Documentación Taller 1 AN 2130

Andrés Alarcón, Nicolás Barragán, Gabriel de Souza, Pablo Santander

August 23, 2021-1

Abstract

En nuestro documento se detallará el proceso del cual se hallan las raíces de un número de ejercicios en base a los métodos de punto fijo, Aitken, Steffensen y bisección. Se explicará el análisis, el diseño, nuestro algoritmo formado y los resultados de nuestro taller. Con esto, se responderán varias preguntas planteadas para dar con la resolución del taller.

Part I
Planteamiento de los ejercicios y métodos

1 Ejercicios

1.1 Problema 1

El problema 1 da lugar a a la siguiente función:

$$f(x) = cos^2(x) - x^2 \tag{1.1}$$

Algunos de los métodos que se tratarán en este taller requieren que se trate con una segunda función *g(x)* que se consigue dentro de la función original. Por esto y para futura referencia, se determina la siguiente función:

$$g(x) = cos(x) \tag{1.2}$$

1.2 Problema 2

La función del segundo problema está definido de la siguiente manera:

$$f(x) = e^x - x - 1 \tag{1.3}$$

Para tratar con los métodos mencionados anteriormente, es requerido obtener una función *g(x)*. Con esto, se da lugar a la función:

$$g(x) = log(x + 1) \tag{1.4}$$

1.3 Problema 3

Este problema presenta una ecuación utilizada por John Wallis para presentar por primer vez el método de Newton a la academia francesa, por el siglo XV. La ecuación en cuestión es la siguiente:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{27} \tag{1.5}$$

Además, el problema 3 contiene un segunda ecuación, también utilizada por John Wallis:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \tag{1.6}$$

1.4 Problema 4

El ejercicio 4 pide para determinar el coeficiente de arrastre W necesario para que un paracaidista de masa m=68.1 kg tenga una velocidad de 40 m/s después de una caída libre de t=10 s.
La ecuación del coeficiente de arrastre o rozamiento es el siguiente:

$$f(c) = \frac{gm}{c}(1 - e^(- \frac{c}{g}t)) - v \tag{1.7}$$

Donde g es la gravedad, m es la masa, v es la velocidad y t es el tiempo. Al reemplazar los valores dentro del ejercicio tenemos la siguiente ecuación

$$f(c) = \frac{9.8m/s^2x68.1kg}{c}(1 - e^(- \frac{c}{9.8m/s^2}10s)) - 40m/s \tag{1.8}$$

1.5 Problema 5

El ejercicio 5 presenta dos ecuaciones paramétricas que describen el movimiento en dos partículas en un mismo plano de coordenadas. Estas son:

$$f(t) = 3sin^3(t) - 1 \tag{1.9}$$

y

$$g(t) = 4sintcost \tag{1.10}$$

El objetivo de este ejercico es encontrar la instancia t donde coinciden. Después de hallar t, se debe mostrar graficamente la solución.

2 Métodos

2.1 Steffensen

Es una técnica de búsqueda de raíces que lleva el nombre de Johan Frederik Steffensen y es similar al método de Newton. El método de Steffensen también logra la convergencia cuadrática, pero sin usar derivadas.[1] La forma más simple de este método ocurre cuando es usado para encontrar valores de x que satisfagan f(x)=0. Aproximando la solución de $\boldsymbol{x}$ la función $\boldsymbol{f}$ debe satisfacer -1 < $\boldsymbol{f}$' (x) < 0;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

para n=0,1,2,3,...., donde la función de pendiente $\boldsymbol{g(x)}$ es una combinación de la función original $\boldsymbol{f}$ dada por la siguiente fórmula:

$$g(x) = \frac{f(x + f(x))}{f(x)} - 1$$

o equivalente

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - 1, \quad donde \;\; \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(x)$$

La función $\boldsymbol{g}$ es el valor promedio de la pendiente de la función $\boldsymbol{f}$ entre el último punto de la secuencia:

$$(x, y) = x_n, f(x_n))$$

Para todas las demás partes del cálculo, el método de Steffensen solo requiere que la función $\boldsymbol{f}$ sea continua y tenga una solución cercana.[1]

