概 率 模 型

制作人：胡 泽 春

南京大学数学系

2013年7月

★ 唐朝著名学者韩愈曰：**古之学者必有师，师者，所以传道、授业、解惑也**。

- 机会青睐有准备的人；机会青睐有恒心的人。
- 山穷水尽疑无路，柳暗花明又一村。

概率论是研究随机现象的一门数学分支。投掷一枚硬币是一种非常简单的随机现象，投掷之前我们并不知道结果会出现正面还是反面，然而这看似“完全随机”的背后隐藏着本身所固有的规律，概率论的主要目标就是揭示随机现象中所蕴含的各种规律。数理统计是与概率论有着密切关系的一门学科。关于概率论与数理统计，中科院数学与系统科学研究院的严加安院士写有如下诗句:

悟道诗

随机非随意，概率破玄机

无序隐有序，统计解迷离

概率论的地位与应用：

• 2006年 W. Werner 获得 Fields 奖，颁奖词是：因为他对发展随机共形映射、布朗运动二维空间的几何学以及共形场理论作出了突出贡献。

• 2006年 K. Ito 获得首届 Gauss 奖，Ito 对随机微分方程的创立与发展作出了突出贡献，随机微分方程在经济、金融等领域发挥着重要作用。

• 2007 年美籍印度数学家 S.R.S. Varadhan 获得 Abel 奖，Varadhan 先生因对概率论做出的贡献，特别是建立一个大偏差统一理论而获得奖项。

• 概率论在**图论**、**组合**、**数论**、**算法**等领域有重要应用，著名数学家 P. Erdös 创立了一种特有方法，称为**概率方法**，又称为 Erdös **方法**。粗略地讲，本方法指的是为证明某种离散结构存在，构造一个合适的概率空间，然后证明那种结构在这个概率空间中以正概率存在，从而证明了那个结构的存在性。有兴趣作深入了解的，请参看 N. Alon 与 J.H. Spencer 的专著 “The Probabilistic Method”（此书已出第三版）.
• 偏微分方程
• 物理（统计物理；量子力学）
• 当前概率学科中的研究机遇

以下内容主要参考文献：

（新西兰）Mark M. Meerschaert 著（刘来福，杨淳，黄海洋译）

数学建模方法与分析（原书第二版），机械工业出版社，2007年。

1 概率模型简介

1.1. 离散概率模型简介

例1.1. 一个电子器件工厂生产一种二极管。质量控制工程师负责保证产品出厂前检测出次品的二极管。估计这个厂生产的二极管有 0.3% 是次品。可以对每个二极管逐个进行检验，也可以把若干个二极管串联起来成组进行检验。如果检验通不过，也就是说其中有一个或几个二极管是次品。已知检验一个单个的二极管的花费是 5 分钱，检验一组 $n > 1$ 个二极管的花费是 $4 + n$ 分钱。如果成组检验没通过，则这一组的每一个二极管必须逐个重新检验以便于找出这些次品。要求寻求检测次品二极管的质量控制的步骤使得用于检验的花费最少。

采用五步法:

第一步：提出问题（将问题数学化）

变量：

n =每个检验组内二极管的数目

C =一组元件的检验费用（分）(为一随机变量)

A =平均检验费用（分/二极管）

假设：

如果 $n = 1$,则 $A = 5$ 分

否则 $(n > 1)$, 我们有，如果分组检验结果全部二极管都是好的，则 $C = 4 + n$; 如果检验结果有次品，则 $C = (4 + n) + 5n$

$A =$ (C的平均值) $/n$

目标： 求 n 的数值，使 A 最小

第二步：选择模型（离散概率模型）

随机变量(r.v.) $X \in \{x_1, x_2, \cdots\}$，$P(X = x_i) = p_i, \sum_i p_i = 1$.

期望（平均值）$EX = \sum_i x_i p_i$.

$\{p_1, p_2, \cdots\}$ 称为 r.v. X 的分布（列）.

