Jber. d. Dt. Math.-Verein.
98 (1996) 135–145
Mathematics Subjects Classification: 11 F 70

Gebäude in der Darstellungstheorie über lokalen Zahlkörpern

P. Schneider, Münster

Dieser Artikel ist eine leicht erweiterte Fassung meines Vortrages auf der DMV-Tagung 1994 in Duisburg. Ziel ist der Versuch, dem Leser etwas von der Faszination zu vermitteln, die die Bruhat-Tits-Gebäude auf den Autor ausüben. Alle Graphiken sind mit Hilfe eines Computerprogrammes erstellt, das von meinen Mitarbeitern Erdmann, Landvogt und Wettig entwickelt wurde.

Ich möchte mit einer Analogie beginnen, die allen vertraut ist. Die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ stellt sich mittels der Bijektion

$$\begin{array}{rcl} SL_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \\ g & \longmapsto & gi \end{array}$$

als ein homogener Raum der Liegruppe $SL_2(\mathbb{R})$ nach der maximalen kompakten Untergruppe $SO(2)$ dar. Welch fundamental wichtige Rolle die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in verschiedenen Bereichen der Mathematik spielt, braucht hier nicht näher erläutert werden. Zum Vergleich mit dem, was später gesagt werden wird, sei ein Aspekt aber herausgestellt: Geeignete Räume von Funktionen auf $\mathbb{H}$ liefern explizite Modelle für gewisse Serien von (unendlich-dimensionalen) Darstellungen der Liegruppe $SL_2(\mathbb{R})$.

Obige Bijektion ist ein Spezialfall des allgemeinen Prinzips

$$\begin{array}{c} \text{halbeinfache} \\ \text{reelle Liegruppe} \end{array} \Big/ \begin{array}{c} \text{maximale kompakte} \\ \text{Untergruppe} \end{array} = \text{symmetrischer Raum.}$$

Die Wahl der maximalen kompakten Untergruppe spielt dabei keine Rolle, da sie nach dem Cartanschen Fixpunktsatz alle konjugiert sind.

In der Zahlentheorie stehen gleichberechtigt neben dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen die lokalen oder *p-adischen Zahlkörper* $\mathbb{Q}_p$ zu jeder Primzahl p. Der Körper $\mathbb{Q}_p$ entsteht aus dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ durch Vervollständigung bezüglich des p-adischen Absolutbetrages $|\ |_p$, der wie folgt definiert ist: Schreiben wir die rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ als $x = p^m \cdot \frac{a}{b}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und zu p teilerfremden $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist $|x|_p := p^{-m}$. Mit anderen Worten der p-adische Betrag mißt, wie oft eine gegebene Zahl durch die Primzahl p teilbar ist. Eine wichtige Besonderheit dabei ist, daß $|\ |_p$ ein nicht-archimedischer Betrag ist, d. h. die strikte Dreiecksungleichung $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ erfüllt. Das hat zur Folge, daß $\mathbb{Q}_p$ den diskreten Bewertungsring

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$$

mit maximalem Ideal

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1\}$$

enthält. Der zugehörige Restklassenkörper $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ ist natürlich der endliche Körper mit p Elementen. Also:

$$\mathbb{Q}_p \xleftarrow{\supseteq} \mathbb{Z}_p \xrightarrow{pr} \mathbb{F}_p .$$

Durch $| \ |_p$ als Metrik ist $\mathbb{Q}_p$ in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen. Allerdings ist diese wiederum wegen der strikten Dreiecksungleichung total-unzusammenhängend. Die Teilmenge $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt und offen; folglich ist $\mathbb{Q}_p$ lokalkompakt.

Das Analogon der Liegruppe $SL_2(\mathbb{R})$ ist in diesem Kontext offensichtlich die Gruppe $G := SL_2(\mathbb{Q}_p)$, die wir zunächst etwas genauer anschauen wollen. Die Topologie auf $\mathbb{Q}_p$ führt über den Vektorraum der 2×2-Matrizen zu einer natürlichen Topologie auf G. Man stellt unschwer fest:

- G ist eine lokalkompakte total-unzusammenhängende topologische Gruppe.
- $K_0 := SL_2(\mathbb{Z}_p)$ ist eine maximale kompakte Untergruppe von G.

