

Universidad de Los Andes

Trabajo de grado para obtener el título de Ingeniero Civil

Análisis de las funciones de atenuación en la teoría integral de elasticidad no local usando elementos finitos

David Arturo Rodriguez Herrera

Supervisado por:

PhD. Fernando Ramírez Rodríguez

Diciembre 2020

Índice

1. Introducción	3
2. Objetivos	3
3. Marco Teórico	4
3.1. Ecuación Constitutiva	4
3.2. Funciones de Atenuación y Difusión	5
3.3. Distancia de influencia Lr	6
3.4. Factor de corrección λ_0	7
3.5. Función de Atenuación Modificada (Función 4)	8
4. Metodología	10
4.1. Implementación Elasticidad No Local	10
4.1.1. Método FEM	10
4.1.2. Modificaciones No Locales	11
4.1.3. Estructura del Programa	13
4.2. Casos de Estudio	15
4.3. Validación	19
4.4. Variación de Parámetros	20
4.4.1. Variaciones Planteadas	20
5. Resultados	22
5.1. Caso de estudio 1: Placa a tensión	22
5.1.1. $x = 0.019$	22
5.1.2. $x = 2.519$	23
5.1.3. $y = 0.019$	24
5.1.4. $y = 2.519$	25
5.2. Caso de estudio 2: Barra a tensión	26
5.2.1. $y = 0.5$	26
6. Conclusiones	28
7. Anexos	30
Referencias	31

Índice de figuras

1. Función biexponencial centrada en 0,0	5
2. Función cónica centrada en 0,0	6
3. Función campana centrada en 0,0	6
4. Funciones de atenuación	8
5. Función de atenuación modificada	9
6. Cambios en la inclusión de elementos no locales	11
7. Estructura de guardado de archivos para las matrices	15
8. Diagrama de clases UML para el programa	15
9. Modelo de placa a tensión, tomado de Pisano <i>et al.</i> (2009)	16
10. Importar librerías y enmallado	16
11. Enmallado de 100 elementos para dominio cuadrado	17
12. Condiciones de borde integración y solución	17
13. Post proceso	18
14. Resultados gráficos para un enmallado de 100 elementos	18

15.	Modelo de barra unidimensional tomado de Pisano <i>et al.</i> (2009)	18
16.	Perfiles de ε_x en el caso de estudio 1	20
17.	Diagrama de flujo del proceso iterativo	21
18.	Perfiles de ε_x en $x = 0.019$	22
19.	Ubicación del perfil	22
20.	Perfiles de ε_x en $x = 2.519$	23
21.	Ubicación del perfil	23
22.	Perfiles de ε_x en $y = 0.019$	24
23.	Ubicación del perfil	24
24.	Perfiles de ε_x en $y = 2.519$	25
25.	Ubicación del perfil	25
26.	Perfiles de ε en $y = 0.5$	26
27.	Ubicación del perfil	26
28.	Gráficas de validación	30

Índice de Tablas

1.	Estructura del archivo de enmallado	14
----	---	----

Introducción

El término *Elasticidad No Local* fue acuñado por Kröner (1967), donde se expone que los materiales elásticos poseen fuerzas cohesivas de largo alcance. En sus principios esta teoría se derivó de la teoría *lattice atomic*

Posteriormente, los trabajos de Eringen (1987) reenfocaron la teoría en un marco termodinámico haciendo posible la obtención de ecuaciones constitutivas para diversas aplicaciones como ondas de superficie, análisis de grietas y *screw dislocation*

De estos trabajos se producen 2 teorías, la teoría no local integral y la teoría no local diferencial. Las cuales muestran efectos no locales fuertes (teoría integral) y débiles (teoría diferencial). En este estudio se trabajará con la teoría integral y por facilidad de lectura se le llamará teoría no local.

El factor común de estas dos teorías es la presencia de una *función de atenuación*, la cual se encarga de representar la interacción y el desvanecimiento de las fuerzas cohesivas de largo alcance. Esta función dependerá de dos parámetros, la longitud interna del material (l) y la distancia entre puntos de evaluación.

Gracias a los estudios de Polizzotto (2001) se conoce una formulación de la teoría no local para elementos finitos comúnmente llamada *NL-FEM* por sus siglas en inglés *Non Local Finite Element Method*. En esta formulación se divide en material en dos fases, una con aportes locales y otra con aportes no locales. En este modelo los aportes no locales se hacen a nivel de elemento, lo que quiere decir que para cada elemento existirá una relación de fuerzas cohesivas con los demás elementos adyacentes. Estos aportes se ponderan con un factor ζ

Debido al comportamiento del método de elementos finitos (FEM desde ahora) se podrían evaluar los aportes locales y no locales sobre un dominio de un elemento. Lo esperado es que sobre este dominio la ponderación de los aportes locales y no locales sean iguales a los aportes de la teoría local. Al momento de aplicar dicho dominio al método se evidencia que dicha ponderación no iguala a la teoría local. Esta diferencia se debe a que al momento de evaluar las matrices de elementos se realizan integrales usando el método de Gauss, lo cual obliga a tener una distancia física entre puntos de evaluación. Esto abre una serie de incógnitas sobre la formulación de las ecuaciones constitutivas en el método NL-FEM.

Objetivos

El equipo de trabajo propone que una solución a las inconsistencias presentadas en el capítulo 1 es la modificación de la función de atenuación. Por tal razón, el énfasis de este trabajo es proponer una función de atenuación con el objetivo de analizar la influencia que tienen las funciones de atenuación en la solución.

De tal manera, se desarrollará una implementación de NL-FEM, sobre la que se realizarán variaciones en las funciones de atenuación.

Concluyendo, los objetivos se pueden resumir en 3 interrogantes:

1. ¿Afectan las funciones de atenuación a la solución en NL-FEM?
2. ¿De qué manera afecta la función de atenuación a la solución?
3. ¿Pueden funciones de atenuación distintas usarse sin alterar la solución? de ser así, ¿Se puede aprovechar este comportamiento para solventar el planteamiento del capítulo 2

Marco Teórico

Ecuación Constitutiva

Las bases de la teoría no local las sentó Kröner (1967) en su artículo «*Elasticity theory of materials with long range cohesive forces*». En este, Kröner expone que la energía sobre un cristal cúbico primitivo se debe en parte a las fuerzas de corto alcance y en parte a las fuerzas de largo alcance, de tal manera, Kröner llega a la siguiente ecuación:

$$E = \frac{1}{2} \left[\int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) dv \right] + \frac{1}{2} \left[\int_V \int_{V'} C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv' dv \right] \quad (1)$$

Por ello, Kröner adopta el término No local para referirse a la interacción de fuerzas de largo alcance que se representan en el segundo término de la parte derecha de la ecuación.

Con ello, Kröner llegó a la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \int_{V'} C_{ijkl}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv' \quad (2)$$

En esta ecuación, el segundo término representa el aporte no local mientras que el primer término representa el aporte local clásico. Además, se introduce el tensor $C_{ijkl}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ llamado el tensor elástico material. Este tensor depende de la distancia entre el punto de interés y los puntos del dominio. En este punto, no existía una manera sencilla de calcular $C_{ijkl}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$.

No fue hasta 5 años después que Eringen y Edelen (1972) desarrollaron un modelo matemático donde se formula de manera completa la elasticidad no local. De este trabajo nace la teoría lineal en la que Eringen (1987) describe los dos modelos de elasticidad no local y sus aplicaciones. Los dos modelos son el modelo integral, el cual describe la interacción de fuerzas a larga distancia, y el modelo diferencial que describe interacciones a corta distancia (Polizzotto, 2001). Eringen muestra una gran variedad de problemas que se pueden solucionar con la teoría no local, entre los que destacan la propagación de ondas y el uso de esta teoría en el estudio de fractura y grietas. Esto se debe a que en las puntas de las grietas, la elasticidad local presenta singularidades, obteniendo así un esfuerzo infinito, mientras que en la teoría no local hay un aporte del volumen adyacente, lo cual evita tener esfuerzos infinitos (Eringen, 1987).

En el trabajo «Theory of Nonlocal Elasticity and Some Applications.», Eringen expone una manera de calcular el tensor elástico material.

$$C_{ijkl}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) C_{ijkl} \quad (3)$$

Donde se introduce α como la *función de atenuación* (este nombre será modificado posteriormente), por lo que Eringen llega a la siguiente ecuación constitutiva:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{V'} \alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv' \quad (4)$$

A partir de aquí, se resaltan los trabajos de Polizzotto (2001) donde reporta que la ecuación constitutiva se escribe con un factor ζ_1 y ζ_2 , donde $\zeta_1 + \zeta_2 = 1$ con el objetivo de representar el proceso de deformación de un sólido con dos fases. Una fase local (ζ_1) y una fase no local (ζ_2).

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \zeta_1 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) + \zeta_2 \int_{V'} A(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv' \quad (5)$$

Donde A también es llamada función de atenuación pero $A \neq \alpha$. Para efectos de este estudio se llamará a la función α como función de difusión y se llamará a la función A función de atenuación.

Por último, en la ecuación 4 se tiene dos parámetros locales (Modulo de Young y coeficiente de Poisson) y un parámetro no local (longitud interna l), sin embargo, en la ecuación 5 se cuenta con el parámetro adicional ζ_1 .

Funciones de Atenuación y Difusión

Las funciones de difusión que expone Eringen (1987) deben cumplir con unos requerimientos mínimos que son:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \alpha = 1 \quad (6)$$

$$\alpha(0) = \max(\alpha) \quad (7)$$

Adicionalmente, para que exista una única solución, $\alpha > 0$ (Altan, 1989).

Las funciones de atenuación que expone Polizzotto (2001) deben cumplir con unos requerimientos mínimos que son:

$$\lim_{l \rightarrow 0} A = 0 \quad (8)$$

$$\int_{v^\infty} A(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) dv' = 1 \quad (9)$$

A partir de las ecuaciones 4,5 Polizzotto (2001) establece la siguiente relación:

$$\alpha(\rho) = \zeta_1 A(\rho) + \zeta_1 \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}'} \quad (10)$$

Donde $\rho = \frac{r}{l}$ y $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. r es interpretado comúnmente como la distancia euclidiana.

Como lo enuncia Altan (1989), A no tiene que ser necesariamente positiva, por lo que se puede elegir de una gran gama de funciones. En este estudio se analizarán 4 funciones de atenuación y su influencia en los resultados obtenidos variando sus parámetros no locales. Las funciones de atenuación son de la forma:

$$A(\rho) = \lambda_0 f(\rho) \quad (11)$$

Donde λ_0 es un factor de corrección para obligar a cumplir con la condición de $\int_{v^\infty} A(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) dv' = 1$

En la literatura se exponen varias funciones de atenuación de las que resaltan:

Nota: el paréntesis $< f(x) >$ representa el operador de Macauley.

