

## 数学分析 II-习题课

龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Mar-21

8. 证明  $\mathbb{R}^n$  中的闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.

证明. 首先, 假如  $E \subset \mathbb{R}^n$  是闭集, 那么对  $\forall \delta > 0$ , 我们可以定义  $F_\delta = \cup_{e \in E} U(e, \delta)$ , 此时根据  $F_\delta$  的定义有  $E \subset F_\delta$ . 从而  $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$

那么这个  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$  会不会就是  $E$  呢?

答案是是. 事实上, 对任意的  $r \notin E$ , 由于  $E$  是闭集, 故  $\delta = d(r, E) > 0$ , 故存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\frac{1}{n} < \delta$ , 从而对任意的  $e \in E, r \notin U(e, \frac{1}{n})$ , 因此  $r \notin F_{\frac{1}{n}} = \cup_{e \in E} U(e, \frac{1}{n})$ .

因此  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ , 闭集  $E$  是可数个开集  $\{F_{1/n}\}$  的交.

另一方面, 若  $E$  是开集, 则  $E^c$  是闭集, 根据刚才证明的结论, 存在可数个开集  $\{F_i\}_{i \in I}$ , 使得  $E^c = \bigcap_{i \in I} F_i$ , 于是  $E = \bigcup_{i \in I} F_i^c$  是可数个闭集的并.

证毕. □

9. ( $\mathbb{R}^n$  的正规性) 设  $S_1, S_2$  为  $\mathbb{R}^n$  中不相交的闭集 (不一定有界). 证明存在开集  $O_1, O_2$  满足  $S_i \subset O_i, i = 1, 2$ , 且  $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

证明. 取

$$O_1 = \bigcup_{e_1 \in S_1} U(e_1, \frac{1}{3}d(e_1, S_2)), O_2 = \bigcup_{e_2 \in S_2} U(e_2, \frac{1}{3}d(e_2, S_1))$$

容易验证  $O_1, O_2$  是各自包含  $S_1, S_2$  的开集. 下面我们证明这个  $O_1, O_2$  符合题目的要求.

事实上, 若  $O_1, O_2$  的交非空, 假设  $a \in O_1 \cap O_2$ , 那么由  $O_1, O_2$  的定义, 必存在  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$  使得,

$$a \in U(s_1, \frac{1}{3}d(s_1, S_2)), a \in U(s_2, \frac{1}{3}d(s_2, S_1))$$

因此  $|s_1 - s_2| \leq |s_1 - a| + |s_2 - a| \leq \frac{1}{3}(d(s_1, S_2) + d(s_2, S_1)) \leq \frac{1}{3}(|s_1 - s_2| + |s_1 - s_2|) < |s_1 - s_2|$ , 矛盾.

故  $O_1, O_2$  满足题设要求. 证毕.  $\square$

第 8,9 题在点集拓扑中都属于比较常见直观的问题.

10. 设  $f_1, \dots, f_n$  是  $[0, 1]$  上的  $n$  个连续函数, 称  $f_1, \dots, f_n$  在  $[0, 1]$  上是 \* 线性相关 \*, 若存在不全为零的常数  $c_1, \dots, c_n$ , 使得

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0, x \in [0, 1].$$

证明:  $f_1, \dots, f_n$  在  $[0, 1]$  上线性相关的充要条件是

$$\det \left( \left( \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx \right)_{n \times n} \right) = 0$$

证明. 注意到, 对于  $\mathbb{R}^{n \times n}$  上的矩阵  $A$ ,  $A$  的行列式为 0 等价于存在一组不全为 0 的系数  $\{c_i\}_{i=1}^n$ , 满足

$$\sum_{i=1}^n c_i A_{ij} = 0, \forall j = 1, \dots, n$$

回到原题, 记  $A = \left( \left( \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx \right)_{n \times n} \right)$ , 那么, 当  $\{f_i\}_{i=1}^n$  线性相关时, 即存在一组非零系数  $\{c_i\}_{i=1}^n$  满足  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0$  时, 对任意的  $j = 1, \dots, n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n c_i A_{ij} = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^1 f_i(x) f_j(x) dx = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right) f_j(x) dx = 0,$$

从而  $\det(A) = 0$

另一方面, 若  $\det(A) = 0$ , 那么存在  $\{c_i\}_{i=1}^n$  满足  $\sum_{i=1}^n c_i A_{ij} = 0, \forall j = 1, \dots, n$ , 记向量

$c = (c_1, \dots, c_n)$ , 则

$$cAc^T = \sum_{ij} c_i c_j A_{ij} = \int_0^1 \sum_{ij} [c_i f_i(x)][c_j f_j(x)] dx = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right)^2 dx$$

因此  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0$ , 即  $\{f_i\}_{i=1}^n$  线性相关.  $\square$

11.

