Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 22 giugno 2017

Domanda 1 La funzione $f(x) = x + \dfrac{3|x|}{x}$, nel suo insieme di definizione,

A) ha un asintoto verticale B) ha due asintoti obliqui
C) ha un asintoto orizzontale D) non ha asintoti di nessun tipo

B

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ è

A) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2-1}$ B) $2x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

C) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\left(2x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{1+x}\right)$ D) $2x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2-1}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

C

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) ha minimo ma non ha massimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata D) ha sia massimo che minimo

D

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)!}$, definita per $n \geq 1$,

A) non ha limite B) ha limite finito C) tende a $+\infty$ D) ha minimo ma non ha massimo

B

Domanda 5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^n}{e^{n\log n}} =$

A) 0 B) $+\infty$ C) $e-1$ D) $\dfrac{1}{e}$

D

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan(t^2-1)}{1+t^2}\,dt$

A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) ha due punti di discontinuità
C) è debolmente crescente D) ha un punto angoloso

A

Domanda 7 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_1^x t^2 - \sqrt{t} + \frac{1}{t} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}} + 3\,dt =$

A) 3 B) $+\infty$ C) -1 D) $-\infty$

D

Domanda 8 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^0 (t^2-1)^2\,dt$

A) ha minimo ma non ha massimo B) non ha né massimo né minimo
C) ha sia massimo che minimo D) ha massimo ma non ha minimo

D

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\log x}{x} \\ y(3) = 4. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{\log 3}{3}$ B) $\dfrac{4}{3} - \dfrac{\log^2 3}{2}$ C) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{\log 3}{3}$ D) $\dfrac{4}{3} - \dfrac{\log 3}{9}$

C

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = x^2 y^2 \\ y(-2) = 4. \end{cases}$ Allora $y(-1) =$

A) $-\dfrac{12}{25}$ B) $-\dfrac{75}{29}$ C) $\dfrac{11}{8}$ D) $\dfrac{105}{11}$

A

codice 117385

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 22 giugno 2017

Domanda 1 La funzione $f(x) = x + \dfrac{3|x|}{x}$, nel suo insieme di definizione,

A) ha un asintoto verticale B) ha un asintoto orizzontale C) ha due asintoti obliqui
D) non ha asintoti di nessun tipo

C

Domanda 2 La derivata della funzione $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ è

A) $2x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2-1}\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ B) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2-1}$ C) $2x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

D) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\left(2x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x}{1+x}\right)$

D

Domanda 3 La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

A) ha sia massimo che minimo B) è limitata ma non ha né massimo né minimo
C) non è limitata D) ha minimo ma non ha massimo

A

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{(n+1)! - n!}{n^2(n-1)!}$, definita per $n \geq 1$,

D

A) tende a $+\infty$ B) ha minimo ma non ha massimo C) non ha limite D) ha limite finito

Domanda 5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^n}{e^{n\log n}} =$

A

A) $\dfrac{1}{e}$ B) $+\infty$ C) $e-1$ D) 0

Domanda 6 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan(t^2-1)}{1+t^2}\,dt$

A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) è debolmente crescente
C) ha due punti di discontinuità D) ha un punto angoloso

A

Domanda 7 $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_1^x t^2 - \sqrt{t} + \frac{1}{t} - \frac{4}{\sqrt[3]{t}} + 3\,dt =$

A

A) $-\infty$ B) -1 C) $+\infty$ D) 3

Domanda 8 La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^0 (t^2-1)^2\,dt$

A) ha sia massimo che minimo B) ha massimo ma non ha minimo
C) ha minimo ma non ha massimo D) non ha né massimo né minimo

B

Domanda 9 Dire quale dei seguenti $z \in \mathbb{C}$ risolve l'equazione $z^4 = -8 - 8i\sqrt{3}$

C

A) $\sqrt{2}\sqrt[4]{2} - i\sqrt{2}\sqrt[4]{2}$ B) $4096 + 4096i$ C) $-\sqrt{3} + i$ D) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Domanda 10 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{1}{i}\right)^6 =$

B

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ B) -1 C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D) $1 - \sqrt{3}i$

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 22 giugno 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = e^x \left(|x^2 - 2x| - 8\right)$ determinandone insiemi di definizione e di derivabilità, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), massimo e minimo o estremi superiore e inferiore, punti di massimo o minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo.

