Tukaj pišem svoj del, da bova kasneje združila

8. december 2025

1 Simulated annealing

Za iskanje kubičnih grafov z manjšim številom podpoti od L_n grafa smo uporabili metahevristični algoritem *simulated annealing* (SA). Gre za probabilistično metodo globalne optimizacije, ki posnema proces fizikalnega ohlajanja kovin: sistem se sprva nahaja pri visoki temperaturi in lahko sprejema tudi poslabšanja, postopoma pa se temperatura znižuje, kar zmanjšuje verjetnost sprejemanja slabših rešitev. Pri dovolj počasnem ohlajanju se algoritem z visoko verjetnostjo približa globalnemu minimumu energetske funkcije, katera je v našem primeru *subpath number*.

1.1 Delovanje

V našem primeru je prostor iskanja sestavljen iz vseh *povezanih kubičnih grafov* na n vozliščih. Prehod med grafi definiramo s t. i. *dvojnim prevezovanjem robov* (ang. double-edge swap). Naj bo $G = (V, E)$ kubičen graf in naj bosta izbrani dve disjunktni povezavi $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$. Zamenjava poteka tako, da se povezavi odstranita in nadomestita z novima paroma $\{u, x\}$ in $\{v, y\}$ ali s paroma $\{u, y\}$ in $\{v, x\}$. S takimi menjavami povezav ohranimo 3-regularnost grafa. Energijska funkcija, ki jo minimiziramo, pa je v našem primeru podana z $E(G) = \text{subpath\_number}(G)$, kjer funkcija $\text{subpath\_number}(\cdot)$ prešteje vse različne podpoti v grafu.

Proces začnemo z grafom, ki ga želimo izboljšati. V našem primeru je to graf $L_n =: G$. Pri vsakem koraku z double edge swap generiramo novega soseda G' in izračunamo $\Delta E = E(G') - E(G)$. Če je $\Delta E \leq 0$, rešitev sprejmemo. V nasprotnem primeru jo sprejmemo z verjetnostjo

$$p = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right),$$

kjer $T > 0$ predstavlja trenutni temperaturni parameter. S tem omogočimo kontrolirano sprejemanje slabših rešitev zgodaj v postopku, kar preprečuje prezgodnjo ujetost v lokalne minimume. Če rešitev sprejmemo nastavimo $G := G'$ in postopek ponavljamo.

V našem primeru smo naredili 20000 ponovitev postopka, začetni parameter T_0 pa je bil nastavljen tako, da se je v zgodnjih ponovitvah slabša rešitev sprejela z verjetnostjo približno 40 %, proti koncu postopka pa skoraj nikoli.

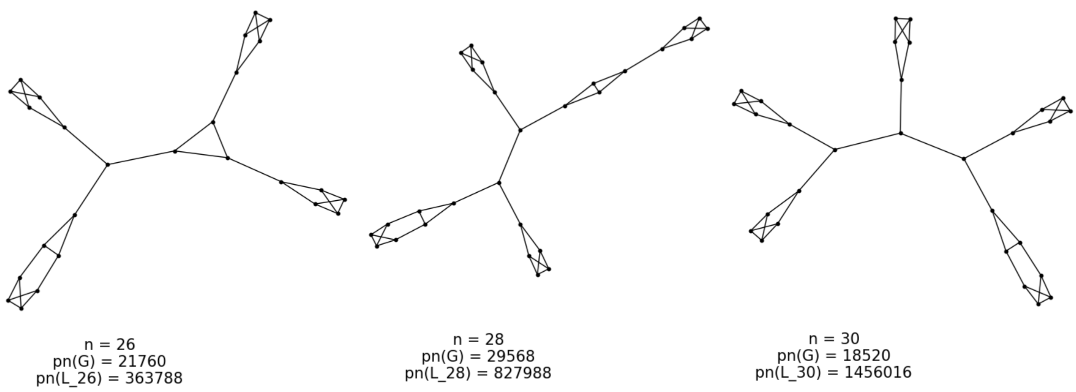
1.2 Rezultati

Z metodo *simulated annealing* smo za $n \in \{10, 12, \ldots, 30\}$ iskali grafe z manjšim številom podpoti od grafa L_n.

Kot pričakovano za $n \in \{10, 12, 14\}$ protiprimerov nismo našli, medtem ko smo za vse večje n našli grafe s precej nižjim številom podpoti. Rezultati so prikazani v tabeli.

n	$subpath\_number(L_n)$	boljši $subpath\_number$	razlika
10	1276	1276	0
12	3076	3076	0
14	5504	5504	0
16	12744	3640	9104
18	22532	7072	15460
20	51532	12816	38716
22	90760	7156	83604
24	206800	12220	194580
26	363788	21760	342028
28	827988	29568	798420
30	1456016	18520	1437496

Tabela 1: Rezultati SA.



Slika 1: Grafi pridobljeni s SA za $n = 26$, 28 in 30.