数学分析 II-习题课

龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Mar-21

作业

III Chap13 18. 设函数 $f(x,y)$ 在 R^2 内除直线 $x=a$ 与 $y=b$ 外处处有定义, 并且满足:

1. $\lim_{y\to b} f(x,y) = g(x)$ 存在
2. $\lim_{x\to a} f(x,y) = h(y)$ 一致存在, 即对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于 $\forall (x,y) \in \{(x,y) : 0 < |x-a| < \delta\}$ 有 $|f(x,y) - h(y)| < \varepsilon$

证明: 存在 $c \in \mathrm{R}$ 使得

1. $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{x\to a} g(x) = c$
2. $\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y) = \lim_{y\to b} h(y) = c$
3. $\lim_{E\ni(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$, 其中 $E = \mathrm{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = a, or y = b\}$

提示. 我们这里对一致存在做简单的解释: 这实际上是一致逼近的意思, 有兴趣的同学可以参考数分 II 第 10 章函数项级数的一致收敛的概念.

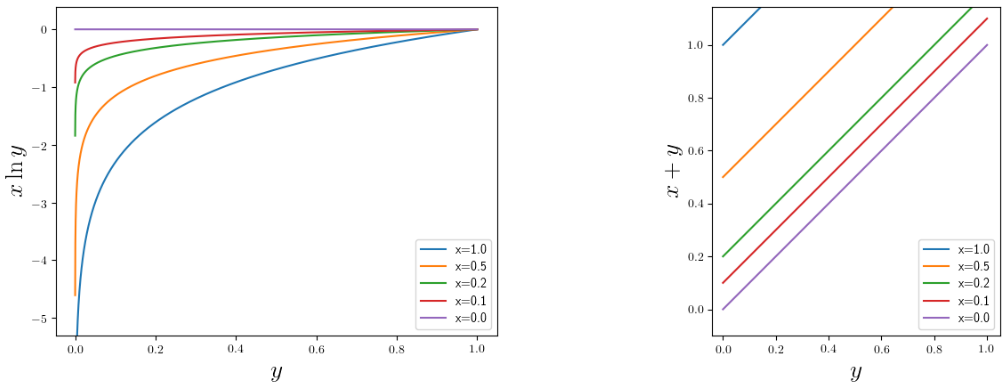
将二元函数 $f(x,y)$ 视作一系列一元函数 $g_x(y)$, 对每个给定的 $x \in \mathrm{R}$, 我们定义一个一元函数, 记作 $g_x : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$,

$$g_x(y) = f(x,y), \forall y \in \mathrm{R}$$

于是随着 x 逼近 a, 这一系列函数 $g_x(h)$ 逼近 $h(y)$. $\lim_{x\to a} f(x,y)=h(y)$ 一致存在的意思就是, 这一系列 g_x 是一致逼近 h 的: 也就是, 任给一个 ε, 都存在一个 δ_ε, 只要 $|x-a|<\delta_\varepsilon$, 都有 $|g_x(y)-h(y)|<\varepsilon$

举个例子:

- $a=0, g_x(y)=x\ln y, x\in[0,1], y\in(0,1]$, 当 $x\to 0$ 时, 函数 g_x 逼近 $h(y)\equiv 0$, 但不是一致逼近的. 如图1a
- $a=0, g_x(y)=x+y, x\in[0,1], y\in[0,1]$, 当 $x\to 0$ 时, 函数 g_x 逼近 $h(y)=y$, 而且是一致逼近的. 如图1b



(a) $g_x(y)=x\ln y$　　(b) $g_x(y)=x+y$

图 1

□

III Chap13 21. 设 $E\subset \mathrm{R}^n$, 证明: 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):E\to\mathrm{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处连续的充分必要条件是对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)(\delta>0)$ 内连续的函数 $h(\boldsymbol{y}), h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

证明.

- 必要性: 假设 h 在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)$ 内连续, 则容易验证 $h(\boldsymbol{f})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续
- 充分性: 假设对任何在 $U(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\delta)$ 内连续的函数 h, $h(\boldsymbol{f})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处都是连续的, 那么 $\boldsymbol{f}$ 一定在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续. 否则, 存在一个大于 0 的常数 ε 及一系列趋近于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点 $\{\boldsymbol{x}_n\}$, 使得 $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)||>\varepsilon$, 取 $h(\boldsymbol{u})=||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)||^2$, 则 $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=0\in\mathrm{R}^m, h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n))>\varepsilon^2$, 这与 $h(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续矛盾.

□

III Chap14 15. 设函数 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in\mathrm{R}^n(n\geq 2)$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0,\delta_0)$ 内存在 n 个偏导数, 且有 $n-1$ 个偏导数在该邻域内连续. 证明: $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处可微.

