6 \cdot 10^{-4}, 29.6 \cdot 10^{-4}]$.
- ✓ Monte Carlo avec Ech d'importance : ($\lambda_f = 6$): IC = $[5.07 \cdot 10^{-4}, 6.47 \cdot 10^{-4}]$
- ✓ **Gain $\approx 800!!$**

Exemple 2 : Saut gaussien

Considérons le cas

$$\nu(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

et prenons

$$f(y) := \alpha_1 y + \alpha_2 y^2.$$

Alors la loi des sauts sous \mathbb{P}_f reste gaussienne :

$$\nu_f(dy) \propto \exp(\alpha_1 y + \alpha_2 y^2) \exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

Exemple. Si $\alpha_2 = 0$,

$$\nu_f \equiv \mathcal{N}(m + \alpha_1 \sigma^2, \sigma^2) \qquad \lambda_f = \lambda e^{\alpha_1 m + \frac{1}{2} \alpha_1^2 \sigma^2}$$

Exercice. Identifier les nouveaux paramètres λ_f, ν_f lorsque $\alpha_2 \neq 0$.

Exemple 3 : Saut de loi double exponentielle

Considérons le cas

$$\nu(dy) = p \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y>0} dy + (1 - p) \eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{y<0} dy$$

et prenons

$$f(y) := \alpha y \quad \text{pour } \alpha \in]-\eta_2, \eta_1[.$$

Posons

$$\tilde{\eta}_1 := \eta_1 - \alpha, \quad \tilde{\eta}_2 := \eta_2 + \alpha, \quad \lambda_f := \frac{p \eta_1}{\tilde{\eta}_1} + \frac{(1 - p) \eta_2}{\tilde{\eta}_2} \quad \tilde{p} := \frac{p \eta_1}{\lambda_f \tilde{\eta}_1}.$$

Alors sous \mathbb{P}_f , la loi des sauts reste une double exponentielle

$$\nu_f(dy) := \tilde{p} \tilde{\eta}_1 e^{-\tilde{\eta}_1 y} \mathbf{1}_{y>0} dy + (1 - \tilde{p}) \tilde{\eta}_2 e^{\tilde{\eta}_2 y} \mathbf{1}_{y<0} dy$$

et l'intensité du processus de Poisson est λ_f .

III. MÉTHODE DE SPLITTING POUR MODÈLES POISSONIENS

ET CHAÎNES DE MARKOV RÉVERSIBLES AVEC REJET

III-1. Méthode de splitting

Principe. Décomposition de l'objectif en produits de probabilités plus élevées :

$$\mathbb{P} [g(N^\lambda) \in A] = \prod_{i=1}^I \mathbb{P} [g(N^\lambda) \in A_i \mid g(N^\lambda) \in A_{i-1}]$$

Mise en oeuvre.

- ✓ Choix du nombre de termes I
- ✓ Choix des ensembles $A_I := A \subset A_{I-1} \subset \dots \subset A_1 \subset A_0$.
- ✓ Simulation sous la loi conditionnelle de " N^λ sachant $\{g(N^\lambda) \in A_{i-1}\}$ ".

Simulation sous loi conditionnelle. Par chaînes de Markov réversibles et rejet (voir Amphi 2).

III-2. Comment simuler une chaîne de Markov réversible ?

III-2.1. PROPRIÉTÉS

Prop. 1 : Superposition Si $N^\lambda \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \lambda)$ et $N^\mu \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \mu)$ sont deux Processus de Poisson homogène indépendants, alors $N^\lambda + N^\mu \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \lambda + \mu)$.

Prop. 2 : Coloriage Soit $N^\lambda \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \lambda)$. Si on garde chaque saut avec probabilité p et de manière indépendante des autres, alors

- ✓ le nouveau processus ponctuel $\mathbf{N}^{\lambda p} \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \lambda p)$
- ✓ la différence $\mathbf{N}^{\lambda(1-p)} := \mathbf{N} - \mathbf{N}^{\lambda p} \sim \mathbf{PP}(\mathbb{R}^+, \lambda(1-p))$.
- ✓ ces deux PP $\mathbf{N}^{\lambda p}$ et $\mathbf{N}^{\lambda(1-p)}$ sont indépendants.

