Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

Domanda 1 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$

A) ha massimo ma non ha minimo B) ha minimo ma non ha massimo

C) non ha né massimo né minimo D) ha sia massimo che minimo

A

Domanda 2 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(-1)^n 5^n} =$

A) non esiste B) $+\infty$ C) $\frac{3}{10}$ D) 0

D

Domanda 3 L'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

A) ha 2 soluzioni B) ha una sola soluzione C) ha 3 soluzioni D) non ha soluzione

B

Domanda 4 La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x\left(x - \frac{1}{|x|}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale B) ha minimo

C) non ha né punti di massimo né punti di minimo locali D) ha massimo

C

Domanda 5 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo

C) ha minimo ma non ha massimo D) ha sia massimo che minimo

C

Domanda 6 $\int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{t}\, dt =$

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{8e^3}{3}$ D) $3e^2 - e$

A

Domanda 7 Se $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt$ allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x} =$

A) 1 B) $+\infty$ C) non esiste D) 0

B

Domanda 8 $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\int_0^x te^{-t^2}\, dt\right) =$

A) $+\infty$ B) 1 C) non esiste D) $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$

D

Domanda 9 Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y + 1 + x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ allora $y(0) =$

A) 1 B) $2 - \frac{2}{e}$ C) 0 D) $\frac{4}{e} - 2$

D

Domanda 10 Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = 10y' - 9y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$ allora $y(1) =$

A) e^4 B) $\frac{e^{-5+\sqrt{34}} - e^{-5-\sqrt{34}}}{2\sqrt{34}}$ C) $\frac{e^{\sqrt{34}} - 1}{2}$ D) $\frac{e^9 - e}{2}$

D

codice 903831

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

Domanda 1 $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\int_0^x te^{-t^2}\,dt\right) =$

C

A) $+\infty$ B) non esiste C) $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ D) 1

Domanda 2 $\int_e^{e^2} \frac{(\log t)^2}{t}\,dt =$

A

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{8e^3}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $3e^2 - e$

Domanda 3 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{(-1)^n 5^n} =$

C

A) $\frac{3}{10}$ B) $+\infty$ C) 0 D) non esiste

C

Domanda 4 L'equazione $x^3 - 3x + 5 = 0,\ x \in \mathbb{R}$

A) non ha soluzione B) ha 3 soluzioni C) ha una sola soluzione D) ha 2 soluzioni

Domanda 5 La funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x\left(x - \frac{1}{|x|}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

A) ha un punto di massimo locale e un punto di minimo locale

B

B) non ha né punti di massimo né punti di minimo locali C) ha massimo

D) ha minimo

Domanda 6 Le radici quadrate del numero complesso $-4 - 4\sqrt{3}i$ sono

D

A) $z_1 = 2\sqrt{6} + 2i,\ z_2 = 2\sqrt{6} - 2i$ B) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i,\ z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

C) $z_1 = 2 + 2\sqrt{6}\,i,\ z_2 = 2 - 2\sqrt{6}\,i$ D) $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\right),\ z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right)$

Domanda 7 Se $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x} =$

B

A) 0 B) $+\infty$ C) non esiste D) 1

C

Domanda 8 L'equazione $z|z|^2 = i,\ z \in \mathbb{C}$

A) ha 3 soluzioni B) ha 2 soluzioni C) ha una sola soluzione D) ha infinite soluzioni

Domanda 9 La successione $a_n = \sqrt[n]{2^n + 1}$

B

A) non ha né massimo né minimo B) ha massimo ma non ha minimo C) ha sia massimo che minimo

D) ha minimo ma non ha massimo

Domanda 10 La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

D

A) ha massimo ma non ha minimo B) è limitata inferiormente ma non ha minimo

C) ha sia massimo che minimo D) ha minimo ma non ha massimo

codice 2014-2015

Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica A

Pisa, 31 maggio 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x$ nell'intervallo $x \in [0, 2\pi]$ determinandone massimo, minimo, punti di massimo e di minimo locali e intervalli di convessità. Tracciare un grafico approssimativo della funzione. Trovare poi il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione

La funzione è continua sul suo dominio quindi, per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo. Calcoliamo la deivata e studiamone il segno.

