Tukaj pišem svoj del, da bova kasneje združila

Lovro

10. december 2025

1 Uvod

Naj bo $G = (V, E)$ povezan, neorientiran graf. *Subpath number* grafa G, označen s $pn(G)$, definiramo kot število vseh preprostih poti v grafu, pri čemer štejemo tudi trivialne poti (zgolj eno vozlišče). Preprosta pot je zaporedje različnih vozlišč

$$(v_0, v_1, \ldots, v_\ell),$$

kjer sta vsaki zaporedni vozlišči povezani z robom grafa; poti, ki gredo v nasprotni smeri, štejemo ločeno. Za en sam rob dobimo $pn(G) = 4$, za trikotnik $pn(G) = 15$, za popoln graf K_4 pa že $pn(G) = 64$, kar nakazuje, da $pn(G)$ v splošnem raste eksponentno s številom vozlišč.

V tem projektu nas zanimajo *kubični grafi*, tj. povezani grafi, v katerih ima vsako vozlišče stopnjo 3. Za sodo število vozlišč n želimo med vsemi kubičnimi grafi na n vozliščih najti tiste, ki minimizirajo $pn(G)$.

V literaturi je bila predlagana posebna družina kubičnih grafov L_n. Grafi L_n so definirani za soda $n \geq 10$ in so zgrajeni iz verige blokov $K_4 - e$, kjer $K_4 - e$ pomeni popoln graf na štirih vozliščih, iz katerega odstranimo en rob. Verigi dodamo ustrezna pendant bloka na obeh koncih, tako da dobimo povezano 3-regularno strukturo na natančno n vozliščih.

Osrednja izhodiščna trditev je bila:

Domneva 10. *Naj bo $n \geq 10$ sodo. Med vsemi povezanimi kubičnimi grafi na n vozliščih je graf L_n edini graf, ki minimizira subpath number.*

Znano je, da domneva za dovolj velika n ne drži, ne ve se pa, pri katerih najmanjših n se pojavi prvi protiprimer in kakšna je struktura grafov z majhnim $pn(G)$.

2 Domneva za boljše grafe in nove konstrukcije

Rezultati iz prejšnjih razdelkov kažejo, da grafi L_n že pri $n = 16$ in $n = 18$ niso minimizatorji subpath number, za večja n pa imajo naše konstrukcije (Cat1, Cat2, Tree$_n$) veliko manjše število podpoti od L_n. V tem razdelku na kratko opišemo, kako so te družine zgrajene, in formuliramo novo domnevo o njihovem obnašanju.

2.1 Osnovni gradniki na osnovi $K_4 - e$

Skupni temelj vseh konstrukcij je graf $K_4 - e$: popoln graf na štirih vozliščih, iz katerega odstranimo en rob. V njem imata dve vozlišči stopnjo 2, preostali dve pa stopnjo 3. Ta vozlišča stopnje 2 interpretiramo kot *priklopni vozlišči*, prek katerih gradnik lepimo na preostanek grafa.

Na $K_4 - e$ dodajamo manjša drevesa, s čimer dobimo tri tipe blokov:

- *pendant blok* na 5 vozliščih, ki se na graf priklopi v eni točki,
- *podaljšani blok* na 7 vozliščih, kjer pendantu dodamo še par vmesnih vozlišč,

- *srednji blok* z dvema priklopnima vozliščema, ki služi kot člen v verigi oziroma hrbtenici grafa.

Pri vseh konstrukcijah skrbimo, da imajo končni grafi stopnjo 3 v vsakem vozlišču in so povezani.

2.2 Goseničasti konstrukciji Cat1 in Cat2

Goseničasti družini Cat1 in Cat2 sta zgrajeni tako, da večino vozlišč dobimo v pendant blokih, povezanih na razmeroma kratko hrbtenico.

V različici **Cat1** postavimo v središče vozlišče stopnje 3 in iz njega speljemo več krakov. Na konce krakov pripnemo pendant bloke, vmes pa po potrebi dodajamo srednje in podaljšane bloke. Dobljeni grafi imajo izrazito zvezdasto obliko: majhno jedro in več daljših krakov

V različici **Cat2** uporabljamo iste gradnike, vendar drugače razporedimo srednje in podaljšane bloke, zlasti pri velikostih $n = 6k + 2$. Tam konstrukcija Cat2 zamenja nekaj pendant blokov z drugačno kombinacijo srednjih in podaljšanih blokov in s tem spremeni število podpoti. Razlika med Cat1 in Cat2 je lepo vidna pri $n = 26$ -(To vidm da si ze neki omenju, mogoce samo zdruziva)-

Če primerjamo pn(Cat1) in pn(Cat2), vidimo tipičen vzorec: za manjša n in posebej za $n = 6k + 2$ je pogosto boljša Cat2, za večja n pa sistematično prevlada Cat1. V obeh družinah subpath number raste približno kvadratno z n, a Cat1 ima pri velikih n počasnejšo rast.

