

# Group 13: Subpath number - minimal cubic graphs

Lovro Levačić, Žiga Obradović

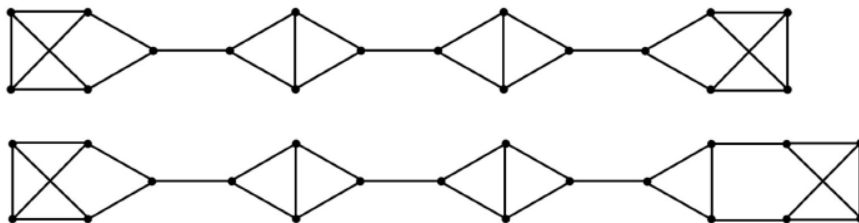
November 2025

## KRATEK OPIS

### 1 Uvod

V projektu obravnavamo domnevo, ki govori o minimizaciji števila poti v razredu **kubičnih grafov**, torej grafov, kjer ima vsako vozlišče stopnjo 3. Za dani povezan graf  $G$  definiramo *subpath number*, označen s  $pn(G)$ , kot število vseh preprostih poti v grafu, vključno s trivialnimi potmi dolžine 0. Preprosta pot je zaporedje vozlišč  $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$  brez ponovitev, kjer je vsak par zaporednih vozlišč povezan z robom.

V literaturi je bila postavljena domneva, da za vsako sodo število vozlišč  $n$  obstaja natanko en kubični graf  $L_n$ , ki ima najmanjši subpath number med vsemi kubičnimi grafi z  $n \geq 10$  vozlišči. Grafi  $L_n$  so sestavljeni iz več kopij grafa  $K_4 - e$  (popolnega grafa na štirih vozliščih, iz katerega odstranimo en rob), ki jih povežemo v verižni strukturi. Na obeh koncih se tej verigi dodata še posebna *pendant bloka* - eden na 5, drugi pa na 7 vozlišč.



Slika 1:  $L_n$  grafa za  $n = 18$  in  $20$

Kasneje se je pokazalo, da domneva za dovolj velika  $n$  ne drži, vendar še ni znano, pri katerem najmanjšem  $n$  se pojavi prva protimera. Namen našega projekta je torej:

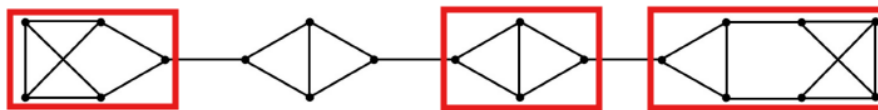
- preveriti domnevo za manjša, obvladljiva števila vozlišč  $n$ ,
- in poskusiti poiskati protimero, torej kubični graf z manjšim subpath number kot  $L_n$ .

### 2 Priprava

Za čim bolj učinkovito delo bova najprej definirala osnovne funkcije, s katerimi bova izdelovala grafe in štela njihove poti:

1. *subpath\_number(Graf)*: Funkcija, ki sprejme katerikoli graf in vrne **subpath number**.

2.  $L_n\_graph(n)$ : Funkcija, ki sprejme število vozlišč  $n$  in vrne graf  $L_n$ . Ideja funkcije je, da definiramo tri različne gradnike, ki jih sestavimo skupaj gleda na število  $n$ .



Slika 2: Gradniki grafa  $L_n$

3.  $cubic\_graphs(n)$ : Funkcija, ki sprejme število vozlišč  $n$  in generira vse možne kubične grafe na  $n$  vozliščih (za sode  $n \geq 4$ ).

Z uporabo teh treh funkcij želiva pokriti predvsem prvi del naloge, ki je dokazati domnevo, da ima graf  $L_n$  najmanjši subpath number za majhne  $n$  in poiskati kakšen protiprimer za večje  $n$ .

### 3 Načrt dela

Ko bodo osnovne funkcije definirane, bo najina prva naloga ta, da testirava njihovo pravilnost. Funkcijo *subpath\_number* bova tako najprej testirala na zelo enostavnih grafih, ki niso nujno kubični. Želiva torej, da so testni grafi taki, da subpath number lahko izračunava sama brez dodatnih orodij ("na roke"). Če se bodo dobljeni rezultati ujemali z vrednostmi funkcije, bova funkcijo lahko uporabila tudi za grafe z več vozlišči. Podoben test bova naredila tudi za drugi dve osnovni funkciji.