TUGAS BESAR 1

SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN, DAN APLIKASINYA

LAPORAN

Diajukan sebagai salah satu tugas mata kuliah
IF2123 Aljabar Linier dan Geometri pada Semester I
Tahun Akademik 2021-2022

Oleh

Fachry Dennis Heraldi	**13520139**
Willy Wilsen	**13520160**
Ghazian Tsabit Alkamil	**13520165**

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

BANDUNG

2021

DAFTAR ISI

BAB I

DESKRIPSI MASALAH

A. Buatlah pustaka dalam **Bahasa Java** untuk menemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan), menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor, dan menghitung balikan matriks.

B. Gunakan pustaka di atas untuk membuat program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier, menghitung matriks balikan, menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

Spesifikasi program adalah sebagai berikut:

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari *keyboard* adalah m, n, koefisien a_{ij} , dan b_i. Masukan dari *file* berbentuk matriks *augmented* tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
 3 4.5 2.8 10 12
-3 7 8.3 11 -4
0.5 -10 -9 12 0
```

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari *keyboard* adalah n dan koefisien a_{ij}. Masukan dari *file* berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
 3 4.5 2.8 10
-3 7 8.3 11
 0.5 -10 -9 12
```

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n, (x_0, y_0), (x_1, y_1),..., (x_n, y_n), dan nilai x yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari *keyboard* adalah n (jumlah peubah x), semua nilai-nilai x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}, nilai y_i, dan nilai-nilai x_k yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.

5. Untuk persoalan SPL, luaran (*output*) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya x_4 = -2, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.)

6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing

7. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.

8. Luaran program harus dapat ditampilkan **pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file**.

9. Bahasa program yang digunakan adalah Java.

10. Program **tidak harus** berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas *Eclipse* misalnya).

11. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Misalnya, menu:

```
MENU
1.Sistem Persamaaan Linier
2.Determinan
3.Matriks balikan
4.Interpolasi Polinom
5.Regresi linier berganda
6.Keluar
```

Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
1.Metode eliminasi Gauss
2.Metode eliminasi Gauss-Jordan
3.Metode matriks balikan
4.Kaidah Cramer
```

Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

BAB II

TEORI SINGKAT

2.1 Sistem Persamaan Linier, Matriks, dan Determinan

Sistem persamaan linier (SPL) $Ax = b$ dengan n peubah (*variable*) dan m persamaan adalah berbentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien $\in$ R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

SPL dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk perkalian matriks $Ax=B$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Sebuah matriks M berukuran $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

determinannya adalah

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan matriks M berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan beberapa cara: reduksi baris dan ekspansi kofaktor.

SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, dua diantaranya diterapkan pada tugas besar ini, yaitu interpolasi polinom dan regresi linier.

2.2 Operasi Baris Elementer (OBE), Metode Eliminasi Gauss, dan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Matriks eselon baris (row echelon form) adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol. Bentuknya sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks *augmented*

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Untuk mencari penyelesaian dari suatu SPL, lakukan tiga operasi baris elementer terhadap matriks *augmented*:

1. Kalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Pertukarkan dua buah baris.
3. Tambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

Solusi sebuah SPL diperoleh dengan menerapkan OBE pada matriks *augmented* sampai terbentuk matriks eselon baris atau matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Jika berakhir pada matriks eselon baris: Metode eliminasi Gauss

Jika berakhir pada matriks eselon tereduksi: Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Pecahkan persamaan yang berkoresponden pada matriks eselon baris dengan teknik penyulihan mundur.

2.3 Matriks Kofaktor dan Adjoin

Misalkan A adalah sebuah matriks berukuran n x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Didefinisikan:

M_{ij} = Minor entri a_{ij} = Determinan sub-matriks yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Adjoin dari A adalah transpose matriks kofaktor

2.4 Matriks Balikan

Mencari matriks balikan dapat menggunakan eliminasi Gauss-Jordan sebagai berikut

Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan (inverse) matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Untuk matriks A yang berukuran n x n, matriks balikannya, yaitu A^{-1} dicari dengan cara berikut:

$$[A|I] \overset{\text{G-J}}{\sim} [I\,|A^{-1}]$$

yang dalam hal ini *I* adalah matriks identitas berukuran n x n.

Metode eliminasi Gauss-Jordan diterapkan secara simultan untuk A maupun I.

Matriks Balikan dapat pula dicari menggunakan adjoin, dihitung dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$$

Sebuah matriks memiliki balikan jika matriks tersebut adalah matriks persegi dan memiliki balikan (determinannya ≠ 0)

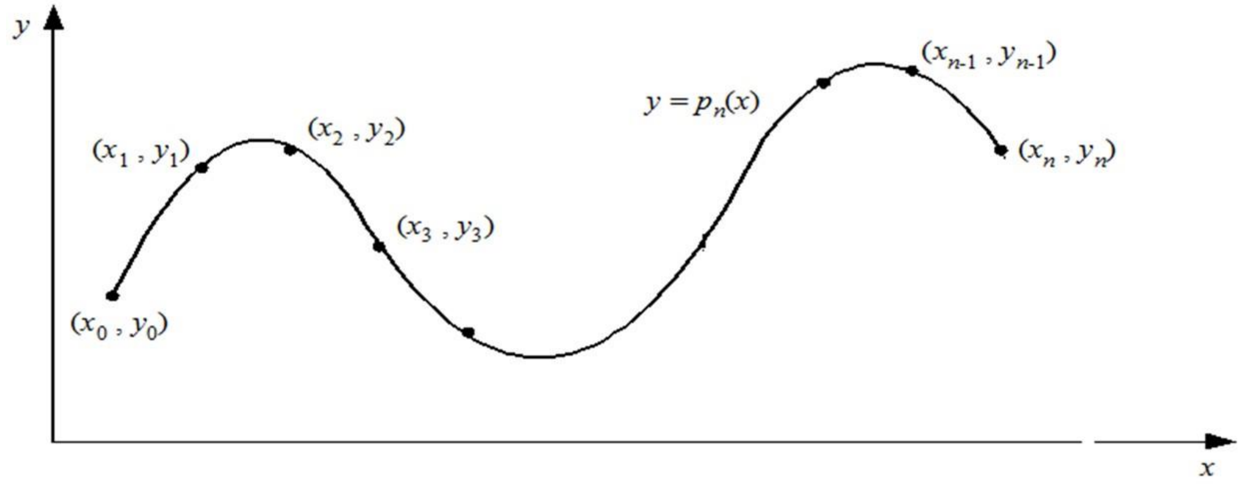
2.5 Kaidah Cramer

Jika $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah sedemikian sehingga det(A) ≠ 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

2.6 Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang $[x_0, x_n]$.

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0$$
$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sisten persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794 \; a_0 + 9.0a_1$$
$$+ 81.00a_2 = 2.1972$$
$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 =$

$0.6762, a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

2.7 Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
nb_0 & + & b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots + & b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + & b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + & b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + \cdots + & b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & + & b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + & b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + \cdots + & b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}
$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB III

IMPLEMENTASI PROGRAM

Pada program Java ini, dideklarasikan 5 buah *class* yang memilki *atribute* dan *method* pada masing-masingnya dan digunakan untuk melakukan operasi tertentu. *Class* tersebut diimplementasi dalam file .java sebagai berikut.

3.1 Main.java

Main.java merupakan main driver dari program ini sebagai pemanggil *method* pada *class* yang telah dibentuk/dideklarasikan.

Method yang digunakan pada *class* ini adalah:

Method	Deskripsi
`public static void main(String[] args)`	Menjalankan method `MainMenu()`
`public static void MainMenu()`	Menampilkan list menu
`public static void SubMenuSPL()`	Menampilkan sub menu SPL, melakukan operasi SPL dengan memanggil method yang berkaitan dengan operasi SPL
`public static void SubMenuDet()`	Menampilkan sub menu determinan, melakukan operasi determinan dengan memanggil method yang berkaitan dengan operasi determinan
`public static void SubMenuInv()`	Menampilkan sub menu matriks balikan, melakukan operasi matriks balikan dengan memanggil method yang berkaitan dengan operasi matriks balikan
`public static void SubMenuIntpol()`	Menampilkan sub menu interpolasi, melakukan operasi interpolasi dengan memanggil method yang berkaitan dengan operasi interpolasi
`public static void SubMenuRLB()`	Menampilkan sub menu regresi linear berganda, melakukan operasi regresi linear berganda dengan memanggil method yang

	berkaitan dengan operasi regresi linear berganda
`public static int JenisInput(int versi)`	Menampilkan sub menu untuk jenis masukan dapat berasal dari keyboard maupun file .txt

3.2 Matrix.java

Class Matrix berisi serangkaian method yang digunakan dalam berbagai operasi yang akan di digunakan untuk menyelesaikan persoalan persoalan pada matriks.

Attribute yang digunakan pada *class* ini adalah:

Attribute	Deskripsi
`public double [][] Mat`	Mendeklarasikan suatu array kosong bertipe double dengan nama Mat
`protected int brs, kol;`	Mendeklarasikan variable brs (untuk baris array Mat) dan kol (untuk kolom array Mat) dengan tipe integer

Method yang digunakan pada *class* ini adalah:

Method	Deskripsi
`public Matrix(int I, int j)`	Membuat matriks berukuran ixj
`void getBaris(int i)`	Mengeluarkan matriks dengan indeks baris ke-i
`void getKolom(int j)`	Mengeluarkan matriks dengan indeks kolom ke-j
`public int getJmlBrs()`	Mengeluarkan banyaknya baris pada matriks
`public int getJmlKol()`	Mengeluarkan banyaknya kolom pada matriks
`int getFirstIndeks()`	Mengembalikan indeks elemen tidak nol pertama pada sebuah kolom pada matriks.
`void setEmt(int baris, int kolom, double var)`	Mengatur element pada baris ke-baris dan kolom ke-kolom dengan var

`int notZeroBrs()`	Mengembalikan indeks baris tidak nol pertama pada indeks kolom ke-0
`void bacaMatriks()`	Membaca matriks dari masukkan keyboard