1. Función Biexponencial (Función 1)

$$A(\rho) = \lambda_0 e^{-\rho} \quad (12)$$

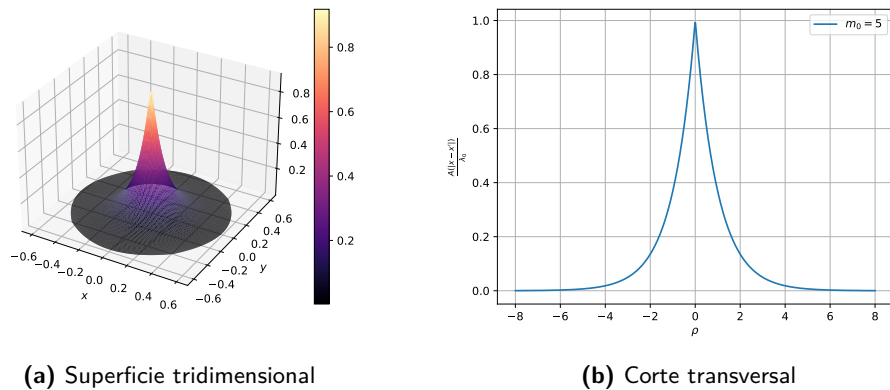


Figura 1. Función biexponencial centrada en 0,0

2. Función Lineal Cónica (Función 2)

$$A(\rho) = \lambda_0 \left\langle 1 - \frac{\rho}{(1 + m_0)} \right\rangle \quad (13)$$

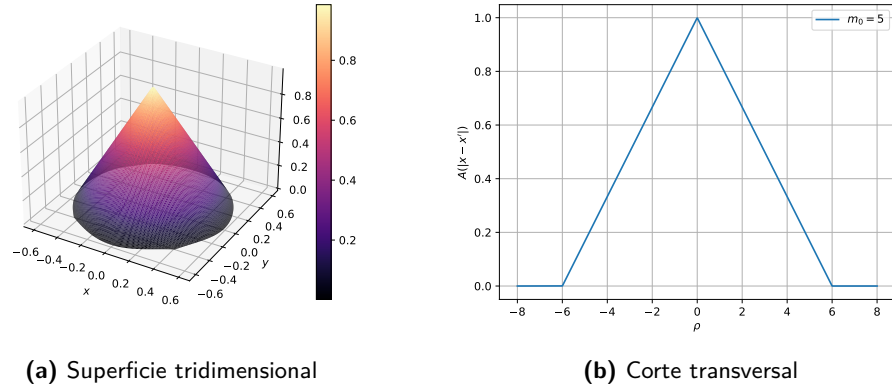


Figura 2. Función cónica centrada en 0,0

3. Función Cuadrática Campana (Función 3)

$$A(\rho) = \lambda_0 \left\langle 1 - \frac{\rho^2}{(1 + m_0)^2} \right\rangle \quad (14)$$

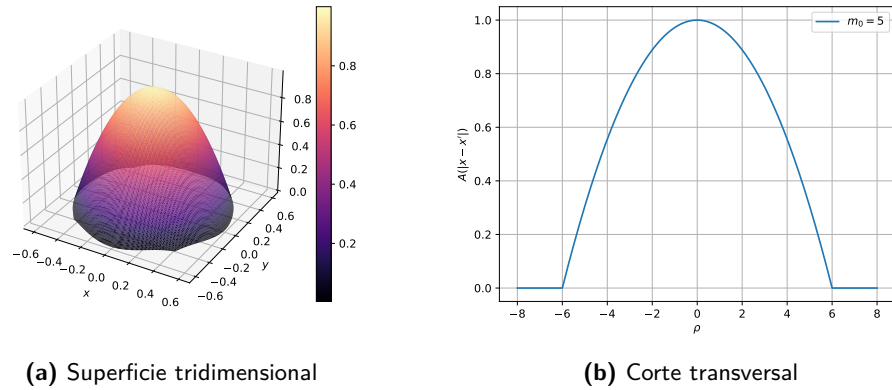


Figura 3. Función campana centrada en 0,0

Cada una de estas funciones tiene un identificador (Función i) que será usado posteriormente en el desarrollo de los programas.

Distancia de influencia Lr

Si se observa el comportamiento de la figura 1b, se puede apreciar que el valor de la función de atenuación es muy cercana a 0 cuando $|\rho| > 6$. Es por eso que Polizzotto (2001) define que los efectos no locales solamente se deben tener en cuenta a una distancia máxima $Lr = 6l$. Esta afirmación hace que al momento de enmallar un dominio de elementos finitos deba tenerse en cuenta una propiedad material

(l) para poder modelar el problema no local de manera correcta. Para efectos de este estudio se tomará $Lr = 6l$.

Polizzotto (2001) propone un parámetro $m_0 \geq 1$ donde $Lr = (1 + m_0)l$. En las figuras 1b y 1b se usa dicho parámetro. El parámetro obliga a que $A(\rho) = 0$ cuando $|\rho| > (1 + m_0)$. Este comportamiento hace que las funciones de atenuación sean comparables entre sí.

Factor de corrección λ_0

Una vez definidas las funciones de atenuación, basta con hallar el factor λ_0 para que se cumpla la condición de la ecuación 9.

Dado que λ_0 es constante, el proceso para encontrar dicho valor se simplifica. De tal manera, se encuentra el valor de la integral en un dominio circular infinito. Se toma como punto base el origen, ya que, el valor de la integral no depende de la posición base sino de los puntos adyacentes a esta base.

$$t \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r A(r/l) dr d\theta = 1 \quad (15)$$

Donde r es la distancia euclidiana al origen, que en coordenadas polares puede escribirse como el radio.

Note que esta integral se define como integral de área, sin embargo, la integral de la ecuación 9 es una integral volumétrica. Se asume un grosor constante por lo que basta con multiplicar por t .

Usando la función 1 como referencia se tiene:

$$t\lambda_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r/l} dr d\theta = 1 \quad (16)$$

$$2\pi\lambda_0 t \int_0^\infty r e^{-r/l} dr = 1 \quad (17)$$

$$2\pi\lambda_0 t \int_0^\infty r e^{-r/l} dr = 1 \quad (18)$$

$$2\pi\lambda_0 t \left(\lim_{r \rightarrow \infty} -e^{-r/l} l^2 - l r e^{-r/l} + l^2 \right) = 1 \quad (19)$$

$$2\pi\lambda_0 l^2 t = 1 \quad (20)$$

Solucionando para λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi l^2 t} \quad (21)$$

Para las funciones 2 y 3 se debe modificar el proceso así:

$$t \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r A(r/l) dr d\theta = t \int_0^{2\pi} \int_0^{Lr} r A(r/l) dr d\theta + t \int_0^{2\pi} \int_{Lr}^\infty r A(r/l) dr d\theta \quad (22)$$

Debido a la definición de la función 2 y 3 es evidente que:

$$t \int_0^{2\pi} \int_{Lr}^\infty r A(r/l) dr d\theta = 0 \quad (23)$$

Por lo que el proceso para la función 2 y 3 se simplifica a:

$$t \int_0^{2\pi} \int_0^{Lr} r A(r/l) dr d\theta = 1 \quad (24)$$

Al realizar esta simplificación las funciones de atenuación pierden la propiedad del operador de Macauley, ya que, en este intervalo son positivas.

Resolviendo para ambos casos se obtuvo:

Para la función 2:

$$\lambda_0 = \frac{3}{2\pi L r^2} \quad (25)$$

Para la función 3:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi L r^2} \quad (26)$$

Para comprobar que el proceso se realizó correctamente, se realizó la integración numérica de las funciones de atenuación en un dominio circular. En este ensayo se cambiaron los parámetros l y m_0 . Estos resultados se exponen en la sección 5.

En este punto, las funciones de atenuación están completamente definidas. En la figura 4 se evidencia el comportamiento de dichas funciones cuando varía el parámetro l .

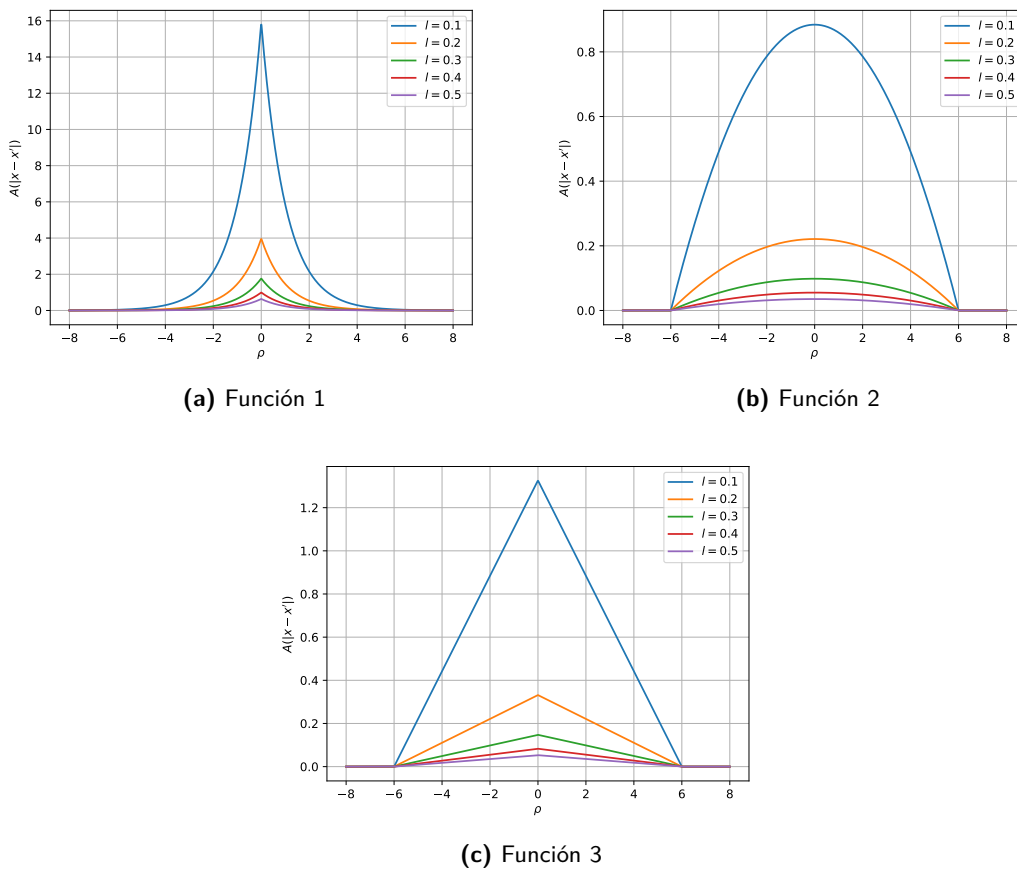


Figura 4. Funciones de atenuación

Función de Atenuación Modificada (Función 4)

En el artículo «Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions» se expone una metodología basada en el método de elementos finitos, el cual adopta el nombre de NL-FEM donde:

$$\hat{K}U = F \quad (27)$$

Donde \hat{K}

$$\hat{K} = \sum_{n=1}^N \left[\zeta_1 K_n^l + \zeta_2 \sum_{m=1}^M K_{nm}^{nl} \right] \quad (28)$$

Esto sugiere que para cada elemento n existe un número M de elementos no locales m que se encuentran a una distancia de influencia Lr . Además, cuando $n = m$, K_{nn}^{nl} se llama matriz de rigidez directa. Siguiendo la ecuación 4 es intuitivo pensar que la matriz de rigidez directa debe ser igual a la matriz de rigidez local, sin embargo, a nivel de elemento no se da esta igualdad, ya que en la integración numérica si existe una distancia entre los puntos de integración. Este efecto hace que:

$$\zeta_1 K_n^l + \zeta_2 K_{nn}^{nl} \neq K_n^l \quad (29)$$

Por ello, se definió una función de atenuación la cual cumpla que $A(0) = 0$ por lo que se optó por:

$$A(\rho) = \lambda_0 \rho e^{-\rho} \quad (30)$$

Esta función tiene el comportamiento mostrado en la figura 5.

