30-10-2017

lunedì 30 ottobre 2017 12:44

1) $f:(1;+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{\cos(1-x^2)\sin(x^2-1)}{(x-1)^2}$

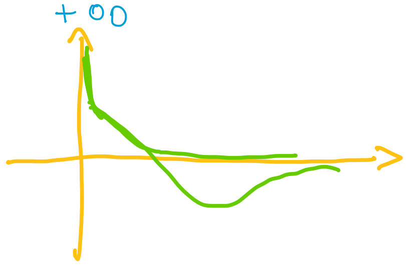
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(1-x^2)\sin(x^2-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{[-1;1]\cdot[-1;1]}{+\infty}=\boxed{\nexists}$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{1\cdot0}{0^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$\cos(1-x^2)=1-\dfrac{(1-x^2)}{2}+o(x^2)$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0}{x-2+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{0}=+\infty$ ✓

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[-1;1][-1;1]}{+\infty}=0$



- f è illim. sup e lim. inf
- non ha max, ma potrebbe avere min → non ci interessa

⇓

Risposta C

---

n° 2

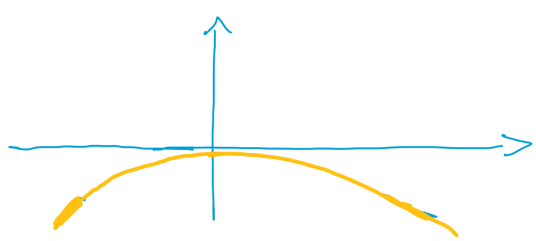
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x-e^x$ $\quad$ Iniettiva, surgettiva ... ?

$\lim\limits_{x\to-\infty}\ -\infty-1=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ +\infty-\infty$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\underbrace{e^x}_{+\infty}\cdot\left(\dfrac{x}{e^x}-1\right)=-\infty$ $\quad$ (con $\frac{x}{e^x}\to0$)

} non è surgettiva



È iniettiva? Cresce sempre?

$f'(x)=1-e^x$

$1-e^x>0$

$-e^x>-1$

$e^x<1\iff x<0$

$f(0)=0-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

Non è né iniettiva né surgettiva

↳ Risposta B

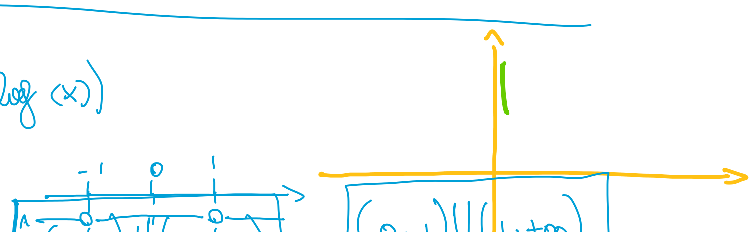
---

n° 3

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}\left(\log(1+x)-\log(x)\right)$

C.E.

$\begin{cases}x^2-1\neq0\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x\neq\pm1\end{cases}$ $\quad$ A



$(0,1)\cup(1,+\infty)$

$\begin{cases} 1+x>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 & B \\ x>0 & C \end{cases}$ $\quad \boxed{B\ (0;1)\cup(1;+\infty)}\ \ \boxed{(0;1)\cup(1;+\infty)}$

Sol

Asintoti verticali $\quad$ * $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ e $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} \cdot \left(\log(1+x) - \log(x)\right) = \frac{0^1}{0} \cdot (0) + \infty\ \infty = \left[\frac{0}{0}\right] \infty\ \infty$ $\Rightarrow$ Si asintoto vert. — ha un solo asintoto vert
- $\lim_{x\to 0} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \cdot + \infty \log(2) \infty$ Asintoto verticale $\frac{2\log(2)}{2}$ con NO asintoto vert. $x=0$
- $\lim_{x\to 1} f \frac{x^3-1}{(x^2-1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} \cdot \log(2) = \frac{\log(2)\cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$ No Asintoto ver.
- $\lim_{x\to+\infty} \log x \cdot \frac{(x^3-1)\cdot\log(1+x)}{(x^2-1)\cdot\log(x)} - 1$

$\lim_{x\to+\infty} \infty \cdot \log x \frac{(x-1)(x^2+x+1)\cdot\log(1+x)}{(x+1)\cdot(x-1)\log(x)} - 1$

$= \infty \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1)\cdot\log(1+x)}{(x+1)} - 1$

Per esclusione la risposta è la A

---

n° 4

$f'(x) = |x|\ \sin x \cdot \cos x = |x| \cdot \cos x$

$f'(0) = \frac{x}{|x|} \cdot \underbrace{\sin x}_{0} + \underbrace{|x|}_{0} \cdot \underbrace{\cos x}_{1} = 0 + 0 = 0$

$f'(0^+) = \frac{x}{x} \cdot \sin x + x \cdot \cos x = 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$ — è derivabile — Risposta D

$f'(0^-) = \frac{-x}{-x} \cdot \sin x - x\cos x = -0 - (0\cdot 1) = 0$

---

n° 5

$f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \sin x \cdot (e^x - 1)}{(x+1)(\log(x)+1)} = \frac{[-1;1]}{+\infty}$ Asintoto $+\infty$ $= \nexists$ risposta B

---

n° 6

$f: \begin{cases} x>0 \\ x \geq (-1,1) \\ x+1(\log(x)+1) \neq 0 \end{cases}$, $f(x) = \sin(\arctan x)$ $(0;+\infty)$ $\quad$ iniettiva, surgettiva, bigettiva?

