

太阳能热水器外置太阳光吸收板放置的最佳倾角计算

孔 敏

mkong@nju.edu.cn

南京大学数学系

July 2014



- 1 模型假设
- 2 所用符号及说明
- 3 模型的建立及求解
- 4 最佳安装角度的计算
- 5 最优角度推导方法二

模型假设

- 1 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- 2 太阳与地球之间的距离为定值;
- 3 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- 4 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

所用符号及说明

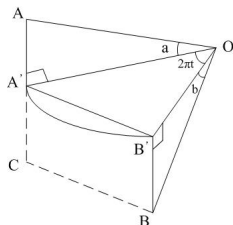
- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角;
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \pi/2 - \beta$, 规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数;

模型的建立及求解

我们知道, 根据地球围绕太阳公转, 同时本身做自转. 以托密勒的地心说视角来看, 太阳每天在垂直于地轴的圆上周而复始地匀速运动着. 阳光与地轴北极的夹角 β 只随 T 而变化, 对 t 的影响完全可以忽略. 下面我们以地球作参照, 太阳绕地球转动.

对于给定的某一天 T , 我们首先求日落时间 t_0 .

(1) 先假设热水器太阳光接收板水平放置, 即 $\alpha = 0$, 求 t_0



当 $\gamma = 0$ 时, 太阳光与热水器太阳光接收板的夹角为零, 此时正是日出或日落时刻, 故 $|t| = |t_0|$. 由对称性, 我们只需考虑半个白天的情况即可, 显然 $t \in [0, t_0]$.

如图左图所示, 我们将地球视作一个点.

OA 为太阳能热水器安置所在地面的铅垂线,

OB 为太阳光线, 平面 $A'OB'$ 为赤道面.

设 $|OA'| = |OB'| = 1$, 由上图有

$$\begin{aligned} |OA| &= \sec a, \quad |OB| = \sec b, \quad |A'B'| = 2 \sin \pi t, \quad |BC| = |A'B'| = 2 \sin \pi t, \\ |AA'| &= \tan a, \quad |BB'| = |\tan b|, \quad |A'C| = |B'B|. \end{aligned}$$

而由假设

$$\begin{aligned} |AC| &= \begin{cases} ||AA'| - |BB'||, & b > 0 (\text{北纬}) \\ |AA'| + |BB'|, & b < 0 (\text{南纬}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} |AA'| - |BB'|, & b > 0 \\ |AA'| + |BB'|, & b < 0 \end{cases} \\ &= |\tan a - \tan b|, \end{aligned}$$

所以

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 = 4 \sin^2 \pi t + (\tan a - \tan b)^2.$$

由假设 γ

是 T 日 t 时太阳光与太阳光接收板的夹角,

$\angle AOB$ 是铅垂线与太阳光线的夹角,

因此 $\gamma + \angle AOB = \pi/2$ (参见右图). 于是

$$\sin \gamma = \sin(\pi/2 - \angle AOB) = \cos \angle AOB$$

$$= \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2|OA||OB|}.$$

$$\text{又 } |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2$$

$$= \sec^2 a + \sec^2 b - 4 \sin^2 \pi t - (\tan a - \tan b)^2$$

$$= 2(\cos 2\pi t + \tan a \tan b),$$

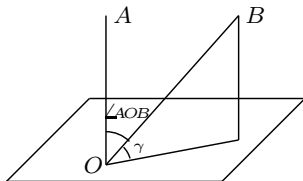
于是有

$$\sin \gamma = \cos a \cos b \cos 2\pi t + \sin a \sin b. \quad (3.1)$$

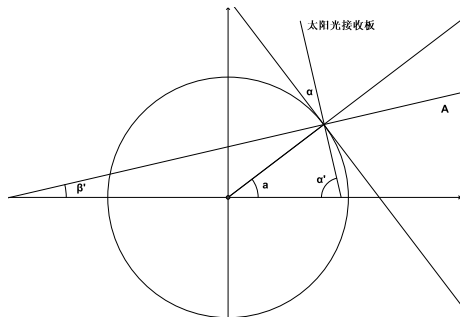
当 $t = t_0$

时, 正是日落时分, 此时 $\gamma = 0$, 由(3.1)得

$$\cos 2\pi t_0 = -\tan a \tan b \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2} - \frac{\arccos(\tan a \tan b)}{2\pi}. \quad (3.2)$$