例1.2. 投掷两个骰子，庄家将按照两个骰子所示的点数之和付给你同等面值的钱数。问要支付多少钱你才愿意玩这个游戏?

用 X_1, X_2 表示两个骰子的点数，令 $X = X_1 + X_2$, 则

$$P(X=2)=\frac{1}{36},\ P(X=3)=\frac{2}{36},\ P(X=4)=\frac{3}{36},$$
$$P(X=5)=\frac{4}{36},\ P(X=6)=\frac{5}{36},\ P(X=7)=\frac{6}{36},$$
$$P(X=8)=\frac{5}{36},\ P(X=9)=\frac{4}{36},\ P(X=10)=\frac{3}{36},$$
$$P(X=11)=\frac{2}{36},\ P(X=12)=\frac{1}{36}.$$

由此可以得到均值为

$$EX = 7,$$

于是多次重复这个游戏你将期望每一次赢得7元（由此知只有支付的钱小于或等于7元你才愿意玩这个游戏）。这一点可由以下的强大数定律保证。

强大数定律：假定 $X_1, X_2, \cdots$ 为独立同分布随机变量序列，具有有限的期望 EX，则有

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to EX\ a.s.,$$

其中，a.s. 代表 almost surely（几乎必然）。

第三步：推导模型（建立模型）

$$P\{C = 4 + n\} = (1 - 0.003)^n,$$
$$P\{C = (4 + n) + 5n\} = 1 - (1 - 0.003)^n,$$

即

$$P\{C = 4 + n\} = 0.997^n,$$
$$P\{C = 4 + 6n\} = 1 - 0.997^n.$$

由此可得

$$\begin{aligned} EC &= (4 + n)0.997^n + (4 + 6n)(1 - 0.997^n) \\ &= 4 + 6n - 5n \times 0.997^n, \\ A &= \frac{n}{4} + 6 - 5 \times 0.997^n. \end{aligned}$$

第四步：求解模型

利用分析知识容易求得当 $n = 17$ 时，A 取最小值 $A = 1.48$（分/二极管）。

第五步：回答问题

结论：

- 逐个检验：费用为 5 分/个
- 分组检验：每组 17 个，平均费用降低到 1.48 分/个, 约为逐个检验费用的 1/3.

灵敏性分析：

(1) 分组个数

在 $n = 10$ 到 $n = 35$ 之间的检验的平均费用 A 没有明显变化。

(2) $q = 0.003$

$$A = \frac{n}{4} + 6 - 5 \cdot 0.997^n,$$

相对变化量的比值 $S(A,q) = \lim\limits_{\triangle q \to 0} \frac{\frac{\triangle A}{A}}{\frac{\triangle q}{q}} = \frac{dA}{dq} \cdot \frac{q}{A}$ 称为 A 对 q 的灵敏性，

将$n = 17, q = 0.003$代入上式可得

$$S(A, 0.003) = 0.16,$$

因此，q的微小变化不会导致检验费用大的变化。

问题： 二次分组的情况?

1.2. 连续概率模型简介

用到连续时间的随机变量的概率模型，所需数学理论除了使用积分来代替求和之外完全类似于离散的情况。

例1.3. “I型计数器”可以用来测量可裂变物质的样品放射性的衰变。衰变是以未知的速率随机发生的，计数器的目的就是测量衰变率。每一次放射性衰变要把计数器锁住 3×10^{-9} 秒，在这段时间内所发生的任何衰变都不会被计数。如何调整计数器接受的数据以考虑丢失的信息?

第一步：提出问题

变量：

λ =衰变率（次/秒）

T_n =第n次观测到衰变的时间

假设：

放射性的衰变以速率 λ 随机发生，对任何 n, $T_{n+1} - T_n \geq 3 \times 10^{-9}$.

目标： 根据有限的观测值 $T_1, \cdots, T_n$ 求出 λ.