Aber es treten zwei von der Situation bei reellen Liegruppen wesentlich abweichende Phänomene auf:

- K_0 ist offen in G. Folglich ist der homogene Raum G/K_0 diskret und damit topologisch uninteressant.
- $K_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & p^{-1}b \\ pc & d \end{pmatrix} \in G : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p \right\}$ ist ebenfalls eine maximale kompakte Untergruppe von G; K_1 und K_0 sind *nicht* konjugiert in G.

Die letztere Tatsache liegt darin begründet, daß die beiden $\mathbb{Z}_p$-Gitter $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_p \oplus p\mathbb{Z}_p$ in dem Vektorraum $\mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$ nicht durch eine Matrix in G ineinander überführt werden können.

Wir stellen also fest, daß zwar die einzelnen Mengen G/K_i keine topologische Struktur besitzen. Dafür entsteht aber das Problem, die Konjugationsklassen maximaler kompakter Untergruppen zu klassifizieren und die Lage solcher nichtkonjugierter Untergruppen zueinander zu verstehen. Es stellt sich heraus, daß die Antwort darauf am besten in geometrischer Weise gegeben werden kann. Sei

$$I := K_0 \cap K_1$$

die sogenannte Iwahori-Untergruppe. Dann gilt das folgende

Faktum: Genau sämtliche maximale kompakte Untergruppen, welche I enthalten, (das sind gerade K_0 und K_1) bilden ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen der maximalen kompakten Untergruppen von G.

Wir definieren nun einen 1-dimensionalen simplizialen Komplex dadurch, daß wir

- jeder maximalen kompakten Untergruppe eine Ecke zuordnen, und daß wir
- zwei Ecken repräsentiert durch die Untergruppen K und K' genau dann durch eine Kante verbinden, falls $K \cap K'$ konjugiert ist zu I.

Dies ergibt den wohlbekannten Baum X, der für $p = 2$ wie in Fig. 1 aussieht:

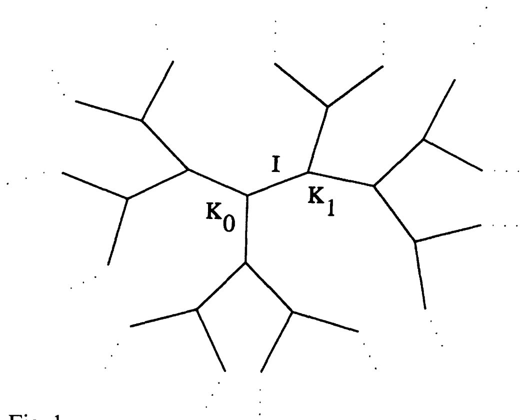

Fig. 1

Offensichtlich induziert die Konjugation eine Operation von G auf X durch simpliziale Automorphismen. Deren fundamentale Eigenschaft drückt sich aus durch die Identität

$$\text{Stabilisator einer Ecke} = \begin{array}{l}\text{die Ecke repräsentierende}\\ \text{maximale kompakte Untergruppe.}\end{array}$$

Außerdem wird die Größe des Durchschnittes $K \cap K'$ zweier maximaler kompakter Untergruppen K und K' dadurch kontrolliert, wie weit die zugehörigen Ecken in X voneinander entfernt sind. Zusammenfassend können wir also sagen, daß die Operation von G auf X vollständig die Lage der maximalen kompakten Untergruppen in G beschreibt.