`public void bacaFileMatriks(String Filename)`	Membaca file .txt kemudian dikonstruksi ke dalam tipe bentukan Matrix
`void tulisMatriks()`	Menampilkan matriks ke layar
`public void tukarBaris(int M, int N)`	Menukarkan baris indeks ke-M dengan baris indeks ke-N
`public void tambahBaris(int M, int N, double k)`	Menambah baris ke-M dengan baris ke-N dikali dengan k
`void kurangBaris(int M, int N)`	Mengurangi baris indeks ke-M dengan baris indeks ke-N
`void kaliBaris(int i, double val)`	Mengalikan baris indeks ke-i dengan val
`double jumlahKaliKolom(int i, int j)`	Mengembalikan jumlah dari perkalian indeks kolom ke-i dengan indeks kolom ke-j
`double jumlahKolom(int j)`	Mengembalikan jumlah dari setiap elemen yang berada pada indeks kolom ke-j
`void Transpose()`	Mengembalikan matriks dalam bentuk transpose dari matriks masukan
`void TambahElmt(Matrix mat, int brs1, int brs2, double val)`	Menambahkan matriks mat dengan sebuah double val pada brs1 dan brs2
`void reduceMatriks(double M[][], int i, int i)`	Menghasilkan matriks M dari matriks yang sudah direduksi indeks baris ke-i dan indeks kolom ke-j sebelumnya
`void copyMatriks(double M[][])`	Menghasilkan matriks yang sama dari matriks M
`boolean isZero(int i, int j)`	Memeriksa apakah elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai nol
`boolean isBarisZero(int i)`	Memeriksa apakah elemen pada baris ke-i matriks memiliki elemen nol

`boolean isPersegi()`	Mengecheck apakah matriks masukan berupa matriks persegi atau bukan.
`boolean isIdxValid()`	Memeriksa apakah sebuah indeks merupakan indeks yang valid dari sebuah matriks
`double determinanReduksiBrs()`	Mengeluarkan determinan matriks dengan cara reduksi baris
`public double determinanKofaktor()`	Mengeluarkan determinan matriks dengan cara kofaktor
`void kofaktor()`	Menghasilkan matriks kofaktor
`void Adjoin()`	Menghasilkan adjoin matriks
`void Invers()`	Menghasilkan matriks balikan dengan cara kofaktor
`String metodeInvers()`	Memberikan penyelesaian SPL dengan metode matriks balikan
`String Cramer()`	Memberikan penyelesaian SPL dengan Kaidah Cramer
`void sortMatriks()`	Mengurutkan matriks dengan menukar baris pada matriks sehingga setiap elemen pada kolom matriks hanya memiliki satu elemen selain nol atau menjadikan matriks sebagai matriks segitiga atas.
`void MakeEchelon()`	Memberikan matriks dalam bentuk matrik eselon baris
`void MakeReduceEchelon()`	Memberikan matriks dalam bentuk matriks eselon tereduksi
`int jmlSolusi()`	Memberikan jumlah solusi penyelesaian sistem persamaan linear setelah matriks diubah ke bentuk matriks eselon tereduksi
`Hashmap<String, String> MatrixToParam()`	Memberikan solusi sistem persamaan linear dalam bentuk parametrik.

public static Hashmap<String, String> gaussEliminasi(Matrix mat)	Memberikan solusi penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi gauss
public static Hashmap<String, String> gaussJordanEliminasi(Matrix mat)	Memberikan solusi penyelesaian sistem persamaan linear dengan menggunakan metode eliminasi gauss jordan.
public static String DisplaySolusi(Hashmap<String, String> Solusi)	Menampilkan solusi penyelesaian sistem persamaan linear ke layar.

3.3 SPL.java

Class SPL berisi serangkaian method yang digunakan dalam operasi untuk mencari matriks balikan dengan menggunakan methode eliminasi Gauss Jordan dengan memanfaatkan method yang telah dibentuk pada *class* Matrix.

Method yang digunakan pada *class* ini adalah:

Method	Deskripsi
public SPL (Matrix mat2)	Berfungsi untuk menambahkan kolom pada matriks kemudian di isi dengan matriks identitas.
public Matrix inverseGaussJordan()	Berfungsi untuk melakukan operasi eliminasi gauss jordan pada matriks baru, kemudian mengembalikan matriks balikan dari matriks tersebut.

3.4 Interpolasi.java

Class Interpolasi berisi serangkaain method yang digunakan dalam operasi interpolasi polinom dengan memanfaatkan method yang telah dibentuk pada *class* Matrix.

Method yang digunakan pada *class* ini adalah:

Method	Deskripsi
static Matrix createPoints()	Memberikan balikan suatu matriks yang berisikan kombinasi koordinat titik (x,y) yang akan di interpolasi
static Matrix createPolinom(Matrix matTitik)	Memberikan balikan suatu matriks yang berisi penyelesaian polinom berupa koefisien

	terkait dengan mengolah matriks kombinasi koordinat titik
`static void persPolinom(Matrix matPolinom)`	Menampilkan persamaan polinom hasil interpolasi
`static Matrix nilaix()`	Menerima masukan nilai x yang akan ditaksir kemudian memberi balikan dalam bentuk matriks
`static void hasilTaksir(Matrix matPolinom, Matrix titikx)`	Menampilkan hasil taksiran nilai x sesuai masukan
`static void simpanInterpolasi(Matrix matTitik, Matrix matPolinom, Matrix titikx, String namafile)`	Menyimpan hasil operasi interpolasi dalam bentuk file txt

3.5 RLB.java

Class RLB berisi serangkaain method yang digunakan dalam operasi regresi linier berganda dengan memanfaatkan method yang telah dibentuk pada *class* Matrix.

Attribute yang digunakan pada *class* ini adalah:

Attribute	Deskripsi
`Matrix M`	Mendeklarasikan tipe data bentukan *Matrix* dengan nama variabel M

Method yang digunakan pada *class* ini adalah:

Method	Deskripsi
`public RLB(int n, int jmlx)`	Membuat matriks berukuran (n x jmlx)
`void bacaRLB()`	Menghasilkan matriks yang menerima input x sejumlah n dari pengguna
`Matrix CreateRLB(int jmlx, int n)`	Melakukan operasi regresi linear berganda dan eliminasi gauss pada matriks yang sudah diinput dan mengeluarkan hasil matriks tersebut
`Matrix CreateRLBFile(Matrix F)`	Melakukan operasi regresi linear berganda dan eliminasi gauss pada matriks melalui

	pembacaan file dan mengeluarkan hasil matriks tersebut
`Matrix inputX(int x)`	Melakukan pembacaan titik-titik x untuk ditaksir sesuai dengan jumlah x yang ada dan mengeluarkan hasilnya dalam bentuk matriks
`void persRLB(Matrix R)`	Mengeluarkan ke layar hasil persamaan regresi dari matriks yang sudah dilakukan operasi eliminasi gauss
`void TaksirX(Matrix R, Matrix I)`	Menaksir nilai titik-titik x yang sudah diinput dan mengeluarkan hasilnya ke layar

BAB IV

EKSPERIMEN

4.1 Studi Kasus Nomor 1: Solusi SPL *Ax* = *b*

<table>
<tr><th colspan="2">Persoalan</th></tr>
<tr><td colspan="2">a.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$</td></tr>
<tr><th>Hasil Eksekusi Program</th><th>Hasil Analisis</th></tr>
<tr><td><pre>

      Metode yang dipilih:
    1. Metode eliminasi Gauss

          Jenis Masukan
----
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode

Pilih jenis masukan: 2

   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt

            PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

Masukkan nama file (.txt) : case1a.txt
File case1a.txt berhasil diproses.

Matriks yang terbaca:
1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0
2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0
2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0
5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0

Dengan menggunakan metode eliminasi gauss
Didapatkan solusi sebagai berikut :
SPL tidak memiliki solusi

</pre></td><td>Dengan menggunakan metode eliminasi gauss, hasil dari sistem persamaan linear adalah SPL tidak memiliki solusi.</td></tr>
</table>

Persoalan

b.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

Hasil Eksekusi Program