第二步：选择模型（连续概率模型）

设X是实数轴上取值的随机变量，其分布函数$F(x)$定义为

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbf{R}.$$

若$F(x)$可微，则其密度函数$f(x)$定义为

$$f(x) = F'(x),$$

此时，有

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$
$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

随机到达（顾客，电话，放射性的衰变），令X表示两次连续到达现象之间的随机时间，通常假设X有分布函数、密度函数如下：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

上述分布称为参数为λ的指数分布，具有独特的“无记忆性”：对任意$s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X > s + t | X > s) &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} \\ &= P(X > t). \end{aligned}$$

其期望为

$$EX = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

第三步：建立模型

假定相继两次放射性衰变之间的时间是独立的，而且都服从参数为λ的指数分布（这样单位时间内发生的衰变的次数为λ）。令

$$X_n = T_n - T_{n-1}$$

表示相继两次观测到放射性衰变之间的时间。由两部分组成：首先我们必须等待$a = 3 \times 10^{-9}$秒，这时计数器被锁住了，同时我们还要多等待Y_n秒直到下一次衰变发生，即

$$X_n = a + Y_n.$$

现在的Y_n不只是两次衰变之间的时间，因为它开始于闭锁时间的末尾不是在衰变的时间。然而，指数分布的无记忆性保证了Y_n仍然是带有参数λ的指数分布。

第四步：求解模型

令$a=3\times10^{-9}$, 由$X_n=a+Y_n$ 及期望的线性性知

$$EX_n=E(a+Y_n)=a+EY_n=a+\frac{1}{\lambda}.$$

由强大数定律知

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\to a+\frac{1}{\lambda},$$

即有

$$\frac{T_n}{n}\sim a+\frac{1}{\lambda}\ \Rightarrow\ \lambda\sim\left(\frac{T_n}{n}-a\right)^{-1}.$$

第五步：回答问题

结论： 我们得到了一个衰变率的公式，它矫正了由于计数器的闭锁产生的衰变现象的丢失。全部所需的资料是n, T_n, a.

灵敏性分析： 由

$$\frac{T_n}{n} = a + \frac{1}{\lambda}$$

得

$$\lambda = \frac{n}{T_n - na}$$

进一步可得

$$\frac{d\lambda}{da} = \lambda^2,$$

于是λ对a的灵敏性是

$$S(\lambda, a) = \lambda^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right) = \lambda a.$$

这也是在计数器闭锁的时间内衰变次数的期望值，于是我们就可以得到一个对于不太强烈的放射源的λ的一个（相对来说）较好的估计值。达到这一点的一个简单的方式就是只取很少一点放射性材料作为样品。

1.3. 统计简介

例1.4. （美国）一个地区911应急服务中心在过去的一年内平均每月要收到171个房屋火灾的电话，基于这个资料房屋的火灾率被估计为每月171次。下一个月收到的火灾报警电话只有153个，这表明房屋的火灾率实际上较少了，或者它只是一个随机波动?

第一步：提出问题

变量：

λ =报告的房屋火灾率（每月）

X_n =第$n-1$次和第n次火灾之间的时间（月）

假设：

房屋火灾以速率λ随机发生，即$X_1, X_2, \cdots$是独立的，且每个X_n服从参数为λ的指数分布。

目标： 给定$\lambda = 171$, 确定每月收到153次这样少的电话报警的概率有多大。

第二步：选择模型（统计推断模型）

假设$X, X_1, X_2, \cdots$是独立同分布的随机变量序列，对于X是离散随机变量，有

$$EX = \sum_k x_k P(X = x_k);$$

对于X是连续随机变量，有

$$EX = \int x f(x) dx.$$

方差：$VX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2.$

离散情形：$VX = \sum_k (x_k - EX)^2 P(X = x_k);$

连续情形：$VX = \int (x - EX)^2 f(x) dx.$

中心极限定理: 当$n \to \infty$时，和式$X_1 + \cdots X_n$的分布越来越接近于正态分布，具体的

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{X_1 + \cdots X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le t \right\} \to \Phi(t),$$