Dieses Konstruktionsprinzip läßt sich ohne große Schwierigkeiten auf die Gruppe $G = SL_n(\mathbb{Q}_p)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, verallgemeinern. Das zugehörige *Bruhat-Tits-Gebäude* $X = X(G)$ ist jetzt ein $(n-1)$-dimensionaler simplizialer Komplex, dessen Ecken ebenfalls den maximalen kompakten Untergruppen von G entsprechen. Seine globale Struktur ist, wie nicht anders zu erwarten, kombinatorisch sehr kompliziert. Der Gewinn liegt darin, daß sich eine schwierige Kombinatorik auf geometrisch-anschauliche Weise ausdrückt. Gute Aussagen über X lassen sich in zweierlei Hinsicht machen:

1) Die lokale Struktur um eine Ecke:

Man hat die Bijektion

$$\begin{array}{rcl}\text{zur Ecke } K_0 = SL_n(\mathbb{Z}_p) & \xleftrightarrow{\sim} & \text{maximale parabolische}\\ \text{benachbarte Ecken} & & \text{Untergruppen in } SL_n(\mathbb{F}_p)\\ K & \longmapsto & (K \cap K_0)/1 + pSL_n(\mathbb{Z}_p).\end{array}$$

Zum Beispiel entspricht K_1 dabei der Boreluntergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $SL_2(\mathbb{F}_p)$. Dadurch ist also das Aussehen des Gebäudes X in der

Umgebung einer Ecke zurückgeführt auf die wohlverstandene Kombinatorik der parabolischen Untergruppen in der algebraischen Gruppe SL_n über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$.

Hierzu zwei Bilder: Im Falle der Gruppe $SL_3(\mathbb{Q}_2)$ ist jede Ecke von X in genau 21 2-Simplizes enthalten. Dies läßt sich ohne Selbstdurchdringungen nicht mehr darstellen. Deswegen zeigt Fig. 2 nur 12 davon, die nach rein ästhetischen Gesichtspunkten ausgewählt wurden.

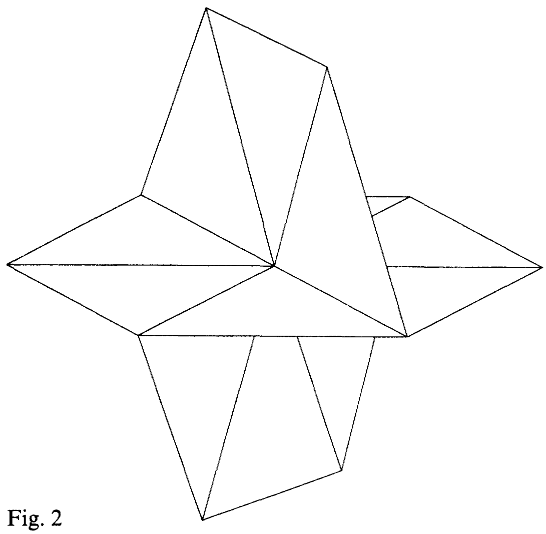

Fig. 2

Das bisher Geschilderte läßt sich auch dahingehend verallgemeinern, daß man über einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ statt über $\mathbb{Q}_p$ selbst arbeitet. Betrachten wir die Gruppe SL_3 über einer quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}_2$, deren Restklassenkörper $\mathbb{F}_4$ ist, so sind es schon 105 2-Simplizes, die eine gegebene Ecke von X enthalten. Fig. 3 zeigt 15 davon, nämlich genau diejenigen, die jeweils zusammen mit den dunkelgrau ausgefüllten Simplizes in einem gemeinsamen Apartment (siehe unten) liegen.

2) Die sogenannten Apartments:

Bezeichne A den Unterkomplex von X, der aufgespannt wird von allen Ecken tK_0t^{-1}, wobei t sämtliche Diagonalmatrizen in $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ durchläuft. Zum Beispiel erhält man

– für $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ einen in beide Richtungen unbeschränkten Pfad im Baum (also eine triangulierte reelle Gerade) (Fig. 4),
– für $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ eine wie in Fig. 5 triangulierte reelle Ebene.

