数学分析 II-习题课

龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Feb-28

3. 设函数 $f(x) \in C([0,1])$ 且 $f(0) \neq f(1)$. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

证明. (若在考试中下面的证明过程应该更规范): 不失一般性，我们考虑 $f(0) < f(1)$ 的情形, 记 $a_0 = 0, b_0 = 1$, 依题设有 $f(a_0) < f(b_0)$. 我们构造如下 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n$

```
for n = 0, 1, ···
    find x ∈ (a_n, b_n) s.t. f(x) = (f(a_n)+f(b_n))/2
    if x − a_n < b_n − x
        find y ∈ (a_n, x) s.t. f(y) = (f(a_n)+f(x))/2
    else
        find y ∈ (x, b_n) s.t. f(y) = (f(x)+f(b_n))/2
    set a_{n+1} = min(x, y), b_{n+1} = max(x, y)
```

容易证明

$$[1] \quad f(b_0) > f(b_1) > \cdots > f(b_n) > \cdots > \cdots > f(a_n) > \cdots > f(a_1) > f(a_0),$$

$$[2] \quad b_0 > b_1 > \cdots > b_n > \cdots > \cdots > a_n > \cdots > a_1 > a_0,$$

$$[3] \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| < \frac{|a_n - b_n|}{2}$$

依据闭区间套定理, 存在 c 满足 $a_n < c < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n a_n = \lim_n b_n = c$, 这时根据 f 的连

续性有 $f(c)=\lim_n f(a_n)=\lim_n f(b_n)$, 从而进一步有

$$f(b_0)>f(b_1)>\cdots>f(b_n)>\cdots>f(c)>\cdots>f(a_n)>\cdots>f(a_1)>f(a_0),$$

依据 $c, f(c)$ 的上述性质可知 c 不是极值点. □

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内任一点处的极限均为 0. 问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积吗?

提示. 1. 先证明 $\forall\varepsilon>0$, 只存在有限个点 $x\in[a,b]$ 使得 $|f(x)|>\varepsilon$.

若有无穷个这样的点 $\Rightarrow$ 那么这些点会有聚点 $\Rightarrow$ 这个聚点处的函数极限非 0, 与题设条件矛盾.

备注: 有限闭集中的无穷个点必有聚点–这可由有限覆盖定理证明–而有限覆盖定理可由闭区间套定理证明– 闭区间套定理可由数列极限中的若干基本性质得到.

经**同学**提醒, 可以直接用有限覆盖定理证明: 每个点有一个领域, 在这个领域内函数绝对值小于 $\varepsilon \Rightarrow$ 由有限覆盖定理, 可以用有限个这样的领域覆盖 $[a,b]\Rightarrow$ 只有有限个点(那些领域的中心才有可能)x 可能使得 $|f(x)|>\varepsilon$

2. 再依据积分的定义或者达布理论可以证明这个函数黎曼可积.

上面第一步得到结论实际上已经得到了 f 在区间各局部的振幅的性质, 此时可以用书中的定理 7.2.6 直接得到题目的证明, 当然书中的定理 7.2.6 也是来自于达布理论, 来自于黎曼可积的定义.

□

5. 函数作图:

$$x=\frac{t^3-t^2+2}{t}, y=\frac{t^3-1}{t+1}$$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处满足 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n), x\to 0, n\geq 1$. 问: $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否存在直至 n 阶导数? 若存在, 请计算相应导数值.

提示: 取 $f(x)=x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+2}}$ 分 $n=1$ 和 $n>1$ 讨论. 这个示例函数在 0 处没有二阶导, 它由一个控制量级的函数 x^{n+1} 和一个高度震荡但有界的函数 $\sin\frac{1}{x^{n+2}}$ 组成.

