

Tukaj pišem svoj del, da bova kasneje združila

9. december 2025

1 Simulated annealing

Za iskanje kubičnih grafov z manjšim številom podpoti od L_n grafa smo uporabili metahevristični algoritem *simulated annealing* (SA). Gre za probabilistično metodo globalne optimizacije, ki posnema proces fizikalnega ohlajanja kovin: sistem se sprva nahaja pri visoki temperaturi in lahko sprejema tudi poslabšanja, postopoma pa se temperatura znižuje, kar zmanjšuje verjetnost sprejemanja slabših rešitev. Pri dovolj počasnem ohlajanju se algoritem z visoko verjetnostjo približa globalnemu minimumu energetske funkcije, katera je v našem primeru *subpath number*.

1.1 Delovanje

V našem primeru je prostor iskanja sestavljen iz vseh *povezanih kubičnih grafov* na n vozliščih. Prehod med grafi definiramo s t. i. *dvojnimi prevezovanjem robov* (ang. double-edge swap). Naj bo $G = (V, E)$ kubičen graf in naj bosta izbrani dve disjunktni povezavi $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$. Zamenjava poteka tako, da se povezavi odstranita in nadomestita z novima paroma $\{u, x\}$ in $\{v, y\}$ ali s paroma $\{u, y\}$ in $\{v, x\}$. S takimi menjavami povezav ohranimo 3-regularnost grafa. Energij-ska funkcija, ki jo minimiziramo, pa je v našem primeru podana z $E(G) = \text{subpath_number}(G)$, kjer funkcija $\text{subpath_number}(\cdot)$ prešteje vse različne podpote v grafu.

Proces začnemo z grafom, ki ga želimo izboljšati. V našem primeru je to graf $L_n =: G$. Pri vsakem koraku z double edge swap generiramo novega soseda G' in izračunamo $\Delta E = E(G') - E(G)$. Če je $\Delta E \leq 0$, rešitev sprejmemo. V nasprotnem primeru jo sprejmemo z verjetnostjo

$$p = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right),$$

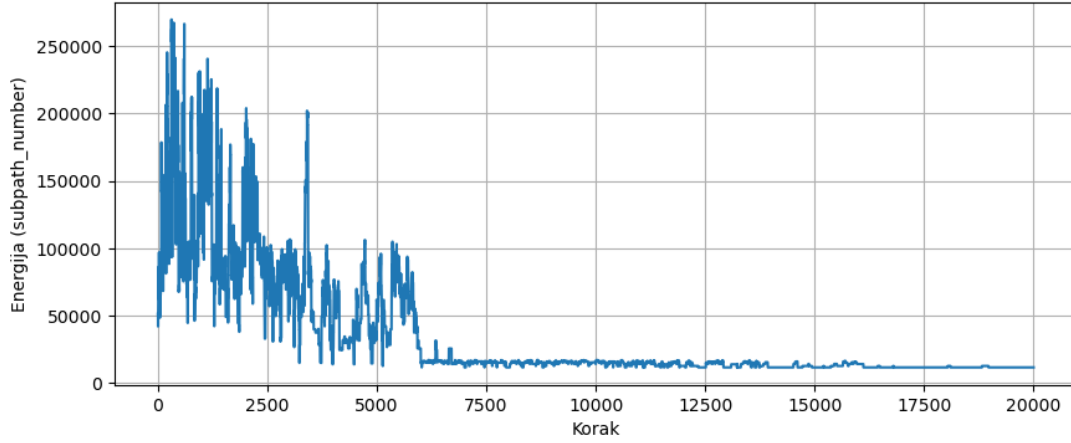
kjer $T > 0$ predstavlja trenutni temperaturni parameter. S tem omogočimo kontrolirano sprejemanje slabših rešitev zgodaj v postopku, kar preprečuje prezgodnjo ujetost v lokalne minimume. Če rešitev sprejmemo nastavimo $G := G'$ in postopek ponavljamo.

