数学分析 II-习题课

龙子超

2018-Feb-28

3. 设函数 $f(x) \in C([0,1])$ 且 $f(0) \neq f(1)$. 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$ 不是 $f(x)$ 的极值点.

证明 (若在考试中下面的证明过程应该更规范): 不失一般性，我们考虑 $f(0) < f(1)$ 的情形, 记 $a_0 = 0, b_0 = 1$, 依题设有 $f(a_0) < f(b_0)$. 我们构造如下 $\{a_n\}, \{b_n\}$

```
for n = 0, 1, ···
    find x ∈ (a_n, b_n) s.t. f(x) = (f(a_n)+f(b_n))/2
    if x − a_n < b_n − x
        find y ∈ (a_n, x) s.t. f(y) = (f(a_n)+f(x))/2
    else
        find y ∈ (x, b_n) s.t. f(y) = (f(x)+f(b_n))/2
    set a_{n+1} = min(x, y), b_{n+1} = max(x, y)
```

容易证明

$$[1] \quad f(b_0) > f(b_1) > \cdots > f(b_n) > \cdots > \cdots > f(a_n) > \cdots > f(a_1) > f(a_0),$$

$$[2] \quad b_0 > b_1 > \cdots > b_n > \cdots > \cdots > a_n > \cdots > a_1 > a_0,$$

$$[3] \quad |a_{n+1} - b_{n+1}| < \frac{|a_n - b_n|}{2}$$

依据闭区间套定理, 存在 c 满足 $a_n < c < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n a_n = \lim_n b_n = c$, 这时根据 f 的连续性有 $f(c) = \lim_n f(a_n) = \lim_n f(b_n)$, 从而进一步有

$$f(b_0) > f(b_1) > \cdots > f(b_n) > \cdots > f(c) > \cdots > f(a_n) > \cdots > f(a_1) > f(a_0),$$

依据 $c, f(c)$ 的上述性质可知 c 不是极值点.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内任一点处的极限均为 0. 问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积吗?

提示: 先证明 $\forall\varepsilon>0$, 只存在有限个点 $x\in[a,b]$ 使得 $f(x)>\varepsilon$, 再依据积分的定义证明函数黎曼可积.

5. 函数作图:

$$x=\frac{t^3-t^2+2}{t},y=\frac{t^3-1}{t+1}$$

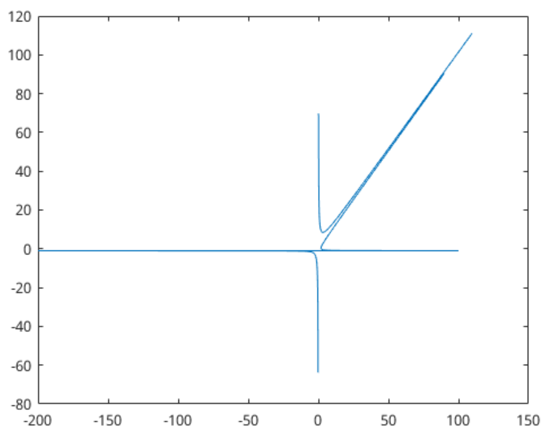

图 1

6. 设函数 $f(x):[0,1]\to[0,1]$ 连续, 函数 $g(x):[0,1]\to[0,1]$ 可积. 问: 复合函数 $f(g(x)),g(f(x))$ 在 $[0,1]$ 上是否可积?

7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处满足 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n),x\to0,n\geq1$. 问: $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否存在直至 n 阶导数? 若存在, 请计算相应导数值.

提示: 取 $f(x)=x^{n+1}\sin\frac{1}{x^{n+2}}$ 分 $n=1$ 和 $n>1$ 讨论.

8. 设 $f(x)$ 是 R 上的可微非常值函数且满足 $\forall x\in R,f(f(x))=f(x)$. 问: $f(x)\equiv x$ 是否成立?

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 其中 $[z]$ 表示不超过 z 的最大整数. 计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

提示: $\int_0^1=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/(n+1)}^{1/n}$

10. 设 $f(x)\in C^1([0,\pi])$ 且满足 $\int_0^\pi f(x)sin(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)cos(x)\mathrm{d}x=0$. 证明: $\forall\alpha\in\mathrm{R},\exists\xi\in(0,\pi)$, s.t. $f'(\xi)-\alpha f(\xi)=0$.

证明: 令 $G(x) = f'(x) - \alpha f(x)$ 是连续函数, 依题设

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi G(x) sin(x) \mathrm{d}x &= \int_0^\pi f'(x)\sin(x)\mathrm{d}x - \alpha f(x)\sin(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi f'(x)\sin(x)\mathrm{d}x \\
&= f(x)\sin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f(x)\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

因此 G 不可能在 $(0,\pi)$ 上恒大于 0 或恒小于 0, 依据零点存在定理可知 G 有 0 点.