2.2 Aitken

El proceso delta-cuadrado de Aitken o extrapolación de Aitken es un método de aceleración en serie, que es utilizado para acelerar la tasa de convergencia de una secuencia.[2] Su forma temprana era conocida por Seki Kōwa (finales del siglo XVII) y se encontró para la rectificación del círculo, es decir, el cálculo de π. Es más útil para acelerar la convergencia de una secuencia que converge linealmente. se calcula la nueva sucesión definida como:

$$X_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(X_{n+2} - X_{n+1})^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Si se emplea el operador Δ de las diferencias progresivas definido como:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$$

$$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

También puede escribirse como:

$$x_{n+2} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

La nueva sucesión no converge en general de forma cuadrática, se puede demostrar que para un método de punto fijo, es decir, para una sucesión x_{n+1} = f(x_n) para alguna función iterada f, convergiendo hacia un punto fijo, la convergencia es cuadrática. En este caso, la técnica se conoce como método de Steffensen.[2]

2.3 Bisección

Es el método más elemental y antiguo para determinar las raíces de una ecuación. Está basado en el teorema de Bolzano. Consiste en partir de un intervalo [x_0,x_1]tal que f(x_0)f(x_1) $<$ 0, por lo que se sabe que existe, al menos, una raíz real. A partir de este punto se va reduciendo el intervalo sucesivamente hasta hacerlo tan pequeño como exija la precisión que se haya decidido.[3]

Una vez que se comprueba que el intervalo de partida es adecuado, lo dividimos en dos subintervalos tales que $[x_0, \frac{x_0+x_1}{2}]$ y $[\frac{x_0+x_1}{2}, x_1]$ y determinamos en qué subintervalo se encuentra la raíz.

El punto medio del intervalo se calcula como:

$$x_m = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)}{2}$$

en lugar de emplear

$$x_m = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

La convergencia (Δ) se calcula mediante la expresión

$$\Delta = \mathrm{ABS}((x_1 - x_0)/x_1)$$

. De este modo, el término Δ, representa el número de cifras significativas con las que obtenemos el resultado.[3]

2.4 Punto fijo

El método del punto fijo también denominado método de aproximación sucesiva es un método iterativo que permite resolver sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales. En particular se puede utilizar para determinar raíces de una función de la forma f(x), siempre y cuando se cumplan los criterios de convergencia.[4]
El método de iteración de punto fijo requiere volver a escribir la ecuación f(x)=0 en la forma x = g (x).
Llamemos x^* a la raiz de $\boldsymbol{f}$. La función g tal que:

$$f(x) = f(x) = x - g(x) \forall x \in D_f$$

Entonces:

$$f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* - g(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = g(x^*).$$

Tenemos, pues, a x^* como punto fijo de g.

El procedimiento empieza con una estimación o conjetura inicial de x, que es mejorada por iteración hasta alcanzar la convergencia. Para que converja, la derivada (d g / d x) debe ser menor que 1 en magnitud (al menos para los valores x que se encuentran durante las iteraciones).
La convergencia será establecida mediante el requisito de que el cambio en x de una iteración a la siguiente no sea mayor en magnitud que alguna pequeña cantidad $\in$.[4]

Part II
Resultados y preguntas del taller

3 Ejercicios

3.1 Método Punto Fijo

Funcion	Tolerancia	Punto Fijo	Iteraciones	Wolfram
cos(x)^2-x^2	1.00E-08	0.7390851366465718	47	0.73908513321516064166
	1.00E-16	0.7390851332151607	94	
	1.00E-32	0.7390851332151607	94	
	1.00E-56	0.7390851332151607	94	
e^x-x-1	1.00E-08	No converge		0
	1.00E-16	No converge		
	1.00E-32	No converge		
	1.00E-56	No converge		
x^3-2x^2+4/3x-8/27	1.00E-08	0.6666666666666666	2	0.66667
	1.00E-16	0.6666666666666666	2	
	1.00E-32	0.6666666666666666	2	
	1.00E-56	0.6666666666666666	2	
x^3-2x-5	1.00E-08	No converge		2.09455148154233
	1.00E-16	No converge		
	1.00E-32	No converge		
	1.00E-56	No converge		
667.38/x*1-e^(-0.146843*x)-40	1.00E-08	14.375772149913587	10	14.7802085936795
	1.00E-16	14.375772149913587	11	
	1.00E-32	14.375772149913587	11	
	1.00E-56	14.375772149913587	11	