```
--------------------------------
     Metode yang dipilih:
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
           PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case1b.txt
File case1b.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0
1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0
2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0
-1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss jordan
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=1.00s+3.00 x2=2.00s x3=t x4=1.00s -1.00 x5=s
--------------------------------
```

Hasil Analisis

Dengan menerapkan metode eliminasi gauss jordan didapatkan solusi dari persamaan linear adalah

$x_1 = s+3$

$x_2 = 2s$

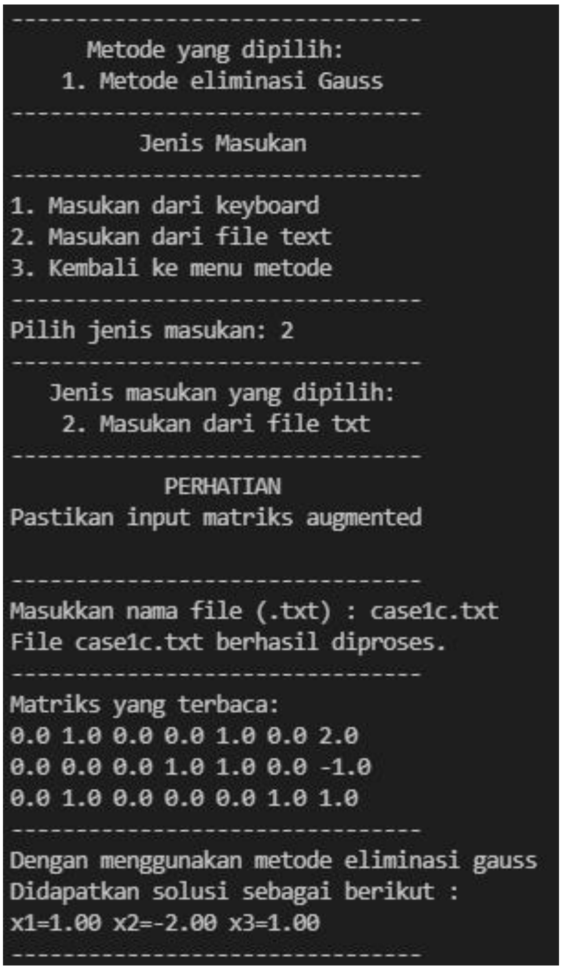
$x_3 = t$

$x_4 = s-1$

$x_5 = s$

-------------------------------- Menu yang dipilih: 2. Determinan -------------------------------- Metode -------------------------------- 1. Metode eliminasi Gauss 2. Metode ekspansi kofaktor 3. Kembali ke menu utama -------------------------------- Pilih metode yang digunakan: 1 -------------------------------- Metode yang dipilih: 1. Metode eliminasi Gauss -------------------------------- Jenis Masukan -------------------------------- 1. Masukan dari keyboard 2. Masukan dari file text 3. Kembali ke menu metode -------------------------------- Pilih jenis masukan: 2 -------------------------------- Jenis masukan yang dipilih: 2. Masukan dari file txt -------------------------------- PERHATIAN Pastikan input matriks persegi -------------------------------- Masukkan nama file (.txt) : case1b.txt File case1b.txt berhasil diproses. -------------------------------- Matriks yang terbaca: 1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0 1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0 2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0 -1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0 -------------------------------- Dengan metode eliminasi Gauss, didapatkan nilai determinan matriks tersebut adalah: 0.0 --------------------------------	Dengan menggunakan metode eliminasi gauss didapatkan determinan dari matriks tersebut adalah nol.

Persoalan	
c. $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$	
Hasil Eksekusi Program	**Hasil Analisis**
-------------------------------- Metode yang dipilih: 4. Kaidah Cramer -------------------------------- PERHATIAN Pastikan input matriks persegi -------------------------------- Jenis Masukan -------------------------------- 1. Masukan dari keyboard 2. Masukan dari file text 3. Kembali ke menu metode -------------------------------- Pilih jenis masukan: 2 -------------------------------- Jenis masukan yang dipilih: 2. Masukan dari file txt -------------------------------- PERHATIAN Pastikan input matriks augmented -------------------------------- Masukkan nama file (.txt) : case1c.txt File case1c.txt berhasil diproses. -------------------------------- Matriks yang terbaca: 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 -------------------------------- Kaidah Cramer tidak berlaku Matriks tidak persegi --------------------------------	Dengan menggunakan metode kaidah cramer solusi dari sistem persamaan linear tidak dapat diketahui karena matriks bukan merupakan matriks persegi. Oleh karena itu, akan dicoba dengan menggunakan metode eliminasi gauss.