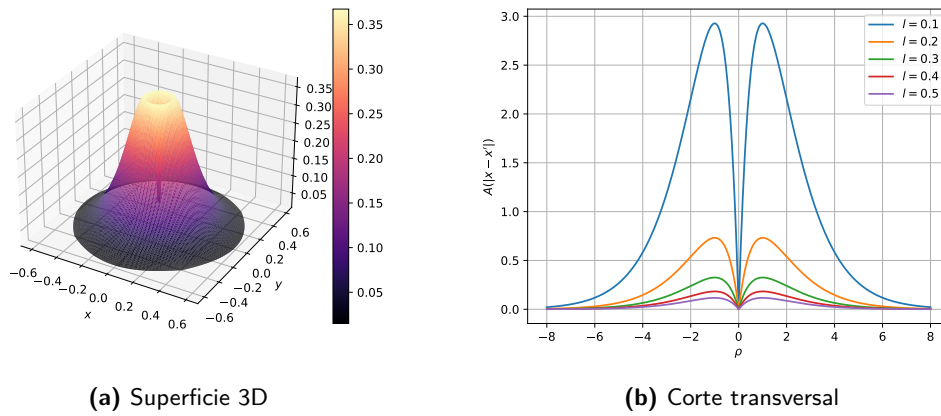


Figura 5. Función de atenuación modificada

Adicionalmente se encontró que para que se cumpla la ecuación 9 se necesita:

$$\lambda_0 = \frac{1}{4\pi l^2} \quad (31)$$

Metodología

En orden de cumplir con los objetivos propuestos en el capítulo 2, se plantea una implementación de NL-FEM. Para ello, se parte de la metodología propuesta en «*Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions*» (Pisano *et al.* 2009) que sigue la ecuación constitutiva planteada en el capítulo 3.

Implementación Elasticidad No Local

Para llegar a la implementación se parte de la implementación clásica (local) de FEM. Para efectos de este estudio se asumen esfuerzos planos, por lo que:

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (32a)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (32b)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (32c)$$

Lo cual permite expresar el tensor de rigidez C como:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Donde:

$$C_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (34a)$$

$$C_{12} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (34b)$$

$$C_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (34c)$$

Método FEM

Se parte de la metodología planteada en Reddy (2005) donde se divide el método en 6 pasos:

1. Enmallado:

Se divide el dominio en elementos y se enumeran sus nodos con grados de libertad. Para el caso de elasticidad, se deben tener dos grados de libertad por nodo. El primero pertenece al desplazamiento en x , comúnmente llamado U y el segundo pertenece al desplazamiento en y , comúnmente llamado V . El número de nodos por elemento depende del orden de aproximación y de la geometría del elemento. Para este estudio se usarán elementos de cuatro lados con 8 nodos por elemento, comúnmente llamados *Serendipity Elements* y elementos triangulares con 6 nodos.

2. Ecuaciones a nivel de elemento

Mediante un modelo de elementos finitos (al que se puede llegar con la forma débil de la ecuación diferencial) se realiza el proceso de integración de las matrices de coeficientes, fuerzas nodales y flujos por elemento. Generalmente la integración se realiza usando la cuadratura de Gauss-Legendre.

3. Ensamblaje

Se obliga a la solución a ser continua en todo el dominio y se asegura el equilibrio de flujos en los nodos. Esto genera un sistema de ecuaciones el cual se ensambla mediante las matrices y vectores encontrados en el paso anterior.

4. Imposición de condiciones de borde

Se imponen condiciones de borde operando matricialmente los valores conocidos para la solución o asignando directamente el flujo conocido al sistema de ecuaciones.

5. Solución

Se soluciona el sistema de ecuaciones encontrando la solución en cada grado de libertad.

6. Post - Proceso

Se calcula el gradiente de la solución (variables secundarias) y se reportan los resultados de manera gráfica.

Modificaciones No Locales

Para la inclusión de la no localidad se deben modificar los 3 primeros pasos del método clásico. Estos cambios se deben a la inclusión de una integral convolutiva en la ecuación constitutiva y a la elección de la función de atenuación.

1. Enmallado

Uno de los cambios más relevantes en el proceso de NL-FEM es la inclusión de los elementos no locales por cada elemento local. Para ello, la literatura se propone encontrar los elementos cuyos centroides se encuentren dentro de una distancia de influencia L_r (Zingales *et al.* 2011), sin embargo, Ramirez (2020) sugiere que el proceso de selección de elementos no locales debe tener en cuenta la distancia adicional que se tenga al punto más alejado del elemento. En la figura 6 se muestran gráficamente ambos procesos. Se evalúa el elemento 63. El círculo azul representa un radio de $L_r = 6 * l$ con $l = 0.1$ desde el centroide del elemento.

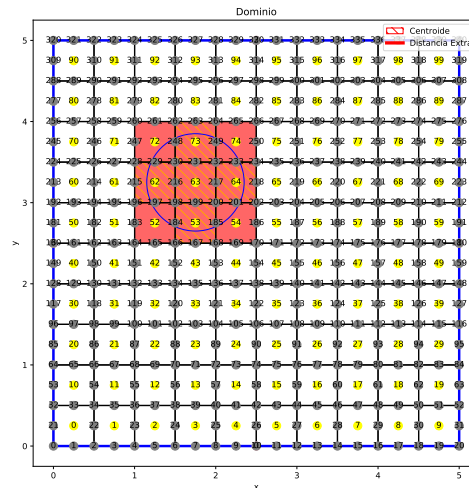


Figura 6. Cambios en la inclusión de elementos no locales

Dadas las propiedades de las funciones de atenuación descritas en el capítulo 3, se puede asegurar que si se toma una distancia $L_r \rightarrow \infty$ el resultado no cambia de manera significativa. En caso de que no se disponga de un algoritmo que reconozca los elementos no locales, esto simplifica el proceso de enmallado. En caso de que se tenga $L_r \rightarrow \infty$ el costo computacional aumenta severamente, por lo que se aconseja siempre identificar los elementos no locales.

Para este estudio se tomará L_r variable, pero nunca menor de $6l$ como se expuso en el capítulo 3.

En conclusión, en un dominio de N elementos se conoce que: Para cada elemento n_i existe un número M de elementos no locales m_j . M varía para cada elemento pues depende de su posición en el dominio.

2. Ecuaciones a nivel de elemento

Como se expuso en el capítulo 3, se debe realizar una integral convolutiva en el proceso de integración. Por lo tanto, por cada elemento se obtiene una matriz local y un número específico de matrices no locales.

La matriz local se obtiene usando la teoría clásica (local) de elasticidad.

Las matrices no locales se encuentran usando el modelo propuesto por Pisano *et al.* (2009) donde:

$$\mathbf{k}_{nm}^{nloc} = \int_{V_n} \int_{V_m} A(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/l) \mathbf{B}_n^T(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) dV' dV \quad (35)$$

Donde:

n se refiere al elemento local.

m se refiere al elemento no local.

A es la función de atenuación.

\mathbf{B}_n es la matriz de derivadas parciales de las funciones de forma.

\mathbf{D} tensor de rigidez.

\mathbf{x} representa un punto del elemento local n .

\mathbf{x}' representa un punto del elemento no local m .

En la terminología de Reddy (2005) se puede reescribir esta ecuación a nivel de elemento separando los desplazamientos en x y y en submatrices de la matriz del elemento. Como ejemplo se muestra la matriz \mathbf{K}_{uu} :

$$\mathbf{U} \mathbf{U}_{nm}^{nloc} [i, j] = t^2 \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_m} A(\rho) \left[C_{11} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial y} \right] d\Omega_m d\Omega_n \quad (36)$$

Nótese que a la ecuación 35 es una integral volumétrica, mientras que la ecuación 36 corresponde a una integral de área, por tal razón, se debe multiplicar por el grosor al cuadrado.

Donde:

ρ es la relación $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/l$.

ψ_i es la i -ésima función de forma.

C_{11}, C_{66} son los componentes del tensor elástico para esfuerzos planos.

El super índice l significa que la función pertenece al elemento local.

El super índice nl significa que la función pertenece al elemento no local.

Las funciones están evaluadas en los puntos correspondientes a su elemento, es decir, la función ψ_i^{nl} está evaluada en los puntos x_{nl}, y_{nl} .

En los anexos 37 se encuentra el desarrollo de las otras submatrices.

3. Ensamblaje

Dado que los elementos no locales tienen aportaciones a la matriz general del sistema, el ensamblaje de dichos elementos debe tenerse en cuenta usando los grados de libertad de los elementos correspondientes. Por ejemplo, si se evalúa la matriz no local del elemento local 3 con respecto al elemento 4, en la matriz del sistema se debe incluir este aporte en las filas que correspondan a los grados de libertad del elemento 3 con las columnas que representen los grados de libertad del elemento 4. Esta generalización hace posible que se puedan tener combinación de diferentes tipos de elementos (como elementos triangulares y rectangulares).

Estructura del Programa

La implementación computacional propuesta consta de 2 módulos, el módulo procesador y el módulo integrador. La implementación completa se encuentra en [GitHub](#).

1. Módulo Procesador

El módulo procesador está escrito en Python y requiere de las librerías *triangle*, *NumPy* y *Matplotlib*. Este módulo se puede encargar de la solución completa de un problema de NL-FEM. Para el enmallado se usa el *wrapper* de *triangle* (Shewchuk, 1996), que lleva el mismo nombre. Fue desarrollado por [Dzhelil Rufat](#) y consta de una serie de funciones que realiza triangulaciones *Delauney*. El enmallado por *triangle* no suele ser uniforme, ya que en el proceso los elementos son refinados para obligar a que los ángulos de los triángulos no sean menores a 35 grados. Adicionalmente [Ramirez \(2020\)](#) desarrolló un algoritmo para realizar el proceso de enmallado en dominios rectangulares identificando elementos no locales a una distancia Lr . Esto facilitó el proceso de enmallado para los casos de estudio propuestos.

Para las ecuaciones a nivel de elemento se usa la ecuación 36 y sus variaciones en el anexo 37.

Para la integración se usa la cuadratura de Gauss Legendre. Se puede integrar con cualquier número de puntos. Los puntos y pesos se extraen de la librería *NumPy*.

Para el ensamblaje de matrices y vectores se usan las propiedades de los arreglos de *NumPy*.

Para las condiciones de borde se crearon métodos auxiliares que permiten generar las condiciones en los nodos que pertenezcan a segmentos y nodos que se encuentren en puntos (coordenadas) específicos. Los segmentos pueden ser definidos por el usuario o ser generados automáticamente por el programa. Esto se realizó ya que las condiciones de borde generalmente se asignan en los contornos del dominio.

Las condiciones de borde se toman como listas nativas de Python, lo que permite que se puedan manejar de manera sencilla. Un ejemplo es tener condiciones de borde en dos segmentos distintos. Para poder concatenarlas y que el programa reconozca y aplique ambas condiciones adecuadamente basta con usar el símbolo $+$ entre ambas condiciones de borde y automáticamente el programa será capaz de aplicarlas correctamente. Este proceso de concatenación de condiciones de borde se evidencia en la figura 10. En el caso en el que se aplique una condición de borde natural y esencial al mismo nodo el programa reconocerá la condición de borde esencial.

Para aplicar las condiciones de borde se hace uso del método matricial que cambia las filas y columnas de los grados de libertad con condición de borde a 0 exceptuando la diagonal. En caso de que se apliquen dos condiciones de borde distintas al mismo nodo, el programa reconocerá la segunda condición de borde como la correcta.

Para la solución del sistema de ecuaciones se usa la librería *NumPy* con la función *numpy.linalg.solve*. Esta función usa la librería LAPACK que corre en FORTRAN.