其中，$\mu = EX, \sigma^2 = VX, \Phi(t)$为标准正态分布$N(0,1)$的分布函数，即

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

用$g(x)$表示标准正态分布的密度函数，则有

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx \approx 0.68, \quad \int_{-2}^{2} g(x)dx \approx 0.95.$$

于是，当n足够大时，我们有95%的把握断言

$$n\mu - 2\sigma\sqrt{n} \le X_1 + \cdots X_n \le n\mu + 2\sigma\sqrt{n}. \tag{1}$$

第三步：建立模型

我们假设报警电话之间的时间X_n是参数为λ的指数分布，即其密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

于是，有

$$\text{期望}\ \ \mu = EX_n = \frac{1}{\lambda},$$

$$\text{方差}\ \ \sigma^2 = VX_n = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

中心极限定理告诉我们，$X_1 + \cdots + X_n$以近似95%的概率使得(1)式成立。

第四步：求解模型

利用分部积分可知$\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2}$, 将其带入(1)式可得

$$\frac{n}{\lambda}-\frac{2\sqrt{n}}{\lambda}\leq X_1+\cdots+X_n\leq\frac{n}{\lambda}+\frac{2\sqrt{n}}{\lambda}.$$

将$\lambda=171, n=153$代入得

$$\frac{153}{171}-\frac{2\sqrt{153}}{171}\leq X_1+\cdots+X_n\leq\frac{153}{171}+\frac{2\sqrt{153}}{171},$$

即

$$0.75\leq X_1+\cdots+X_n\leq 1.04,$$

观测值$X_1+\cdots+X_{153}\approx 1$, 因此可认为在正常的变化范围。

第五步：回答问题

结论：由以上的分析可知断言火灾率降低的证据是不充分的，可认为153次是正常的随机波动。

灵敏性分析：

- 对所观察数据的灵敏性分析

$$\frac{n}{171}-\frac{2\sqrt{n}}{171}\le X_1+\cdots+X_n\le\frac{n}{171}+\frac{2\sqrt{n}}{171}.$$

以95%概率成立，对任何$n\in[147,199]$,区间$\frac{n}{171}\pm\frac{2\sqrt{n}}{171}$都包含1，我们有更一般地的结论，有95%的时间这个社区每月报警电话的次数在147到199次之间。

- 对“报警电话实际的期望值每月171次”的假设的灵敏性分析

平均值λ, 一观测值$n=153$,

$$\frac{153}{\lambda}-\frac{2\sqrt{153}}{\lambda}\le X_1+\cdots+X_n\le\frac{153}{\lambda}+\frac{2\sqrt{153}}{\lambda}$$

以95%概率成立. 对任何$\lambda\in[128,178]$, 区间$\frac{153}{\lambda}\pm\frac{2\sqrt{153}}{\lambda}$总包含1 。

断言：对于任何的社区，只要它的平均每月报警电话次数在128到178次，一个月有153次报警电话就可认为属于正常的变化范围。

1.4. 部件和系统的可靠性

一个部件或系统的可靠性是指在特定的时间内没有失效的概率。

串联系统： 如果3个部件的可靠性分别是$R_1(t) = 0.90, R_2(t) = 0.95, R_3(t) = 0.96$,那么系统可靠性是它们的乘积

$$R_s(t) = R_1(t)R_2(t)R_3(t) = 0.90 * 0.95 * 0.96 = 0.8208.$$

并联系统： 若一个系统由两个独立的部件组成，只要有一个部件可使用就运转正常。假设$R_1(t) = 0.90, R_2(t) = 0.95$，则系统的可靠性

$$R_s(t) = ?$$

串并联系统： $\cdots$

2 随机模型

在这一部分中，我们将介绍几个最重要且经常用到的随机模型。

2.1. 离散时间马尔可夫链

例2.1. 一个宠物商店出售20加仑的水族箱，每个周末商店的老板要盘点存货，开出订单。商店的策略是，如果当前所有的存货都被售出了就在这个周末进三个新的20加仑的水族箱；如果只要在店内还保存有一个存货，就不再进新的水族箱。这个策略是不是能够保证防止当商店缺货时顾客需要水族箱而无货销售的损失?

