

Tukaj pišem svoj del, da bova kasneje združila

Žiga

9. december 2025

1 Preverjanje domneve za majhne n

Če smo domnevo žeeli preveriti na vseh kubičnih grafih na n vozliščih, smo morali najprej te grafe generirati. Izkazalo se je, da številov kubičnih grafov na n vozliščih eksponentno raste s številom vozlišč, zato smo domnevo preverili na vseh kubičnih grafih le za $n \leq 18$.

n	# kubičnih grafov
10	19
12	85
14	509
16	4060
18	41301
20	510489
22	7319447

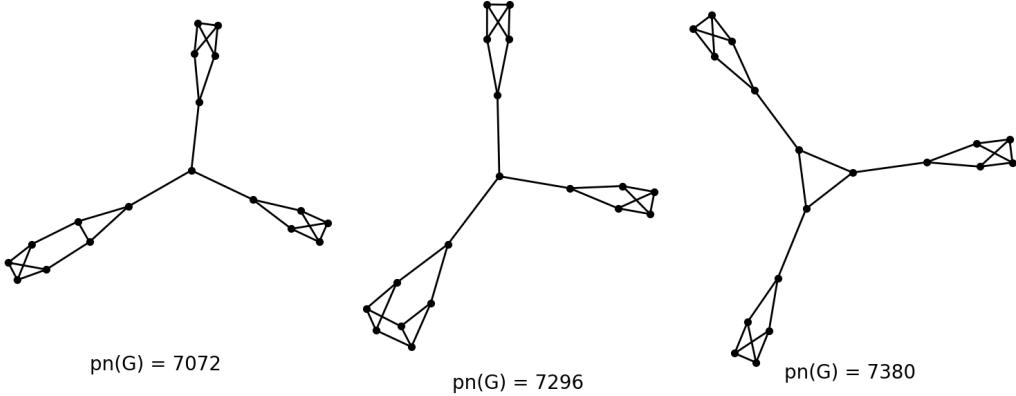
Tabela 1: Število neizomorfnih povezanih kubičnih grafov na n vozliščih.

Za $n \in \{10, 12, 14, 16, 18\}$ smo pridobili vse neizomorfne povezane kubične grafe na n vozliščih in za vsak graf G izračunali $pn(G)$. Za vsak n smo posebej primerjali število podpoti generiranega grafa $pn(G)$ s številom podpoti grafa L_n $pn(L_n)$. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli.

n	število boljših grafov	minimalno število podpoti	$pn(L_n)$
10	0	1276	1276
12	0	3076	3076
14	0	5504	5504
16	6	3640	12744
18	23	7072	22532

Tabela 2: Število vseh grafov na n vozliščih z manjšim številom podpoti od grafa L_n .

Na podlagi rezultatov vidimo, da domneva velja za $n \in \{10, 12, 14\}$, medtem ko lahko domnevo za $n \in \{16, 18\}$ zavrnemo. Namreč v primeru ko je $n = 16$ smo našli 6 grafov z manjšim številom podpoti od grafa L_{16} , v primeru $n = 18$ pa že kar 23 grafov z manjšim številom podpoti od grafa L_{18} .



Slika 1: Grafi z najmanjšim številom podpoti za $n = 18$.

Ker je za $n \geq 20$ izračun *subpath number* vedno zahtevnejši, grafov pa vedno več, bomo za iskanje protiprimerov uporabili drugačno metodo. Ta metoda se imenuje *simulated annealing*.

2 Simulated annealing

Za iskanje kubičnih grafov z manjšim številom podpoti od L_n grafa smo za $n \geq 20$ uporabili metahevristični algoritem *simulated annealing* (SA). Gre za probabilistično metodo globalne optimizacije, ki posnema proces fizikalnega ohlajanja kovin: sistem se sprva nahaja pri visoki temperaturi in lahko sprejema tudi poslabšanja, postopoma pa se temperatura znižuje, kar zmanjšuje verjetnost sprejemanja slabših rešitev. Pri dovolj počasnem ohlajanju se algoritom z visoko verjetnostjo približa globalnemu minimumu energetske funkcije, katera je v našem primeru *subpath number*.

2.1 Delovanje

V našem primeru je prostor iskanja sestavljen iz vseh *povezanih kubičnih grafov* na n vozliščih. Prehod med grafi definiramo s t. i. *dvojnim prevezovanjem robov* (ang. double-edge swap). Naj bo $G = (V, E)$ kubičen graf in naj bosta izbrani dve disjunktni povezavi $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$. Zamenjava poteka tako, da se povezavi odstranita in nadomestita z novima paroma $\{u, x\}$ in $\{v, y\}$ ali s paroma $\{u, y\}$ in $\{v, x\}$. S takimi menjavami povezav ohranimo 3-regularnost grafa. Energij-ska funkcija, ki jo minimiziramo, pa je v našem primeru podana z $E(G) = \text{subpath_number}(G)$, kjer funkcija $\text{subpath_number}(\cdot)$ prešteje vse različne podpoti v grafu.

Proces začnemo z grafom, ki ga želimo izboljšati. V našem primeru je to graf $L_n =: G$. Pri vsakem koraku z double edge swap generiramo novega soseda G' in izračunamo $\Delta E = E(G') - E(G)$. Če je $\Delta E \leq 0$, rešitev sprejmemo. V nasprotnem primeru jo sprejmemo z verjetnostjo

$$p = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right),$$

kjer $T > 0$ predstavlja trenutni temperaturni parameter. S tem omogočimo kontrolirano sprejemanje slabših rešitev zgodaj v postopku, kar preprečuje prezgodnjo ujetost v lokalne minimume. Če rešitev sprejmemo nastavimo $G := G'$ in postopek ponavljamo.