```
--------------------------------
      Metode yang dipilih:
    1. Metode eliminasi Gauss
--------------------------------
          Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
            PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case1c.txt
File case1c.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0
0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=1.00 x2=-2.00 x3=1.00
--------------------------------
```

Pada test case ini dengan menggunakan metode eliminasi gauss didapatkan solusi dari sistem persamaan linear yaitu

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 1$$

Persoalan

d.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H adalah matriks Hilbert. Cobakan untuk n = 6 dan n = 10.

Hasil Eksekusi Program

```
--------------------------------
      Metode yang dipilih:
    1. Metode eliminasi Gauss
--------------------------------
          Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
            PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case1dn6.txt
File case1dn6.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
1.0 0.5 0.33333334 0.25 0.2 0.16666667 1.0
0.5 0.33333334 0.25 0.2 0.16666667 0.14285715 0.0
0.33333334 0.25 0.2 0.16666667 0.14285715 0.125 0.0
0.25 0.2 0.16666667 0.14285715 0.125 0.11111111 0.0
0.2 0.16666667 0.14285715 0.125 0.11111111 0.1 0.0
0.16666667 0.14285715 0.125 0.11111111 0.1 0.09090909 0.0
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=35.53 x2=-616.99 x3=3273.57 x4=-7338.16 x5=7317.64 x6=-2677.28
--------------------------------
```

Hasil Analisis

Untuk N = 6, dengan menggunakan metode eliminasi gauss didapatkan solusi dari sistem persamaan linear yaitu

x1 = 35.53

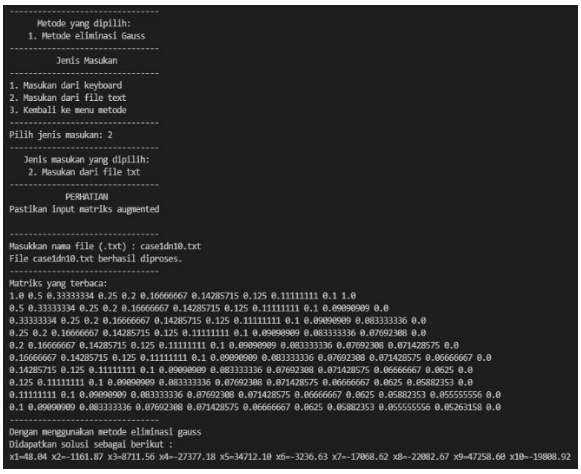
x2 = -616.99

x3 = 3273.57

x4 = -7338.16

x5 = 7317.64

x6 = -2677.28

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Untuk N = 10, dengan menggunakan metode eliminasi gauss didapatkan solusi dari sistem persamaan linear yaitu
x1 = 48.04
x2 = -1161.87
x3 = 8711.56
x4 = -27377.18
x5 = 34712.10
x6 = -3236.63
x7 = -17068.62
x8 = -22082.67
x9 = 47258.6
x10 = -19808.92
</td>
</tr>
</table>

4.2 Studi Kasus Nomor 2: SPL Berbentuk Matriks *Augmented*

Persoalan

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

<table>
<tr><th>Hasil Eksekusi Program</th><th>Hasil Analisis</th></tr>
<tr><td><pre>

     Metode yang dipilih:
   1. Metode eliminasi Gauss

          Jenis Masukan
----
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode

Pilih jenis masukan: 1

   Jenis masukan yang dipilih:
   1. Masukan dari keyboard

            PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

Masukkan jumlah baris: 4
Masukkan jumlah kolom: 5
Masukkan matriks:
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
Matriks berhasil terbaca.

Matriks yang terbaca:
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0

Dengan menggunakan metode eliminasi gauss
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=1.00s -1.00 x2=2.00t x3=t x4=s

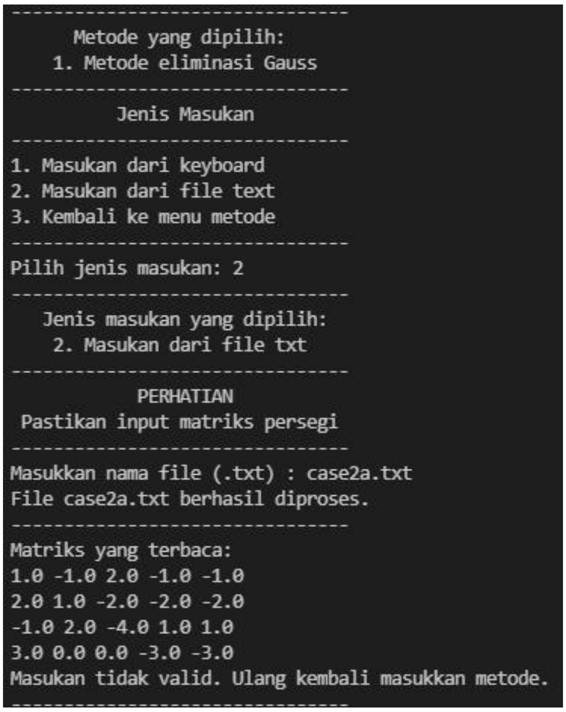
</pre></td><td>Dengan menggunakan metode eliminasi gauss diperoleh solusi dari sistem persamaan linear adalah

x1 = s-1

x2 = 2t

x3 = t

x4 = s</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

Metode yang dipilih:
1. Metode eliminasi Gauss

Jenis Masukan
----
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode

Pilih jenis masukan: 2

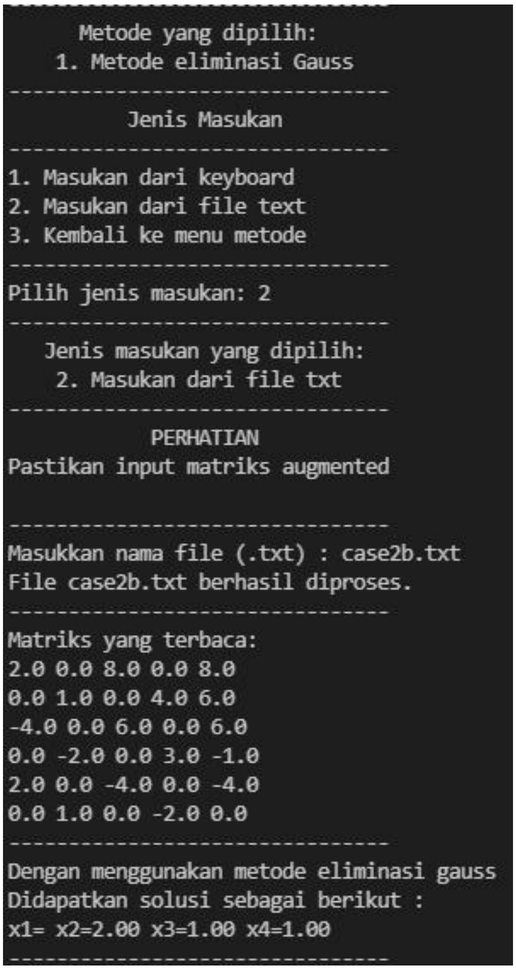
Jenis masukan yang dipilih:
2. Masukan dari file txt

PERHATIAN
Pastikan input matriks persegi

Masukkan nama file (.txt) : case2a.txt
File case2a.txt berhasil diproses.

Matriks yang terbaca:
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0
Masukan tidak valid. Ulang kembali masukkan metode.
--------------------------------</td>
<td>Pada saat mencari matriks balikan dengan metode eliminasi gauss, program mengembalikan pesan “Masukan tidak valid. Ulang kembali masukkan metode.”, hal ini terjadi karena matriks bukan merupakan matriks persegi sehingga program tidak bisa membuat sebuah matriks identitas yang memiliki ukuran baris dan kolom yang sama dengan matriks tersebut.</td>
</tr>
</table>

Persoalan
b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis
	Pada studi kasus ini kami menggunakan metode penyelesaian gauss. Berdasarkan hasil yang didapatkan terdapat sedikit bug, karena seharusnya x1 = 0. Sehingga solusi dari sistem persamaan linear adalah x1 = 0 x2 = 2 x3 = 1 x4 = 1