3.2 Método Bisección

Funcion	Tolerancia	Biseccion	Iteraciones	Wolfram
cos(x)^2-x^2	1.00E-08	0.7390851303935051	27	0.73908513321516064166
	1.00E-16	0.7390851332151607	52	
	1.00E-32	0.7390851332151607	52	
	1.00E-56	0.7390851332151607	52	
e^x-x-1	1.00E-08	7.450580596923828e-09	27	0
	1.00E-16	1.4901161193847656e-08	26	
	1.00E-32	1.4901161193847656e-08	26	
	1.00E-56	1.4901161193847656e-08	26	
x^3-2x^2+4/3x-8/27	1.00E-08	0.8537656143307686	27	0.66667
	1.00E-16	0.8537656171698418	54	
	1.00E-32	0.8537656171698418	54	
	1.00E-56	0.8537656171698418	54	
x^3-2x-5	1.00E-08	0.9999999925494194	27	2.09455148154233
	1.00E-16	1.0	54	
	1.00E-32	1.0	55	
	1.00E-56	1.0	55	
667.38/x*1-e^(-0.146843*x)-40	1.00E-08	14.375772149913587	10	14.7802085936795
	1.00E-16	14.375772149913587	11	
	1.00E-32	14.375772149913587	11	
	1.00E-56	14.375772149913587	11	

3.3 Método Aitken

Funcion	Tolerancia	Aitken	Iteraciones	Wolfram
cos(x)^2-x^2	1.00E-08	0.7390851332151606	46	0.73908513321516064166
	1.00E-16	0.7390851332151607	92	
	1.00E-32	0.7390851332151607	92	
	1.00E-56	0.7390851332151607	92	
e^x-x-1	1.00E-08	0		0
	1.00E-16	0		
	1.00E-32	0		
	1.00E-56	0		
x^3-2x^2+4/3x-8/27	1.00E-08	0.6682492697508008	119691	0.66667
	1.00E-16	0.6682492697508008	119691	
	1.00E-32	0.6682492697508008	119691	
	1.00E-56	0.6682492697508008	119691	
x^3-2x-5	1.00E-08	2.0945514815423265	9	2.09455148154233
	1.00E-16	2.094551481542327	20	
	1.00E-32	2.094551481542327	20	
	1.00E-56	2.094551481542327	20	
667.38/x*1-e^(-0.146843*x)-40	1.00E-08	14.375772149913587	10	14.7802085936795
	1.00E-16	14.375772149913587	11	
	1.00E-32	14.375772149913587	11	
	1.00E-56	14.375772149913587	11	

