TP1 – Interpolation polynomiale

Exercice 1 Erreur dans l'interpolation de Lagrange.

Soit la fonction définie pour $x \in [0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

a) Déterminer (à la main) le polynôme d'interpolation de Lagrange P vérifiant :

$$P(0) = f(0), \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad P(1) = f(1).$$

b) À l'aide d'un script Python, calculer $P(x_j)$ pour $j \in \{0, \ldots, N\}$, où $x_j = j/N$ (on pourra prendre $N = 100$ par exemple). Comparer graphiquement ces valeurs aux valeurs exactes prises par f. Représenter graphiquement l'erreur.

c) Évaluer $f(x) - P(x)$ en utilisant un résultat du cours. Que constate-t-on ?

Exercice 2 Phénomène de Runge.

a) Écrire une fonction Python `diffdiv(xp,yp)` qui, pour des points d'interpolation donnés par `xp` et `yp`, calcule le vecteur `dd` qui contient les différences divisées

$$(\nabla^0[x_1], \nabla^1[x_1,x_2], \ldots, \nabla^{n-1}[x_1,x_2,\ldots,x_n]).$$

b) Écrire une fonction `myhorner(dd,xp,x)` qui, étant donnés les différences divisées `dd`, les points d'interpolation `xp` et le vecteur `x`, calcule par l'algorithme de Horner la valeur du polynôme d'interpolation `P` en chacune des coordonnées de `x`.

c) Écrire une fonction `comparaison(f,a,b,n)` qui, étant donnés la fonction `f`, l'intervalle $[a,b]$ d'interpolation et le nombre de points d'interpolation `n` :

— définit les points d'interpolation $(x_i^1)_{1\le i\le n}$ et $(x_i^2)_{1\le i\le n}$:

- points équirépartis : $x_i^1 = a + (i-1)\dfrac{b-a}{n-1}$ pour $1 \le i \le n$,
- et points de Tchebychev : $x_i^2 = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\left((2i-1)\dfrac{\pi}{2n}\right)$ pour $1 \le i \le n$;

— calcule les polynômes d'interpolation P_1 et P_2 de f aux points $(x_i^1)_{1\le i\le n}$ et $(x_i^2)_{1\le i\le n}$;

— représente sur un même graphique la fonction, les points d'interpolation et les polynômes d'interpolation.

d) Tester le programme pour la fonction $f(x) = sinc(2\pi x)$ sur $[-2,2]$, pour différentes valeurs de n. Comparer les résultats obtenus pour les points équirépartis et les points de Tchebychev.

e) Tester le programme pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[-5,5]$, en utilisant toujours les deux types de subdivisions (régulière et Tchebychev). Que se passe-t-il lorsque n augmente ?