

Tukaj pišem svoj del, da bova kasneje združila

Žiga

9. december 2025

## 1 Preverjanje domneve za majhne $n$

Če smo domnevo želeli preveriti na vseh kubičnih grafih na  $n$  vozliščih, smo morali najprej te grafe generirati. Izkazalo se je, da številov kubičnih grafov na  $n$  vozliščih eksponentno raste s številom vozlišč, zato smo domnevo preverili na vseh kubičnih grafih le za  $n \leq 18$ .

$n$	# kubičnih grafov
10	19
12	85
14	509
16	4060
18	41301
20	510489
22	7319447

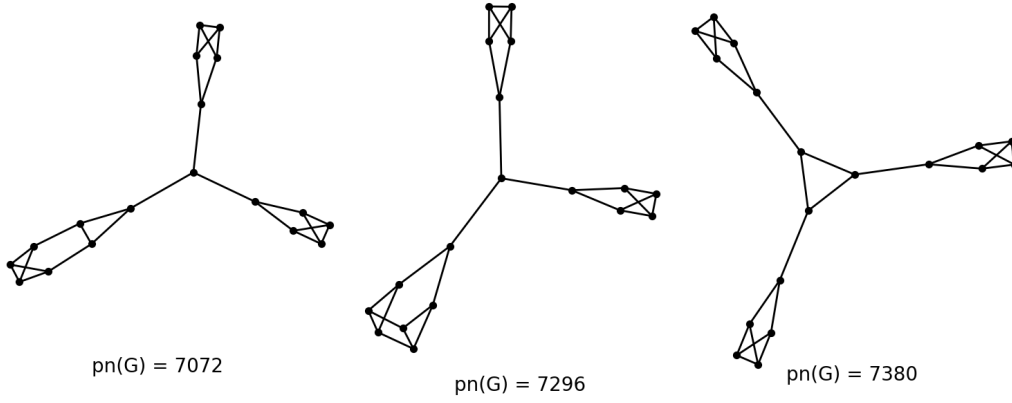
Tabela 1: Število neizomorfni povezanih kubičnih grafov na  $n$  vozliščih.

Za  $n \in \{10, 12, 14, 16, 18\}$  smo pridobili vse neizomorfne povezane kubične grafe na  $n$  vozliščih in za vsak graf  $G$  izračunali  $pn(G)$ . Za vsak  $n$  smo posebej primerjali število podpoti generiranega grafa  $pn(G)$  s številom podpoti grafa  $L_n$   $pn(L_n)$ . Rezultati so prikazani v spodnji tabeli.

$n$	število boljših grafov	minimalno število podpoti	$pn(L_n)$
10	0	1276	1276
12	0	3076	3076
14	0	5504	5504
16	6	3640	12744
18	23	7072	22532

Tabela 2: Število vseh grafov na  $n$  vozliščih z manjšim številom podpoti od grafa  $L_n$ .

Na podlagi rezultatov vidimo, da domneva velja za  $n \in \{10, 12, 14\}$ , medtem ko lahko domnevo za  $n \in \{16, 18\}$  zavrnemo. Namreč v primeru ko je  $n = 16$  smo našli 6 grafov z manjšim številom podpoti od grafa  $L_{16}$ , v primeru  $n = 18$  pa že kar 23 grafov z manjšim številom podpoti od grafa  $L_{18}$ .



Slika 1: Grafi z najmanjšim številom podpoti za  $n = 18$ .

Ker je za  $n \geq 20$  izračun *subpath number* vedno zahtevnejši, grafov pa vedno več, bomo za iskanje protiprimerov uporabili drugačno metodo. Ta metoda se mimenuje *simulated annealing*.

## 2 Simulated annealing

Za iskanje kubičnih grafov z manjšim številom podpoti od  $L_n$  grafa smo za  $n \geq 20$  uporabili metahevristični algoritem *simulated annealing* (SA). Gre za probabilistično metodo globalne optimizacije, ki posnema proces fizikalnega ohlajanja kovin: sistem se sprva nahaja pri visoki temperaturi in lahko sprejema tudi poslabšanja, postopoma pa se temperatura znižuje, kar zmanjšuje verjetnost sprejemanja slabših rešitev. Pri dovolj počasnem ohlajanju se algoritem z visoko verjetnostjo približa globalnemu minimumu energetske funkcije, katera je v našem primeru *subpath number*.

### 2.1 Delovanje

V našem primeru je prostor iskanja sestavljen iz vseh *povezanih kubičnih grafov* na  $n$  vozliščih. Prehod med grafi definiramo s t. i. *dvojnimi prevezovanjem robov* (ang. double-edge swap). Naj bo  $G = (V, E)$  kubičen graf in naj bosta izbrani dve disjunktni povezavi  $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$ . Zamenjava poteka tako, da se povezavi odstranita in nadomestita z novima paroma  $\{u, x\}$  in  $\{v, y\}$  ali s paroma  $\{u, y\}$  in  $\{v, x\}$ . S takimi menjavami povezav ohranimo 3-regularnost grafa. Energjska funkcija, ki jo minimiziramo, pa je v našem primeru podana z  $E(G) = \text{subpath\_number}(G)$ , kjer funkcija  $\text{subpath\_number}(\cdot)$  prešteje vse različne podpoti v grafu.

Proces začnemo z grafom, ki ga želimo izboljšati. V našem primeru je to graf  $L_n =: G$ . Pri vsakem koraku z double edge swap generiramo novega soseda  $G'$  in izračunamo  $\Delta E = E(G') - E(G)$ . Če je  $\Delta E \leq 0$ , rešitev sprejmemo. V nasprotnem primeru jo sprejmemo z verjetnostjo

$$p = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right),$$

kjer  $T > 0$  predstavlja trenutni temperaturni parameter. S tem omogočimo kontrolirano sprejemanje slabših rešitev zgodaj v postopku, kar preprečuje prezgodnjo ujetost v lokalne minimume. Če rešitev sprejmemo nastavimo  $G := G'$  in postopek ponavljamo.

