数学分析 II-习题课

龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Mar-14

10. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 和柱体 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2\le\frac{1}{4}$ 公共部分的体积.

解 1. 对每个给定的 x_0, 我们可以求 $x=x_0$ 这个平面与题设区域的截面面积. 截面区域为:

$$P_0:\begin{cases} y^2+z^2\le 1-x_0^2 \\ y^2\le x_0-x_0^2 \end{cases}$$

P_0 的面积 S_0 为

$$S_0=\int_{-\sqrt{x_0-x_0^2}}^{\sqrt{x_0-x_0^2}}\sqrt{1-x_0^2-y^2}\mathrm{d}y,$$

做积分代换 $y=\sqrt{1-x_0^2}\sin\theta, b=\sqrt{\frac{x_0-x_0^2}{1-x_0^2}}=\sqrt{\frac{x_0}{1+x_0}}$,

$$S_0=2(1-x_0^2)\arcsin\sqrt{\frac{x_0}{1+x_0}}+2(1-x_0)\sqrt{x_0}$$

因此, 题设区域的体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2(1-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + 2(1-x)\sqrt{x}, [x=t^2] \\
&= \int_0^1 2\mathrm{d}(x-\frac{1}{3}x^3)\arctan\sqrt{x} + \int_0^1 4(1-t^2)t^2\mathrm{d}t, [\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x}) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}] \\
&= 2(x-\frac{1}{3}x^3)\arctan\sqrt{x}|_0^1 + \frac{8}{15} - \int_0^1 (x-\frac{1}{3}x^3)\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

□