数学分析 II-习题课

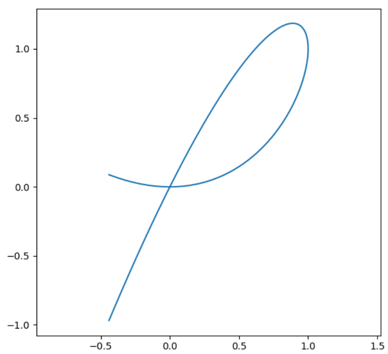
龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Mar-07

几何应用中的定积分计算

1. 求由 $y^2 - 2xy + x^3 = 0$ 所确定的封闭曲线所包围的图形面积.



解. 为分析图形形状, 找出 y 随 x 变化的规律, 我们令 $y = tx$ 求得参数曲线

$$x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$$

t 从 0 到 2 形成了一段闭曲线. 这段闭曲线所围成的图形面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^2 (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 [x\mathrm{d}(2t^2 - t^3) - y\mathrm{d}(2t - t^2)] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (4t^2 - 4t^3 + t^4)\mathrm{d}t = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

□

2. 设曲线方程为 $y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t, 0\le x\le\pi$, 求曲线的长度.

解. 记方程为 $y=f(x)$, 依据弧长计算公式

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi\sqrt{1+f'(x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sqrt{1+\sin x} \\ &= \int_0^\pi(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x \\ &= 4 \end{aligned}$$

□

作业选讲

22. 设函数 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 且 $f'(0)$ 存在, 再设对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty), \int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}xf(x)$. 证明: $f(x)\equiv cx$, 其中 $c\in\mathrm{R}$ 为常数.

证明. 令 $F=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 F 在 R 上可微, 且 $F'=f$, 从而 $f=\frac{2F}{x}$ 在 R/$\{0\}$ 上可微, 由于 $f'(0)$ 存在, 故 f 在 R 上可微. $f=F'=\frac{1}{2}xf'+\frac{1}{2}f, \forall x\in\mathrm{R}$ 故 $f(x)=xf'(x), \forall x\in\mathrm{R}$. 对任意不包含 0 的区间 $[a,b]$, 有

$$\ln|f(b)|-\ln|f(a)|=\int_a^b\mathrm{d}\ln|f(x)|=\int_a^b\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|b|-\ln|a|$$

故对于 $x>0$ 有 $|f(x)|=|f(1)x|$, 对 $x<0$ 有 $|f(x)|=|f(-1)x|$. 由 f 在 R 上的连续性可知 $f(x)=f(1)x, \forall x>0, f(x)=-f(-1)x, \forall x<0$. 再由 f 在 0 处的可微性知 $f(x)=f(1)x, \forall x\in\mathrm{R}$. 证毕. □

23. 设 $P_n(x)$ 为 $n\ge1$ 次多项式, $[a,b]$ 是任一闭区间. 证明: $\int_a^b|P_n'(x)|\mathrm{d}x\le 2n\max_{a\le x\le b}\{|P_n(x)|\}$

提示.

1. $|P_n|$ 的最大值一定是 P_n 的最大值或最小值, 一定是 P_n' 的零点.

2. P_n' 的零点至多有 $n-1$ 个. 这些零点把 $[a,b]$ 划分成至多 n 个区间.

3. 对于上述任意一个小区间 $[s,t]$, P_n' 在 $[s,t]$ 保持正负不变, 因此 $\int_s^t|P_n'(x)|\mathrm{d}x=|\int_s^t P_n'(x)\mathrm{d}x|=|P_n(t)-P_n(s)|\le 2\max_{a\le x\le b}|P_n(x)|$

□

25. 求下列极限:

$$(2) \lim_{x\to 0+0} \frac{\int_0^x (\sin t)^\alpha \mathrm{d}t}{x^{1+\alpha}}; (3) \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x e^{t^\alpha} \mathrm{d}t}{x^{1-\alpha} e^{x^\alpha}} (\alpha > 0).$$

提示.

2. $(\sin t)^\alpha = t^\alpha + o(t^\alpha), \int_0^x (\sin t)^\alpha \mathrm{d}t = \int_0^x t^\alpha + \int_0^x o(t^\alpha)$

3. 洛必达法则

□

37. (Riemann 定理) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 $T>0$ 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T g(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(x) g(\lambda x) \mathrm{d}x = 0$$

作业提示. 作业中所给的条件是 "f 在区间 $[a,b]$ 单调", 因此作业题可以用定积分第二中值定理来做. 由于 f 单调, 故

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) g(\lambda x) \mathrm{d}x &= f(a) \int_a^\xi g(\lambda x) \mathrm{d}x + f(b) \int_\xi^b g(\lambda x) \mathrm{d}x \\
&= f(a) \int_{\xi'}^\xi g(\lambda x) \mathrm{d}x + f(b) \int_\xi^{\xi' + \frac{T}{\lambda}} g(\lambda x) \mathrm{d}x + f(b) \int_{\xi''}^b g(\lambda x) \mathrm{d}x \\
&= \to 0 (\text{ as } \frac{T}{\lambda} \to 0).
\end{aligned}$$

□

证明. 这里我们将条件放宽为 "f 在 $[a,b]$ 可积", 证明完整的 Riemann 定理.