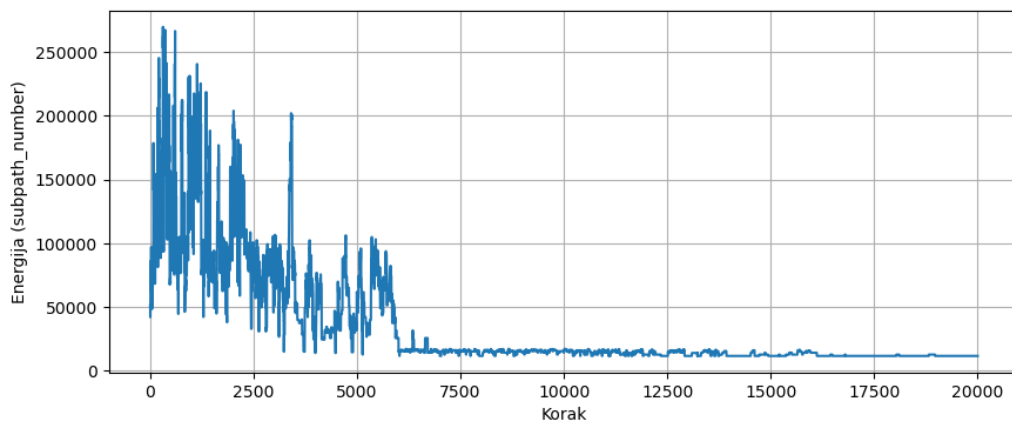
V našem primeru smo naredili 20000 ponovitev postopka, začetni parameter  $T_0$  pa je bil nastavljen tako, da se je v zgodnjih ponovitvah slabša rešitev sprejela z verjetnostjo približno 40 %, proti koncu postopka pa skoraj nikoli.

## 2.2 Rezultati

Z metodo *simulated annealing* smo za  $n \in \{20, 22, \dots, 30\}$  iskali grafe z manjšim številom podpoti od grafa  $L_n$ .

n	$subpath\_number(L_n)$	boljši $subpath\_number$	razlika
20	51532	11708	38716
22	90760	7156	83604
24	206800	12220	194580
26	363788	21760	342028
28	827988	29568	798420
30	1456016	18520	1437496

Tabela 3: Rezultati SA.



Slika 2: Potek energije med simulated annealing za  $n = 20$ .

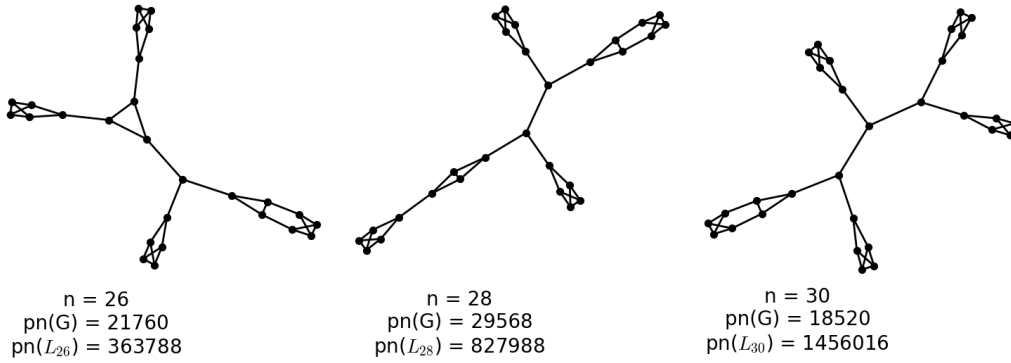
Na sliki lahko vidimo potek energije (števila podpoti) med procesom SA za  $n = 20$ . Kar lahko razberemo je, da so se med postopkom sprejele tudi slabše rešitve, saj energija (število podpoti) ni strogo padajoča. Program je uspešno sprejemal tudi slabše rešitve in se s tem izognil morebitnim lokalnim minimumom. Vselej pa smo na koncu našli graf s kar 5-krat manjšim številom podpoti ob grafa  $L_{20}$ . Čeprav samo na podlagi rezultatov SA še ne moremo trditi, da je 11706 najmanjše število podpoti za  $n = 20$ , bomo kasneje dokazali, da je to pravzaprav res in da smo s postopkom SA našli graf, ki minimizira število podpoti za  $n = 20$ .



Slika 3: Graf dobljen s SA za  $n = 20$ .

Kot pričakovano za  $n \in \{10, 12, 14\}$  protiprimerov nismo našli, medtem ko smo za vse večje  $n$  našli grafe s precej nižjim številom podpoti. Rezultati so prikazani v zgornji tabeli.

Vredno je poudariti, da v splošnem z najdenimi grafi še zdaleč ne minimiziramo števila podpoti za inzbrani  $n$ , čeprav so za nekatere  $n$  najdeni grafi že precej dobri. Našli smo le primere grafov z manjšim številom podpoti od opazovanega  $L_n$  grafa. To se dobro vidi, ko primerjamo dobljeno minimalno število podpoti za  $n = 28$  in  $n = 30$ . Dobljeni graf za  $n = 30$  ima namreč kar za tretjino manj podpoti od dobljenega grafa za  $n = 28$ . Ta podatek nam za graf z  $n = 30$  sicer ne pove veliko, medtem ko smo lahko skoraj prepričani, da za  $n = 28$  obstaja graf z manjšim številom podpoti.



Slika 4: Grafi pridobljeni s SA za  $n = 26$ ,  $28$  in  $n = 18$ .