当 $\alpha \neq 0$ 时, 如图所示, 我们只要将(3.1)式中的 a 用 $\beta' = \pi/2 - \alpha'$ 替换, 也就是将 OA 换为热水器太阳光接受板的垂线(参见图), 则有



$$\sin \gamma = \cos \beta' \cos b \cos 2\pi t + \sin \beta' \sin b = \sin \alpha' \cos b \cos 2\pi t + \cos \alpha' \sin b. \quad (3.3)$$

(2) 下面我们求 T 日太阳照射热水器太阳光接收板全天所产生的热能总和 H_T

由于热功率 $\frac{dH_T}{dt} = \tau \sin \gamma$, 故

$$\begin{aligned} H_T &= \tau \int_{-t_0}^{t_0} \sin \gamma dt = 2\tau \int_0^{t_0} (\sin \alpha' \cos b \cos 2\pi t + \cos \alpha' \sin b) dt \\ &= \frac{\tau}{\pi} (\sin \alpha' \cos b \sin 2\pi t_0 + 2\pi t_0 \cos \alpha' \sin b) \quad (\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha - a) \\ &= \frac{\tau}{\pi} (\sin 2\pi t_0 \cos b \cos(a - \alpha) + 2\pi t_0 \sin b \sin(a - \alpha)). \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} A = \sin 2\pi t_0 \cos b, \\ B = 2\pi t_0 \sin b, \end{cases} \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{\tau}{\pi} (A \cos(a - \alpha) + B \sin(a - \alpha)) \\ &= \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(a - \alpha) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(a - \alpha) \right), \end{aligned}$$

命 $\cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 则 $\tan \theta = \frac{B}{A}$, 于是得

$$H_T = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - (a - \alpha)) = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - a + \alpha).$$

易见, 当 $\theta - a + \alpha = 0$ 时, 即当

$$\alpha_{\text{opt}} = a - \theta = a - \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0} \quad (3.4)$$

时, H_T 取得最大值, 其最大值为 $H_{\text{max}} = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2}$.

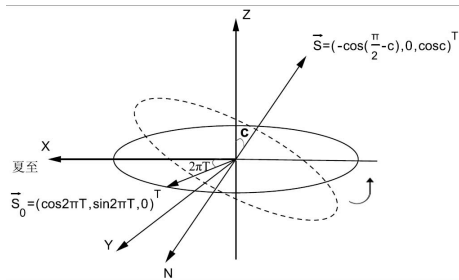
最后, 我们讨论太阳光与赤道面的夹角 b 与给定的某一天 T 的关系. 仍以地球为参照, 则太阳一年中绕地球转动, 转动与地球公转方向相同. 下面我们建立一个三维坐标系, 假设地心作为坐标原点, 太阳在 xOy 平面绕地球作圆周运动, 并以夏至时的地球与太阳的连线作为 x 轴的正方向, 如右下图所示.

令夏至时刻 $T = 0$, 此时太阳位于北回归

线上. 图中 xOy 平面为黄道面, 虚线所构成的平面为赤道面, 它与 xOy 平面的交角即为黄赤交角 c , 向量 \vec{S} 表示指向地轴南极的方向, 其单位向量为 $\vec{S} = (-\sin c, 0, \cos c)^T$, T 日太阳

与地球连线方向的单位向量

为 $\vec{s}_0 = (\cos 2\pi T, \sin 2\pi T, 0)^T$. 注意到 β 是 T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, b 是 T 日太阳光与赤道面的夹角, 故 $\angle(\vec{s}_0, \vec{N}) = \beta = \frac{\pi}{2} - b$.