$x\log(x) + x \quad \log(x)+1 \neq 0$

$\lim_{x\to+\infty} \sin(\arctan x) = \sin(\pi/2) = 1$

$\lim_{x\to-\infty} \sin(\arctan x) = -1$, $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ è Surgettiva *

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \log x}{(x+1)(\log(x)+1)} \Rightarrow +\infty$ $\quad$ strettamente crescente?

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0 \cdot -\infty}{0 \cdot -\infty}$

$f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\arctan x)}{x^2(x+1)\ldots} = \frac{x \cdot x}{x\cdot(1+\frac{1}{x})} = \frac{0}{1+\infty} = 0$

$f'(x) > 0: \underbrace{\cos(\arctan x)}_{[0;1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{} > 0$

è sempre >0 $\quad$ è sempre >0

$\lim_{x\to}$

è iniettiva $\Leftarrow$ la funzione cresce sempre $\Leftarrow$

* $\Downarrow$

la funzione è bigettiva

Risposta B

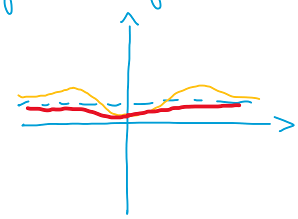
n° 7

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-e^x} = x^{1-1} = 1$$ Risposta A

n° 8

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2+1}}$

limitata? ha min ha max? ...



- $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{x^2+1}} = e^0 = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x-1}{x^2+1}} = e^0 = 1$
- $f(0) = e^{\frac{-1}{+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

~~A~~ no
~~B~~ no il minimo ce l'ha
C ? potrebbe avere max
~~D~~ no, allora per esclusione
C ✓

Verifica

$$e^{\frac{x-1}{x^2+1}} > 1$$
$$e^{\frac{x-1}{x^2+1}} > e^0$$
$$\frac{x-1}{x^2+1} > 0 \qquad x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \qquad x^2+1>0 \;\forall x\in\mathbb{R}$$

Oltre $x=1$ la f va oltre l'asintoto $y=1$ per poi all'infinito $(\pm\infty)$ avvicinarsi ad esso.
$\Downarrow$
ha anche max, risposta C confermata

n° 9

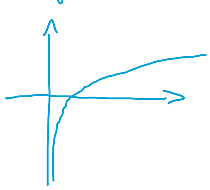
$$f(x) = \frac{x^2\log x}{(x+1)((\log x)+1)}$$

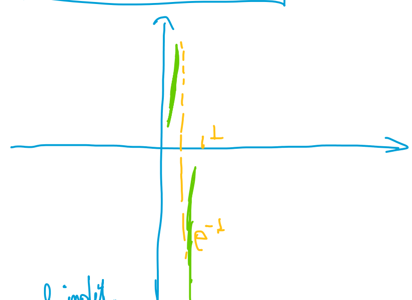
asintoti?

$$\text{dom}(f) = \begin{cases} x>0 \\ (x+1)((\log x)+1)\neq 0 \;* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq -1 \\ x\neq \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$\boxed{\left(0;\tfrac{1}{e}\right)\cup\left(\tfrac{1}{e};+\infty\right)}$$

* $x \neq -1$
$\log x \neq -1$
$\log x \neq \log e^{-1}$
$x \neq \frac{1}{e}$





Verticali?

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\log(x)}{(x+1)(\log(x)+1)} = \frac{0\cdot -\infty}{1\cdot-\infty} = \frac{[0\cdot(-\infty)]}{-\infty} \text{ f. indet.}$$

$\log(x^2\log x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 0}{x^2\log(x)}}{\underset{\to -\infty}{(x+1)(\log(x)+1)}} = 0 \quad \text{niente asintoto}$$

asintoto verticale

- $$\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} \frac{x^2\log(x)}{(x+1)(\log(x)+1)} = \frac{e^{-2}\log(e^{-1})}{(e^{-1}+1)\cdot(\log(e^{-1})+1)} = \frac{e^{-2}\cdot -1}{(e^{-1}+1)\cdot 0} = \frac{-e^{-2}}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(\frac{1}{e})^-} f(x) = \frac{-e^{-2}}{0^-} = +\infty$$

Conclusione, ha un solo asintoto verticale a $x=\frac{1}{e}$ ⇒ Risposta C

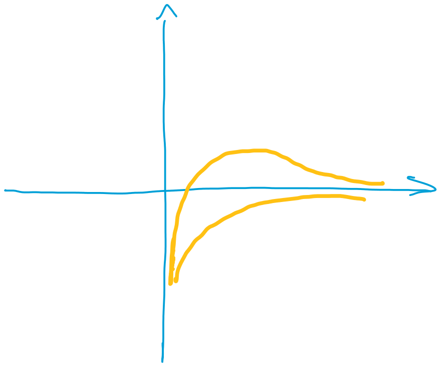
n° 10

$f: (0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$

È debolmente crescente $(\forall x_1, x_2 \mid x_1 < x_2 \; , f(x_1) \leq f(x_2))$

$f(x) = \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\text{strettamente crescente}} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\text{strett. crescente}} \Rightarrow$ è una funzione strettamente crescente *

(Risposta B NO)



$\lim_{x \to 0^+} \overbrace{\frac{x-1}{x}}^{-\infty} \cdot \overbrace{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}^{+\infty} = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \cdot 0 = 0$

Obliquo?

$\lim_{x \to +\infty} \overset{0}{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \overset{0}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$ NO

La funzione non ha min, potrebbe avere max, è sempre crescente, non ha un asint obliquo e non è limitata in quanto con $x \to 0^+$ tende a $-\infty$

Per esclusione la risposta è A