第一步：提出问题

变量：

S_n =第n周之初水族箱的供应（$S_n = 1, 2, 3$）

D_n =第n周内水族箱的需求

假设：

如果$D_{n-1} < S_{n-1}$,则$S_n = S_{n-1} - D_{n-1}$;

如果$D_{n-1} \geq S_{n-1}$,则$S_n = 3$;

$P\{D_n = k\} = \frac{e^{-1}}{k!}, k = 0, 1, 2, \cdots.$

目标： 计算$P\{D_n > S_n\}$.

第二步：选择模型——（离散时间)马尔可夫链模型

这里仅讨论有限状态的情形。假设随机变量序列$X_1, X_2, \cdots$取值于一个有限的离散集合，不妨假设

$$X_n \in \{1, 2, 3, \cdots, m\},\ \forall n \geq 0.$$

我们称序列$\{X_n\}$是马尔可夫链，如果$X_{n+1} = j$的概率仅仅依赖于X_n. 定义

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\},$$

则过程$\{X_n\}$将来的全部（概率）性质被p_{ij}和X_0的初始概率分布所确定。

例2.2. 描述如下的马尔可夫链的特性。状态变量

$$X_n \in \{1, 2, 3\}.$$

如果$X_n = 1$，则$X_{n+1} = 1, 2$或3以相等的概率出现；如果$X_n = 2$，则$X_{n+1} = 1$以概率0.7出现，$X_{n+1} = 2$以概率0.3出现；如果$X_n = 3$，则$X_{n+1} = 1$以概率1出现。

状态转移概率p_{ij}由下式给出

$$\begin{aligned} &p_{11} = \frac{1}{3},\ p_{12} = \frac{1}{3},\ p_{13} = \frac{1}{3}, \\ &p_{21} = 0.7,\ p_{22} = 0.3,\ p_{23} = 0, \\ &p_{31} = 1,\ p_{32} = 0,\ p_{33} = 0. \end{aligned}$$

矩阵表示

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

状态转移图(将在黑板上讲解）。

令$\pi_n(i) = P(X_n = i)$, 利用全概率公式可得

$$\pi_{n+1}(j) = \sum_i \pi_n(i) p_{ij}.$$

写成如下紧凑的形式:

$$\pi_{n+1} = \pi_n P.$$

令$X_0 = 1$, 则通过简单的计算可得

$$\pi_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$
$$\pi_2 = (0.67\bar{7}, 0.21\bar{1}, \frac{1}{9})$$
$$\pi_3 = (0.485, 0.289, 0.226)$$
$$\pi_4 = (0.590, 0.248, 0.162)$$
$$\pi_5 = (0.532, 0.271, 0.197)$$
$$\pi_6 = (0.564, 0.259, 0.177)$$
$$\pi_7 = (0.546, 0.266, 0.188)$$
$$\pi_8 = (0.556, 0.262, 0.182)$$
$$\pi_9 = (0.551, 0.264, 0.185)$$
$$\pi_{10} = (0.553, 0.263, 0.184)$$
$$\pi_{11} = (0.553, 0.263, 0.184)$$
$$\pi_{12} = (0.553, 0.263, 0.184)$$

概率模型简介
随机模型
概率模型的模拟
几个概率模型介绍
案例分析：眼科病床的...
概率论基础简介
访问主页
标题页
第 30 页 共 103
返回
全屏显示
关闭
退出

由上面的计算结果可知，$\pi_n(i)$趋于一个极限$\pi(i)$,在等式$\pi_{n+1} = \pi_n P$ 中令$n \to \infty$,可得

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases}$$

由此可得

$$\pi = (0.553, 0.263, 0.184).$$

• 并不是每一个马尔可夫链都将趋于稳定的状态，比如具有如下状态转移矩阵的马尔可夫链

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

此马尔可夫链具有2周期。

• 称$\{X_n\}$是δ周期的，如果从$X_n = i(\forall i)$开始，这个链仅仅在时间$n+k\delta$又回到状态i.