Die Unterkomplexe gA von X, die durch Anwenden eines Gruppenelementes $g \in G$ auf A entstehen, heißen die *Apartments* des Gebäudes. Sie überdecken X, d. h. es gilt

$$X = \bigcup_{g \in G} gA.$$

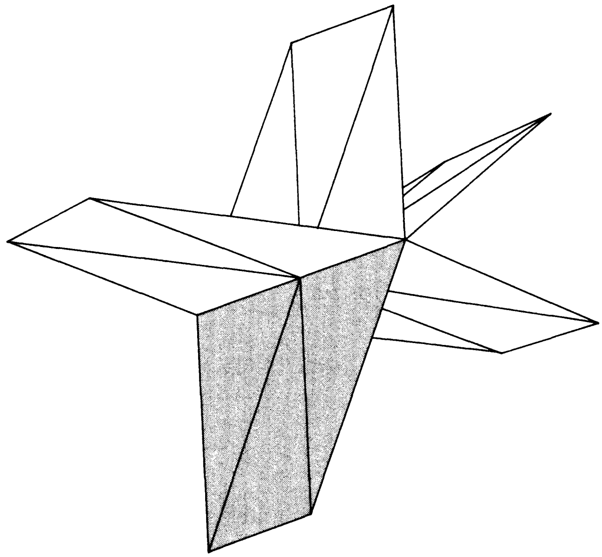

Fig. 3

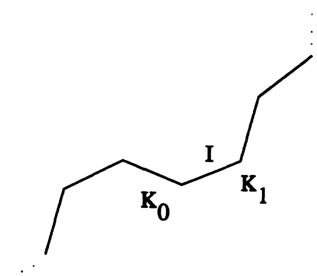

Fig. 4

Die allgemeine Theorie geht aus von einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe $\mathbb{G}$ über $\mathbb{Q}_p$. Die Gruppe $G = \mathbb{G}(\mathbb{Q}_p)$ der $\mathbb{Q}_p$-rationalen Punkte von $\mathbb{G}$ ist in natürlicher Weise eine lokalkompakte total-unzusammenhängende topologische Gruppe. Am leichtesten sieht man dies, indem man $\mathbb{G}$ als Gruppe von Matrizen realisiert. Nach ähnlichen, wenn auch ungleich komplizierteren Prinzipien konstruieren Bruhat und Tits ([BT]) das *Gebäude* $X = X(G)$ zu G. Dabei handelt es sich um einen topologischen Raum, der in natürlicher Weise mit einer Zellenstruktur, einer Metrik und einer G-Operation versehen ist. Letztere respektiert Zellenstruktur und Metrik. Auch die Strukturaussagen 1) und 2) sind Spezialfälle allgemeiner Sachverhalte:

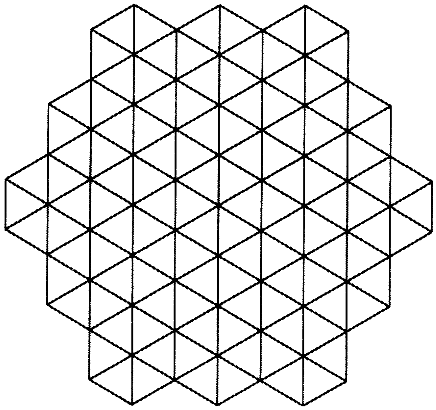

Fig. 5

Ad 1): Zu jeder Ecke x von X konstruieren Bruhat und Tits ein „Modell" von $\mathbb{G}$ über $\mathbb{Z}_p$, also ein Gruppenschema $\mathcal{G}_x$ über $\mathbb{Z}_p$, dessen allgemeine Faser über $\mathbb{Q}_p$ gerade die algebraische Gruppe $\mathbb{G}$ ist. Dabei gilt:

– Die Schnittgruppe $\mathcal{G}_x(\mathbb{Z}_p)$ stimmt im wesentlichen mit dem Stabilisator P_x der Ecke x in G überein;
– die Struktur des Gebäudes X in der Umgebung der Ecke x ist bestimmt durch die Struktur der endlichen Gruppe $\mathcal{G}_x(\mathbb{F}_p)$.