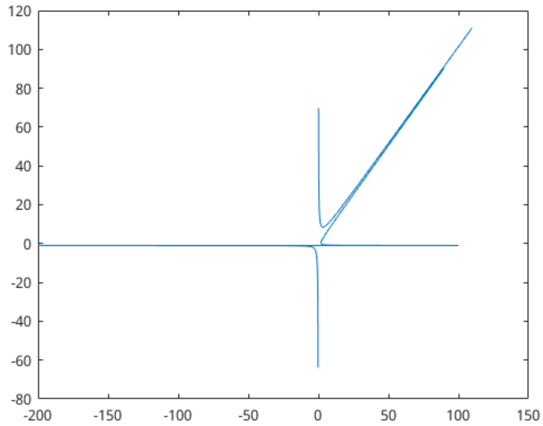

图 1

8. 设 $f(x)$ 是 R 上的可微非常值函数且满足 $\forall x \in R, f(f(x)) = f(x)$. 问: $f(x) \equiv x$ 是否成立?

证明 (by 陈代超). 注意到, 对某个 $y \in \mathrm{R}$, 若存在 $x \in \mathrm{R}$ 满足 $f(x) = y$, 则有 $f(y) = f(f(x)) = f(x) = y$. 因此, f 的值域中的点都是满足条件的点.

我们只需要证明 f 的值域是 R. 又由于 f 是连续函数, 因此只需要证明 f 的值域没有上界和下界.

以上界为例, 假设 f 有上界, 那么 f 有上确界 [1], 我们把它的上确界记作 M, 并可取 $\{x_n\}_n, n = 0, 1, \cdots$ 满足 $f(x_n) \to M$. 依题设, f 不是常值函数, 我们可以取 $m < M$, 属于 f 的值域, 因此有 f 的连续性, $[m, f(x_n)]$ 包含于 f 的值域, 故其中的任一点 y 都满足 $f(y) = y$, 从而 $\forall y \in [m, M = \lim_n f(x_n))$, 有 $f(y) = y$. 再由于 f 的连续性, 可得 $f(M) = M$.

由于 $f(x) = x, x \in [m, M]$, 故 f 的左导数为 1, 因此由 f 的可微性, 可知 f 的右导数也为 1. 于是, 存在 $\{x'_n\}_n$ 满足

$$x'_n \to M, x'_n > M$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n) - f(M)}{x'_n - M} = 1$$

取一个这样的 x'_N 满足 $f(x'_N) - f(M) > \frac{x'_n - M}{2} > 0$, 则有 $f(x'_N) > f(M) = M$, 这与 M 是 f 值域的上确界矛盾.

[1] 上确界, 下确界是个很好用的概念

因此 f 值域无上界, 同理, f 值域无下界. 证毕. □

9. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

其中 $[z]$ 表示不超过 z 的最大整数. 计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

提示. $\int_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(n+1)}^{1/n}$ □

10. 设 $f(x)\in C^1([0,\pi])$ 且满足 $\int_0^{\pi} f(x)sin(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(x)cos(x)\mathrm{d}x=0$. 证明: $\forall\alpha\in \mathrm{R},\exists\xi\in(0,\pi)$, s.t. $f'(\xi)-\alpha f(\xi)=0$.

证明. 令 $G(x)=f'(x)-\alpha f(x)$ 是连续函数, 依题设

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} G(x)sin(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} f'(x)\sin(x)\mathrm{d}x-\alpha f(x)\sin(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi} f'(x)\sin(x)\mathrm{d}x\\ &= f(x)\sin(x)|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\cos(x)\mathrm{d}x\\ &= 0\end{aligned}$$

因此 G 不可能在 $(0,\pi)$ 上恒大于 0 或恒小于 0, 依据零点存在定理可知 G 有 0 点. □

6. 设函数 $f(x):[0,1]\to[0,1]$ 连续, 函数 $g(x):[0,1]\to[0,1]$ 可积. 问: 复合函数 $f(g(x)),g(f(x))$ 在 $[0,1]$ 上是否可积?

为了解答这个问题, 我们先了解一些准备知识.