• 如果$\{X_n\}$是非周期的（$\delta = 1$）,同时从任何状态i出发，经有限步可到达任何状态j, 则称$\{X_n\}$是**“遍历的”**。

定理： 一个遍历的马尔可夫链一定趋于稳定状态（平稳分布），与系统的初始状态无关。

第三步：建立模型

取$X_n = S_n$作为状态变量，它表明在这个销售周一开始库存水族箱的数量。需求量D_n与模型的动态有关，将被用来构成状态转移矩阵P.

$$X_n \in \{1, 2, 3\}.$$

不知初始状态，不妨假设$X_0 = 3$.

$$P\{D_n=0\}=\frac{e^{-1}}{0!}=0.368,\quad P\{D_n=1\}=\frac{e^{-1}}{1!}=0.368,$$
$$P\{D_n=2\}=\frac{e^{-1}}{2!}=0.184,\quad P\{D_n=3\}=\frac{e^{-1}}{3!}=0.061,$$
$$P\{D_n>3\}=1-\sum_{i=0}^{3}P\{D_n=i\}=0.019.$$

于是

$$\begin{aligned}
P_{31} &= P(X_{n+1}=1|X_n=3)=P(D_n=2|X_n=3)\\
&= P(D_n=2)=0.184\\
P_{32} &= P(X_{n+1}=2|X_n=3)=P(D_n=1|X_n=3)\\
&= P(D_n=1)=0.368\\
P_{33} &= P(X_{n+1}=3|X_n=3)=1-(0.184+0.368)=0.448
\end{aligned}$$

其余的状态转移概率可类似计算。状态转移矩阵式

$$P=\begin{pmatrix}0.368 & 0 & 0.632\\ 0.368 & 0.368 & 0.264\\ 0.184 & 0.368 & 0.448\end{pmatrix}$$

由此可画出状态转移图。

第四步：求解模型

目标是计算概率

$$P\{D_n > S_n\}$$

一般地，它依赖于n,更具体的依赖于X_n. 比如

$$P\{D_n > S_n | X_n = 3\} = P\{D_n > X_n | X_n = 3\} = P\{D_n > 3\} = 0.019$$

利用状态转移图容易知道$\{X_n\}$是一个遍历马尔可夫链，因此存在唯一的渐近稳定分布π. 由

$$\begin{cases} \pi P = \pi \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

可得

$$\pi = (0.285, 0.263, 0.452).$$

于是对充分大的n, 近似地有

$$\pi_n(1) = 0.285, \;\; \pi_n(2) = 0.263, \;\; \pi_n(3) = 0.452.$$

利用全概率公式可得

$$
\begin{aligned}
P\{D_n > S_n\} &= \sum_{i=1}^{3} P(X_n = i) P(D_n > S_n | X_n = i) \\
&= P(X_n = 1) P(D_n > 1) + P(X_n = 2) P(D_n > 2) \\
&\quad + P(X_n = 3) P(D_n > 3) \\
&\approx 0.285 \times 0.264 + 0.263 \times 0.080 + 0.452 \times 0.019 \\
&= 0.105.
\end{aligned}
$$

第五步：回答问题

当前的库存策略导致有大约10%的时间会因无货销售而损失，或者说每年大约有5次（个星期）缺货。

灵敏性分析：对购买者的到达率λ的灵敏性分析，可用两种方法：一是，将λ作为变量，求出$p = P\{D_n > S_n\}$,但计算相当繁冗；二是，对在1 附近选择少数的λ值重复步骤四的计算，再根据计算结果给出灵敏性分析的结论(不灵敏）。