III-2.2. ALGORITHME POUR UN PROCESSUS DE POISSON

Soit $p \in [0, 1]$. Le procédé de coloriage en vert/bleu et duplication des points bleus

$$N^\lambda \xrightarrow{\text{coloriage}} \textcolor{green}{N}^{p\lambda} \underset{\text{ind.}}{+} \textcolor{blue}{N}^{(1-p)\lambda} \xrightarrow{\text{superposition}} \textcolor{green}{N}^{p\lambda} \underset{\text{ind.}}{+} \underbrace{\textcolor{blue}{\tilde{N}}^{(1-p)\lambda}}_{\text{copie ind. de } N^{(1-p)\lambda}} = \tilde{N}^\lambda$$

est réversible

Preuve :

$$\begin{aligned} (N^\lambda, \tilde{N}^\lambda) &= (N^{p\lambda} + N^{(1-p)\lambda}, N^{p\lambda} + \tilde{N}^{(1-p)\lambda}) \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} (N^{p\lambda} + \tilde{N}^{(1-p)\lambda}, N^{p\lambda} + N^{(1-p)\lambda}) = (\tilde{N}^\lambda, N^\lambda). \end{aligned}$$

III-2.3. ALGORITHME POUR UN PROCESSUS DE POISSON COMPOSÉ

Soit un processus de Poisson composé de caractéristiques (λ, ν) .

Hypothèse. Supposons disposer d'une transformation réversible P pour ν :
 $\nu(dy)P(y, dy') = \nu(dy')P(y', dy)$.

Algorithme. Posons $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \curvearrowright \tilde{\mathbf{X}}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{\mathbf{Y}}_i$ où

- ✓ \tilde{N} est la transformation réversible sur le PP (coloriage et duplication)
- ✓ $\tilde{Y}_i \sim P(Y_i, \cdot)$ si le saut $\#i$ est gardé, et $\tilde{Y}_i \sim \nu$ sinon, les opérations en i étant indépendantes.

Résultat. Cela définit une transformation réversible de la loi de X :

$$(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}) \stackrel{\text{loi}}{=} (\tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{X}).$$

III-3. Splitting pour un processus de Poisson standard

III-3.1. APPROXIMATION MC DE $\mathbb{P} [g(N^\lambda) \in A_i \mid g(N^\lambda) \in A_{i-1}]$

On définit une suite de processus ponctuels $(N^{\lambda,i,m})_m$  $N^{\lambda,i,m}$ est un processus de Poisson :

- ✓ choix de $N^{\lambda,i,0}$ tel que $g(N^{\lambda,i,0}) \in A_{i-1}$,
- ✓ itération $\#(m+1)$: $N^{\lambda,i,m+1} = \begin{cases} \tilde{N}^{\lambda,i,m} & \text{si dans } g(\tilde{N}^{\lambda,i,m}) \in A_{i-1}, \\ N^{\lambda,i,m} & \text{sinon.} \end{cases}$

On construit l'estimateur local :

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_{g(N^{\lambda,i,m}) \in A_i} \underset{M \rightarrow +\infty}{\approx} \mathbb{P} [g(N^\lambda) \in A_i \mid g(N^\lambda) \in A_{i-1}] .$$

III-3.3. ON RECOMBINE LES SORTIES DE CHAQUE COUCHE $\#i$

Estimateur final:

$$\mathbb{P} [\mathbf{g}(\mathbf{N}^\lambda) \in \mathbf{A}] \approx \prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbf{1}_{\mathbf{g}(\mathbf{N}^{\lambda,i,m}) \in \mathbf{A}_i} \right) .$$

III-3.2. PARAMÈTRES À RÉGLER

- ✓ probabilité de coloriage p ,
- ✓ nombre de splits I ,
- ✓ choix des ensembles A_i ,
- ✓ nombre de tirages Monte Carlo M .