El componente gráfico usa la librería *Matplotlib*. Se pueden graficar las soluciones para las variables principales, así como para las variables secundarias. Para encontrar perfiles en la solución se creó un algoritmo que extrae el perfil interpolando la solución con las funciones de forma. Dado que las funciones de forma se evalúan en el dominio natural, se implementó un algoritmo de mapeo inverso usando el método de Newton.

2. Módulo Integrador

Debido a que Python es un lenguaje interpretado (Kuhlman, 2011), se conoce con anterioridad que el lenguaje será lento para procesos iterativos complejos. Para el caso de NL-FEM el paso más costoso computacionalmente es la integración de las matrices no locales, por tal razón, se decidió realizar un segundo módulo que se encargue únicamente de realizar el proceso de integración. Para ello se usó C++ que es un lenguaje compilado. En este programa se siguen exactamente los mismos paradigmas que se introdujeron en el módulo procesador con la única diferencia que al ser un programa ejecutable, se deben proporcionar los parámetros por medio de la consola en lugar de modificarlos en el código fuente.

Gracias al módulo *subprocess* de Python se pudo automatizar el proceso de llamar al programa de C++ desde Python, es decir, el usuario no debe salir de Python para realizar el proceso de integración.

El módulo integrador usa la cuadratura de Gauss Legendre y obtiene los puntos de una implementación propia adaptada de [Rosseta Code](#).

El módulo integrador recibe como parámetros:

- a) Ruta del archivo de enmallado (*string*)
- b) Numero de puntos de Gauss para integrar (*int*)
- c) Módulo de Young (*double*)
- d) Coeficiente de Poisson (*double*)
- e) Grosor (*double*)
- f) longitud interna (*double*)
- g) Nombre de la carpeta donde se quieren guardar las matrices (*string*)
- h) Función de atenuación a usar siguiendo los lineamientos del capítulo 3 (*int*)

3. Manejo de datos y recurrencia

Para garantizar la comunicación correcta entre los dos módulos se manejan archivos que guardan la información sobre el enmallado y la integración.

- a) Archivo enmallado: Se parte como base del archivo de enmallado del programa de Ramirez (2020) que sigue la estructura de la tabla 1. Este archivo es usado por el módulo procesador y el módulo integrador.

Al ser el archivo principal, lo ideal es generar los archivos de enmallado previamente a realizar el proceso NL-FEM. Por ello, con el enmallado interno de *triangle* se provee una funcionalidad que exporta el archivo de enmallado con el objetivo que el módulo integrador funcione incluso si no se usa un enmallado previamente definido.

- b) Archivos integración: Dado que generar las matrices de los elementos es un proceso computacionalmente costoso, el módulo integrador generará una serie de carpetas que guardan la información de las matrices. Para cada elemento del enmallado se guarda un archivo *KL.i.csv* que contiene la matriz local del elemento *i*. Para cada elemento del enmallado se guarda un archivo llamado *KNLS.csv* donde cada fila del archivo corresponde a la *j*-ésima matriz no local. Estas matrices se aplanan por columnas y filas por lo que al cargarlas se deben transponer. La estructura del directorio de salida se encuentra en la figura 7.

Tabla 1. Estructura del archivo de enmallado

Linea 1	#GDL	#E
GDL_i	X	Y
E_i	GDL_1	GDL_j
$ENL_{i,j}$	#ENL	E_j^{nl}

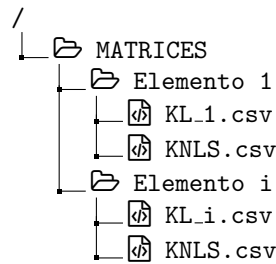


Figura 7. Estructura de guardado de archivos para las matrices

4. Estructura final

El programa completo se orientó a objetos y su estructura se muestra en el diagrama UML de la figura 8.

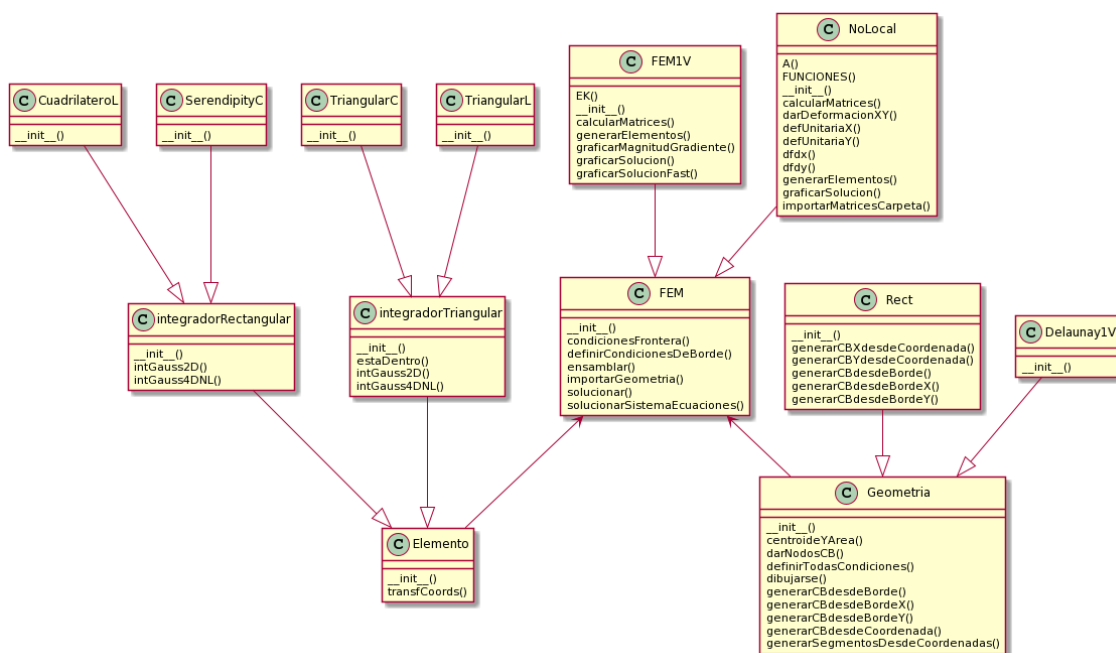


Figura 8. Diagrama de clases UML para el programa

Casos de Estudio

Para poder evaluar el funcionamiento del programa y poder validar los resultados se parte de los casos de estudio propuestos por Pisano *et al.* (2009).

1. Placa a tensión:

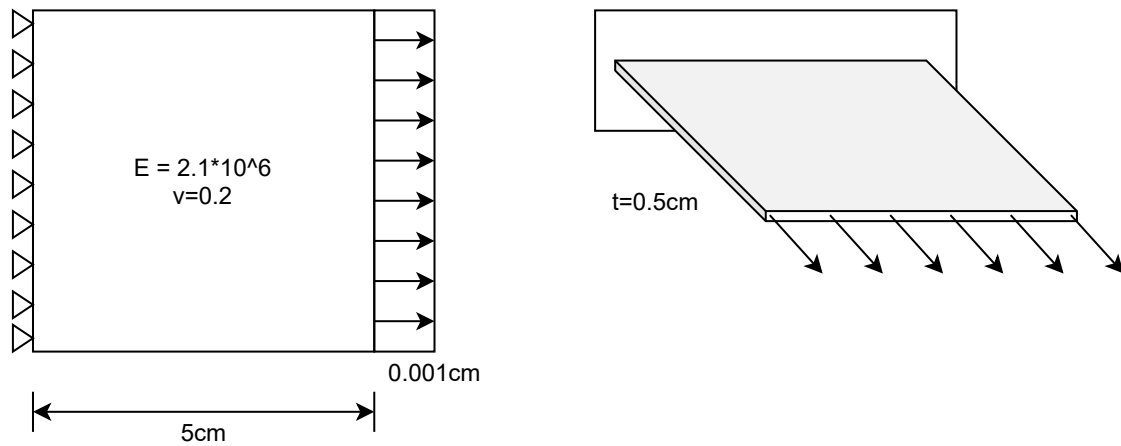


Figura 9. Modelo de placa a tensión, tomado de Pisano *et al.* (2009)

Se tienen las siguientes características:

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$u_0 = 0.001 \text{ cm}$$

$$E = 2.1 * 10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

Bajo las siguientes condiciones de borde:

$$U = 0, V = 0 \text{ en } x = 0$$

$$U = u_0 \text{ en } x = a$$

Usando el programa, este problema puede modelarse así:

```

1 import NLFEM
2 from NLFEM.Mesh import Rect
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 RUTA_M = 'MATRICES'
6
7 E = 2.1*10**6
8 V = 0.2
9 u = 0.001
10 a = 5 #Base del rectángulo
11 t = 0.5 #Grosor
12 l = 0.1
13
14 GEOMETRIA = Rect.Rect("enmallado.txt")
15 GEOMETRIA.generarSegmentosDesdeCoordenadas([0,0],[a,0])
16 GEOMETRIA.generarSegmentosDesdeCoordenadas([a,0],[a,a])
17 GEOMETRIA.generarSegmentosDesdeCoordenadas([a,a],[0,a])
18 GEOMETRIA.generarSegmentosDesdeCoordenadas([0,a],[0,0])
19 GEOMETRIA.dibujarse()

```

Figura 10. Importar librerías y enmallado

Se importa la librería NLFEM que contiene el programa de NL-FEM completo. Posteriormente, Se definen las variables iniciales del problema, por ejemplo, el módulo de Young, grosor, etc. Se carga la geometría del dominio mediante el archivo *enmallado.txt*, el cual sigue los lineamientos propuestos en la tabla 1. Por último, se definen los segmentos que serán de gran ayuda para imponer condiciones de borde. Cada segmento va de un punto inicial a un punto final. El programa encontrará el nodo del enmallado más cercano a las coordenadas pasadas por parámetro. Finalmente, en la línea 19 se grafica el enmallado final (la manera en cómo el programa está entendiendo el enmallado)

Para este caso, se trabaja con un enmallado de 100 elementos. El resultado obtenido se aprecia en la figura 11.

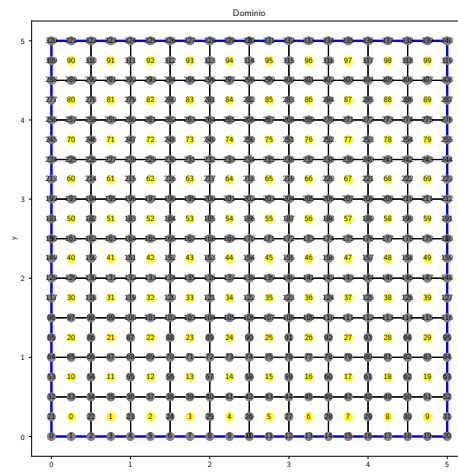


Figura 11. Enmallado de 100 elementos para dominio cuadrado

```

20 condiciones_borde_escenciales = GEOMETRIA.generarCBdesdeBorde(3,
  [0,0])+GEOMETRIA.generarCBdesdeBordeX(1,u)
21
22 Objeto_FEM = NLFEM.NoLocal(GEOMETRIA)
23 Objeto_FEM.z1 = 0.5
24 Objeto_FEM.moduloIntegrador("enmallado.txt",3,E,V,t,l,RUTA_M,tfa=1)
25 Objeto_FEM.generarElementos()
26 Objeto_FEM.importarMatricesCarpeta(RUTA_M)
27 Objeto_FEM.definirCondicionesDeBorde(condiciones_borde_escenciales)
28 Objeto_FEM.ensamblar()
29 Objeto_FEM.condicionesFrontera()
30 Objeto_FEM.solucionarSistemaEcuaciones()

```

Figura 12. Condiciones de borde integración y solución

En la línea 20 se nota el proceso de concatenado de las condiciones de borde, las cuales se generan mediante las funciones de la clase *Geometria*. Para este caso, se definen condiciones de borde en los segmentos 3 y 0. Los segmentos pueden observarse en la figura 11 con color azul. Los bordes se enumeran en el orden en que fueron agregados, lo cual se definió en las líneas 15-18 de la figura 10.