定义 1 (外测度)**.** *外测度的一般概念可以参考 Wikipedia, 在一般的实变函数论的教科书* [2]*中也可以找到. 这里我们说明 R 上的外测度的定义.*
设 $E\subset\mathrm{R}$. 若 $\{I_k\}$ 是 R 中的可数 [3]*个开区间, 且*

$$E\subset\bigcup_{k\geq 1} I_k$$

[2]例如《实变函数论》周民强, 定义 2.1,P79

[3]可数的定义可以参考实变函数论教科书, 在教材例 2.4.3 及其后面的注释中也给出了定义

则称 $\{I_k\}$ 为 E 的一个L-**覆盖**. 显然这样的覆盖有很多种取法, 且每一个 L-覆盖 $\{I_k\}$ 都对应一个非负广义实数 $\sum_{k\geq 1}|I_k|$(可以是 ∞), [4] 这里 $|I_k|$ 即开区间 I_k 的长. 我们称

$$m^*(E)=\inf\left\{\sum_{k\geq 1}|I_k|:\{I_k\}\text{为}E\text{的}L\text{-覆盖}\right\}$$

为点集 E 的 *Lebesgue* 外测度

著名的 Lebesgue 定理 (定理 7.2.9: 勒贝格定理) 给出了对于给定函数是否黎曼可积的完整刻画, 有了外测度的概念之后, 这个定理可以按照如下方式等价表述:

定理 1 (Lebesgue 定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 记 E 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的间断点集, 则

$$f(x)\in R[a,b]\Leftrightarrow m^*(E)=0$$

Lebesgue 定理的证明可以参考《习题课讲义》(谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边著) 命题 10.1.5,10.1.6, 也可参考实变函数论教科书. 这里我们不需要这么强的结论, 只需要用到教材中的定理 7.2.6 就行了. 但在此之前, 我们需要证明外测度的一个基本性质: 次可加性 [5]

引理 1. 外测度的基本性质

1. 非负性: $m^*(E)\geq 0, m^*()=0$
2. 单调性: 若 $E_1\subset E_2$, 则 $m^*(E_1)\leq m^*(E_2)$
3. 次可加性: $m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$

外测度基本性质的证明. 第 1,2 条是显然的. 我们证明上述第 3 条性质. 在下面的证明中需要用到数项级数

不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)<\infty$. 对任意的 $\varepsilon>0$ 及自然数 k, 我们可以找到 E_k 的 L-覆盖 $\{I_{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$ 使得

$$E_k\subset\bigcup_{l=1}^{\infty}I_{k,l},\sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|<m*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$$

[4]这里需要了解数项级数的知识, 如果没有学过相关知识, 可以直接理解为极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|I_k|$.

[5]Wikipedia 中说的是满足 xxx 性质的广义函数称为外测度, 我们则是由公式给出定义, 再证明其满足 xxx 性质. 实际上两种都是可以的, 这在后面的学习中也有许多这样的例子, 只需要能从定义出发进行严谨的推导就行.

从而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{l=1}^{\infty} I_{k,l}), \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}| \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon$$

显然, $\{I_{k,l} : k, l = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 L-覆盖, 从而有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

证毕. □

根据次可加性及其证明过程容易知道, 若 $E \subset \bigcup_{k\ge1} E_k$, 则 $m^*(E) \le \sum_{k\ge1} m^*(E_k)$.

有了上述准备知识, 下面我们可以回过来证明试题 6 了. 为了保持阅读的流畅, 我们把教材的定理 7.2.6 放到这里, 同时也再次把第 6 题的题干放到这里.

定理 2. *教材定理 7.2.6 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 则下面三个结论等价*

1. *$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积*

2. *对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在区间 $[a, b]$ 的一个分割 Δ, 使得*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$$

3. *对 $\forall\varepsilon > 0, \sigma > 0$, 存在区间 $[a, b]$ 的一个分割 Δ, 使得振幅 $\omega_i \ge \varepsilon$ 的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度总和小于 σ*

6. 设函数 $f(x) : [0, 1] \to [0, 1]$ 连续, 函数 $g(x) : [0, 1] \to [0, 1]$ 可积. 问: 复合函数 $f(g(x)), g(f(x))$ 在 $[0, 1]$ 上是否可积?