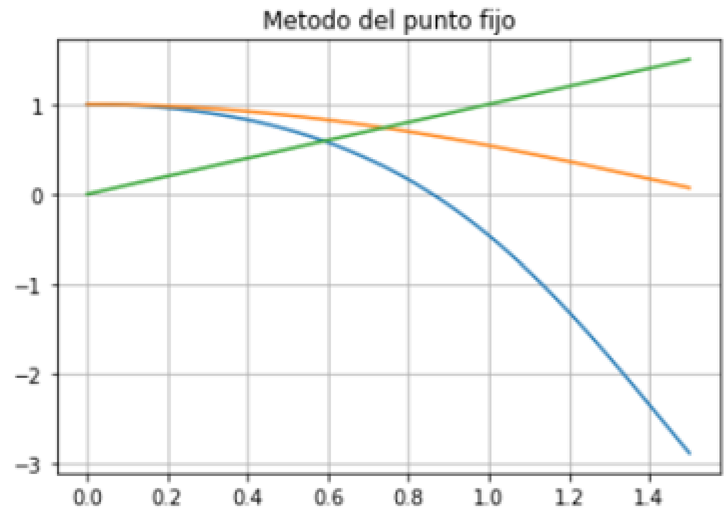
3.4 Método Steffensen

Funcion	Tolerancia	Steffensen	Iteraciones	Wolfram
cos(x)^2-x^2	1.00E-08	0.739085140599116	22	0.73908513321516064166
	1.00E-16	0.7390851332151607	47	
	1.00E-32	0.7390851332151607	47	
	1.00E-56	0.7390851332151607	47	
e^x-x-1	1.00E-08	0		0
	1.00E-16	0		
	1.00E-32	0		
	1.00E-56	0		
x^3-2x^2+4/3x-8/27	1.00E-08	0.6666666666666666	1000	0.66667
	1.00E-16	0.6666666666666666	1000	
	1.00E-32	0.6666666666666666	1000	
	1.00E-56	0.6666666666666666	1000	
x^3-2x-5	1.00E-08	2.0945514814000172	5	2.09455148154233
	1.00E-16	2.094551481542327	11	
	1.00E-32	2.094551481542327	11	
	1.00E-56	2.094551481542327	11	
667.38/x*1-e^(-0.146843*x)-40	1.00E-08	14.375772149913587	10	14.7802085936795
	1.00E-16	14.375772149913587	11	
	1.00E-32	14.375772149913587	11	
	1.00E-56	14.375772149913587	11	