Se crea un objeto de la clase *NLFEM* que guarda toda la información necesaria para realizar el

proceso. Esta clase toma por parámetro la geometría. En la línea 23 se define el valor para ζ_1 que el programa usará para el ensamblaje de matrices.

En la línea 24 se llama al módulo integrador. En la carpeta de la variable *RUTA_M* se generarán los archivos de la integración que siguen el formato propuesto en la figura 7. Los parámetros del módulo integrador son los definidos previamente. Esta función se encarga de correr el archivo *index.exe* que contiene el código de C++ del módulo integrador. Cabe resaltar que este comportamiento solo será válido para Windows. Para otros sistemas operativos se deberá cambiar el archivo *index.exe* por el archivo compilado desde el código fuente desde C++.

En las líneas siguientes se ejecutan cada uno de los pasos para NLFEM mencionados anteriormente. Esto resuelve el problema de NL-FEM en el dominio.

```

31 import matplotlib.pyplot as plt
32 Objeto_FEM.defUnitariaX([10,10])
33 plt.show()
34 Objeto_FEM.perfily(0.019,0.00016,0.0004,0,a,acum=True,label='No
Local')
35 plt.show()

```

Figura 13. Post proceso

El programa permite realizar gráficas de resultados, en la figura 13 se muestran algunos de estas funciones. Las gráficas de resultados se muestran en la figura 14.

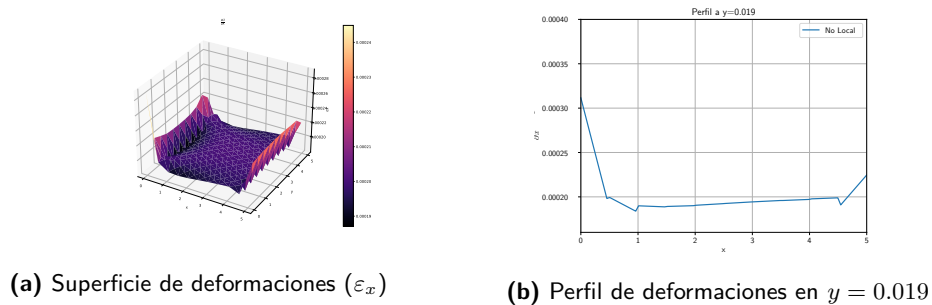


Figura 14. Resultados gráficos para un enmallado de 100 elementos

2. Barra a tensión:

La barra a tensión se puede modelar como se muestra en la figura 15.

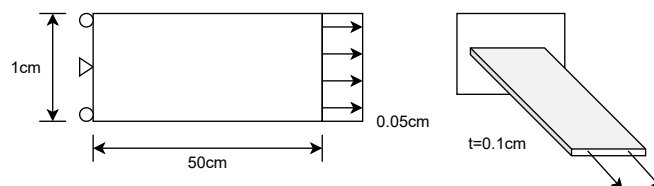


Figura 15. Modelo de barra unidimensional tomado de Pisano *et al.* (2009)

Se tienen las siguientes características:

$$L = 50 \text{ cm}$$

$$h = 1 \text{ cm}$$

$$t = 0.1 \text{ cm}$$

$$u_0 = 0.05 \text{ cm}$$

$$E = 2.1 * 10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$\nu = 0.20$$

Bajo las siguientes condiciones de borde:

$$U = 0 \text{ en } x = 0$$

$$V = 0 \text{ en el punto } x = 0, y = h/2$$

$$U = u_0 \text{ en } x = L$$

Este problema puede ser modelado de la misma manera que el problema anterior, el cambio más relevante son las condiciones de borde (asumiendo los cambios obvios en propiedades del material y enmallado). Para ello basta con concatenar una condición de borde puntual con el comando *generarCBYdesdeCoordenada(x,y,valor)* que asignará la condición al nodo más cercano a la coordenada que se da por parámetro.

Validación

Para realizar la validación de resultados obtenidos, se compararon los perfiles resultantes de correr el programa con los obtenidos por Pisano *et al.* (2009). En la figura 16 se muestran 4 perfiles obtenidos con el caso de estudio 1 usando una malla de 900 elementos, $\zeta_1 = 0.5$, $l = 0.1$. Para comprobar la validez se realizó una superposición de imágenes entre los perfiles obtenidos y los perfiles propuestos por Pisano *et al.* (2009). Estas gráficas se encuentran en el anexo 28.

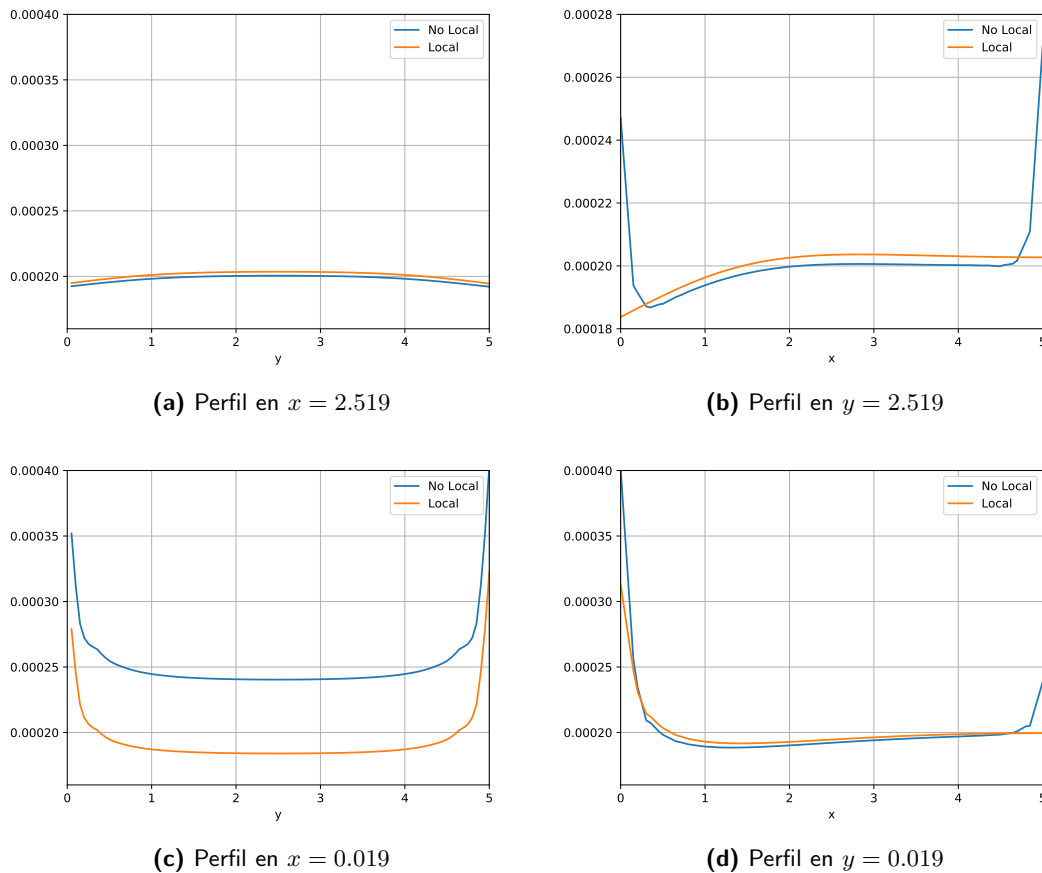


Figura 16. Perfiles de ε_x en el caso de estudio 1

Variación de Parámetros

Para generar los resultados se itera con diferentes parámetros, el objetivo de cambiar los parámetros es ver la influencia que tienen en la solución.

Variaciones Planteadas

1. Variación en funciones de atenuación

El componente principal para evaluar serán las funciones de atenuación. Por tal razón, para cada función de atenuación se extraerán los resultados de forma gráfica. Se usarán las cuatro funciones de atenuación definidas en el capítulo 3.

2. Variación en longitud interna (l)

Dado que la longitud interna controla directamente la cantidad de elementos no locales, se estudiarán dos fenómenos. Cuando la cantidad de elementos no locales requeridas por el parámetro l es suficiente en el dominio y cuando la cantidad de elementos no locales requeridas por el parámetro l no es suficiente en el dominio. Por lo tanto, el parámetro l varía de 0 a la longitud más pequeña del dominio sobre 12. En el caso del caso de estudio 1 se usará un $l_{max} = \frac{1}{12}$ y en el caso de estudio 2 $l_{max} = \frac{1}{12}$.

En el caso de estudio 1, l_{max} garantiza que para el elemento más interior hay suficientes elementos adyacentes en un radio Lr lo que garantiza que, aunque sea para ese elemento se tenga en cuenta

todo el dominio. Los elementos que se encuentren fuera de este radio (las esquinas) no serán relevantes por estar demasiado lejos del elemento de interés (Polizzotto, 2001).

La metodología completa se resume en el diagrama de flujo presentado en la figura 17.

