Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 18 dicembre 2017

Domanda 1 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e^{n+1}-e^{n-1}}}{\log(n^2+e^{2n})} =$

A) $\dfrac{e}{2}$ B) $+\infty$ C) 0 D) $\sqrt{e}$

C

Domanda 2 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2\log(n+n^2)\log(3n+1)}{\log(e^{(n^2)}+1)\log(n^{\log n})} =$

A) 0 B) $+\infty$ C) 2 D) 3

C

Domanda 3 La successione $a_n = \dfrac{1}{n}(\sin^2(e^n)+1)\cos\dfrac{1}{n}$, definita per $n \geq 1$,

A) ha minimo B) ha massimo C) non ha limite D) non è limitata superiormente

B

Domanda 4 La successione $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}, \quad n \geq 1$

A) è debolmente crescente B) ha minimo ma non ha massimo
C) ha sia massimo che minimo D) è limitata superiormente

D

Domanda 5 $\int x\log x\, dx =$

A) $\dfrac{1}{2}x^2\log x$ B) $\dfrac{x^2\log x}{2} - x$ C) $x\log x - \dfrac{1}{2}(\log x)^2$ D) $\dfrac{x^2(2\log x-1)}{4}$

D

Domanda 6 La funzione $F(x) = \int_0^{|x|} t\sin t\, dt$, nel punto $x = 0$

A) non è continua B) ha un punto angoloso C) è derivabile D) ha un punto di cuspide

C

Domanda 7 $\lim_{x\to\infty} \int_1^x \dfrac{t-1}{t\sqrt{t}}\, dt =$

A) $-\infty$ B) $+\infty$ C) 0 D) π

B

Domanda 8 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y''-4y=0 \\ y(5)=0 \\ y'(5)=-2. \end{cases}$ Allora $y(-3) =$

A) $\dfrac{3e^{32}-2}{6e^{32}}$ B) $\dfrac{e^{32}-1}{2e^{16}}$ C) e^{-26} D) $\dfrac{e^4-e^{-10}}{e^{14}}$

B

Domanda 9 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=(\cos y)^2\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}. \end{cases}$ Allora $y(0) =$

A) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ B) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ C) $-\arctan 1$ D) π

A

Domanda 10 Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'=\dfrac{x+1}{x}y+x \\ y(5)=-1. \end{cases}$ Allora $y(1) =$

A) 0 B) $\dfrac{5e^6}{29}$ C) -2 D) $\dfrac{4}{5e^4}-1$

D

codice 474768

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 18 dicembre 2017

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore ed inferiore (o massimo e minimo). Determinare poi il numero di punti di massimo o di minimo locali. Tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Soluzione

La funzione è definita quando $x^2-1 \neq 0$ quindi se $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$. Calcoliamo ora i limiti.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty e^{\frac{1}{+\infty}} = -\infty\, e^0 = -\infty\, 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -2e^{\frac{1}{0^+}} = -2e^{+\infty} = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -2e^{\frac{1}{0^-}} = -2e^{-\infty} = -2\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0e^{\frac{1}{0^-}} = 0e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}\,\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{2}}\lim_{x\to1^+}(x-1)e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{2}}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}e^t = e^{\frac{1}{2}}(+\infty) = +\infty$$

dove abbiamo eseguito il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{x-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty e^{\frac{1}{+\infty}} = +\infty e^0 = +\infty\, 1 = +\infty.$$

La funzione ha quindi due asintoti verticali di equazione $x=-1$ e $x=1$. Inoltre $\sup(f) = +\infty$ e $\inf(f) = -\infty$, quindi la funzione non ha né massimo né minimo. Ci potrebbero essere asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1e^{\frac{1}{+\infty}} = 1e^0 = 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\,x = \lim_{x\to\pm\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x^2-1}} - 1\right) - e^{\frac{1}{x^2-1}}$$
$$= \left(\lim_{x\to\pm\infty} x\left(1 + \frac{1}{x^2-1} + o\left(\frac{1}{x^2-1}\right) - 1\right)\right) - e^{\frac{1}{+\infty}} = \left(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} + o\left(\frac{x}{x^2-1}\right)\right) - e^0 = 0 - 1 = -1.$$

Ne segue che la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = x-1$ sia per $x\to-\infty$ che per $x\to+\infty$.