而

$$\begin{cases} \vec{s}_0 \cdot \vec{N} = |\vec{s}_0| |\vec{N}| \cos \angle(\vec{s}_0, \vec{N}) = \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin b, \\ \vec{s}_0 \cdot \vec{N} = \vec{s}_0^T \vec{N} = \sin c \cos 2\pi T. \end{cases}$$

于是 T 日太阳光与赤道面的交角为

$$\sin b = \sin c \cos 2\pi T, \quad \Rightarrow \quad b = \arcsin(\sin c \cos 2\pi T). \quad (3.5)$$

这样, 由

$$\begin{cases} b = \arcsin(\sin c \cos 2\pi T), \\ 2\pi t_0 = \pi - \arccos(\tan a \tan b), \\ \theta = \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0}, \\ \alpha = a - \theta, \end{cases} \quad (3.6)$$

(其中 $c = 23^\circ 27'$ (黄赤交角), a 为太阳能热水器安置所在地的纬度(例如南京的纬度为 $32^\circ 03'$, 长春的纬度是 $43^\circ 10'$)) 我们可以计算出 T 日太阳能热水器太阳光接收板的最佳倾角 α .

以南京为例, 将 $T = 0$, $T = 1/4$, $T = 1/2$ 以及 $T = -1/4$ 分别代入(3.6), 即可求出夏至、秋分、冬至和春分时的最优角度, 经计算分别为:

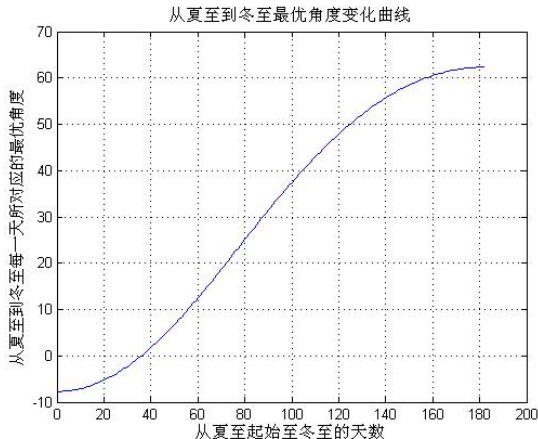
夏至($T = 0$): $\alpha = -7^{\circ}40'$; (略微向正北方)

秋分($T = 1/4$): $\alpha = 32^{\circ}03'$;

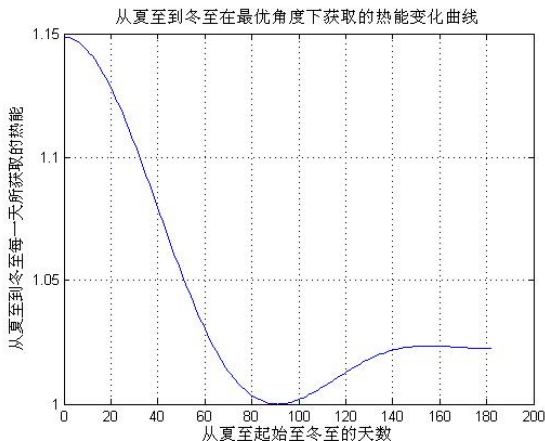
冬至($T = 1/2$): $\alpha = 62^{\circ}19'$;

春分($T = -1/4$): $\alpha = 32^{\circ}03'$.

我们可以将 $T \in [0, 1/2]$ 这个区间 n 等分(如取 $n = 182$), 由上述公式(3.6), 用MATLAB软件编程, 可以得到 T 与最优角度关系, 如下图所示.



同样地, 我们将 $T \in [0, 1/2]$ n 等分(如取 $n = 182$), 由上述公式(3.6), 用MATLAB软件编程, 可以得到 T 与最大热能的关系, 如下图所示.



最佳安装角度的计算

由于太阳相对地球的运动具有对称性, 因此我们只需计算从夏至到冬至这半年的总热量即可.