假定有许多不同的库存策略是可取的，如何从中确定最好的策略？研究这一问题的一种方式是构造一个基于我们的马尔可夫链模型的一般化的最优化模型。这一类模型的研究称为**马尔可夫决策理论**，在运筹学教材中可找到。

2.2. 连续时间马尔可夫链

例2.3. 一个在重型设备修理厂工作的技工负责铲车的维护和修理。当铲车损坏时它将被送到修理厂，按照到达先后顺序进行修理。工厂内可以存放 27 台铲车，同时过去的一年工厂修理了 54 台铲车。每一台铲车平均修理大约三天的时间。在刚刚过去的几个月，这个操作的有效性和效率上出现了一些问题。两个核心的问题是等待修理的铲车的数量和工人从事这一任务占用的时间比例.

第一步：提出问题

铲车以每月54/12=4.5 台的速率到达工厂来修理，每月被修理的数量最多为$22/3 \approx 7.3$. 令X_t表示时间t 维修车间的铲车的数量。关心的是时间t 维修车间的平均台数 EX_t 和技工从事修理铲车的时间所占的比例 $P(X_t > 0)$.

变量： X_t =在时间 t 等待修理的铲车的数量

假设： 待修理铲车的到达率为每月4.5 台，每月的最多修理铲车7.3台。

目标： 计算 EX_t，$P\{X_t > 0\}$.

第二步：选择模型——连续时间马尔可夫链

假设状态空间是有限的，

$$X_t \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

随机过程$\{X_t, t \geq 0\}$是马尔可夫过程，如果当前的状态X_t完全确定了过程将来的概率，即

$$P(X_{t+s} = j | X_u, u \leq t) = P(X_{t+s} = j | X_t) \tag{2}$$

马尔可夫性质(2)有以下两个重要含义：

- 下一次转移的时刻不依赖于当前状态维持多长时间，换句话说，在特定状态下的时间的分布具有无记忆性。令T_i表示状态i维持的时间，则马氏性说的是

$$P(T_i > t + s | T_i > s) = P(T_i > t)$$

由此推出T_i服从指数分布(因为指数分布是具有无记忆性的唯一概率分布），密度函数为

$$f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \ \forall t \geq 0.$$

- 下一状态的概率分布仅仅依赖于当前的状态。于是，这个过程所经历的状态序列构成一个（离散时间）马尔可夫链。如果我们令p_{ij}表示过程从状态i跳跃到状态j的概率，则所嵌入的马尔可夫链就具有转移概率矩阵$P = (p_{ij})$.

例2.4. 考虑一个马尔可夫链，具有状态转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

假设$\{X_t\}$的跳跃服从这个马尔可夫链，状态1、2和3持续的平均时间分别为1、2和3，构造这个连续时间马尔可夫链$\{X_t\}$.

性质： 稳定状态方程$\pi = \pi P$ 的解表明跳跃到状态1、2和3的比率分别为0.396，0.227 和 0.377. 然而，在每一个状态停留时间的比例同样依赖于在下一跳跃之前我们在这个状态停留了多长时间。

相对比例为：$(1 \times 0.396) : (2 \times 0.227) : (3 \times 0.377)$

归一化（每一项除以他们的和）得到：

$$0.200 : 0.229 : 0.571$$

这个马尔可夫过程大约有57.1%的时间处于状态3，20%的时间处于1，22.9% 的时间处于2. 称$(0.200, 0.229, 0.571)$为这个连续时间马尔可夫链的稳定状态分布。

一般地，如果$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_m)$是嵌入的离散时间马尔可夫链的稳定状态分布，同时$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$是速率向量，则停留于各状态的时间的比例由下式给出：

$$p_i = \frac{\left(\frac{\pi_i}{\lambda_i}\right)}{\left(\frac{\pi_1}{\lambda_1}\right) + \cdots + \left(\frac{\pi_m}{\lambda_m}\right)}, \ i = 1, 2, \cdots, m.$$