Vediamo ora i massimi e i minimi locali.

- Dal fatto che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di massimo locale nella semiretta $(-\infty,-1)$.
- Dal fatto che $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0$ e che $f(x) < 0$ nell'intervallo $(-1,1)$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di minimo locale in tale intervallo.
- Dal fatto che $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si deduce che la funzione ha almeno un punto di minimo locale nella semiretta $(1,+\infty)$.

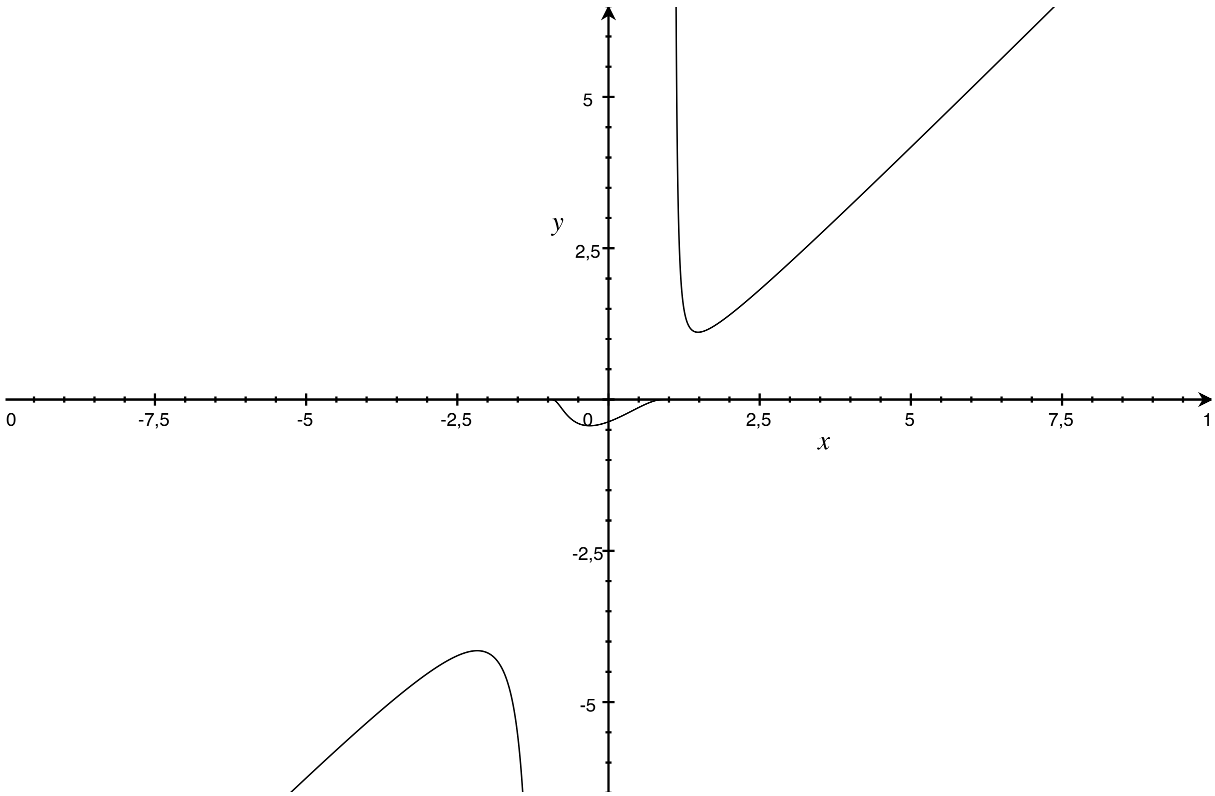
Vediamo ora che questi sono gli unici punti di massimo o di minimo locali. Calcoliamo la derivata.