由假设一年为 $2n$ 天. 又我们所计算的范围是从夏至到冬至这半年的总热量, 所以我们考虑(从夏至到冬至). 令 $T = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\sin b = \sin c \cos \frac{\pi k}{n}.$$

第一步, 在假定每天热水器太阳光接收板与水平面的夹角取最优角度条件下, 求一年获得的总热能:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in [0, 1/2]} H_T &= 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(\theta_k - a + \alpha_k) \\ &= \frac{2\tau}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (\text{注意到 } \theta_k - a + \alpha_k = 0) \end{aligned}$$

其中 $b_k = \arcsin(\sin c \cos(\frac{\pi k}{n}))$, $A_k = \sqrt{1 - \sec^2 a \sin^2 b_k}$, $B_k = (\pi - \arccos(\tan a \tan b_k)) \sin b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

用MATLAB软件编程, 可得 $H_{\text{总}} = 190.8571 \times \frac{2\tau}{\pi}$

第二步, 假设热水器太阳光接收板与水平面的夹角 α 给定条件下求一年获得的总热能:

$$H_{\text{总}}^{\alpha} = \sum_{T \in [0, 1/2]} H_T^{\alpha} = 2 \sum_{k=1}^n H(k) = \frac{2\tau}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(\theta_k - a + \alpha_k),$$

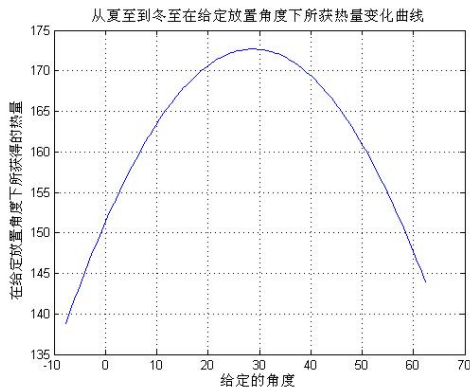
其中, A_k, B_k 同上, $\theta_k = \arctan \frac{B_k}{A_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

第三步, 求安装的最佳角度:

显然, 我们所要求的最优安装角度满足

$$\alpha_{\text{opt}} = \min(H_{\text{总}} - H_{\text{总}}^{\alpha}).$$

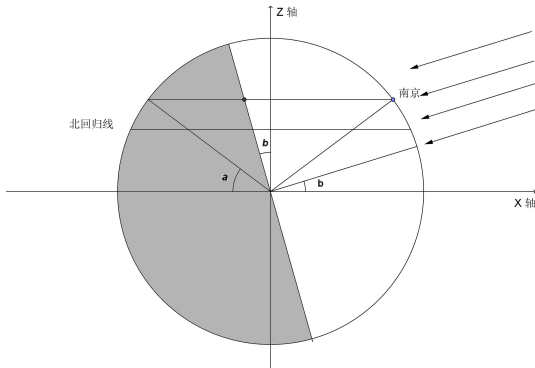
使用MATLAB软件编程,可以得到 $H_{\text{总}}^{\alpha}$ 的曲线,见下图所示(这里取常数 $\frac{2\tau}{\pi} = 1$).



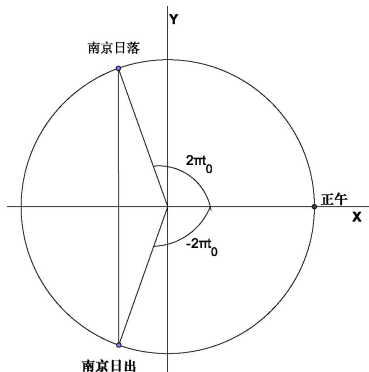
不难解得当 $n = 182$ 时, $\alpha = 28^{\circ}52'$,当 $n = 183$ 时, $\alpha = 28^{\circ}52'$.在实际操作中, α 只要精确到 1° ,再小就没有实际意义了,所以取 $\alpha_{\text{opt}} = 28^{\circ}$ 为最优解.

最优角度(公式(3.4))推导方法二

下面,我们介绍从另一角度来推导最优角度(即公式(3.4))的方法.我们以如下方式建立参照系.以地球球心为原点 O , Z 轴为自转轴,地球半径为1,北极坐标为 $(0, 0, 1)^T$, 太阳赤纬为 b (O 与太阳连线与地表交点处的纬度,北纬为正,南纬为负,也即太阳光线与赤道平面夹角),如下图所示.



在上图中我们在南京的水平面做平行于赤道的一个横截面, 这样就可以得到如下图所示的一个圆.