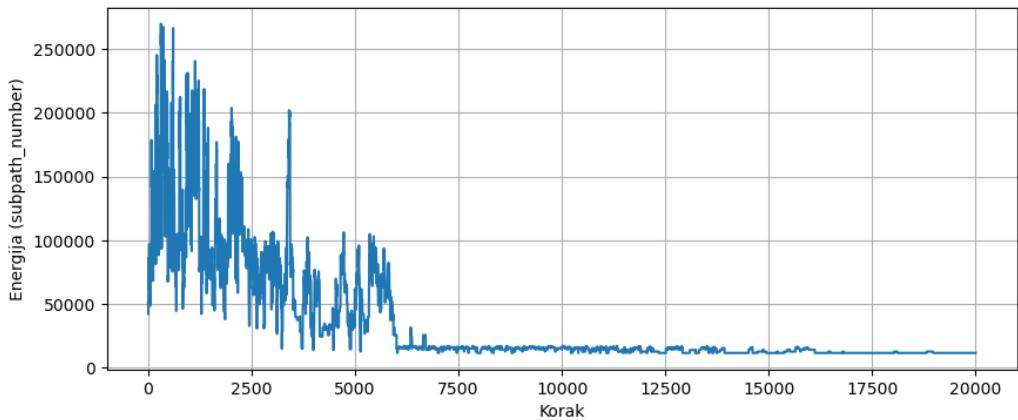
V našem primeru smo naredili 20000 ponovitev postopka, začetni parameter T_0 pa je bil nastavljen tako, da se je v zgodnjih ponovitvah slabša rešitev sprejela z verjetnostjo približno 40 %, proti koncu postopka pa skoraj nikoli.

2.2 Rezultati

Z metodo *simulated annealing* smo za $n \in \{20, 22, \dots, 30\}$ iskali grafe z manjšim številom podpoti od grafa L_n .

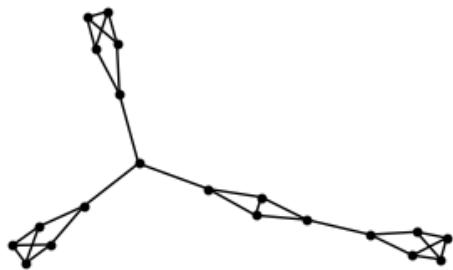
n	$subpath_number(L_n)$	boljši $subpath_number$	razlika
20	51532	11708	38716
22	90760	7156	83604
24	206800	12220	194580
26	363788	21760	342028
28	827988	29568	798420
30	1456016	18520	1437496

Tabela 3: Rezultati SA.



Slika 2: Potek energije med simulated annealing za $n = 20$.

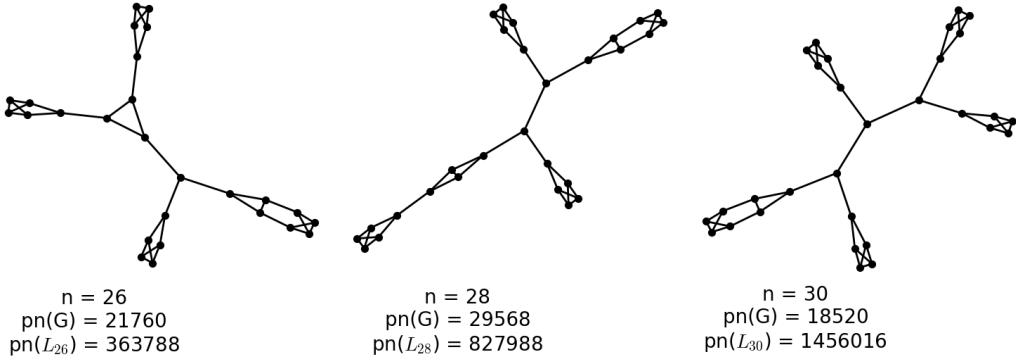
Na sliki lahko vidimo potek energije (števila podpoti) med procesom SA za $n = 20$. Kar lahko razberemo je, da so se med postopkom sprejele tudi slabše rešitve, saj energija (število podpoti) ni strogo padajoča. Program je uspešno sprejemal tudi sabše rešitve in se s tem izognil morebitnim lokalnim minimumom. Vselej pa smo na koncu našli graf s kar 5-krat manjšim številom podpoti ob grafa L_{20} . Čeprav samo na podlagi rezultatov SA še ne moremo trditi, da je 11706 najmanjše število podpoti za $n = 20$, bomo kasneje dokazali, da je to pravzaprav res in da smo s postopkom SA našli graf, ki minimizira število podpoti za $n = 20$.



Slika 3: Graf dobljen s SA za $n = 20$.

Kot pričakovano za $n \in \{10, 12, 14\}$ protiprimerov nismo našli, medtem ko smo za vse večje n našli grafe s precej nižjim številom podpoti. Rezultati so prikazani v zgornji tabeli.

Vredno je poudariti, da v splošnem z najdenimi grafi še zdaleč ne minimiziramo števila podpoti za inzbrani n , čeprav so za nekatere n najdeni grafi že precej dobri. Našli smo le primere grafov z manjšim številom podpoti od opazovanega L_n grafa. To se dobro vidi, ko primerjamo dobljeno minimalno število podpoti za $n = 28$ in $n = 30$. Dobljeni graf za $n = 30$ ima namreč kar za tretjino manj podpoti od dobljenega grafa za $n = 28$. Ta podatek nam za graf z $n = 30$ sicer ne pove veliko, medtem ko smo lahko skoraj prepričani, da za $n = 28$ obstaja graf z manjšim številom podpoti.



Slika 4: Grafi pridobljeni s SA za $n = 26, 28$ in $n = 30$.