2.3 Drevesna družina Tree_n

Družina Tree_n izhaja iz povsem drugačne, drevesne strukture. Najprej zgradimo drevo T_k: v korenu je vozlišče stopnje 3, nato pa zaporedno razvejamo liste, dokler ne dosežemo želenega k. Tako dobimo razmeroma plitvo drevo z velikim številom listov.

V naslednjem koraku na vsak list pripnemo gradnik na osnovi $K_4 - e$ z dvema priklopnima vozliščema. Oba priklopna vrha povežemo na isti list, s čimer dvignemo njegovo stopnjo iz 1 na 3, novi vrhovi gradnika pa so prav tako stopnje 3. Končni graf je kubičen in ga označimo z Tree_n.

Struktura Tree_n je zelo različna od Cat1/Cat2: namesto nekaj krakov imamo cel "gozd" pendant blokov na listih drevesa, zgornji del drevesa pa ostane kratek. Kljub razlikam numerični rezultati kažejo, da imata Tree_n in Cat1 za vrsto n enako vrednost subpath number, kar nakazuje globljo povezavo med konstrukcijama.

2.4 Nova domneva

- za $n \in \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ je graf Cat2 (in z njim tudi Cat1/Tree, kjer imajo enak $pn(G)$) boljši od L_n, pri čemer sta za $n \leq 20$ zares pregledana *vsa* kubična grafa,
- za večja n (do vrednosti, kjer smo računali) imajo Cat1, Cat2 in Tree_n za dano n vedno veliko manjše število podpoti kot L_n,
- numerično se subpath number Cat1 in Tree_n ujema na dolgem intervalu n, medtem ko Cat2 izstopa predvsem pri $n = 6k + 2$.

Na podlagi teh opazovanj lahko neformalno zapišemo novo domnevo:

Domneva. *Za majhna soda n kubični graf z najmanjšim subpath number pripada eni izmed družin Cat1, Cat2 ali Tree_n. Za $n \leq 20$ je tak graf enak grafu Cat2, za večja n pa družini Cat1 in Tree_n dasta kandidata, ki ju z našimi metodami ni uspelo izboljšati.*

Ta domneva povzema numerične rezultate in nadomesti prvotno, preveč optimistično domnevo o optimalnosti grafov L_n.

3 Zaključek

V projektu smo preučevali minimizacijo subpath number v razredu povezanih kubičnih grafov. Za $n \in \{10, 12, 14, 16, 18\}$ smo s pomočjo programa `nauty_geng` pregledali vse kubične grafe in izračunali njihov $pn(G)$. Pokazali smo, da grafi L_n za $n = 10, 12, 14$ res dosežejo minimum, za $n = 16$ in $n = 18$ pa smo našli več protiprimerov, tako da izvorna domneva ne drži.

Za večja n smo uporabili metahevristiko *simulated annealing*, ki iz različnih začetnih grafov (tudi iz L_n) najde grafe z bistveno manjšim subpath number. Na tej podlagi smo definirali tri nove konstrukcijske družine: goseničasti konstrukciji Cat1 in Cat2 ter drevesno družino Tree_n, vse zgrajene iz gradnikov na osnovi $K_4 - e$.

Primerjava subpath number v tabelah pokaže, da imajo te konstrukcije za isto n velikostno razredno manjše število podpoti kot grafi L_n. Za $n \leq 20$ je Cat2 dokazano optimalen, za večja n pa Cat1 in Tree_n predstavljata zelo močne kandidate, ki jih z dosedanjimi metodami nismo uspeli izboljšati.

Skupni zaključek je, da grafi L_n niso pravi minimizatorji subpath number in da strukture z veliko pendant bloki (Cat1, Cat2, Tree_n) veliko bolje izkoriščajo omejitve kubičnih grafov pri zmanjševanju števila preprostih poti.