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} + (x-1)e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{-2x}{(x^2-1)^2} = e^{\frac{1}{x^2-1}} \left(1 - \frac{2x(x-1)}{(x+1)^2(x-1)^2}\right) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \left(1 - \frac{2x}{(x+1)^2(x-1)}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{(x+1)^2(x-1) - 2x}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Osserviamo ora che la funzione è derivabile in tutto il suo dominio e che tutti i punti del dominio sono interni (il dominio è aperto). Quindi, per il teorema di Fermat, nei punti di massimo o di minimo locali, la derivata si deve annullare. Dato che

$$f'(x) = 0 \iff (x+1)^2(x-1) - 2x = 0$$

otteniamo che la derivata si annulla al più in tre punti, poiché il polinomio è di terzo grado. Ne segue che i tre punti trovati in precedenza sono gli unici punti di massimo o di minimo locali.



Esercizio 2 Calcolare

$$\int_1^2 x^3 \arctan \frac{1}{x} \, dx.$$

Soluzione

Cerchiamo una primitiva della funzione $x^3 \arctan \frac{1}{x}$ integrando per parti

$$\int x^3 \arctan \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^4}{4} \arctan \frac{1}{x} - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^4}{4} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$$
$$= \frac{x^4}{4} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2+1} \, dx = \frac{x^4}{4} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \left(\int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} \, dx + \int \frac{1}{x^2+1} \, dx \right)$$
$$= \frac{x^4}{4} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \left(\int x^2 - 1 \, dx + \arctan x \right) = \frac{1}{4} \left(x^4 \arctan \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per il teorema di Torricelli avremo quindi che

$$\int_1^2 x^3 \arctan \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{1}{4} \left(x^4 \arctan \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right) \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(16 \arctan \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 2 + \arctan 2 - \left(1 \arctan 1 + \frac{1}{3} - 1 + \arctan 1 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(16 \arctan \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \arctan 2 - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(16 \arctan \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \arctan 2 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(15 \arctan \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \right)$$

avendo sfruttato, nell'ultima uguaglianza, l'identità

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = x^2 - 2x \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea del tipo

$$y'' + ay' + by = f$$

con $a = 0,\ b = 4$. Risolviamo prima l'equazione omogenea

$$y'' + 4y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 + 4$ che non ha radici reali, dato che $\Delta = a^2 - 4b = -16 < 0$. La soluzione generale dell'omogenea sarà quindi

$$y_0 = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x) \right)$$

con $\alpha = -\frac{a}{2},\ \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Avremo allora

$$y_0 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare. Il termine noto un polinomio di secondo grado e 0 non è radice del polinomio caratteristico, quindi cercheremo una soluzione del tipo

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + c.$$

Deriviamo due volte ottenendo

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \qquad \bar{y}'' = 2A.$$

Sostituendo nell'equazione completa avremo

$$2A + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 2x.$$

Quindi

$$4Ax^2 + 4Bx + 2A + 4C = x^2 - 2x.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = -2 \\ 2A + 4C = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{8}.$$

La soluzione particolare cercata è quindi

$$\bar{y} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}.$$

La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione generale dell'omogenea con la soluzione particolare, quindi

$$y = y_0 + \bar{y} = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}.$$

Determiniamo ora le costanti $c_1,\ c_2$ dalle condizioni iniziali. Deriviamo prima la soluzione ottenendo

$$y' = -2c_1 \sin(2x) + 2c_2 \cos(2x) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Sostituendo $x = 0$ abbiamo

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 - \frac{1}{8} = c_1 - \frac{1}{8}, \qquad y'(0) = -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 - \frac{1}{2} = 2c_2 - \frac{1}{2}.$$

Dalle condizioni iniziali otteniamo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{8} = -2 \\ 2c_2 - \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$c_1 = -\frac{15}{8}, \qquad c_2 = \frac{7}{4}.$$

Sostituendo questi valori nella soluzione generale otteniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$y = -\frac{15}{8} \cos(2x) + \frac{7}{4} \sin(2x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}.$$