Soluzione

La funzione è definita e continua in tutto $\mathbb{R}$, non ci sono quindi asintoti verticali. Vediamo dove cambia segno l'argomento del valore assoluto.

$$x^2 - 2x = x(x-2) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

Risulterà quindi

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 - 2x - 8) & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ e^x(-x^2 + 2x - 8) & \text{se } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Vediamo ora i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x(x^2 - 2x - 8) = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t^2 + 2t - 8}{e^t} = 0$$

dove abbiamo fatto il cambiamento di variabile $t = -x$ e utilizzato il teorema di De L'ôpital nell'ultimo passaggio. La funzione ha quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x(x^2 - 2x - 8) = +\infty.$$

Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(x - 2 - \frac{8}{x}\right) = +\infty,$$

non ci sono quindi asintoti obliqui. Calcoliamo ora la derivata.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x^2 - 2x - 8) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 10) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ e^x(-x^2 + 2x - 8) + e^x(-2x + 2) = e^x(-x^2 - 6) & \text{se } x \in (0, 2). \end{cases}$$

Nei punti $x = 0$ e $x = 2$ possiamo calcolare la derivata destra e sinistra passando al limite nella derivata, dato che la funzione è continua:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} e^x(x^2 - 10) = -10, \quad f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} e^x(-x^2 - 6) = -6,$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} e^x(-x^2 - 6) = -10e^2, \quad f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} e^x(x^2 - 10) = -6e^2.$$

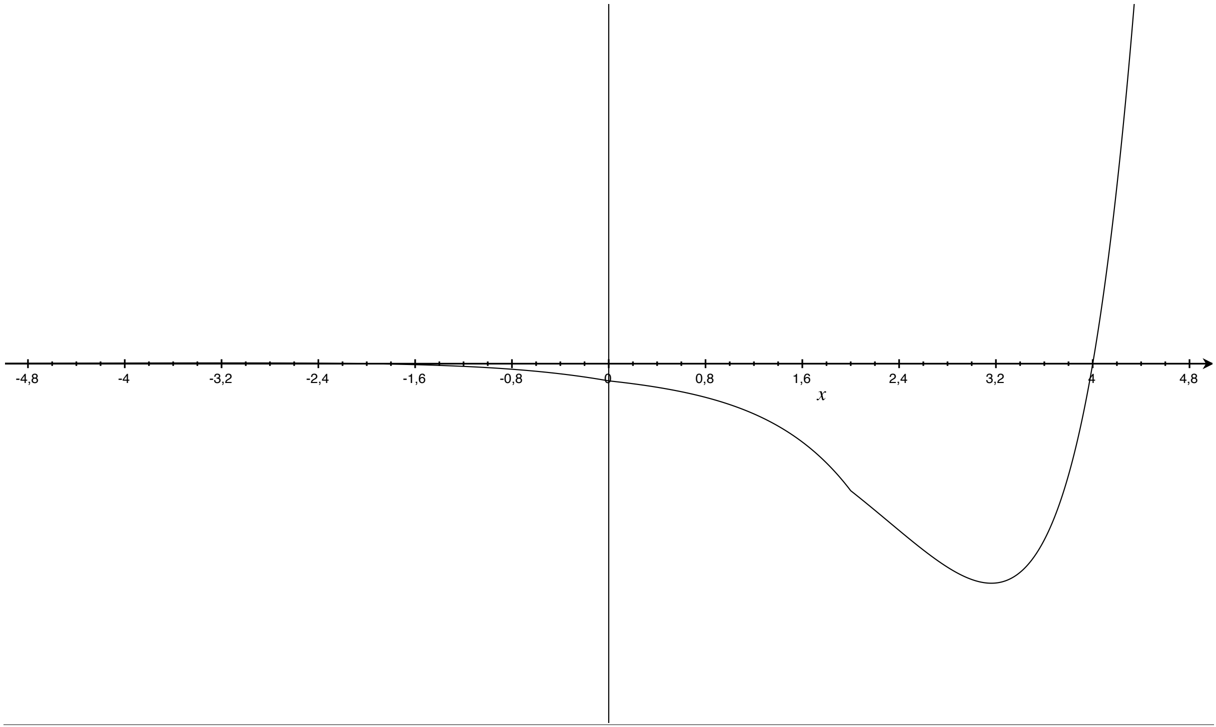
I punti $x = 0$ e $x = 2$ sono quindi punti angolosi. L'insieme di derivabilità della funzione è quindi $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. Vediamo ora il segno della derivata. Nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ avremo che