Wieder ein Bild dazu: Im Gebäude zur Gruppe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}_2)$ gibt es Ecken, die in genau 45 2-Simplizes enthalten sind. Entsprechend dem obigen Auswahlkriterium stellen wir nur 19 davon dar, was allerdings schon eine Selbstdurchdringung erzwingt. Sämtliche hell wie dunkel ausgefüllten Simplizes liegen sogar in einem gemeinsamen Apartment (Fig. 6).

Ad 2): Die Apartments des Gebäudes X sind als metrische Räume sämtlich isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$, wobei d den halbeinfachen $\mathbb{Q}_p$-Rang der Gruppe $\mathbb{G}$ bezeichnet. Die Zellenstruktur der Apartments ist im wesentlichen bestimmt durch das zur reduktiven Gruppe $\mathbb{G}$ gehörige Wurzelsystem in $\mathbb{R}^d$. Stets wird X von seinen Apartments überdeckt.

Ein Apartment zur Gruppe $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}_p)$ sieht wie in Fig. 7 aus.

Spaßeshalber in Fig. 8 noch die Zusammenfügung eines Apartmentbildes mit einem „lokalen" Bild.

Zusammenfassung: Die Operation der Gruppe G auf ihrem Bruhat-Tits-Gebäude $X(G)$ beschreibt in geometrischer Weise die innere Struktur von G.

Im Weiteren möchte ich zeigen, daß das Gebäude X auch geeignet ist, „äußere" Strukturen der Gruppe G zu beschreiben. Dabei beschränke ich mich auf die sogenannte *glatte Darstellungstheorie* von G und berichte über Resultate aus der gemeinsamen Arbeit [SS] mit U. Stuhler.

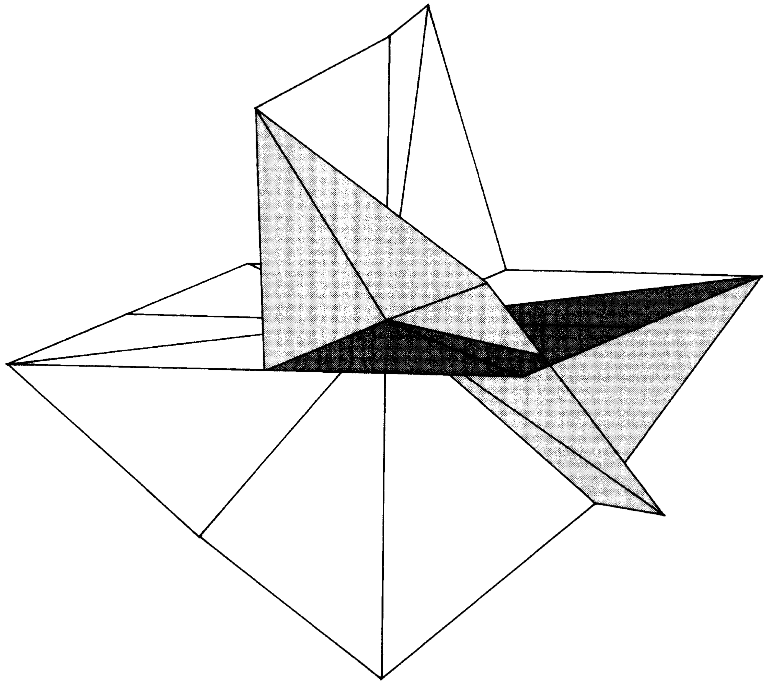

Fig. 6

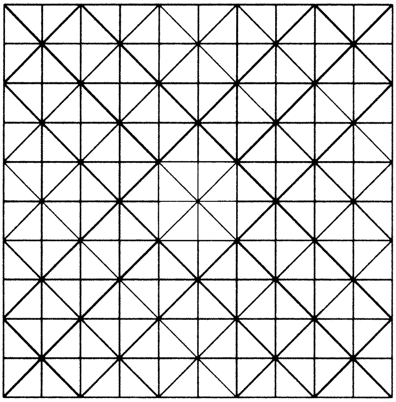

Fig. 7

Definition: Eine glatte Darstellung V von G ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer linearen G-Aktion, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$\{g \in G : gv = v\}$ ist offen in G.