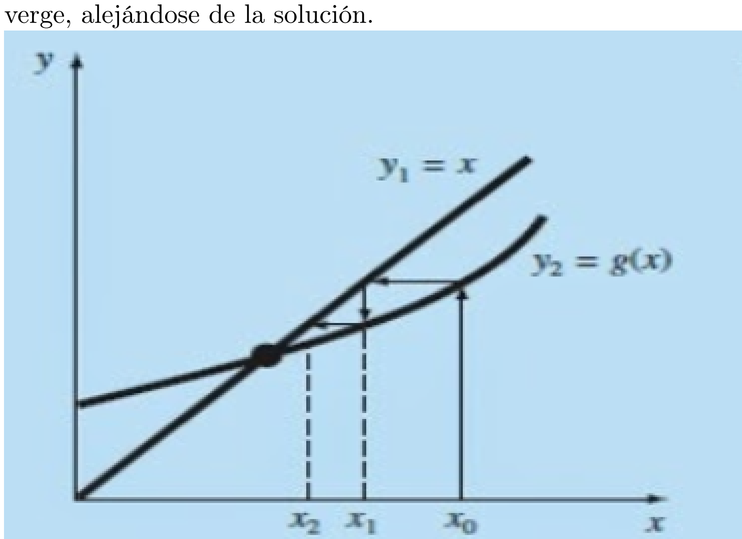
4 Preguntas

4.1 Proporcionar una explicación geométrica del algoritmo.

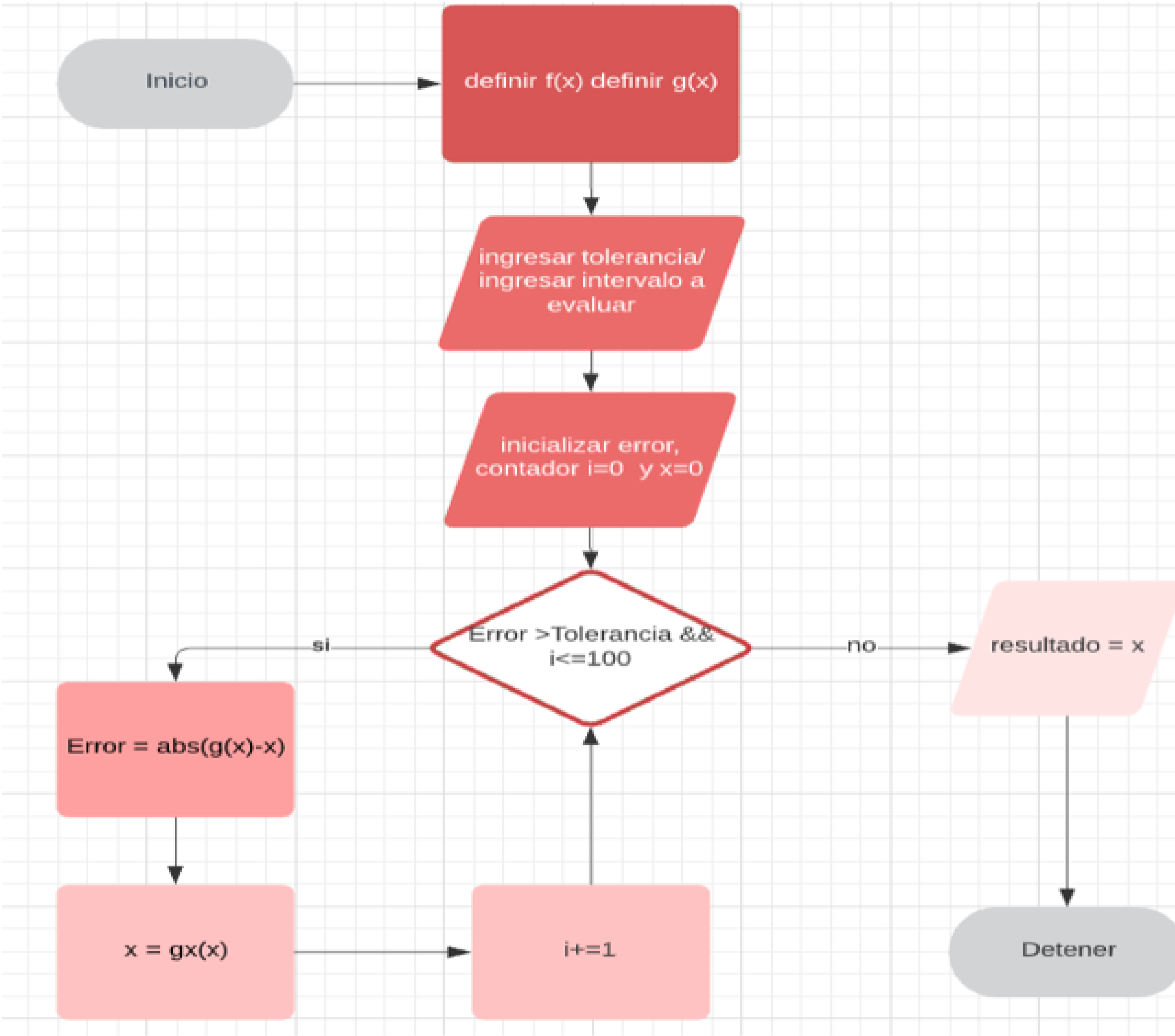
La resolución de la ecuación g(x)=x consiste en encontrar la intersección de la gráfica de y=g(x) con la recta de pendiente unidad y=x. A esta intersección se le conoce como punto fijo de g(x).



Se puede comprobar que cuando la derivada de g(x) es mayor que la unidad en un intervalo que contiene al punto fijo, la sucesión de valores calculados diverge, alejándose de la solución.



4.2 Operación del algoritmo por diagrama de flujo



4.3 ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

La característica de la función si es capaz de influir en el resultado final del método, mostrando diferentes consecuencias en las raíces. Por ejemplo, en una función par pueden existir dos raíces de mismo número pero distinta polaridad (positivo y negativo), mientras que una función periódica genera una raíz con números decimales infinitos debido a su comportamiento.

4.4 ¿Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces?

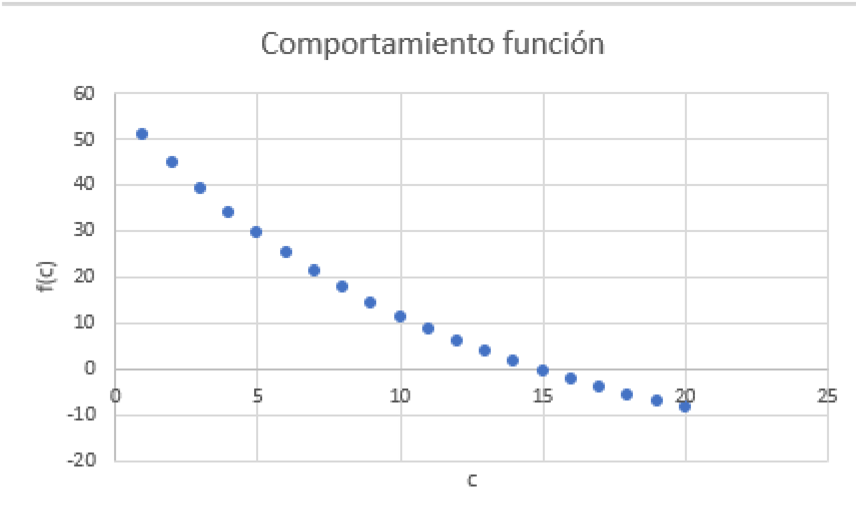
En particular el método de punto fijo no permite la posibilidad de obtener más de dos puntos fijos. Esto se debe a que el método solo halla una convergencia. No hay posibilidad de encontrar dos puntos fijos. Al intentarlo en forma de código, el algoritmo no es capaz de ser compilado y mostrar resultados.[5]