```
--------------------------------
     Metode yang dipilih:
   1. Metode eliminasi Gauss
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
           PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case2b.txt
File case2b.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
2.0 0.0 8.0 0.0 8.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
-4.0 0.0 6.0 0.0 6.0
0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0
2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0
0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1= x2=2.00 x3=1.00 x4=1.00
--------------------------------
```

4.3 Studi Kasus Nomor 3: SPL Kompleks

Persoalan

<table>
<tr><td colspan="2">

a. $$\begin{aligned} 8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

</td></tr>
<tr><td>Hasil Eksekusi Program</td><td>Hasil Analisis</td></tr>
<tr><td>

```
--------------------------------
     Metode yang dipilih:
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
           PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case3a.txt
File case3a.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
8.0 1.0 3.0 2.0 0.0
2.0 9.0 -1.0 -2.0 1.0
1.0 3.0 2.0 -1.0 2.0
1.0 0.0 6.0 4.0 3.0
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss jordan
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=-0.22 x2=0.18 x3=0.71 x4=-0.26
--------------------------------
```

</td><td>

Dengan menggunakan metode eliminasi gauss diperoleh solusi dari sistem persamaan linear yaitu

x1 = -0.22

x2 = 0.18

x3 = 0.71

x4 = -0.26

</td></tr>
</table>

Persoalan

<table>
<tr><td colspan="2">

b.

$$\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396 x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396 x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396 x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396 x_7 &= 7.04
\end{aligned}$$

</td></tr>
<tr><td>Hasil Eksekusi Program</td><td>Hasil Analisis</td></tr>
<tr><td>

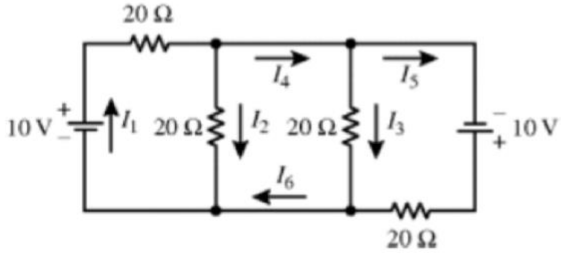
```
--------------------------------
      Metode yang dipilih:
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
--------------------------------
          Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
            PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented

--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case3b.txt
File case3b.txt berhasil diproses.
--------------------------------
Matriks yang terbaca:
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 0.0 0.04289 0.0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0.0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0.0 0.04289 0.0 0.0 3.81
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 18.0
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 12.0
1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 6.0
0.04289 0.75 0.61396 0.0 0.04289 0.75 0.0 0.0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0.0 0.0 0.75 0.04289 0.0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
--------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss jordan
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1= x2= x3= x4= x5= x6= x7= x8= x9=0.00 x10=
--------------------------------
```

</td><td>Seharusnya dengan menggunakan metode Gauss didapatkan bahwa “SPL tersebut tidak memiliki solusi”, tetapi terdapat bug pada kode kami sehingga solusi dari sistem persamaan linear tersebut adalah seperti yang terlihat pada gambar.</td></tr>
</table>

4.4 Studi Kasus Nomor 4: Arus yang Mengalir pada Rangkaian Listrik

Persoalan

4. Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik di bawah ini:

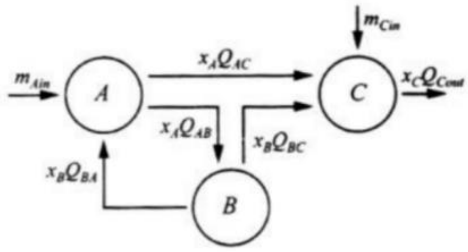


Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis
------------------------------- Pilih metode yang digunakan: 1 ------------------------------- Metode yang dipilih: 1. Metode eliminasi Gauss ------------------------------- Jenis Masukan ------------------------------- 1. Masukan dari keyboard 2. Masukan dari file text 3. Kembali ke menu metode ------------------------------- Pilih jenis masukan: 2 ------------------------------- Jenis masukan yang dipilih: 2. Masukan dari file txt ------------------------------- PERHATIAN Pastikan input matriks augmented ------------------------------- Masukkan nama file (.txt) : case4.txt File case4.txt berhasil diproses. ------------------------------- Matriks yang terbaca: 40.0 0.0 0.0 -20.0 0.0 0.0 10.0 -20.0 0.0 0.0 40.0 -20.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -20.0 40.0 0.0 10.0 -1.0 1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0 ------------------------------- Dengan menggunakan metode eliminasi gauss Didapatkan solusi sebagai berikut : x1=0.50 x2=0.00 x3=0.00 x4=0.50 x5=0.50 x6=0.50	Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, didapatkan nilai arus yang mengalir pada rangkaian listrik adalah sebagai berikut. $I_1 = 0.5$ A $I_2 = 0$ A $I_3 = 0$ A $I_4 = 0.5$ A $I_5 = 0.5$ A $I_6 = 0.5$ A

4.5 Studi Kasus Nomor 5: Sistem Reaktor

Persoalan

5. Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume Q dalam m^3/s dan input massa m_{in} dalam mg/s. Konservasi massa pada tiap inti reaktor adalah sebagai berikut:

$$\text{A:}\quad m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$

$$\text{B:}\quad Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$$

$$\text{C:}\quad m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_C = 0$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40$, $Q_{AC} = 80$, $Q_{BA} = 60$, $Q_{BC} = 20$ dan $Q_{Cout} = 150$ m^3/s dan $m_{Ain} = 1300$ dan $m_{Cin} = 200$ mg/s.

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

```
-------------------------------
     Metode yang dipilih:
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
-------------------------------
         Jenis Masukan
-------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
3. Kembali ke menu metode
-------------------------------
Pilih jenis masukan: 1
-------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    1. Masukan dari keyboard
-------------------------------
           PERHATIAN
Pastikan input matriks augmented
-------------------------------
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 4
Masukkan matriks:
-120 60 0 -1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
Matriks berhasil terbaca.
-------------------------------
Matriks yang terbaca:
-120.0 60.0 0.0 -1300.0
40.0 -80.0 0.0 0.0
80.0 20.0 -150.0 -200.0
-------------------------------
Dengan menggunakan metode eliminasi gauss jordan
Didapatkan solusi sebagai berikut :
x1=14.44 x2=7.22 x3=10.00
-------------------------------
```

A : -120 xA + 60 xB + 0 xC = -1300

B : 40 xA –80 xB + 0 xC = 0

C: 80 xA + 20 xB –150 xC = -200

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan didapatkan solusi dari sistem persamaan linear tersebut adalah x1 = 14.44 , x2 = 7.22, dan x3= 10.00. Sehingga dapat diketahui bahwa xA = 14.44 , xB = 7.22, dan xC = 10.00

4.6 Studi Kasus Nomor 6: Interpolasi

Persoalan

a. Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0. 148	0.248	0.370	0.518	0.697

Lakukan pengujian pada nilai-nilai default berikut:

$x = 0.2$ f(x) = ?
$x = 0.55$ f(x) = ?
$x = 0.85$ f(x) = ?
$x = 1.28$ f(x) = ?

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

Hasil Eksekusi Program