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1).$$

Risulta che

$$\sin x > 0 \iff x \in (0, \pi)$$

$$2\cos x - 1 > 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$$

Ne segue che

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \qquad f'(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right),$$

$$f'_+(0) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'(\pi) = f'\left(\frac{5\pi}{3}\right) = f'_-(2\pi) = 0.$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$, strettamente crescente in $\left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$ e strettamente decrescente in $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$. I punti $x_1 = 0, x_2 = \pi, x_3 = 2\pi$ sono di minimo locale, i punti $x_4 = \frac{\pi}{3}, x_5 = \frac{5\pi}{3}$ sono di massimo locale. Il minimo della funzione è $f(\pi) = -1$ mentre il massimo è $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5}{4}$.

Calcoliamo ora la derivata seconda e valutiamone il segno per determinare l convessità.

$$f''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos x = 4\cos^2 x - \cos x - 2.$$

Ponendo $t = \cos x$ otteniamo che

$$f''(x) > 0 \iff 4t^2 - t - 2 > 0 \iff t < \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \text{ oppure } t > \frac{1 + \sqrt{33}}{8}.$$

Osserviamo che $5 < \sqrt{33} < 6$ quindi $-1 < \frac{1-\sqrt{33}}{8} < \frac{1+\sqrt{33}}{8} < 1$. Poniamo quindi

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{33}}{8}\right), \ \beta = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{33}}{8}\right).$$