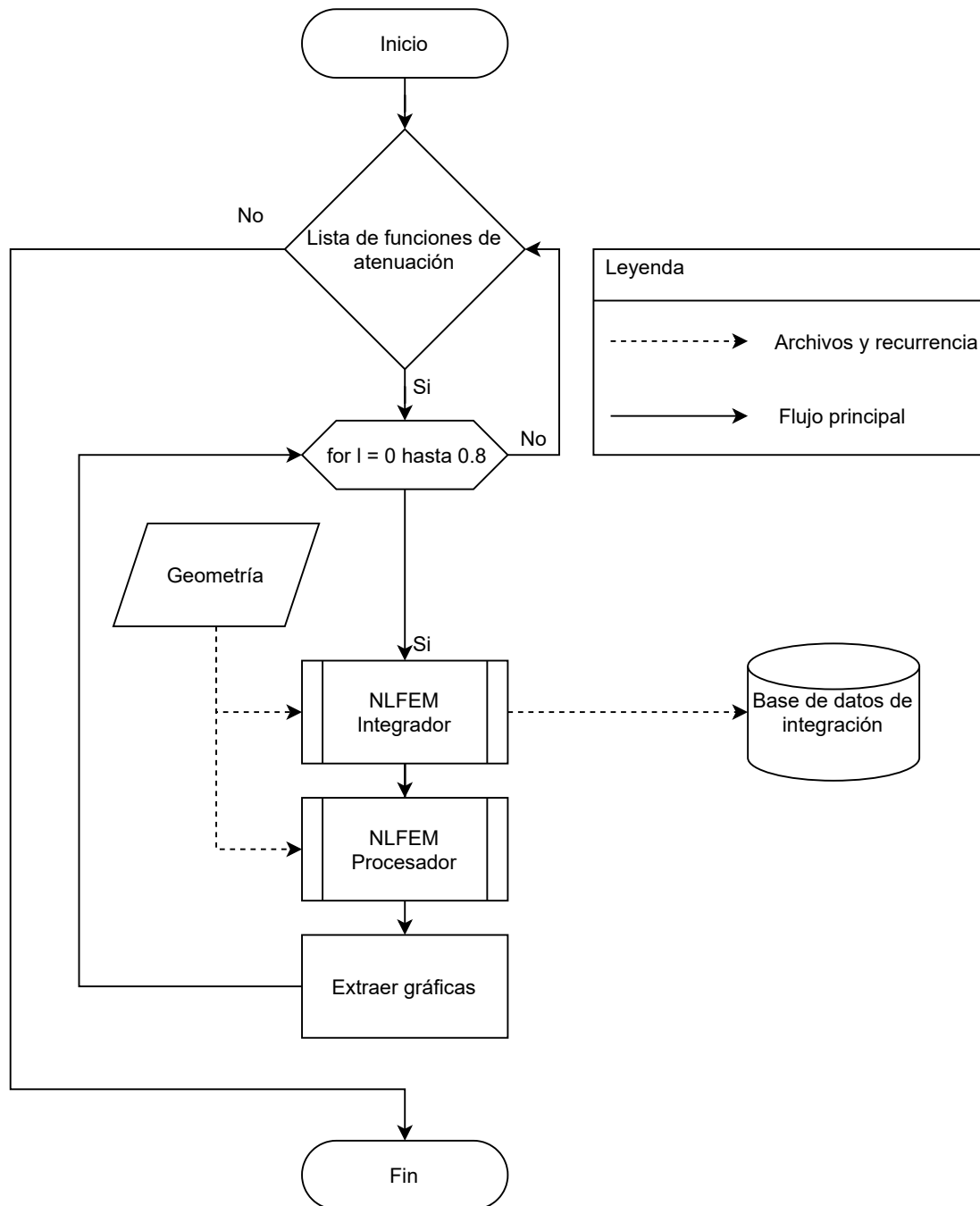


Figura 17. Diagrama de flujo del proceso iterativo

Resultados

Caso de estudio 1: Placa a tensión

$$x = 0.019$$

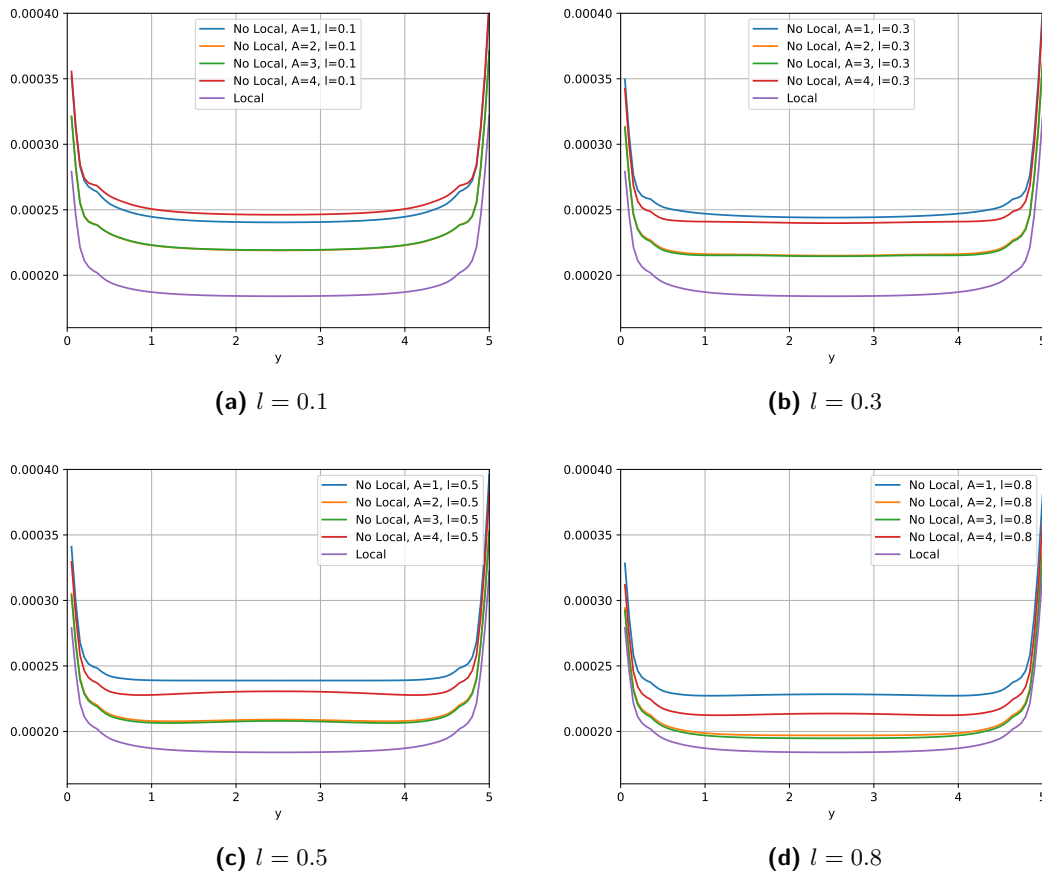


Figura 18. Perfiles de ε_x en $x = 0.019$

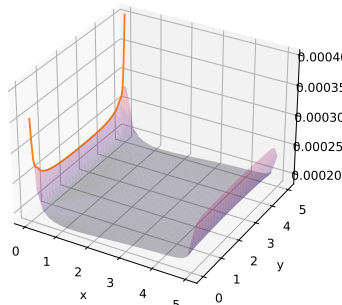


Figura 19. Ubicación del perfil

mayores solo si l es pequeño.

Como se nota en la figura 19, este perfil se está graficando prácticamente en el borde del dominio, lo cual, significa que los valores calculados se encuentran a una distancia menor que $Lr = 6l$ del borde del dominio. En este caso se observa que el perfil para las deformaciones locales se encuentra siempre por debajo de las deformaciones no locales.

Para esta gráfica y las siguientes se tiene una convención de funciones, la función $A=1$ corresponde a la función de atenuación 1 expuesta en el capítulo 3. Como referente, la función 1 es la función biexponencial, la función 2 es la función lineal, la función 3 es la función cuadrática y la función 4 es la función modificada. Se puede evidenciar que cuando l es pequeño no existe una diferencia relevante entre las deformaciones obtenidas por las funciones 2 y 3. Para este caso se puede apreciar que mediante la función modificada se pueden obtener deformaciones

$$x = 2.519$$

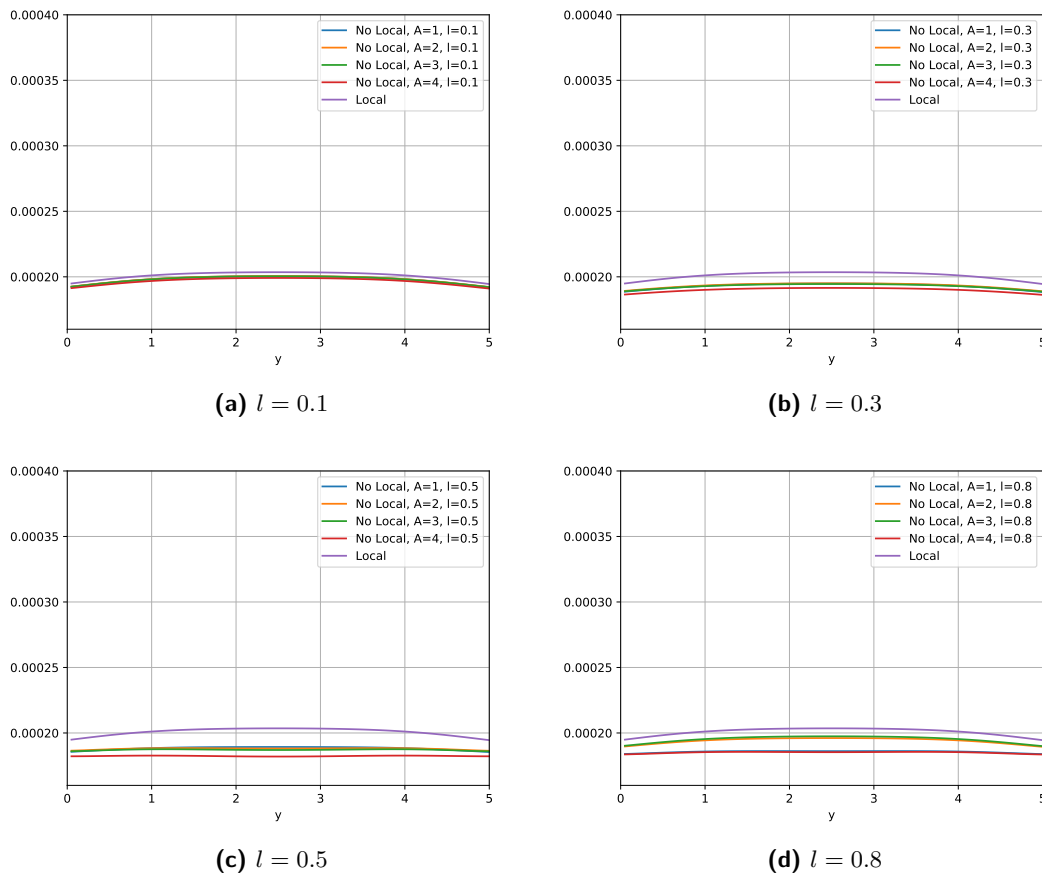


Figura 20. Perfiles de ε_x en $x = 2.519$

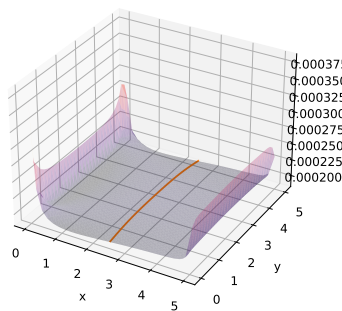
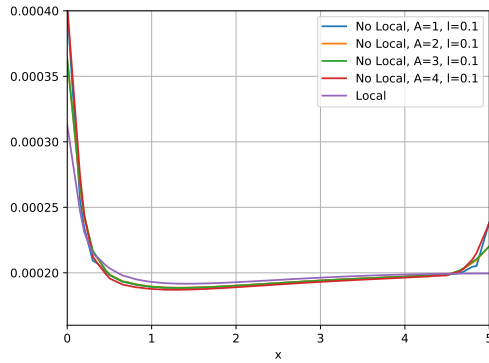
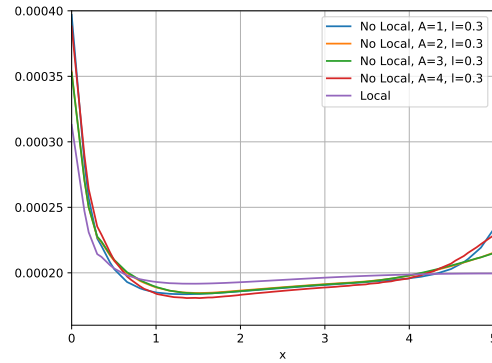
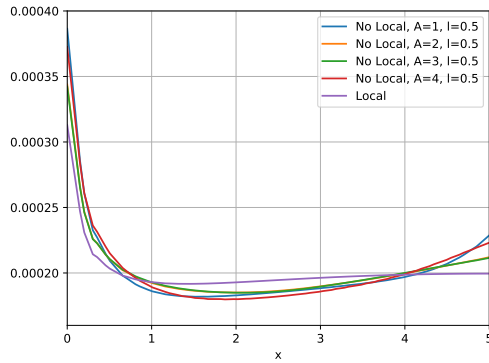
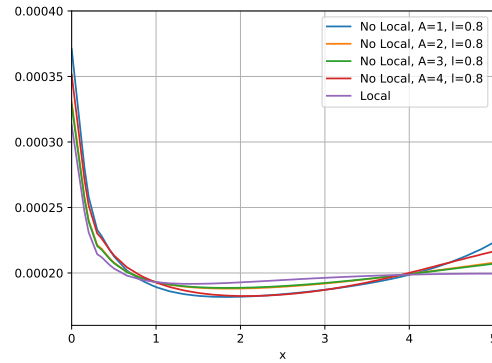
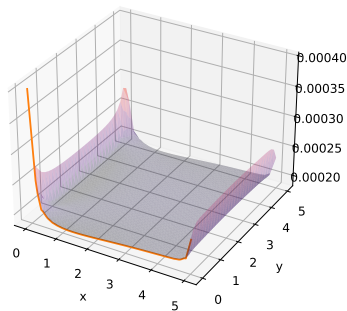


Figura 21. Ubicación del perfil

Para este caso se realizó el perfil en la mitad del dominio, por lo que la mayoría de los puntos están en la parte interior del dominio. En las zonas interiores del dominio se espera que los resultados obtenidos por la teoría local y no local sigan el mismo patrón (Pisano *et al.* 2009).

