数学分析 II-习题课

龙子超

本习题答案集所给出的解答尽可能从教材出发. 课程教材为《数学分析》I-III, 伍胜健编著, 北京大学出版社.

2018-Mar-21

1. 证明 R^n 中的闭集可表为可列个开集的交, 每个开集可表为可列个闭集的并.

证明. 首先, 假如 $E \subset \mathrm{R}^n$ 是闭集, 那么对 $\forall \delta > 0$, 我们可以定义 $F_\delta = \cup_{e\in E} U(e,\delta)$, 此时根据 F_δ 的定义有 $E \subset F_\delta$. 从而 $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$

那么这个 $\bigcap F_{\frac{1}{n}}$ 会不会就是 E 呢?

答案是是. 事实上, 对任意的 $r \notin E$, 由于 E 是闭集, 故 $\delta = d(r,E) > 0$, 故存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n} < \delta$, 从而对任意的 $e \in E$,$r \notin U(e,\frac{1}{n})$, 因此 $r \notin F_{\frac{1}{n}} = \cup_{e\in E} U(e,\frac{1}{n})$.

因此 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$, 闭集 E 是可数个开集 $\{F_{1/n}\}$ 的交.

另一方面, 若 E 是开集, 则 E^c 是闭集, 根据刚才证明的结论, 存在可数个开集 $\{F_i\}_{i\in I}$, 使得 $E^c = \bigcap_{i\in I} F_i$, 于是 $E = \bigcup_{i\in I} F_i^c$ 是可数个闭集的并.

证毕. □

2. (R^n 的正规性) 设 S_1, S_2 为 R^n 中不相交的闭集 (不一定有界). 证明存在开集 O_1, O_2 满足 $S_i \subset O_i, i = 1, 2$, 且 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

证明. 取

$$O_1 = \bigcup_{e_1\in S_1} U(e_1, \frac{1}{3}d(e_1,S_2)), O_2 = \bigcup_{e_2\in S_2} U(e_2, \frac{1}{3}d(e_2,S_1))$$

容易验证 O_1, O_2 是各自包含 S_1, S_2 的开集. 下面我们证明这个 O_1, O_2 符合题目的要求.

事实上, 若 O_1, O_2 的交非空, 假设 $a \in O_1 \cap O_2$, 那么由 O_1, O_2 的定义, 必存在 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ 使得,

$$a \in U(s_1, \frac{1}{3}d(s_1, S_2), a \in U(s_2, \frac{1}{3}d(s_2, S_1))$$

因此 $|s_1 - s_2| \leq |s_1 - a| + |s_2 - a| \leq \frac{1}{3}(d(s_1, S_2) + d(s_2, S_1)) \leq \frac{1}{3}(|s_1 - s_2| + |s_1 - s_2|) < |s_1 - s_2|$, 矛盾.

故 O_1, O_2 满足题设要求. 证毕. □

第 1,2 题在点集拓扑中都属于比较常见直观的问题.

3. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 是 $[0,1]$ 上的 n 个连续函数, 称 $f_1, \cdots, f_n$ 在 $[0,1]$ 上是 * 线性相关 *, 若存在不全为零的常数 $c_1, \cdots, c_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \equiv 0, x \in [0,1].$$

证明:$f_1, \cdots, f_n$ 在 $[0,1]$ 上线性相关的充要条件是

$$\det\left((\int_0^1 f_i(x) f_j(x) \mathrm{d}x)_{n \times n} \right) = 0$$

证明. 注意到, 对于 $\mathrm{R}^{n \times n}$ 上的矩阵 A, A 的行列式为 0 等价于存在一组不全为 0 的系数 $\{c_i\}_{i=1}^n$, 满足

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ij} = 0, \forall j = 1, \cdots, n$$

回到原题, 记 $A = \left((\int_0^1 f_i(x) f_j(x) \mathrm{d}x)_{n \times n} \right)$, 那么, 当 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 线性相关时, 即存在一组非零系数 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 满足 $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \equiv 0$ 时, 对任意的 $j = 1, \cdots, n$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^1 f_i(x) f_j(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \big(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \big) f_j(x) \mathrm{d}x = 0,$$

从而 $det(A) = 0$

另一方面, 若 $det(A) = 0$, 那么存在 $\{c_i\}_{i=1}^n$ 满足 $\sum_{i=1}^n c_i A_{ij} = 0, \forall j = 1, \cdots, n$, 记向量

$c=(c_1,\cdots,c_n)$, 则

$$cAc^T=\sum_{ij}c_ic_jA_{ij}=\int_0^1\sum_{ij}[c_if_i(x)][c_jf_j(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1\big(\sum_{i=1}^n c_if_i(x)\big)^2\mathrm{d}x$$

因此 $\sum_{i=1}^n c_if_i(x)\equiv 0$, 即 $\{f_i\}_{i=1}^n$ 线性相关. □

4.