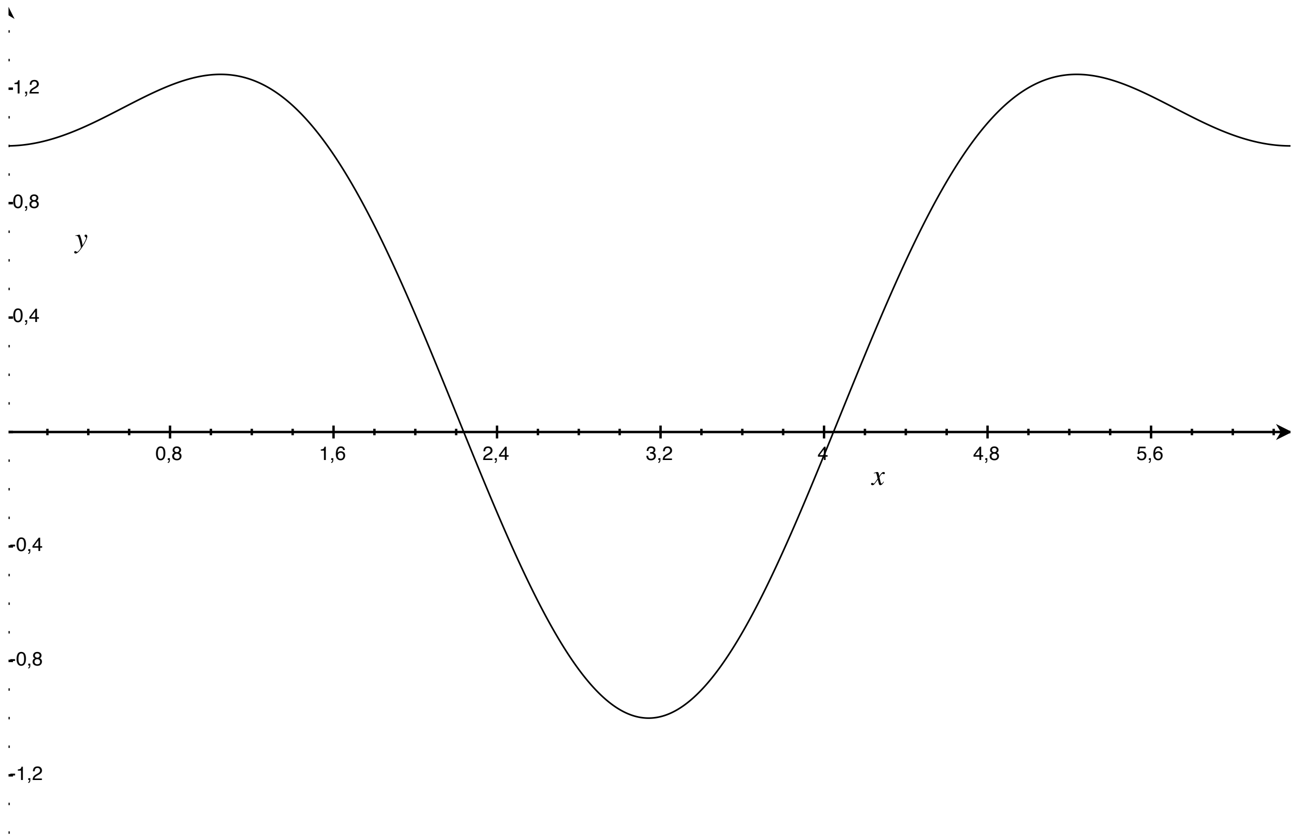
Risulta quindi che

$$f''(x) > 0 \iff x \in [0, \alpha) \cup (\beta, 2\pi - \beta) \cup (2\pi - \alpha, 2\pi], \qquad f''(x) < 0 \iff x \in (\alpha, \beta) \cup (2\pi - \beta, 2\pi - \alpha)$$

$$f''(\alpha) = f''(\beta) = f''(2\pi - \beta) = f''(2\pi - \alpha) = 0.$$

La funzione è convessa in $[0, \alpha]$, concava in $[\alpha, \beta]$, convessa in $[\beta, 2\pi - \beta]$, concava in $[2\pi - \beta, 2\pi - \alpha]$ e convessa in $[2\pi - \alpha, 2\pi]$. I punti $x_6 = \alpha, x_7 = \beta, x_8 = 2\pi - \beta, x_9 = 2\pi - \alpha$ sono punti di flesso.

Dallo studio della monotonia della funzione e dal fatto che $f(0) = f(2\pi) = 1$ segue che l'equazione $f(x) = k$ non ha soluzione se $k < -1$, ha una sola soluzione se $k = -1$, ha 2 soluzioni se $-1 < k < 1$, ha 4 soluzioni se $1 \leq k < \frac{5}{4}$, ha 2 soluzioni se $k = \frac{5}{4}$ e non ha soluzione se $k > \frac{5}{4}$.



Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2}$.

Soluzione

Ricordiamo che

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

quindi

$$\frac{1}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2} = \frac{1}{\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} = \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

Eseguiamo ora la sostituzione $e^{2x} = t$. Avremo quindi

$$x = \frac{\log t}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}.$$

Per quanto riguarda gli estremi di integrazione risulta che $x = 0 \iff t = 1$ e $x = 1 \iff t = e^2$ quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\sinh x)^2 + (\cosh x)^2} = \int_0^1 \frac{2}{e^{2x} + e^{-2x}}\, dx = \int_1^{e^2} \frac{2}{(t + \frac{1}{t})} \frac{dt}{2t} = \int_1^{e^2} \frac{dt}{t^2 + 1} = \Big[\arctan t\Big]_1^{e^2} = \arctan(e^2) - \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 3 Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3x^2 y^3 \\ y(1) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Soluzione

L'equazione è a variabili separabili, quindi, dato che $y(1) \neq 0$, in un intorno di $x = 1$ risulterà $y \neq 0$ e possiamo dividere per y^3. Otteniamo allora

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int 3x^2\, dx + c.$$

Eseguendo le integrazioni abbiamo

$$-\frac{1}{2y^2} = x^3 + c.$$

Determiniamo ora la costante c imponendo la condizione iniziale

$$-\frac{1}{2(-\frac{1}{2})^2} = 1^3 = 3 \iff \frac{-4}{2} = 1 + c \iff c = -3.$$

La soluzione quindi sarà

$$-\frac{1}{2y^2} = x^3 - 3.$$

Ricaviamo la y tenendo conto del fatto che il valore nel punto iniziale è negativo: dovremo quindi scegliere la soluzione negativa dell'equazione ottenendo

$$2y^2 = \frac{1}{3 - x^3},\ y < 0 \iff y = -\frac{1}{\sqrt{6 - 2x^3}}.$$