IV. AUTRES CHANGEMENTS DE PROBABILITÉ, CAS V.A. RÉELLE EN CPMT DU CAS GAUSSIEN ET POISSON.

Objectif.

$$\mathbb{E}[h(X)] \quad X \sim f \, d\nu$$

Approche par échantillonnage d'importance $f \rightarrow g_\theta$ avec

$$g_\theta(y) \propto \exp(\theta y) f(y).$$

Questions.

- ✓ Si f est dans une famille “standard” de loi, peut-on reconnaître la loi $g_\theta \, d\nu$?
- ✓ Interprétation de θ : effet sur les statistiques espérance, variance, etc de la loi de simulation
- ✓ Choix de θ

IV-1. Transformée de Laplace

Définition. La TF de Laplace de la loi $f d\nu$ est définie par

$$\theta \mapsto \mathbf{M}(\theta) := \mathbb{E} [\exp(\theta \mathbf{X})] = \int \exp(\theta \mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \nu(d\mathbf{x}).$$

sur l'ensemble $\mathcal{D} := \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbf{M}(\theta) < \infty\}$.

La fonction $\theta \mapsto \mathbf{\Gamma}(\theta) = \log(\mathbf{M}(\theta))$ est la fonction log-Laplace.

Proposition. Quelques propriétés de M et Γ :

1. $\mathbf{0} \in \mathcal{D}$;
2. \mathcal{D} est sous la forme d'un intervalle $\mathcal{D} = (-\theta^-, \theta^+)$, fermé ou ouvert à droite/gauche avec

$$\theta^+ := \sup_{\theta \geq 0} \{\theta : \mathbb{E}[\exp(\theta X_+)] < \infty\}, \quad \theta^- := \sup_{\theta \leq 0} \{\theta : \mathbb{E}[\exp(\theta X_-)] < \infty\}.$$

3. $\mathbf{\Gamma}$ est convexe sur le domaine \mathcal{D} .

Preuves : Voir annexes.

Posons

$$\begin{aligned} g_\theta(x) d\nu(x) &:= \frac{\exp(\theta x) f(x)}{\int \exp(\theta u) f(u) d\nu(u)} d\nu(x) \\ &= \exp(\theta \mathbf{x} - \Gamma(\theta)) f(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Proposition. Sur l'intérieur du domaine \mathcal{D} , $\theta \mapsto \Gamma(\theta)$ est deux fois continûment différentiable et on a

$$\begin{aligned} \Gamma'(\theta) &= \int x g_\theta(x) \nu(dx) \\ \Gamma''(\theta) &= \int x^2 g_\theta(x) \nu(dx) - \left(\int x g_\theta(x) \nu(dx) \right)^2. \end{aligned}$$

IV-2. Interprétation du changement de loi $f \rightarrow g_\theta$

Echantillonnage d'importance

$$\mathbb{E} [h(X)] = \mathbb{E}_{g_\theta} \left[h(X) \frac{f(X)}{g_\theta(X)} \right] = \mathbb{E}_{g_\theta} [h(X) \exp(\Gamma(\theta) - \theta X)].$$

Espérance et Variance sous $g_\theta d\nu$

Pour tout θ dans l'intérieur de \mathcal{D} ,

$$\mathbb{E}_\theta(\mathbf{X}) = \mathbf{\Gamma}'(\theta) \quad \mathbb{V}\text{ar}_\theta(\mathbf{X}) = \mathbf{\Gamma}''(\theta).$$



Cela permet de choisir θ pour assurer un certain centrage de X après changement de probabilités.

Noter que lorsque $\theta = 0$, $g_0 = f$ (loi d'origine).