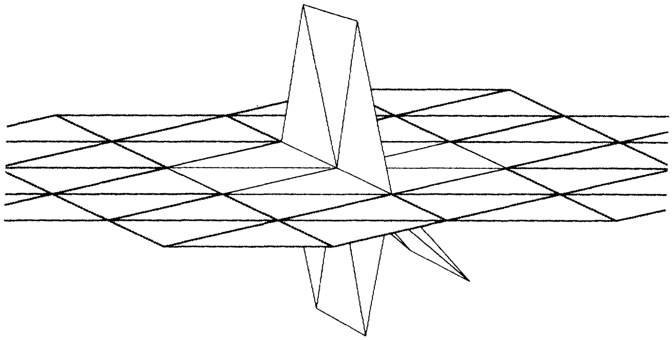

Fig. 8

Es ist wichtig sich bewußt zu machen, daß eine so naheliegende Darstellung wie die Standardaktion der Gruppe $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ auf dem n-dimensionalen $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum nicht glatt ist. In der Tat sind, von der trivialen Darstellung abgesehen, alle irreduziblen glatten Darstellungen von $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ unendlich-dimensional! Dies ist ein typisches Phänomen, das das Aussehen der Theorie prägt. Insbesondere ist es nicht erstaunlich, daß die harmonische Analyse auf der lokalkompakten Gruppe G eine tragende Rolle spielt. Ein sehr gutes Beispiel für eine irreduzible glatte Darstellung ist die sogenannte Steinberg-Darstellung St von $SL_2(\mathbb{Q}_p)$: Dazu bezeichne V den Raum der $\mathbb{C}$-wertigen lokalkonstanten Funktionen auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ über dem Körper $\mathbb{Q}_p$. Lassen wir $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ durch Linkstranslation auf V operieren, so ergibt das eine glatte Darstellung. Die konstanten Funktionen bilden ersichtlich einen invarianten Unterraum in V. Der Quotient $St := V/\mathbb{C}$ ist irreduzibel.

An dieser Stelle ist doch eine kurze Erklärung angebracht, warum diese auf den ersten Blick so wenig arithmetisch erscheinende Begriffsbildung von größter Wichtigkeit für die Zahlentheorie ist. Ein fundamentales Interesse der Zahlentheorie ist es, die absolute Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ des algebraischen Abschlußes $\overline{\mathbb{Q}}_p$ über $\mathbb{Q}_p$ beziehungsweise deren endlich-dimensionale Darstellungen zu verstehen. Man möchte letztere klassifizieren mit Hilfe von Daten, die unmittelbar durch den Grundkörper $\mathbb{Q}_p$ gegeben sind. In der lokalen Klassenkörpertheorie wurde diese Aufgabe gelöst für die 1-dimensionalen Darstellungen von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. In dem sogenannten lokalen Langlands-Programm wird die Vermutung ausgesprochen, daß die Parametermenge für die allgemeine Klassifikationsaufgabe im wesentlichen gerade die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler glatter Darstellungen der Gruppen $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ mit variierendem $n \in \mathbb{N}$ ist (für eine genaue Formulierung vgl. [Ta]).

Zurück zur glatten Darstellungstheorie selbst. Ein Standardversuch, die irreduziblen glatten Darstellungen in den Griff zu bekommen, läßt sich grob wie folgt beschreiben. Sei $K \subseteq G$ eine maximale kompakte Untergruppe. Es ist eine unmittelbare Konsequenz der Glattheitsbedingung, daß jede irreduzible glatte K-Darstellung endlich-dimensional ist und über einen endlichen Quotienten von K faktorisiert. Mit anderen Worten die glatte Darstellungstheorie der kompakten Gruppe K reduziert sich auf die Darstellungstheorie endlicher Gruppen, die wir in unserem Kontext großzügigerweise als „bekannt" ansehen wollen. Ist V eine glatte G-Darstellung endlicher Länge, so ergibt sich (vgl. [Ca]), daß sich V als K-Darstellung in eine direkte Summe

$$V \cong \oplus_{\pi \in \hat{K}} m_V(\pi) \cdot \pi$$

über die irreduziblen glatten K-Darstellungen $\pi \in \hat{K}$ mit endlichen Multiplizitäten $m_V(\pi)$ zerlegt. Die Hoffnung ist nun, daß irreduzible V durch die Wahl von K und die Multiplizitäten $m_V(\pi)$ charakterisiert werden. Für die Gruppen $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ ist diese Strategie jüngst in [BK] erfolgreich verwirklicht worden.