4.5 Comportamiento de la gráfica respecto al ejercicio 4 (sección 1.4)

Al reemplazar los valores del ejercico dentro de la ecuacion (1.8), se observa que esta queda a términos de una sola variable, c, por lo que es posible reemplazar este valor por varios números hasta hallar el valor que se acerque o intersecta el punto con el eje x.

c	f(c)
1	51,14433323
2	44,9205256
3	39,26337643
4	34,11484417
5	29,42322866
6	25,14244943
7	21,23140849
8	17,65342751
9	14,37575046
10	11,36910403
11	8,60730894
12	6,066935998
13	3,72700181
14	1,568699315
15	-0,424840876
16	-2,268761969
17	-3,976668484
18	-5,560792547
19	-7,032141464
20	-8,400628722

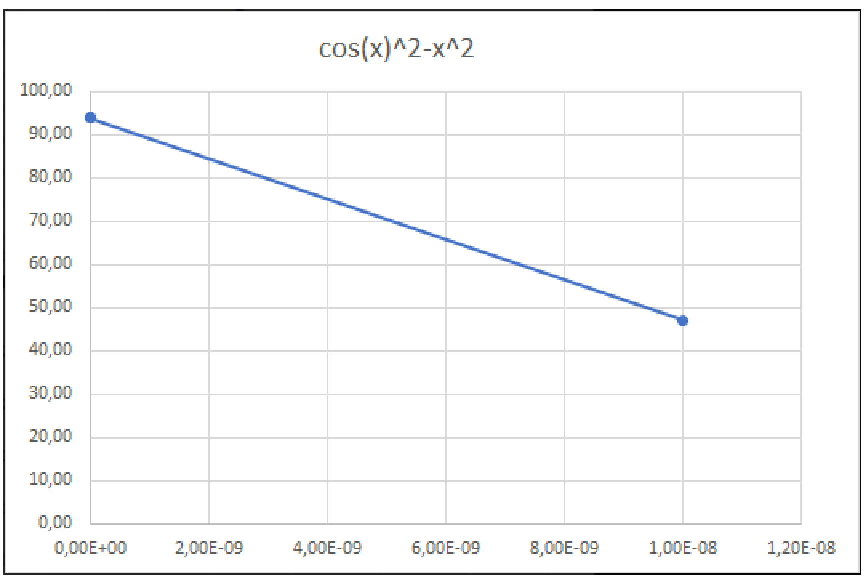
La función con varios vaores c es representada gráficamente como:



Cuando c tiene valor de 15 es cuando la linea de la función está en su punto más cercano a 0, que implicaría que 15 es la raíz. A pesar de esto, f(c)=15 no equivale a 0 exactamente, pero si es el valor más estimado a ser la raíz.