IV-3. Exemples

✓ **Loi de Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$. $\Gamma(\theta) = \ln(1 - p + pe^\theta)$.

Sous \mathbb{P}_{g_θ} , X est encore de loi de Bernoulli de paramètre $p_\theta := \frac{pe^\theta}{1 - p + pe^\theta}$.

✓ **Loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$. $\Gamma(\theta) = \lambda(e^\theta - 1)$.

Sous \mathbb{P}_{g_θ} , X est encore de loi de Poisson de paramètre $\lambda_\theta := \lambda e^\theta$.

✓ **Loi gaussienne** $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. $\Gamma(\theta) = \theta^2 \sigma^2 / 2$.

Sous \mathbb{P}_{g_θ} , X est encore de loi gaussienne de paramètres $\mathcal{N}(\theta \sigma^2, \sigma^2)$.

✓ **Loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$. $\Gamma(\theta) = \ln(\lambda) - \ln(\lambda - \theta)$ pour $\theta \in]-\infty, \lambda[$.

Sous \mathbb{P}_{g_θ} , X est encore de loi exponentielle de paramètre $\lambda - \theta$.

✓ **Moyenne i.i.d..** Pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$M^{b+a \sum_{i=1}^n X_i}(\theta) = e^{\theta b} [M^{aX}(\theta)]^n = e^{\theta b} [M^X(a\theta)]^n,$$

$$\Gamma^{b+a \sum_{i=1}^n X_i}(\theta) = \theta b + n\Gamma^X(a\theta).$$

ANNEXES AMPHI 3

Preuve - Caractéristiques Poisson composé

- **PAIS:** propriété d'accroissements indépendants et stationnaires facile.
- **Loi de X_t :**

$$\begin{aligned}\phi_{X_t}(u) &:= \mathbb{E}(e^{iuX_t}) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{[\lambda t]^k}{k!} \mathbb{E}(e^{iu \sum_{j=1}^{N_t} Y_j} | N_t = k) \\ &= \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{[\lambda t]^k}{k!} \mathbb{E}(e^{iu \sum_{j=1}^k Y_j}) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda t} \frac{[\lambda t]^k}{k!} [\mathbb{E}(e^{iuY})]^k \\ &= e^{\lambda t \mathbb{E}(e^{iuY}) - \lambda t}.\end{aligned}$$

- **Calcul des moments:** on peut procéder encore en conditionnant % N_t .

Méthode alternative: DL de la fonction caractéristique autour de 0

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = 1 + iu\mathbb{E}(X_t) - \frac{u^2}{2}\mathbb{E}(X_t^2) + o_{u \rightarrow 0}(u^2),$$

$$e^{\lambda t \mathbb{E}(e^{iuY} - 1)} = e^{\lambda t(iu\mathbb{E}(Y) - \frac{u^2}{2}\mathbb{E}(Y^2) + o(u^2))}$$

$$= 1 + \lambda t(iu\mathbb{E}(Y) - \frac{u^2}{2}\mathbb{E}(Y^2)) - \frac{(\lambda t u \mathbb{E}(Y))^2}{2} + o(u^2).$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{X}_t) = \lambda t \mathbb{E}(\mathbf{Y}) \text{ et } \mathbb{E}(\mathbf{X}_t^2) = \lambda t \mathbb{E}(\mathbf{Y}^2) + (\lambda t \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^2.$$

Preuve - Convexité de log-Laplace

Pour θ_1, θ_2 dans $D(M)$ et $\lambda \in]0, 1[$, par inégalité de Hölder avec $\frac{1}{p} = \lambda$ et $\frac{1}{q} = 1 - \lambda$, on a:

$$\begin{aligned} M(\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2) &\leq \mathbb{E}([e^{\lambda\theta_1 X}]^p)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}([e^{(1-\lambda)\theta_2 X}]^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq [M(\theta_1)]^\lambda [M(\theta_2)]^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

□