证明. 不妨设 $\frac{\partial u}{\partial x_i}, i=2,3,\cdots,n$ 在邻域内是连续的. 并假设 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 我们要证明

$$f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$$

我们记 $\boldsymbol{x}_0'=(x_2^0,\cdots,x_n^0),\Delta\boldsymbol{x}'=(\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$, $g_{x_1}(\boldsymbol{x}')=f(x_1,\boldsymbol{x}')$.

于是根据书中的定理 14.1.2, 对邻域内的每个 x_1, g_{x_1} 在邻域内都是可微的.

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}) &= f(x_1^0+\Delta x_1,\boldsymbol{x}_0')+\boldsymbol{D}g_{x_1^0+\Delta x_1}(\boldsymbol{x}_0')\Delta\boldsymbol{x}'+o(|\Delta\boldsymbol{x}'|)\\
&= f(x_1^0+\Delta x_1,\boldsymbol{x}_0')+\boldsymbol{D}g_{x_1^0}(\boldsymbol{x}_0')\Delta\boldsymbol{x}'+o(\boldsymbol{1})\cdot\Delta\boldsymbol{x}'+o(|\Delta\boldsymbol{x}'|)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\boldsymbol{D}g_{x_1^0}(\boldsymbol{x}_0')\Delta\boldsymbol{x}'+o(\Delta x_1)+o(|\Delta\boldsymbol{x}'|)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{D}f(\boldsymbol{x}_0)+o(|\Delta\boldsymbol{x}|)
\end{aligned}$$

从而 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是可微的. □

III Chap14 8. 设函数 $z=u(x,y)$ 在 $\mathrm{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 内可微, 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 在 Oxy 平面上作单位向量 $e_{\boldsymbol{r}}, e_{\boldsymbol{\theta}}$, 其中 $e_{\boldsymbol{r}}$ 表示 θ 固定时沿 r 增加的方向, $e_{\boldsymbol{\theta}}$ 表示 r 固定时沿 θ 增加的方向. 证明:

$$\frac{\partial u}{\partial e_{\boldsymbol{r}}}=\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial u}{\partial e_{\boldsymbol{\theta}}}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

证明. $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, 因此

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\\ \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\sin\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}\theta=-\frac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}x+\frac{\cos\theta}{r}\mathrm{d}y\\ \mathrm{d}r=\cos\theta\mathrm{d}x+\sin\theta\mathrm{d}y\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\end{cases}$$

由于 $e_{\boldsymbol{r}}=\frac{1}{r}(x,y), e_{\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{r}(-y,x)$, 利用上式对这两个方向求方向导数得:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial e_{\boldsymbol{r}}}=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cdot e_{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial e_{\boldsymbol{\theta}}}=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\cdot e_{\boldsymbol{\theta}}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

□

讨论. 对函数 $f:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$, 及方向 $\boldsymbol{v}$(不一定是单位向量), 沿 $\boldsymbol{v}$ 方向取微分/微元

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\cdot[\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n)^\top]$$

对函数 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$, $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}$ 在每个点局部定义了一个方向, 且沿此方向取微分/微元

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot[\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot(\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n)^\top]$$

因此, 若在某一点 $\boldsymbol{v},\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}$ 是同向的, 设 $\boldsymbol{v}=\alpha\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{x}}$, 则在这一点

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial f}{\partial u}$$

□

补充

1. 请举出一个函数 $u=f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n)$, 使得它同时满足下述条件:

   1. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处各个方向导数都存在.
   2. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处各个偏导数都存在
   3. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处连续但不可微.

证明. 取 $fx,y)=\sqrt{|xy|}$ □

2. 请举出一个函数 $u=f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n)$, 使得它同时满足下述条件:

   1. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处可微
   2. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 邻域内各方向导数存在

3. $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处偏导不连续

证明. 即作业题 Chap14 10. 取 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ $\square$

3. 复合函数求导: $\boldsymbol{g}:\mathrm{R}^l\to\mathrm{R}^m, \boldsymbol{f}:\mathrm{R}^m\to\mathrm{R}^n$ 在合适的邻域内连续可微. 记 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{g}\\ &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})\boldsymbol{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$, 即 $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{g}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial\boldsymbol{x}}$

1. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\cdots\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\cdots)$, 其中 $f:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$.
   求 $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}$
2. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})$, 其中 $\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{R}^N, f(\cdot,\boldsymbol{\theta}):\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$.
   求 $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}, \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\theta}}$
3. $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{\theta})$, 其中 $\boldsymbol{\theta}\in\mathrm{R}^N, f(\cdot,\boldsymbol{\theta}):\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$
   求 $\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}, \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\theta}}$

证明. 略 $\square$