1. 设 $\mathcal{T}$ 是 R^n 到 R^n 的一个映射, 如果存在常数 $\theta\in(0,1)$ 以及自然数 n_0 使得 $|\mathcal{T}^{n_0}x-\mathcal{T}^{n_0}|\le\theta|\mathrm{x}-\mathrm{y}|,\forall\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{R}^n$ 其中 $\mathcal{T}^{n_0}$ 表示 $\mathcal{T}$ 复合 n_0 次. 证明: 映射 $\mathcal{T}$ 有唯一的不动点, 即, 存在唯一的 $\mathrm{x}_0\in\mathrm{R}^n$ 使得 $\mathcal{T}\mathrm{x}_0=\mathrm{x}_0$
2. 设 Ω 是 R 中的有界闭集,f 是 Ω 到 Ω 的一个映射, 满足 $|f(\mathrm{x})-f(\mathrm{y})|<|\mathrm{x}-\mathrm{y}|,\forall\mathrm{x}\ne\mathrm{y}\in\Omega$. 证明:$f$ 在 Ω 中存在唯一的不动点. 另外, 能否把有界闭集的假设减弱为一般的有界集或无界闭集?

证明.

1. 记 $\mathcal{S}=\mathcal{T}^{n_0}$, 任取一个 $x\in\mathrm{R}^n$, 考虑序列 $x,\mathcal{S}x,\mathcal{S}^2x,\cdots,\mathcal{S}^mx,\cdots$. 我们先证明 $\{\mathcal{S}^ix\}_{i=0}^\infty$ 将收敛到一个点 $x_0\in\mathrm{R}^n$. 事实上, 对给定的 $N\in\mathbb{N}$,

   $$|\mathcal{S}^{N+1}x-\mathcal{S}^Nx|=|\mathcal{S}(\mathcal{S}^Nx)-\mathcal{S}(\mathcal{S}^{N-1}x)|\le\theta|\mathcal{S}^Nx-\mathcal{S}^{N-1}x|\cdots\le\theta^N|\mathcal{S}x-x|$$

   因此对任意两个自然数 $l<m$,

   $$|\mathcal{S}^lx-\mathcal{S}^mx|\le\sum_{i=l}^{m-1}|\mathcal{S}^{i+1}x-\mathcal{S}^ix|\le\sum_{i=l}^{m-1}\theta^i|\mathcal{S}x-x|=\theta^l\frac{1-\theta^{m-l}}{1-\theta}|\mathcal{S}x-x|<\theta^n\frac{1}{1-\theta}|\mathcal{S}x-x|$$

   因此 $\{\mathcal{S}^ix\}_{i=1}^\infty$ 是柯西列, 从而收敛到 R^n 中的一个点 x_0.

   那么 $\mathcal{S}x_0=x_0$, 这是因为 $|\mathcal{S}x_0-\mathcal{S}(\mathcal{S}^Nx)|\le\theta|x_0-\mathcal{S}^Nx|$, 由于 $\mathcal{S}(\mathcal{S}^Nx)=\mathcal{S}^{N+1}x$ 和 $\mathcal{S}^Nx$ 都将收敛到 x_0, 因此 $\mathcal{S}x_0$ 只能等于 x_0.

   我们还需要证明 x_0 也是 $\mathcal{T}$ 的不动点. 由上面 $\mathcal{S}x_0=x_0$, 即 $\mathcal{T}^Nx_0=x_0$, 可得

$\mathcal{T}^{n_0}(Tx_0) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{n_0}x_0) = \mathcal{T}x_0$, 而若 $\mathcal{T}x_0 \neq x_0$, 则依题设有

$$|\mathcal{T}x_0 - x_0| = |\mathcal{T}^{n_0}(Tx) - \mathcal{T}^{n_0}x| \leq \theta|\mathcal{T}x_0 - x_0|$$

这与 $\theta < 1, |\mathcal{T}x_0 - x_0| > 0$ 矛盾. 因此 $\mathcal{T}x_0 = x_0$, 即 x_0 是 $\mathcal{T}$ 的不动点.

证毕.

2. 假设 f 没有不动点, 考虑 $d = \inf_{x\in\Omega}|f(x) - x|$. 于是存在一列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $|f(x_n) - x_n| \to d$, 由于 Ω 是有界闭集, 因此 $\{x_n\}_n$ 在 Ω 有聚点, 记作 x_0, 依题设, $|f(x_n) - f(x_0)| < |x_n - x_0| \to 0$, 从而 $f(x_n) \to f(x_0)$, 因此

$$|f(x_0) - x_0| = \lim_{n\to\infty}|f(x_n) - x_n| = d$$

但 $|f(f(x_0)) - f(x_0)| < |f(x_0) - x_0| = d$, 这与 d 是 $\{|f(x) - x| : x \in \Omega\}$ 的下确界矛盾.

因此 f 有不动点. 若 f 有两个不动点 x, y, 则 $x - y = f(x) - f(y)$ 这与 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ 矛盾.

若将题目条件中的 Ω 有界闭改成无界闭或有界开集则结论不一定成立.

- $\Omega = [1, \infty)$ 为无界闭集, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $|f(x) - f(y)| = |x - y|(1 - \frac{1}{xy}) < |x - y|$, 且 $f(x) = x$ 在 $[1, \infty)$ 上不可能成立.
- $\Omega = (0, 1)$ 为有界开集, $f(x) = x - x^2$ 满足题设条件, 但是在这一区间上没有不动点.

$\square$