Homework 1

1. **[QCCS 1.3.7]** 证明分别用代数方法和几何方法来计算 $2+2i$ 除以 $1-i$ 的结果是相同的。

2. **[QCCS 2.2.11]** 已知矩阵乘法的性质：
   - 转置：$(A\times B)^T = B^T \times A^T$
   - 共轭：$\overline{(A\times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$
   - 伴随：$A^\dagger = \overline{A^T}$

   求证 $(A\times B)^\dagger = B^\dagger \times A^\dagger$。

3. **[QCCS 2.4.4]** 内积空间是具有内积运算的向量空间。内积运算有性质如下：

   (1) 非退化性：

   $$A = 0 \ \ < A, A >= 0$$

   (2) 加法法则：

   $$< A+B, C >=< A, C > + < B, C >$$
   $$< C, A+B >=< C, A > + < C, B >$$

   (3) 标量乘法：

   $$< r\cdot A, B >= r\times < A, B >$$
   $$< A, r\cdot B >= r\times < A, B >$$

   (4) 斜对称性：

   $$< A, B >=< B, A >$$

对于任意两个矩阵 $A, B \in R^{n\times n}$，我们有内积 $< A, B >= Trace(A^T \times B)$，可以将实向量空间 $R^{n\times n}$ 映射到实内积空间。其中 Trace（迹运算）代表对矩阵的对角线元素求和，即：$Trace(C) = \sum_{i=0}^{n-1} C[i, i]$。请证明矩阵内积满足上述内积性质。

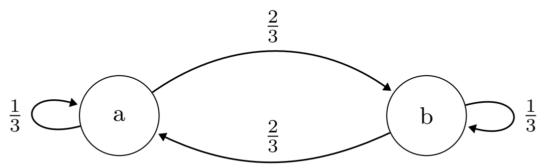
4. **[QCCS 2.6.2]** 证明 A 是厄尔米特矩阵当且仅当 $A^T = \overline{A}$。

5. **[QCCS 3.2.5]** 证明两个双随机矩阵的积仍然是一个双随机矩阵。

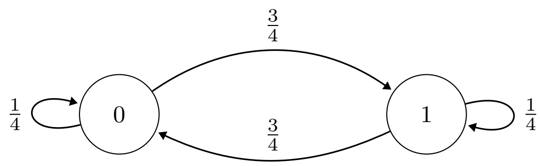
6. **[QCCS 3.3.3]** 假设 $\boldsymbol{x}$ 是列向量，$\boldsymbol{U}$ 是酉矩阵，中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{x}$。求证：列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 中每一项的模的平方之和相等.

7. **[QCCS 3.4.1]** 请根据子系统信息补全组合系统 $M \otimes N$ 的图。

- $\boldsymbol{M}$：



- $\boldsymbol{N}$：



- $\boldsymbol{M} \otimes \boldsymbol{N}$: