IPOPT

$$\min f(x)$$
$$s.t. \quad g(x) \le 0$$

引入对数障碍物函数：$h(x) = -\log(-g(x))$

特点：光滑函数，具有连续的一阶和二阶导数。

原问题变为无约束形式，目标函数为

$F(x,\mu) = f(x) + \mu h(x) = f(x) - \mu \log(-g(x))$

通过减小$\mu \to 0$逼近原问题的最优解。

牛顿法：

一阶导数：

$\nabla F(x_k, \mu_k) = \nabla f(x_k) + \mu_k \frac{\nabla g(x_k)}{-g(x_k)}$

二阶导数：

$\nabla^2 F(x_k, \mu_k) = \nabla^2 f(x_k) + \mu_k \nabla(\frac{\nabla g(x_k)}{-g(x_k)})$

计算更新方向：

$d_k = -\frac{\nabla F(x_k,\mu_k)}{\nabla^2 F(x_k,\mu_k)}$

更新方式(α_k为更新步长)：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$
$$\mu_{k+1} = \rho \mu_k$$
$$0 < \rho < 1$$

直到收敛$\mu_k * h(x_k) < \epsilon$。

牛顿法更新方向：

当最小化目标函数$f(x)$时，对$f(x)$在x_k处进行二阶Taylor展开。

$$f(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^T (x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$$

令$f(x)$导数为0，

$$\nabla_x f(x) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0$$
$$x - x_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\nabla^2 f(x_k)}$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla f(x_k)}{\nabla^2 f(x_k)}$$