Group 13: Subpath number - minimal cubic graphs

Lovro Levačić, Žiga Obradović

November 2025

KRATEK OPIS

1 Uvod

V projektu obravnavamo domnevo, ki govori o minimizaciji števila poti v razredu **kubičnih grafov**, torej grafov, kjer ima vsako vozlišče stopnjo 3. Za dani povezani graf G definiramo *subpath number*, označen s $pn(G)$, kot število vseh preprostih poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0. Preprosta pot je zaporedje vozlišč $(v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ brez ponovitev, kjer je vsak par zaporednih vozlišč povezan z robom.

V literaturi je bila postavljena domneva, da za vsako sodo število vozlišč n obstaja natanko en kubični graf L_n, ki ima najmanjši subpath number med vsemi kubičnimi grafi z $n \geq 10$ vozlišči. Grafi L_n so sestavljeni iz več kopij grafa $K_4 - e$ (popolnega grafa na štirih vozliščih, iz katerega odstranimo en rob), ki jih povežemo v verižni strukturi. Na obeh koncih se tej verigi dodata še posebna *pendant bloka* - eden na 5, drugi pa na 7 vozlišč.

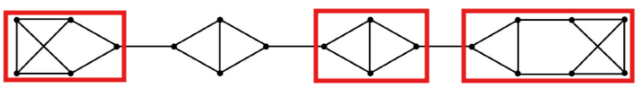
Kasneje se je pokazalo, da domneva za dovolj velika n ne drži, vendar še ni znano, pri katerem najmanjšem n se pojavi prva protimera. Namen našega projekta je torej:

- preveriti domnevo za manjša, obvladljiva števila vozlišč n,
- in poskusiti poiskati protimero, torej kubični graf z manjšim subpath number kot L_n.

2 Priprava

Za čim bolj učinkovito delo bova najprej definirala osnovne funkcije, s katerimi bova izdelovala grafe in štela njihove poti:

1. *subpath_number*$(Graf)$: Funkcija, ki sprejme katerikoli graf in vrne **subpath number**.
2. *Ln_graph*(n): Funkcija, ki sprejme število vozlišč n in vrne **graf** L_n. Ideja funkcije je, da definiramo tri različne gradnike, ki jih sestavimo skupaj gleda na število n.



Slika 1: Gradniki grafa L_n

3. *cubic_graphs*(n): Funkcija, ki sprejme število vozlišč n in generira vse možne **kubične grafe** na n vozliščih (za sode $n \geq 4$).

Z uporabo teh treh funkcij želiva pokriti predvsem prvi del naloge, ki je dokazati domnevo, da ima graf L_n najmanjši subpath number za majhne n in poiskati kakšen protiprimer za večje n.

3 Načrt dela

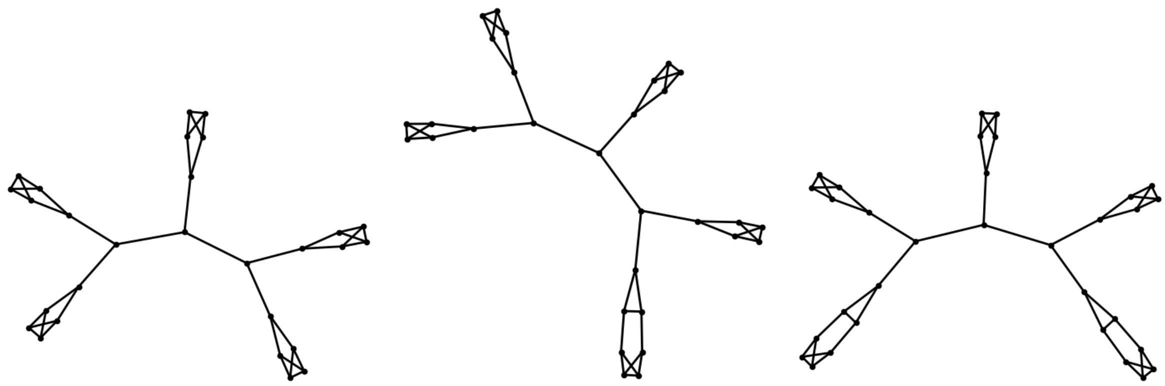
Ko bodo osnovne funkcije definirane, bo najina prva naloga ta, da testirava njihovo pravilnost. Funkcijo *subpath_number* bova tako najprej testirala na zelo enostavnih grafih, ki niso nujno kubični. Želiva torej, da so testni grafi taki, da subpath number lahko izračunava sama brez dodatnih orodij ("na roke"). Če se bodo dobljeni rezultati ujemali z vrednostmi funkcije, bova funkcijo lahko uporabila tudi za grafe z več vozlišči. Podoben test bova naredila tudi za drugi dve osnovni funkciji.

Naslednji korak pa je primerjati subpath number grafov L_n z vsemi obstoječimi kubičnimi grafi za isti n. Zanima naju torej kateri je najmanjši n, da obstaja kakšen kubični graf, ki ima subpath number manjši kot L_n. Iz protiprimerov, ki jih bova našla pa si želiva konstruirati grafe, ki bodo imeli manjši subpath number za vsak večji n.

4 Hipoteza

Po prvem testu se zdi, da imajo za večje n naslednji grafi nižji subpath number kot grafi L_n:

- Če je $n = 6q - 2$ je graf sestavljen iz q pendant blokov na 5 vozliščih, ki so pripeti na $q - 2$ med seboj povezanih vozlišč
- Če je $n = 6q$ je graf sestavljen iz $q - 1$ pendant blokov na 5 vozliščih in enega na 7 vozliščih, ki so pripeti na $q - 2$ med seboj povezanih vozlišč
- Če je $n = 6q + 2$ je graf sestavljen iz $q - 2$ pendant blokov na 5 vozliščih in dveh na 7 vozliščih, ki so pripeti na $q - 2$ med seboj povezanih vozlišč



Slika 2: Primeri boljših grafov za $n = 28$, 30 in 32

Najina naloga sedaj je preveriti resničnost te hipoteze in morda poiskati kakšne grafe s še nižjim subpath number od teh.