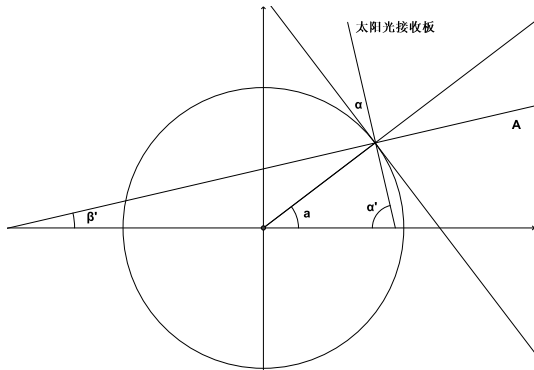
我们在这里假定太阳光不动, 地球在旋转.

太阳光线方向的单位向量为 $\vec{s} = -(\cos b, 0, \sin b)^T$, 这是不变的量. 上

图中的半径为 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, 等腰三角形的高为 $\sin a \tan b$,

又 $\sin\left(2\pi t_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin a \tan b}{\cos a} = \tan a \tan b$, 所以

$$\cos 2\pi t_0 = -\tan a \tan b. \quad (5.1)$$



如上图所示, 正午时, 南京的热水器太阳光接收板平面的法向量
为 $\vec{n}_0 = (\cos\beta', 0, \sin\beta')^T$, 而 $\beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha'$, $\alpha + \frac{\pi}{2} = a + \alpha'$, 故 $\beta' = a - \alpha$,
因此有

$$\vec{n}_0 = (\cos(a - \alpha), 0, \sin(a - \alpha))^T.$$

令 3×3 阶旋转矩阵 $M = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 这是一个标准正交矩

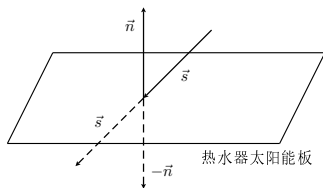
阵, 向量 $(x, y, z)^T$ 绕 Z 轴旋转 $2\pi t$ 弧度后变为 (x', y', z') ,
 则 $(x' y' z')^T = M(x, y z)^T$. \vec{n}_0 旋转 $2\pi t$ 弧度后(即地球自转 $2\pi t$ 弧度后)为

$$\vec{n} = M\vec{n}_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(a - \alpha) \\ 0 \\ \sin(a - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a - \alpha) \cos 2\pi t \\ \cos(a - \alpha) \sin 2\pi t \\ \sin(a - \alpha) \end{bmatrix},$$

这里的 \vec{n} 表示一天中某时刻热水器太阳光接收板的法方向.

太阳辐射系数(即太阳光在 $-\vec{n}$ (注意 $-\vec{n}$ 是单位向量)方向上的投影), 参见下图

$$\begin{aligned}
 \rho &= -\vec{n} \cdot \vec{s} = -\vec{n}^T \vec{s} \\
 &= (\cos(a - \alpha) \cos 2\pi t, \cos(a - \alpha) \sin 2\pi t, \sin(a - \alpha)) \begin{pmatrix} \cos b \\ 0 \\ \sin b \end{pmatrix} \\
 &= \cos b \cos(a - \alpha) \cos 2\pi t + \sin(a - \alpha) \sin b,
 \end{aligned}$$



因此一天吸收能量为

$$H_T = \tau \int_{-t_0}^{t_0} \rho dt = 2\tau \int_0^{t_0} \rho dt = \frac{\tau}{\pi} (\cos(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 + 2\pi t_0 \sin(a-\alpha) \sin b),$$

下面求函数 H_T 极值.

$$\frac{dH_T}{d\alpha} = 2\tau (\sin(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 - 2\pi t_0 \cos(a-\alpha) \sin b),$$

$$\text{令 } \frac{dH_T}{d\alpha} = 0, \text{ 得}$$

$$\sin(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 = 2\pi t_0 \cos(a-\alpha) \sin b,$$

$$\Rightarrow \tan(a-\alpha) = \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0},$$

故有

$$\alpha = a - \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0}. \quad (5.2)$$

因此, 当热水器太阳光接收板的倾角 α 满足 (5.2) 式时, 所接收的能量最大.

孔敏, 太阳能热水器太阳光接收板的最佳倾角计算, 工程数学学报, Vol. 28 Supp.2 (2011) 93-101

谢谢！