V našem primeru smo naredili 20000 ponovitev postopka, začetni parameter T_0 pa je bil nastavljen tako, da se je v zgodnjih ponovitvah slabša rešitev sprejela z verjetnostjo približno 40 %, proti koncu postopka pa skoraj nikoli.

1.2 Rezultati

Z metodo *simulated annealing* smo za $n \in \{10, 12, \dots, 30\}$ iskali grafe z manjšim številom podpoti od grafa L_n .

Na sliki lahko vidimo potek energije (števila podpoti) med procesom SA za $n = 20$. Kar lahko razberemo je, da so se med postopkom sprejele tudi slabše rešitve, saj energija (število podpoti) ni strogo padajoča. Program je uspešno sprejemal tudi slabše rešitve in se s tem izognil morebitnim lokalnim minimumom. Vselej pa smo na koncu našli graf...(nadaljuj tu)



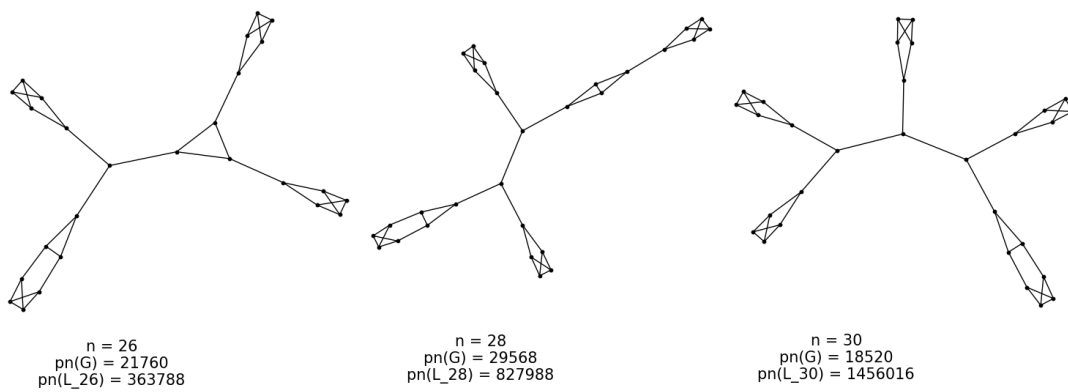
Slika 1: Potek energije med simulated annealing za $n = 20$.

Kot pričakovano za $n \in \{10, 12, 14\}$ protiprimerov nismo našli, medtem ko smo za vse večje n našli grafe s precej nižjim številom podpoti. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli.

| n | $subpath_number(L_n)$ | boljši $subpath_number$ | razlika |
|-----|------------------------|--------------------------|---------|
| 10 | 1276 | 1276 | 0 |
| 12 | 3076 | 3076 | 0 |
| 14 | 5504 | 5504 | 0 |
| 16 | 12744 | 3640 | 9104 |
| 18 | 22532 | 7072 | 15460 |
| 20 | 51532 | 11708 | 38716 |
| 22 | 90760 | 7156 | 83604 |
| 24 | 206800 | 12220 | 194580 |
| 26 | 363788 | 21760 | 342028 |
| 28 | 827988 | 29568 | 798420 |
| 30 | 1456016 | 18520 | 1437496 |

Tabela 1: Rezultati SA.

Vredno je poudariti, da v splošnem z najdenimi grafi še zdaleč ne minimiziramo števila podpoti za inzbrani n , čeprav so za nekatere n najdeni grafi že precej dobri. Našli smo le primere grafov z manjšim številom podpoti od opazovanega L_n grafa. To se dobro vidi, ko primerjamo dobljeno minimalno število podpoti za $n = 28$ in $n = 30$. Dobljeni graf za $n = 30$ ima namreč kar za tretjino manj podpoti od dobljenega grafa za $n = 28$. Ta podatek nam za graf z $n = 30$ sicer ne pove veliko, medtem ko smo lahko skoraj prepričani, da za $n = 28$ obstaja graf z manjšim številom podpoti.



Slika 2: Grafi pridobljeni s SA za $n = 26, 28$ in 30 .