Como se muestran los resultados para las deformaciones en x , en este perfil no se debería evidenciar una variación severa en los resultados. Como se aprecia en la figura 20a se puede ver que los resultados obtenidos se agrupan por debajo de la solución local, mientras que en la figura 20d se puede apreciar que las soluciones se agrupan en diferentes zonas.

$$y = 0.019$$

(a) $l = 0.1$ (b) $l = 0.3$ (c) $l = 0.5$ (d) $l = 0.8$ **Figura 22.** Perfiles de ε_x en $y = 0.019$ **Figura 23.** Ubicación del perfil

En este caso se evalúan los resultados nuevamente a una distancia desde el borde menor que Lr , en este caso se evalúan los cambios de la deformación variando x , lo cual provee una mejor visualización del fenómeno. Como peculiaridad se aprecia que al obtener las deformaciones no locales se obtienen deformaciones más altas en los bordes donde se aplican las condiciones de borde, mientras que en la zona central del dominio las deformaciones obtenidas por la teoría no local tienden a ser menores que las obtenidas por la teoría local.

Como se mencionó en el capítulo 4 los valores para l fueron escogidos para obtener resultados donde la distancia Lr fuera lo suficientemente grande para abarcar con todo el dominio. En el caso de la figura 22a y 22b $Lr = 0.6, 1.8$ respectivamente, por lo tanto, $Lr < a/2$. En estos dos perfiles se puede apreciar que las deformaciones que estén entre $Lr \leq x \leq a - Lr$ presentan un comportamiento paralelo a la solución local. Para las zonas donde no se cumple esta condición se presenta el comportamiento de picos que se hace más pronunciado mientras l es más grande. Para el caso de las figuras 22c y 22d se tiene un $Lr > a/2$, por lo que no se puede evidenciar el comportamiento paralelo que se mostró anteriormente.

$$y = 2.519$$

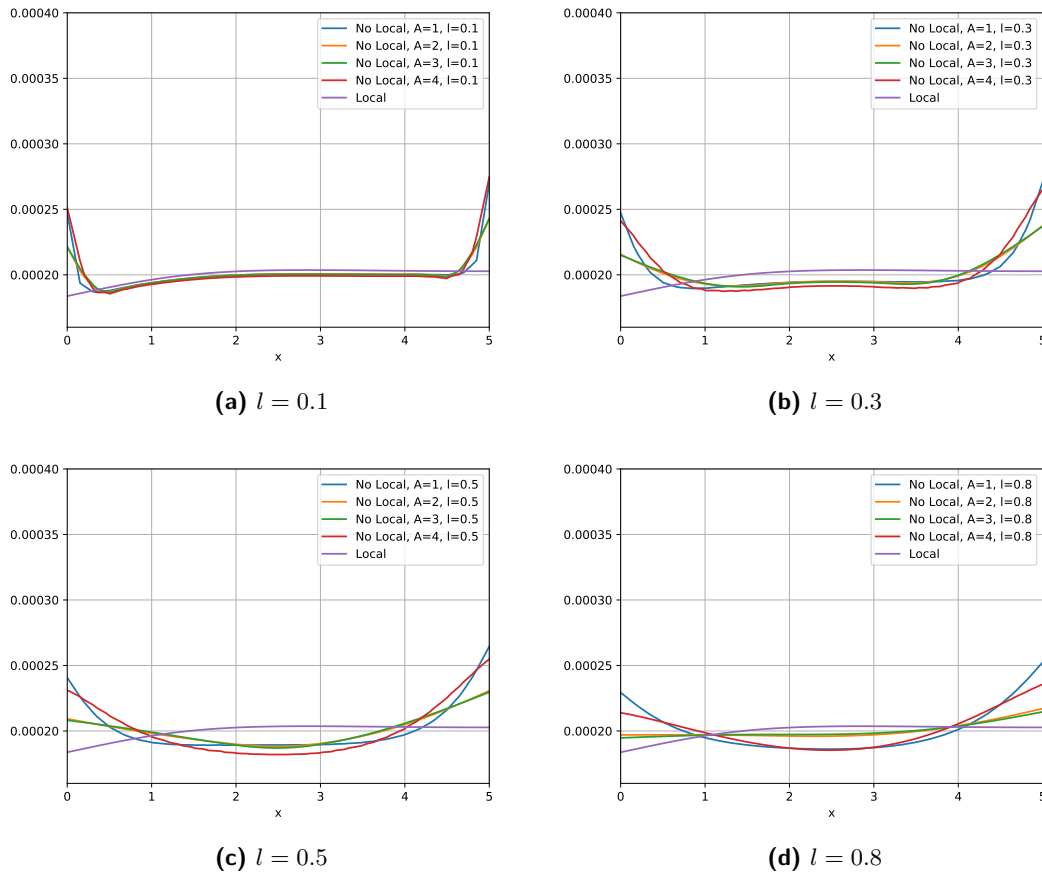


Figura 24. Perfiles de ε_x en $y = 2.519$

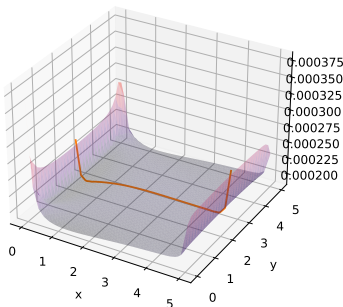


Figura 25. Ubicación del perfil

En este caso se evalúan los resultados a una distancia desde el borde mayor que Lr , en este caso se evalúan los cambios de la deformación variando x , lo cual provee una mejor visualización del fenómeno. En estos perfiles se puede evidenciar el comportamiento de la solución al momento de aumentar el factor l . En el caso de la figura 24a y 24b $Lr = 0.6, 1.8$ lo que lleva a pensar que las deformaciones en la zona interior sean paralelas a las obtenidas por la teoría local. En este caso que l es pequeño se evidencia que los resultados para cada una de las funciones son similares.

En el caso de los perfiles donde $Lr > a/2$ no es posible evidenciar el comportamiento paralelo. Mas aún esto lleva a pensar en la existencia de puntos de inflexión donde la teoría no local producirá deformaciones mayores (y por lo tanto esfuerzos mayores) que se ubican a una distancia Lr del borde del dominio. En el caso en el que Lr no pueda desarrollarse completamente en el dominio, estos puntos de inflexión se juntan e invierten, lo que genera una superficie de esfuerzos diferente para cada función de atenuación.

Caso de estudio 2: Barra a tensión

$$y = 0.5$$

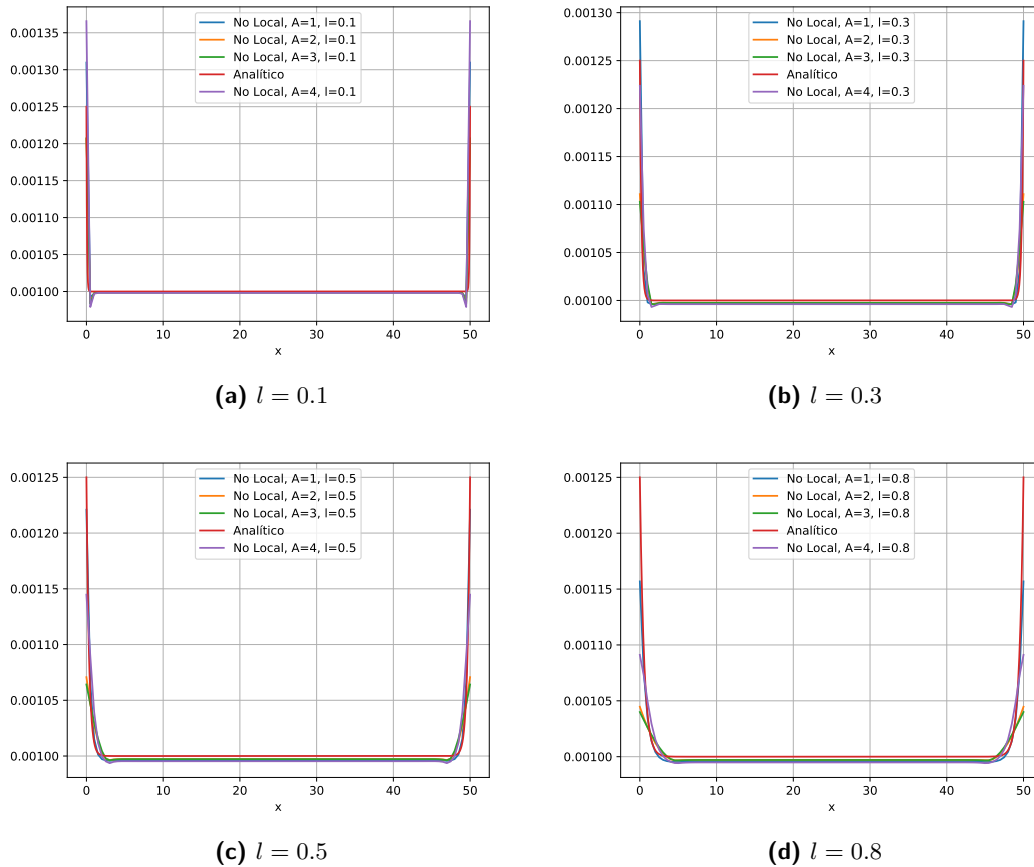


Figura 26. Perfiles de ε en $y = 0.5$

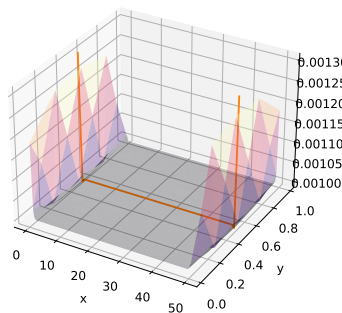


Figura 27. Ubicación del perfil

En la figura 26 se muestra la comparación entre los resultados obtenidos contra la solución analítica propuesta por Angela Pisano y Fuschi (2003). Cabe resaltar que la solución analítica fue desarrollada usando la función biexponencial, lo que puede acarrear en diferencias en los resultados obtenidos con las otras funciones de atenuación.

En este caso no se muestran las deformaciones locales, ya que, por ser un problema unidimensional, estas son constantes en todo el dominio y son iguales a 0.001.

En este caso Lr siempre es menor que la longitud de la barra, por lo que en todos los perfiles existe una cantidad suficiente de elementos para evaluar los efectos no locales. En las figuras 26c y 26d se evidencia que las funciones de atenuación biexponencial y modificada se encuentran por encima de las funciones lineal y cuadrática, manifestando un aumento de las deformaciones en los extremos de la barra.