Der Wunsch ist naheliegend, diese Betrachtungsweise in eine funktorielle Form zu bringen. Sicherlich müssen dazu alle möglichen K simultan betrachtet werden, wodurch wohl das Gebäude $X = X(G)$ ins Spiel zu kommen hat. In [SS] gehen wir folgendermaßen vor (der Einfachheit halber sei hier die reduktive Gruppe $\mathbb{G}$ als halbeinfach vorausgesetzt):

Zu jeder Zelle $F \subseteq X$ bezeichne $P_F^\dagger \subseteq G$ den Stabilisator; dies ist eine kompakte offene Untergruppe. Wir konstruieren eine natürliche G-äquivariante Filtrierung

$$P_F^\dagger \supseteq U_F^{(0)} \supseteq \ldots \supseteq U_F^{(e)} \supseteq \ldots$$

durch kompakte offene Normalteiler $U_F^{(e)}$ in $P_F^\dagger$. Für das Folgende fixieren wir einen „Level" $e \geq 0$. Sei V eine glatte G-Darstellung endlicher Länge und setze

$$V^{U_F^{(e)}} := \{v \in V : gv = v \quad \text{für alle} \quad g \in U_F^{(e)}\}.$$

Dann hat man das

Faktum: Der Invariantenraum $V^{U_F^{(e)}}$ ist eine endlich-dimensionale Darstellung der endlichen Gruppe $P_F^\dagger / U_F^{(e)}$.

Die eigentlich einfache Beobachtung ist nun, daß sich diese Invariantenräume für variierendes F (aber festes e) zusammenfassen lassen zu einer *Garbe* $\underset{\approx}{V}$ auf dem Gebäude X, so daß gilt:

Halm von $\underset{\approx}{V}$ im Punkte $x = V^{U_F^{(e)}}$, falls $x \in F$.

Mehr oder weniger per Konstruktion haben wir:

- Die Garbe $\underset{\approx}{V}$ ist konstruierbar;
- die Gruppe G operiert auf $\underset{\approx}{V}$;
- die Zuordnung $V \longmapsto \underset{\approx}{V}$ ist ein exakter Funktor.

Die Rechtfertigung für diese Bildung wird durch ein tiefer liegendes Resultat in [SS] geliefert:

- Wird der Level e groß genug gewählt (in Abhängigkeit von V), so läßt sich die G-Darstellung V aus der Garbe $\underset{\approx}{V}$ durch Übergang zu einer geeigneten Homologiegruppe zurückgewinnen.

Zusammenfassung: Die Garbe $\underset{\approx}{V}$ auf dem Gebäude X ist eine „Lokalisierung" der G-Darstellung V.

Für die Untersuchung von Garben stehen die Methoden der algebraischen Topologie zur Verfügung. In der Tat gewinnen wir in [SS] durch die Berechnung von

(Co)homologiegruppen Aussagen über die homologische Algebra der Kategorie der glatten G-Darstellungen. Beenden möchte ich diesen Bericht aber damit, daß ich eine Anwendung auf die harmonische Analyse der Gruppe G beschreibe.