由于 f 可积, 故对任意的 $\varepsilon, \sigma > 0$, 存在 $\delta \in (0, b-a)$, 当 $\Delta = \frac{T}{\lambda} < \delta$ 时, f 在划分

$$[a, a+\Delta, a+2\Delta, \cdots, a+n\Delta, b], n = [\frac{b}{\Delta}]$$

下满足 $\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \Delta_i < \sigma$, 其中 $\omega_i (i = 1, \cdots, n+1)$ 是 f 在这 $n+1$ 个区间上的振幅, $\Delta_i = \Delta (i = 1, \cdots, n), \Delta_{n+1} = b - a - n\Delta < \Delta$ 是各小区间长.

记 $f(x)(x\in[a,b]),g(x)(x\in[0,T])$ 的绝对值最大值分别是 F,G. 记 f 在第 i 个小区间上的最小值为 f_i. 对 $i=1,\cdots,n$, 由 $\int_{a+i\Delta}^{a+(i+1)\Delta}g(\lambda x)\mathrm{d}x=0$,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{a+i\Delta}^{a+(i+1)\Delta}f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{a+i\Delta}^{a+(i+1)\Delta}(f(x)-f_i)g(\lambda x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \int_{a+i\Delta}^{a+(i+1)\Delta}|\omega_i g(\lambda x)\mathrm{d}x| \\
&\leq G\cdot\omega_i\Delta_i
\end{aligned}
$$

同时 $|\int_{a+n\Delta}^{b}f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x|\leq FG(b-a-n\Delta)\leq FG\Delta$ 故 $|\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x|\leq G\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i\Delta_i+FG\Delta\leq G\cdot\sigma+FG\Delta$ □

扩展参考

积分的连续性相关问题

1. 设 $f\in\mathrm{R}[a,b]$, 证明: 对于每一个给定的 $\varepsilon>0$, 存在函数 g, 使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

其中 g 是:(1) 阶梯函数;(2) 折线函数;(3) 连续函数;(4) 连续可微函数;

提示.

1. 依据达布理论构造阶梯函数 g_1
2. 将阶梯函数在每个小区间边界的更小区间内用折线接起来 g_2
3. 折线函数就是连续函数 g_3
4. 由于连续函数 g_3 在闭区间一致连续, 考虑 $g_4(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}g_3(x)$, g_4 为连续可微函数.

□

2. 设 $f\in\mathrm{R}[a-\delta,b+\delta]$, 其中 $\delta>0$, 则有

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

提示. 注意到, 对于任何在 $[a-\delta, b+\delta]$ 上可积的函数 g,

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b (|f(x+h)-g(x+h)|+|f(x)-g(x)|+|g(x+h)-g(x)|)\mathrm{d}x$$

- 使用上面 1 的结论, 用阶梯函数 g 逼近 f, 再想办法证明, 对于给定阶梯函数

$$\int_a^b |g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x \to 0, h \to 0$$

- 或者使用上面 1 的结论, 用连续函数 g 逼近 f, 再由 g 的一致连续性得到.

$$\int_a^b |g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}x \to 0, h \to 0$$

□

一些简单的渐近分析

1. (例 7.5.1) 设函数 $f(x) \in \mathrm{C}[0,1]$, 则,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}f(0)$$

讨论. 上述积分 $\int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$ 直观的说就是 $f(x)$ 的加权求和/积分, 权重是 $\frac{n}{1+n^2x^2}, (x \in [0,1])$. 当 n 增大时, 对于比较大的 x, 权重可以忽略不计. 所以 $n \to \infty$ 时, 积分的极限只与 $f(0)$ 有关. 剩下的就是我们要把这个事情说清楚.

取 ξ_n 满足当 $n \to \infty$ 时有 $\frac{n}{1+n^2\xi_n^2} \to 0, \xi_n \to 0$, 例如书中所取的 $\xi_n = n^{-\frac{1}{3}}$ 就符合这个要求. 再证明

$$\int_0^{\xi_n} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \approx f(0)\int_0^{\xi_n} \frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \to \frac{\pi}{2}f(0), \int_{\xi_n}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x \to 0$$

□

2. 求证 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x = 0$.

提示. 取 ξ_n 满足 $\xi_n \to 0, (1-\xi_n^2)^n \to 0$, 例如 $\xi_n = n^{-\frac{1}{3}}$ 就符合这个要求. 再分别证明:

$$\int_0^{\xi_n} (1-x^2)^n \mathrm{d}x \to 0, \int_{\xi_n}^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \to 0$$

□

3. 对 $[a,b]$ 上的实值函数 f, ϕ, 定义, $I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t$ 为了简化讨论, 我们这里假设 f, ϕ 具有无穷阶导数, 且 ϕ' 在 (a,b) 上大于 0. $f(b) > 0$. 请描述上述积分 I 随着 $x \to \infty$ 的渐近行为.