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2 - 10 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, +\infty), \quad f'(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt{10}, 0) \cup (2, \sqrt{10}).$$

Nell'insieme $(0, 2)$ risulta $f'(x) = e^x(-x^2 - 6) < 0$ in tutto l'intervallo. La funzione è quindi crescente in $(-\infty, -\sqrt{10}]$, decrescente in $[-\sqrt{10}, \sqrt{10}]$ e crescente in $[\sqrt{10}, +\infty)$. Il punto $x = -\sqrt{10}$ è di massimo locale mentre $x = \sqrt{10}$ è di minimo locale. La funzione non è limitata superiormente quindi non ha massimo e $\sup(f) = +\infty$. Per decidere se la funzione ha minimo dobbiamo confrontare il limite a $-\infty$ con il valore in $x = \sqrt{10}$.

$$f(\sqrt{10}) = e^{\sqrt{10}}(10 - 2\sqrt{10} - 8) = e^{\sqrt{10}} 2(1 - \sqrt{10}) < 0$$

quindi la funzione ha minimo e $\min(f) = e^{\sqrt{10}} 2(1 - \sqrt{10})$.



Esercizio 2 Calcolare l'integrale indefinito

$$\int e^{-x} \sin(2x)\, dx.$$

Soluzione

Eseguiamo l'integrazione per parti integrando e^{-x} e derivando $\sin(2x)$. Avremo

$$\int e^{-x} \sin(2x)\, dx = -e^{-x} \sin(2x) - \int -e^{-x} 2\cos(2x)\, dx$$

$$= -e^{-x} \sin(2x) + 2\left(-e^{-x} \cos(2x) - \int -e^{-x}(-2) \sin(2x)\, dx\right) = -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4\int e^{-x} \sin(2x)\, dx.$$

Quindi, riportando al primo membro l'ultimo integrale, otteniamo

$$5\int e^{-x} \sin(2x)\, dx = -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) + c.$$

L'integrale cercato sarà quindi

$$\int e^{-x} \sin(2x)\, dx = \frac{-e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) + c}{5}.$$

Esercizio 3 Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = -4. \end{cases}$$

Soluzione

Esaminiamo prima l'equazione omogenea associata $y'' + y' = 0$ la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = 0$ che ha soluzioni $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$. La soluzione generale dell'omogenea è quindi

$$y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2, \qquad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare con il metodo di somiglianza. Il termine noto è un polinomio di grado 0, quindi cercheremo una soluzione particolare di grado 0. Tuttavia dobbiamo osservare che 0 è radice dell'equazione caratteristica, quindi siamo in presenza di risonanza e dovremo moltiplicare per x la soluzione particolare cercata. Dovremo quindi determinare una costante A tale che la funzione $\bar{y} = Ax$ risolva l'equazione completa. Avremo

$$\bar{y}' = A, \qquad \bar{y}'' = 0$$

e, sostituendo nell'equazione

$$A = 1,$$

quindi

$$\bar{y} = x.$$

La soluzione generale dell'equazione completa è quindi

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 e^{-x} + c_2 + x.$$

Troviamo ora le costanti c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali. Derivando la soluzione otteniamo

$$y' = -c_1 e^{-x} + 1$$

e, sostituendo le condizioni iniziali, otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -2 \\ -c_1 + 1 & = -4. \end{cases}$$

Risolvendo abbiamo $c_1 = 5,\ c_2 = -7$, quindi la soluzione del problema di Cauchy risulta essere

$$y = 5e^{-x} - 7 + x.$$