1. 设  $\mathcal{T}$  是  $\mathbb{R}^n$  到  $\mathbb{R}^n$  的一个映射, 如果存在常数  $\theta \in (0, 1)$  以及自然数  $n_0$  使得  $|\mathcal{T}^{n_0}x - \mathcal{T}^{n_0}y| \leq \theta|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  其中  $\mathcal{T}^{n_0}$  表示  $\mathcal{T}$  复合  $n_0$  次. 证明: 映射  $\mathcal{T}$  有唯一的不动点, 即, 存在唯一的  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  使得  $\mathcal{T}x_0 = x_0$
2. 设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}$  中的有界闭集,  $f$  是  $\Omega$  到  $\Omega$  的一个映射, 满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x \neq y \in \Omega$ . 证明:  $f$  在  $\Omega$  中存在唯一的不动点. 另外, 能否把有界闭集的假设减弱为一般的有界集或无界闭集?

证明.

1. 记  $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{n_0}$ , 任取一个  $x \in \mathbb{R}^n$ , 考虑序列  $x, \mathcal{S}x, \mathcal{S}^2x, \dots, \mathcal{S}^m x, \dots$ . 我们先证明  $\{\mathcal{S}^i x\}_{i=0}^\infty$  将收敛到一个点  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . 事实上, 对给定的  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$|\mathcal{S}^{N+1}x - \mathcal{S}^N x| = |\mathcal{S}(\mathcal{S}^N x) - \mathcal{S}(\mathcal{S}^{N-1}x)| \leq \theta |\mathcal{S}^N x - \mathcal{S}^{N-1}x| \dots \leq \theta^N |\mathcal{S}x - x|$$

因此对任意两个自然数  $l < m$ ,

$$|\mathcal{S}^l x - \mathcal{S}^m x| \leq \sum_{i=l}^{m-1} |\mathcal{S}^{i+1}x - \mathcal{S}^i x| \leq \sum_{i=l}^{m-1} \theta^i |\mathcal{S}x - x| = \theta^l \frac{1 - \theta^{m-l}}{1 - \theta} |\mathcal{S}x - x| < \theta^n \frac{1}{1 - \theta} |\mathcal{S}x - x|$$

因此  $\{\mathcal{S}^i x\}_{i=1}^\infty$  是柯西列, 从而收敛到  $\mathbb{R}^n$  中的一个点  $x_0$ .

那么  $\mathcal{S}x_0 = x_0$ , 这是因为  $|\mathcal{S}x_0 - \mathcal{S}(\mathcal{S}^N x)| \leq \theta |x_0 - \mathcal{S}^N x|$ , 由于  $\mathcal{S}(\mathcal{S}^N x) = \mathcal{S}^{N+1}x$  和  $\mathcal{S}^N x$  都将收敛到  $x_0$ , 因此  $\mathcal{S}x_0$  只能等于  $x_0$ .

我们还需要证明  $x_0$  也是  $\mathcal{T}$  的不动点. 由上面  $\mathcal{S}x_0 = x_0$ , 即  $\mathcal{T}^{n_0}x_0 = x_0$ , 可得

$\mathcal{T}^{n_0}(Tx_0) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{n_0}x_0) = \mathcal{T}x_0$ , 而若  $\mathcal{T}x_0 \neq x_0$ , 则依题设有

$$|\mathcal{T}x_0 - x_0| = |\mathcal{T}^{n_0}(Tx_0) - \mathcal{T}^{n_0}x_0| \leq \theta |\mathcal{T}x_0 - x_0|$$

这与  $\theta < 1, |\mathcal{T}x_0 - x_0| > 0$  矛盾. 因此  $\mathcal{T}x_0 = x_0$ , 即  $x_0$  是  $\mathcal{T}$  的不动点.

证毕.

2. 假设  $f$  没有不动点, 考虑  $d = \inf_{x \in \Omega} |f(x) - x|$ . 于是存在一列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  满足  $|f(x_n) - x_n| \rightarrow d$ , 由于  $\Omega$  是有界闭集, 因此  $\{x_n\}_n$  在  $\Omega$  有聚点, 记作  $x_0$ , 依题设,  $|f(x_n) - f(x_0)| < |x_n - x_0| \rightarrow 0$ , 从而  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , 因此

$$|f(x_0) - x_0| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - x_n| = d$$

但  $|f(f(x_0)) - f(x_0)| < |f(x_0) - x_0| = d$ , 这与  $d$  是  $\{|f(x) - x| : x \in \Omega\}$  的下确界矛盾.

因此  $f$  有不动点. 若  $f$  有两个不动点  $x, y$ , 则  $x - y = f(x) - f(y)$  这与  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  矛盾.

若将题目条件中的  $\Omega$  有界闭改成无界闭或有界开集则结论不一定成立.

- $\Omega = [1, \infty)$  为无界闭集,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , 则  $|f(x) - f(y)| = |x - y|(1 - \frac{1}{xy}) < |x - y|$ , 且  $f(x) = x$  在  $[1, \infty)$  上不可能成立.
- $\Omega = (0, 1)$  为有界开集,  $f(x) = x - x^2$  满足题设条件, 但是在这一区间上没有不动点.

□