```
-------------------------------
      Menu yang dipilih:
    4. Interpolasi polinom
-------------------------------
         Jenis Masukan
-------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
-------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
-------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
-------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case6a.txt
File case6a.txt berhasil diproses.
Masukkan banyak nilai x yang ditaksir: 4
Masukkan nilai x:
0.2
0.55
0.85
1.28
-------------------------------
Persamaan hasil interpolasi:
p6(x) = -0.022976562500000446 + 0.24000000000000785x
+ 0.19739583333328906x^2 + 1.1228912042094418E-13x^3
+ 0.026041666666652459x^4 + 8.741380015666164E-14x^5 -
 2.0818187548076375E-14x^6
-------------------------------
Hasil penaksiran:
p6(0.200) = 0.03296093750000005
p6(0.550) = 0.17111865234375
p6(0.850) = 0.33723583984375
p6(1.280) = 0.6775418374999999
```

Hasil Analisis

Berdasarkan pasangan titik-titik yang terdapat pada tabel tersebut, setelah dieksekusi oleh program didapatkan hasil sebagai berikut:

Persamaan hasil interpolasi:

$$p_6(x) = -0.022976562500000446 + 0.24000000000000785x + 0.19739583333328906x^2 + 1.1228912042094418\text{E-}13x^3 + 0.02604166666652459x^4 + 8.741380015666164\text{E-}14x^5 - 2.0818187548076375\text{E-}14x^6$$

Hasil pengujian pada titik-titik default:

$$p_6(0.20) = 0.03296093750000005$$

$$p_6(0.55) = 0.17111865234375$$

$$p_6(0.85) = 0.33723583984375$$

$$p_6(1.28) = 0.6775418374999999$$

Persoalan

b. Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2021 (dibaca: 17 Juni 2021) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal(desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

a. 16/07/2021
b. 10/08/2021
c. 05/09/2021
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2021.

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

```
--------------------------------
      Menu yang dipilih:
    4. Interpolasi polinom
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case6b.txt
File case6b.txt berhasil diproses.
Masukkan banyak nilai x yang ditaksir: 4
Masukkan nilai x:
7.516
8.322
9.167
10.032
--------------------------------
Persamaan hasil interpolasi:
p9(x) = 7.18843034820168E12 - 9.34857269040122E12x +
 5.335014967217772E12x^2 - 1.7570533415324531E12x^3
+ 3.685975674434807E11x^4 - 5.113786485813262E10x^5
+ 4.696316966551331E9x^6 - 2.755025030644786 4E8x^7 +
 9373741.525538526x^8 - 141006.35265450666x^9
--------------------------------
Hasil penaksiran:
p9(7.516) = 53535.1953125
p9(8.322) = 36340.6953125
p9(9.167) = -667716.0234375
p9(10.032) = -2.5053166446875E8
```

Prediksi jumlah kasus baru Covid-19 berdasarkan hasil eksekusi pada program dengan menggunakan data dan memanfaatkan polinom interpolasi adalah sebagai berikut.

a. Pada tanggal 16/07/2021, tanggal(desimal) = 7,516 diprediksi terdapat 53.535 kasus baru
b. Pada tanggal 10/08/2021, tanggal(desimal) = 8,322 diprediksi terdapat 36.340 kasus baru
c. Pada tanggal 05/09/2021, tanggal(desimal) = 9,167 diprediksi tidak ada kasus baru (hasil negatif -667.716)
d. Pada tanggal 01/10/2021, tanggal(desimal) = 10,032 diprediksi tidak ada kasus baru (hasil negatif -250.535.347)

Persoalan

c. Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 – 0)/5 = 0.4$.

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

Hasil Eksekusi Program

```
      Menu yang dipilih:
    4. Interpolasi polinom
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case6c.txt
File case6c.txt berhasil diproses.
Masukkan banyak nilai x yang ditaksir: 10
Masukkan nilai x:
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
--------------------------------
Persamaan hasil interpolasi:
p9(x) = 0.0 + 3.7938581714531234x - 17.57158412467201
5x^2 + 50.23121833426613x^3 - 89.63062940694758x^4 +
102.57246838291294x^5 - 75.29895950202247x^6 + 34.256
76652741908x^7 - 8.785352477952896x^8 + 0.97009693824
36201x^9
--------------------------------
Hasil penaksiran:
p9(0.000) = 0.0
p9(0.200) = 0.3427695581999995
p9(0.400) = 0.41888423009999726
p9(0.600) = 0.4684314695999905
p9(0.800) = 0.5071579684999791
p9(1.000) = 0.5378828426999439
p9(1.200) = 0.5609246747998888
p9(1.400) = 0.5761871197996093
p9(1.600) = 0.5836856612992989
p9(1.800) = 0.583674720099139 7
```

Hasil Analisis

Menggunakan polinom interpolasi derajat 10 di dalam selang [0.2], fungsi

$$f(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}}{e^x+x}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$p_{10}(x) = 0.0 + 3.7938581714531234x - 17.571584124672015x^2 + 50.23121833426613x^3 - 89.63062940694758x^4 + 102.57246838291294x^5 - 75.29895950202247x^6 + 34.25676652741908x^7 - 8.785352477952896x^8$$

$$+ 0.9700969382436201x^9$$

Pembuktian dilakukan juga dengan menghitung menggunakan kalkulator, perhitungan adalah sebagai berikut.

	$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$ $a = f(0)$ $\rightarrow 0$ $b = f(0.2)$ $\rightarrow 0.342769558243$ $c = f(0.4)$ $\rightarrow 0.4188842301413$ $d = f(0.6)$ $\rightarrow 0.4684314696119$ $e = f(0.8)$ $\rightarrow 0.5071579685304$ $g = f(1)$ $\rightarrow 0.53788284274$ $h = f(1.2)$ $\rightarrow 0.5609246748147$ $i = f(1.4)$ $\rightarrow 0.5761871197616$ $j = f(1.6)$ $\rightarrow 0.5836856612869$ $k = f(1.8)$ $\rightarrow 0.5836747200777$

4.7 Studi Kasus Nomor 7: Regresi Linier Berganda

Persoalan

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data pada tabel di atas, kemudian estimasi nilai Nitrous Oxide apabila Humidity bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Dari data-data tersebut, apabila diterapkan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*, maka diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$20b_0 + 863.1b_1 + 1530.4b_2 + 587.84b_3 = 19.42$$

$$863.1b_0 + 54876.89b_1 + 67000.09b_2 + 25283.395b_3 = 779.477$$

$$1530.4b_0 + 67000.09b_1 + 117912.32b_2 + 44976.867b_3 = 1483.437$$

$$587.84b_0 + 25283.395b_1 + 44976.867b_2 + 17278.5086b_3 = 571.1219$$

Hasil Eksekusi Program	Hasil Analisis

Hasil Eksekusi Program