Ist V unendlich-dimensional, so ist es sinnlos, die Spur eines Elementes $g \in G$ auf V im Sinne der linearen Algebra bilden zu wollen. Nichtsdestoweniger existiert aber der Charakter der Darstellung V als Distribution. Das bedeutet das Folgende. Bezeichne $\mathcal{H}$ den Raum aller $\mathbb{C}$-wertigen lokalkonstanten Funktionen mit kompakten Träger auf G. Dies ist eine assoziative Algebra bezüglich der Konvolution

$$(\varphi * \psi)(h) := \int_G \varphi(g)\psi(g^{-1}h)dg ;$$

dabei ist dg ein fest gewähltes Haar-Maß auf der lokalkompakten Gruppe G. Die Algebra $\mathcal{H}$ heißt Hecke-Algebra und ist als die in diesem Kontext richtige Version der Gruppenalgebra anzusehen. Die Glattheitsbedingung hat nämlich zur Folge, daß jede glatte G-Darstellung V automatisch ein $\mathcal{H}$-Modul ist mittels

$$\varphi * v := \int_G \varphi(g)gvdg.$$

Hat V endliche Länge, so hat der Konvolutionsoperator $\varphi * \ . : V \longrightarrow V$ endlichen Rang, so daß die Spur $\mathrm{Tr}(\varphi; V)$ definiert ist ([Ca]). Wir erhalten also eine Linearform

$$\mathrm{Tr}(\ .\ ; V) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ein tief liegendes Theorem von Harish-Chandra und Howe aus der harmonischen Analyse besagt (vgl. [Si]), daß eine lokal-integrable Funktion θ_V auf G existiert, so daß gilt:

$$\mathrm{Tr}(\varphi; V) = \int_G \varphi(g)\theta_V(g)dg \qquad \text{für alle} \qquad \varphi \in \mathcal{H}.$$

Diese Charakterfunktion θ_V besitzt die übliche Eigenschaft, irreduzible V bis auf Isomorphie zu charakterisieren. Aber die Bedeutung der Werte der Funktion θ_V bleibt unklar.

Zumindest für die sogenannten elliptischen Elemente in G führt unsere Lokalisierungstheorie hier zu einer Antwort. Ein Element $g \in G$ heißt elliptisch, falls sein Zentralisator in G kompakt ist. In vielen Problemen der harmonischen Analyse läßt sich das Studium der nicht-elliptischen Elemente auf den elliptischen Fall zurückführen durch Übergang zu geeigneten reduktiven Untergruppen von $\mathbf{G}$. In gewisser Weise bilden also die elliptischen Elemente den „harten Kern" von G. Ist $g \in G$ elliptisch, so ist die Fixpunktmenge

$$X^g := \{x \in X : gx = x\}$$

im Gebäude kompakt. Da die Garbe $\underset{\approx}{V}$ konstruierbar ist, sind die Cohomologiegruppen $H^*(X^g, \underset{\approx}{V})$ also endlich-dimensional. Wegen der G-Äquivarianz von $\underset{\approx}{V}$ operiert außerdem das Gruppenelement g nach wie vor auf dieser Cohomologie. In [SS] zeigen wir, daß folgende Spurformel vom Hopf-Lefschetz-Typ gilt.

Spurformel: Für V von endlicher Länge, für genügend groß gewählten Level e und für elliptisches $g \in G$ gilt

$$\theta_V(g) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \cdot \mathrm{Spur}(g;\ H^i(X^g, \underset{\approx}{V})).$$

Literatur

[BK] Bushnell C., Kutzko P.: The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups. Ann. Math. Studies **129**. Princeton Univ. Press 1993

[BT] Bruhat F., Tits J.: Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées. Publ. Math. IHES **41** (1972). II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. Publ. Math. IHES **60** (1984)

[Ca] Cartier P.: Representations of p-adic groups: a survey. In Automorphic Forms, Representations and L-Functions. Proc. Symp. Pure Math. **33** (1), 111-155. American Math. Soc. 1979

[Si] Silberger A.: Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups. Princeton Univ. Press 1979

[SS] Schneider P., Stuhler U.: Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. Preprint 1995

[Ta] Tate J.: Number theoretic background. In Automorphic Forms, Representations and L-Functions. Proc. Symp. Pure Math. **33** (2), 3-26. American Math. Soc. 1979

Peter Schneider
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstr. 62
D-48149 Münster
pschnei@math.uni-muenster.de

(Eingegangen 4. 9. 1995)