4.6 Comportamiento gráfico de cada ejercicio respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

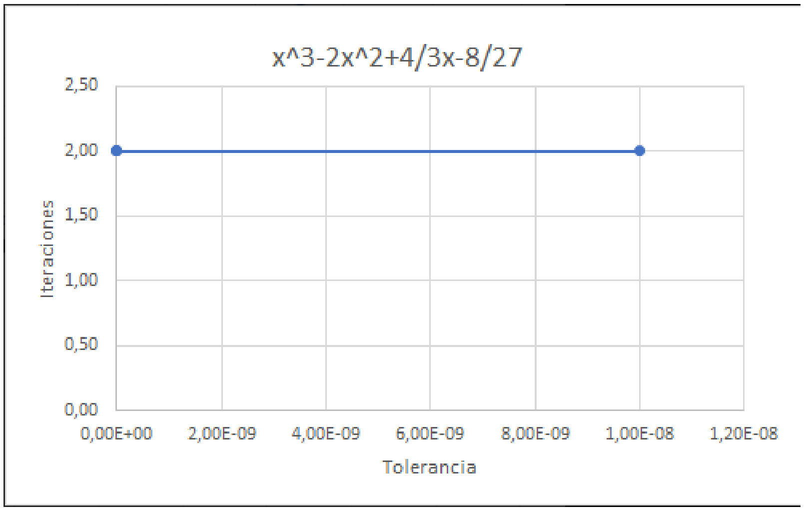
4.6.1 Ejercicio 1



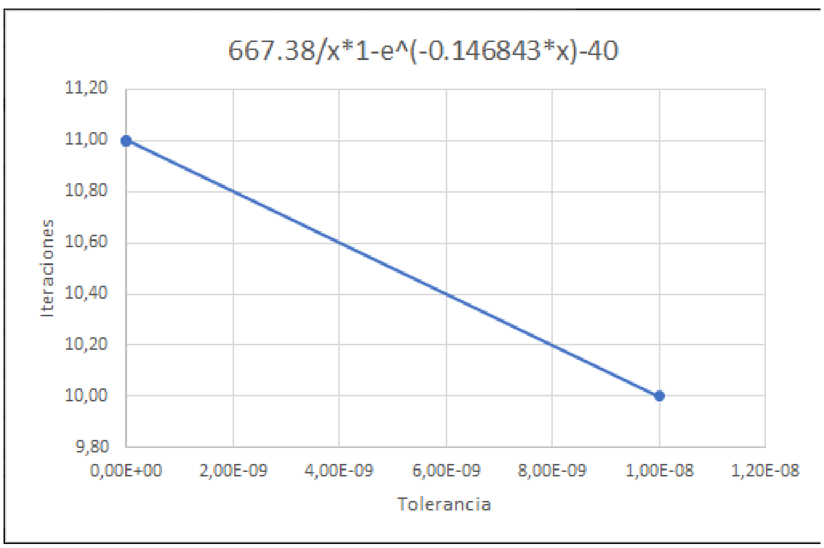
4.6.2 Ejercicio 2

No converge

4.6.3 Ejercicio 3



4.6.4 Ejercicio 4



4.7 Problemas de la significancia

La perdida de significancia representa la reducción en la precisión. De manera que a mayor cantidad de cifras decimales el resultado puede variar más. La perdida de significancia en este caso es alta por la cantidad tan elevada de cifras que cambia constantemente y esos datos dejan de ser significativos. En este caso no hay solución y está destinado al fracaso dado que las funciones son periodicas y el resultado siempre se aproxima a lo mismo, perdiendo así el valor de todas esas cifras que ya no son significativas.

Referencias

[1] U. Collaborators, "Steffensen's method," accessed: 2021-08-22. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Steffensen %27s$_{m}ethod$

[2] ——, "Proceso δ 2 de aitken," accessed: 2021-08-22. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/Proceso $\%CE\%94\%C2\%B2_{d}e_{A}itken$

[3] W. D. Villanueva, "4.1 método de la bisección," accessed: 2021-08-22. [Online]. Available: https://www.uv.es/ %7Ediaz/mn/node18.html

[4] U. Collaborators, "Método del punto fijo," accessed: 2021-08-22. [Online]. Available: https://es.wikipedia.org/wiki/M %C3 %A9todo$_{d}el_{p}unto_{f}ijo$

[5] ——, "2.2 métodos abiertos: Iteración punto fijo, método de newton raphson y método de la secante. métodos para raíces múltiples. - metodos numericos." accessed: 2021-08-22. [Online]. Available: https://sites.google.com/site/metalnumericos/home/unidad-3/2-2-metodos-abiertos-iteracion-punto-fijo-metodo-de-newton-raphson-y-metodo-de-la-secante-metodos-para-raices-multiples