Uno de los postulados de la solución analítica para este problema es que, en la parte central de la barra, las deformaciones no locales deben ser iguales a las deformaciones locales (Angela Pisano & Fuschi, 2003; Zingales *et al.* 2011). Sin embargo, al momento de aumentar l , todas las funciones de atenuación

tenderán a alejarse de la solución local, esto se evidencia al comparar los resultados obtenidos en la figura 26d para $l = 0.8$ con la solución analítica.

Por otro lado, para la solución de NL-FEM para la función de atenuación biexponencial, se puede evidenciar que para valores de l pequeños se obtiene una sobreestimación de las deformaciones en los extremos, mientras que para valores de l grandes se obtiene una subestimación de las deformaciones en los extremos.

Conclusiones

En primer lugar, gracias a los resultados obtenidos en el capítulo 5, se puede afirmar que las funciones de atenuación tienen efecto en la solución, más aún, implican la obtención de un tipo de superficie de esfuerzos distinta. Es decir, la forma de la superficie varía dependiendo de la función de atenuación usada. Por tal razón, la función de atenuación debe ser un parámetro más para los modelos de elasticidad no local.

Al momento de seleccionar una función de atenuación se deben tener en cuenta los efectos que tenga dicha función en el método. Como se aprecia en el capítulo 5, los resultados obtenidos con las funciones de atenuación biexponencial y modificada tienden a agruparse en zonas de deformaciones mayores, mientras que los resultados obtenidos con las otras dos funciones tienden a ser menores. Esta comparación es evidente en las zonas del dominio que se encuentran a una distancia menor a Lr de los bordes.

La agrupación de los resultados que se aprecia en las figuras 22, 24 y 26 se debe al origen de las funciones de atenuación. Por ejemplo, la función biexponencial y la función modificada están basadas en la función exponencial, más aún, la función propuesta es una modificación a la biexponencial, lo cual justifica que los resultados obtenidos sean similares. Este parecido es fuerte cuando el parámetro l es pequeño. Estas dos funciones cuentan con una característica adicional que es relevante, dichas funciones no se definen a partir del parámetro m_0 (parámetro que define la magnitud de Lr). En estas funciones el parámetro Lr se obtuvo a partir de inspeccionar los valores para los cuales la función será cercana a cero (Polizzotto, 2001). En otras palabras, estas funciones independientes de m_0 obtienen Lr a partir de sus valores.

Por otro lado, las funciones lineal y cuadrática son dependientes de m_0 . En ellas, este parámetro adicional obliga a que la función sea cero a partir de una relación ρ específica. Para poder realizar la comparación de resultados, se usó $m_0 = 5$ (lo cual lleva a un $Lr = 6l$ para estas funciones de atenuación), sin embargo, los resultados obtenidos por estas funciones difieren con los obtenidos con las funciones independientes. Esta diferencia es relevante para valores de l grandes.

Dado que el Lr es un factor relevante que se obtiene al elegir una función de atenuación, se debe tener en cuenta que el enmallado producido debe ser afectado por este parámetro. Así como lo recomienda Polizzotto (2001) se recomienda un valor de $Lr = 6l$ para la función biexponencial. Basados en la figura 5, se recomienda un valor de $Lr = 8l$ para la función modificada, de esta manera se asegura que la condición de la ecuación 9 se cumpla incluso para valores de l grandes.

Adicionalmente, se debe tener en cuenta el costo computacional de la integración de dichas funciones. En el caso de las funciones basadas en la función exponencial, se necesitan una cantidad mayor de puntos de Gauss para obtener una precisión aceptable. Este problema escala el costo computacional de manera exponencial, ya que, el proceso de integración costoso se encuentra en los elementos no locales. Por otro lado, dado que las funciones lineal y cuadrática son basadas en polinomios, se puede obtener el valor exacto de la integral usando pocos puntos de Gauss.

Como se mencionó en el capítulo 5, en ciertos perfiles se evidencia la creación de puntos de inflexión, los cuales expresan gráficamente la magnitud de Lr . Estos puntos dividen el dominio en dos zonas, la zona interior que se encuentra a distancias mayores a Lr de los bordes y la zona exterior, que representa el complemento a la zona interior. La evidencia gráfica apunta a que existe una concentración de efectos no locales en la zona exterior del dominio. Esto se debe a que los elementos que se encuentren en los bordes no tendrán el mismo número de aportes de rigidez de elementos no locales como los que se obtienen en zonas interiores del dominio. Di Paola *et al.* (2009) realiza una analogía con un modelo punto-resorte en una dimensión que confirma esta afirmación.

En cuanto a la elección del parámetro l , se debe tener en cuenta que en la literatura generalmente se enuncia que la magnitud del parámetro l es pequeña (ver Eringen, 1987; Eringen y Edelen, 1972). Como se mostró en el capítulo 4 y el capítulo 5, el hecho de que l sea pequeño beneficia de manera positiva al método NL-FEM, aumentando su eficiencia computacional.

Con lo expuesto anteriormente se puede concluir que:

1. Comparando los resultados obtenidos con las 4 funciones de atenuación estudiadas se puede afirmar que para valores de l pequeños los resultados obtenidos son cercanos. Sin embargo, para valores de l grandes los resultados de las diferentes funciones de atenuación difieren ampliamente, más aún, se agrupan dependiendo el origen de la función de atenuación. Tomando la figura 4, se puede afirmar que las funciones de atenuación son sensibles al parámetro l .
2. Dado que la función de atenuación modificada tiene como objetivo reducir el aporte no local a la parte local, se esperaba que los resultados obtenidos por dicha función fueran lo más cercanos posibles a la solución local en el dominio interior, sin embargo, en ninguno de los resultados obtenidos se presencia este fenómeno.
3. La elección de una función de atenuación sobre otra debe tratarse como un parámetro más del modelo. Esta elección tendrá efectos en el proceso de enmallado e integración.
4. Al momento de elegir el parámetro l se debe tener en cuenta que cuando Lr no alcanza a desarrollarse, la elección de las funciones de atenuación es un factor clave en la forma de la superficie de esfuerzos.
5. Al momento de comparar la solución de NL-FEM con la solución analítica disponible, se afirma que para todas las funciones de atenuación se incumple con la condición de que en el dominio interior las deformaciones no locales deberían ser iguales a las locales.
6. Debido a que la función de atenuación modificada no resuelve la inconsistencia presentada en el capítulo 1 se debe abordar el problema con una función de difusión distinta. Sin embargo, así como lo menciona Di Paola *et al.* (2009), esto será objetivo de investigaciones futuras.

Anexos

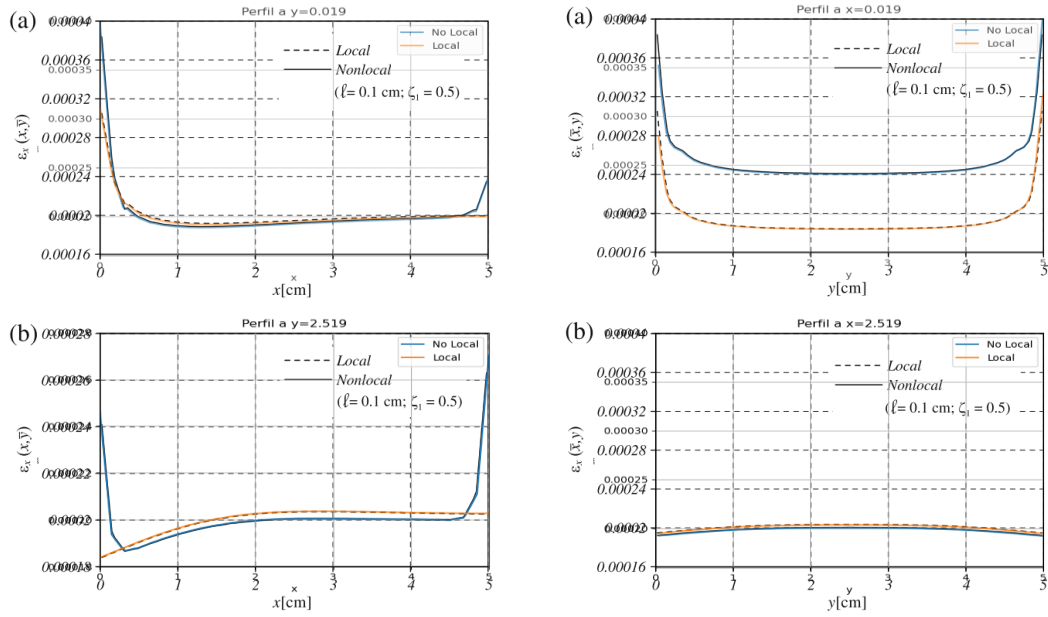


Figura 28. Gráficas de validación

$$UV_{nm}^{nloc}[i, j] = t^2 \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_m} A(\rho) \left[C_{12} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial x} \right] d\Omega_m d\Omega_n \quad (37a)$$

$$VU_{nm}^{nloc}[i, j] = t^2 \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_m} A(\rho) \left[C_{12} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial x} + C_{66} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial y} \right] d\Omega_m d\Omega_n \quad (37b)$$

$$VV_{nm}^{nloc}[i, j] = t^2 \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_m} A(\rho) \left[C_{11} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial y} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial y} + C_{66} \frac{\partial \psi_i^l}{\partial x} \frac{\partial \psi_j^{nl}}{\partial x} \right] d\Omega_m d\Omega_n \quad (37c)$$

Ecuación 37. Modelo de elementos finitos segun la terminología de Reddy, 2005

Referencias

- Altan, S. (1989). Uniqueness of initial-boundary value problems in nonlocal elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 25(11), 1271-1278. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90091-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90091-7)
- Angela Pisano, A. & Fuschi, P. (2003). Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension. *International Journal of Solids and Structures*, 40(1), 13-23. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00547-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00547-4)
- Di Paola, M., Failla, G. & Zingales, M. (2009). Physically-Based Approach to the Mechanics of Strong Non-Local Linear Elasticity Theory. *Journal of Elasticity*, 97(2), 103-130. <https://doi.org/10.1007/s10659-009-9211-7>
- Eringen, A. C. (1987). Theory of Nonlocal Elasticity and Some Applications. *Res mechanica*, 21(4), 313-342.
- Eringen, A. C. & Edelen, D. G. (1972). On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 233-248. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- Kröner, E. (1967). Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, 3(5), 731-742. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(67\)90049-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2)
- Kuhlman, D. (2011). *A Python Book: Beginning Python, Advanced Python, and Python Exercises*. PLATYPUS GLOBAL MEDIA. <https://books.google.com.co/books?id=1FL-ygAACAAJ>
- Pisano, A., Sofi, A. & Fuschi, P. (2009). Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 46(21), 3836-3849. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.07.009>
- Polizzotto, C. (2001). Nonlocal elasticity and related variational principles. *International Journal of Solids and Structures*, 38(42-43), 7359-7380. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(01\)00039-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(01)00039-7)
- Ramirez, F. (2020). Meshing of a rectangular domain using 8-node elements identifying neighbor elements within a distance l_r .
- Reddy, J. N. D. (2005). *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Education. <https://books.google.com.co/books?id=8gqnRwAACAAJ>
- Shewchuk, J. R. (1996). Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator [From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry]. En M. C. Lin & D. Manocha (Eds.), *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering* (pp. 203-222). Springer-Verlag.
- Zingales, M., Di Paola, M. & Inzerillo, G. (2011). The finite element method for the mechanically based model of non-local continuum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86, 1558-1576. <https://doi.org/10.1002/nme.3118>