在这里我们并没有严格定义 "渐近行为" 是什么意思, 简单来说, 这个问题是希望我们给出一个简单的关于 $I(x)$ 的近似公式. 至于有多近似, 近似到多少阶, 则是开放性的事情了. 下面我们着重讲两种方法.

method 1: 局部分析-Laplace 方法. 为了后面叙述方便, 记 $\phi^1 = \phi'(b), \phi^2 = \phi''(b), F_0 = f(b)e^{x\phi(b)}$. 我们先待定一个无穷小量 ε_x, 这个 ε_x 随着 $x \to \infty$ 而趋向于 0, 而 ε_x 以何种速度趋向于 0 则取决与具体情形. 在这里, 我们就取 $\varepsilon_x = x^{-\frac{2}{3}}$, 至于为何这么取, 我们看后面的分析过程就自然知道.

依据 ε_x 的取法, 我们知道, 当 $t \le b - \varepsilon_x$, $x(\phi(b-\frac{\varepsilon_x}{2}) - \phi(t)) \ge x(\phi(b-\frac{\varepsilon_x}{2}) - \phi(b-\varepsilon_x)) \sim \frac{\phi^1}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 从而 $\int_0^{b-\varepsilon_x} f(t)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t = o(\int_{b-\frac{\varepsilon_x}{2}}^b f(t)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t)$, 因此

$$I(x) \sim \int_{b-\varepsilon_x}^b f(t)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t, x \to \infty,$$

又由于 $f(t)$ 连续, 我们有 $\int_{b-\varepsilon_x}^b f(t)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t \sim \int_{b-\varepsilon_x}^b f(b)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t$ 从而

$$I(x) \sim \int_{b-\varepsilon_x}^b f(b)e^{x\phi(t)}\mathrm{d}t, x \to \infty,$$

在 b 附近 $\phi(t) = \phi(b) + \phi^1 \cdot (t-b) + \frac{\phi^2}{2} \cdot (t-b)^2 + O((t-b)^3)$, 为了方便讨论, 我们在 b 附近做变量替换, 于是有

$$I(x) \sim F_0 \int_0^{\varepsilon_x} e^{-\phi^1 xt + \frac{\phi^2 x}{2}t^2 + xO(t^3)}\mathrm{d}t, x \to \infty$$

由 $\varepsilon_x = x^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{\phi^2 x}{2}t^2 + xO(t^3) = o(1)$, 从而 $e^{-\phi^1 xt + \frac{\phi^2 x}{2}t^2 + xO(t^3)} = e^{-\phi^1 xt} + o(e^{-\phi^1 xt}), \forall 0 \le t \le \varepsilon_x$,

故

$$I(x) \sim F_0 \int_0^{\varepsilon_x} e^{-\phi^1 xt} \mathrm{d}t, x \to \infty,$$

做变量替换 $s = xt$, 于是 $\int_0^{x^{-\frac{2}{3}}} e^{-\phi^1 xt} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_0^{x^{\frac{1}{3}}} e^{-\phi^1 s} \mathrm{d}s = -\frac{1}{\phi^1 x} e^{-\phi^1 s} \Big|_0^{x^{\frac{1}{3}}}$, 由 $e^{-\phi^1 x^{\frac{1}{3}}} = o(\frac{1}{x})$, 因此最终得到

$$I(x) \sim \frac{f(b)}{\phi'(b)x} e^{x\phi(b)}$$

回顾上面的分析过程, 我们可以知道, 只要 ε_x 满足

$$\varepsilon_x \to 0, x\varepsilon_x \to \infty, x\varepsilon_x^2 \to 0$$

那么上面的分析都仍然正确. □

method 2: 基于分部积分.

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{x} \int_a^b \frac{f(t)}{\phi'(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{x\phi(t)} \\ &= \frac{1}{x} \frac{f(t)}{\phi'(t)} e^{x\phi(t)} \Big|_a^b - \frac{1}{x} \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{f}{\phi'} \right] e^{x\phi(t)} \mathrm{d}t \\ &\sim \frac{1}{x} \frac{f(b)}{\phi'(b)} e^{x\phi(b)} \end{aligned}$$

由此我们得到了 $I(x)$ 随着 $x \to \infty$ 的渐近行为.

更进一步, 用同样的方法我们可以依次求出 $A_1, A_2, \cdots$, 使得对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$I(x) \sim e^{x\phi(b)} \sum_{i=1}^n A_i x^{-i}$$

需要注意到, 上面得到 $I(x) \sim \frac{f(b)}{\phi'(b)x} e^{x\phi(b)}$ 的这一步本身仍然不够经得起推敲, 仍然需经过前面的 Laplace 方法才能得到结论. 并不能说这里可以得到 $I(x)$ 的各阶逼近就说明这个方法更好, 基于分部积分的方法与 Laplace 局部分析方法的所用到的思想和技巧对于分析来说都是基础而重要的. □