```
      Menu yang dipilih:
   5. Regresi linier berganda
--------------------------------
         Jenis Masukan
--------------------------------
1. Masukan dari keyboard
2. Masukan dari file text
--------------------------------
Pilih jenis masukan: 2
--------------------------------
   Jenis masukan yang dipilih:
    2. Masukan dari file txt
--------------------------------
Masukkan nama file (.txt) : case7.txt
File case7.txt berhasil diproses.
Masukkan nilai x1 : 50
Masukkan nilai x2 : 76
Masukkan nilai x3 : 29.3
Persamaan hasil regresi linear berganda:
y = -3.5077781408831465 - 0.0026249907458783875x1 + 7
.989410472218425E-4x2 + 0.1541550301982891x3
--------------------------------
Hasil taksiran regresi : 0.938434226221665
```

Hasil Analisis

Berdasarkan pasangan titik-titik yang terdapat pada tabel tersebut, setelah dieksekusi oleh program didapatkan hasil sebagai berikut:

Persamaan hasil regresi linear berganda:

$$y = -3.5077781408831465 - 0.0026249907458783875x_1 + 7.989410472218425E\text{-}4x_2 + 0.1541550301982891x_3$$

Hasil pengujian pada titik-titik default:

$$x_1 = 50$$

$$x_2 = 76$$

$$x_3 = 29.3$$

$$y = 0.938434226221665$$

BAB V

KESIMPULAN, SARAN, DAN REFLEKSI

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan implementasi program dan eksperimen yang telah dilakukan, didapatkan kesimpulan sebagai berikut.

1. Dibuat pustaka dalam Bahasa Java dan ditemukan solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer, menghitung determinan matriks dengan reduksi baris dan dengan ekspansi kofaktor, dan menghitung balikan matriks.
2. Dibuat program penyelesaian berbagai persoalan dalam bentuk SPL, persoalan interpolasi dan regresi linier, menghitung matriks balikan, dan menghitung determinan matriks dengan berbagai metode menggunkaan pustaka yang telah dibuat dalam Bahasa Java.

5.2 Saran

Berdasarkan implementasi program dan eksperimen yang telah dilakukan, adapun saran dari penulis sebagai berikut.

1. Memperbanyak sumber materi karena sulit mengimplemntasikan suatu program tanpa dasar teori yang baik.
2. Jika waktu pengerjaan masih panjang dan implementasi program sudah lengkap, bisa mencoba membuat GUI agar aplikasi lebih interaktif dan *user friendly* sehingga tugas besar ini tidak hanya berguna sebagai pemenuhan mata kuliah saja tetapi dapat dipublikasi dan digunakan oleh banyak pengguna yang membutuhkan.
3. Mencari cara yang lebih baik untuk berkolaborasi agar implementasi program lebih cepat selesai sehingga memiliki waktu untuk menyempurnakan program dengan mencari *bug* ataupun membuat GUI.
4. Pada saat membuat program sebaiknya sertakan juga komentar pada program dengan jelas, agar teman Anda dapat mengerti alur berpikir Anda. Sehingga apabila terdapat kesalahan atau *bug* pada program, teman Anda bisa membantu memperbaiki.

5.3 Refleksi

Dalam proses pengerjaan tugas besar ini tentu kami menemukan beberapa kendala, namun dengan kendala tersebut kami mencari solusi untuk menghadapinya. Adapun hal-hal yang menjadi perhatian bagi kami sebagai berikut.

1. Pada awalnya kami belum mengenal java sehingga perlu belajar terlebih dahulu paradigma pemrogramannya (OOP) dan sintaks java. Hal ini menyebabkan eksekusi untuk mengerjakan tubes sedikit lebih lambat, untuk menghadapinya, kami langsung mengeksekusi tugas ini dengan prinsip *trial and error* sambil membaca materi.
2. Terjadi beberapa kali *conflict* dalam *merge* ketika menggunakan GitHub. Untuk menghadapinya, kami meng-*undo commit* dan me-*review code* kembali, kemudian mengordinasikan ke teman terlebih dahulu sebelum *push* dan *pull*. Dampak yang diberikan menjadikan proses pengerjaan melambat karena perlu menyelesaikan *conflict* sebelum dapat melanjutkan pekerjaan. Selain itu, kami telah mengupayakan modular programming dengan memisah *class* pada tiap *file* sesuai fungsinya sehingga bisa membagi pekerjaan dan menghindari *conflict* karena bekerja pada *file* yang berbeda.
3. Dengan tubes ini kami menjadi lebih paham bagaimana cara kerja operasi matriks, baik operasi dasar maupun lanjutan. Operasi-operasi tersebut kemudian diaplikasikan pada interpolasi polinom dan regresi linier berganda.

REFERENSI

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/Tubes1-Algeo-2021.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Tubes1-Algeo-2020.pdf

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.htm#SlideKuliah