第 6 题的解答. 先说结论, $f(g(x))$ 在 $[0, 1]$ 上一定可积, $g(f(x))$ 不一定.
第一部分: $f(g(x))$ 一定是可积函数. 事实上, 对任意的 $\varepsilon > 0, \sigma > 0$, 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 连续, 故 f 在 $[0, 1]$ 上一致连续, 故存在 $\varepsilon' > 0$, 使得只要 $|u - v| < \varepsilon'$, 就有 $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$, 由于 g 可积, 故存在 $[0, 1]$ 的分割 Δ, 使得 g 的振幅 $\omega_i' \ge \varepsilon'$ 的小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度和小

于 σ. 因此, 对于这一分割, $f(g(x))$ 的振幅 $\omega_i \geq \varepsilon$ 的小区间长度和小于 σ. 由 ε, σ 的任意性可知 $f(g(x))$ 在 $[0,1]$ 上可积.

第二部分: 下面我们举出一个满足题设条件的例子, 说明这类函数不一定可积. 我们知道 $[0,1]$ 的有理数集合是可数的, 事实上, 我们可以将 $[0,1]$ 上的有理数按照如下方式排列, 遇到重复的则删掉不排列在其中,

$$0/1, 1/1, 0/2, 1/2, 2/2, \cdots, 0/n, 1/n, \cdots, n/n, \cdots$$

于是我们记 $\mathbf{Q} = \{r_n : n = 1, 2, ...\}$ 表示 $[0,1]$ 上的所有的有理数, 令

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, r_n + \frac{1}{2^{n+2}}),$$

易知 $m^*(r_n - 1/2^{n+2}, r_n + 1/2^{n+2}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, 因此根据外测度的次可加性有

$$m^*(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

取 V 是 U 的余集 $V = [0,1]/U$, 则 $[0,1] \subset U \cup V$, 于是

$$1 = m^*([0,1]) \leq m^*(V) + m^*(U) \leq m^*(V) + \frac{1}{2}$$

因此 $m^*(V) \geq \frac{1}{2}$. 现在我们定义 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = \inf_{v \in V} |x - v|$ [6]. 容易证明这个函数 f 满足如下性质

- $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$
- 对 $x \in [0,1]$, 若对某个 $r_n \in \mathbf{Q}$ 有 $x \in (r_n - \frac{1}{2^{n+2}}, r_n + \frac{1}{2^{n+2}})$,, 则 $f(x) \geq \frac{1}{2^{n+2}} - |x - r_n|$
- $f(x) = 0, \forall x \in V$, 且 $f(x) > 0, \forall x \notin V$.
- f 是连续函数, 事实上, 对 $x, y \in [0,1]$, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 可取 $v_\varepsilon \in [0,1]$ 使得 $f(x) >$

[6]这个函数也就是到一个点集的距离函数

$|v_\varepsilon - x| - \varepsilon$ 从而

$$f(y) - f(x) \leq f(y) - |x - v_\varepsilon| + \varepsilon \leq |y - v_\varepsilon| - |x - v_\varepsilon| + \varepsilon \leq |x - y| + \varepsilon$$

由于 ε 的任意性, 可知 $f(y) - f(x) \leq |x - y|$. 同理, $f(x) - f(y) \leq |x - y|$. 故 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, 因此 $f : [0,1] \to [0,1]$ 是一个连续函数.

现取函数 g 满足 $g(0) = 1, g(x) = 0, x \neq 0$, 则 g 在 $[0,1]$ 上可积.

对于 $v \in V$, 由于 $[0,1]$ 中的所有点都是 $\mathbf{Q}$ 的聚点, 因此可以找到一列 $\{r_n'\} \subset \mathbf{Q}, r_n' \to v$, 此时 $f(v) = 0$, 且对 $\forall n \geq 1, f(r_n') > 0$, 故 $g(f(v)) = 0, g(f(r_n')) = 1$, 因此 v 是函数 $g(f(x))$ 的不连续点, 且 $g(f(x))$ 在 v 的任意领域内的振幅为 1. 因此不可能找到一个分割 Δ, 使得 $g(f(x))$ 的振幅 $\omega_i > \frac{1}{2}$ 的小区间长度和小于 $m^*(V) \geq \frac{1}{2}$(因为那些小区间的并集至少要包含 V, 因此这些小区间的长度和不小于 V 的外测度 $m^*(V)$). 根据教材定理 7.2.6(本文定理 (2)) 可知这个函数 $g(f(x))$ 不可积.

证毕!

$\square$