速率λ_i的倒数$\frac{1}{\lambda_i}$表示处于状态i的平均时间（指数分布$Exp(\lambda_i)$的期望）。

概括地说，连续时间马尔可夫链的状态变化过程可以看做一个离散时间马尔可夫链，其中两次跳跃之间的时间服从依赖于当前状态的指数分布。

构造： 给定$X_t = i$，令T_{ij}服从参数为$a_{ij} = \lambda_i p_{ij}, j \neq i$的指数分布。假设$T_{i,1},\cdots,T_{i,i-1},T_{i,i+1},\cdots,T_{i,m}$是独立的，则到下一次跳跃的时间$T_i$是$T_{i,1},\cdots,T_{i,i-1},T_{i,i+1},\cdots,T_{i,m}$中的最小者，同时若$T_{i,j}$是$T_{i,1},\cdots,T_{i,i-1},T_{i,i+1},\cdots,T_{i,m}$中的最小者，则下一个状态是$j$. 数学描述如下:

$$T_i = \min(T_{i,1},\cdots,T_{i,i-1},T_{i,i+1},\cdots,T_{i,m})$$

服从参数为

$$\lambda_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}$$

的指数分布，同时

$$P(T_i = T_{i,j}) = p_{ij}.$$

参数$a_{ij} = \lambda_i p_{ij}$称为这个过程从状态$i$趋向状态$j$的速率。根据计算可画出"**速率图**"，这与离散时间马尔可夫链的"**状态转移图**"是不一样的，这儿需要考虑到在每个状态的停留时间。

定义

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lambda_i p_{ij}, \ \text{从 } i \to j \text{ 的速率}, \\ a_{ii} &= -\lambda_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}, \ \text{离开 } i \text{ 的速率}. \end{aligned}$$

$$P_i(t) = P(X_t = i),\ i = 1, \cdots, m,$$

满足微分方程

$$\begin{cases} P_1'(t) = a_{11}P_1(t) + \cdots + a_{m1}P_m(t) \\ \ \vdots \\ P_m'(t) = a_{1m}P_1(t) + \cdots + a_{mm}P_m(t) \end{cases}$$

使用“**流体流动类比**”，以上微分方程更容易理解。直观地说，将概率$P_i(t)$看作在状态i 流体（概率物质）的总量，a_{ij}表示流体流动的速率，同时事实

$$P_1(t) + \cdots + P_m(t) = 1$$

意味这流体的总量保持等于1.

令$A = (a_{ij})$, 则上述微分方程可简写为

$$P'(t) = P(t)A$$

由平稳方程 $P(t)A = 0$ 可以求出稳定状态解。

- 一个连续时间马尔可夫链，如果对于每一对状态i 和j 都可能通过有限步的转移从状态i跳到状态j,则该马尔可夫链称为**遍历的**。
- 一个遍历的连续时间马尔可夫链一定趋于稳定的状态，进而X_t的分布趋于相同的稳定状态分布且与系统的初始状态无关。

第三步：建立模型

$$X_t \in \{0, 1, 2, \cdots, 27\}.$$

允许发生的转移：$X_t = i$ 到$X_t = i + 1$ 或$i - 1$, 除去从27向上转移和0向下转移。令$\lambda = 4.5, \mu = 7.3$, 可画出铲车问题的速率图。

稳定状态方程 $PA=0$ 可使用

$$[\text{流出率}] = [\text{流入率}]$$

的原理从速率图得到。我们有

$$\begin{cases} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\mu+\lambda)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \\ (\mu+\lambda)P_2 = \lambda P_1 + \mu P_3 \\ \qquad \vdots \\ (\mu+\lambda)P_{26} = \lambda P_{25} + \mu P_{27} \\ \mu P_{27} = \lambda P_{26} \\ \sum_{i=0}^{27} P_i = 1 \end{cases} \tag{3}$$

关心

$$EX_t \approx \sum_i iP_i$$
$$P(X_t>0) = 1 - P(X_t=0) \approx 1 - P_0$$

第四步：求解模型

根据(3)可得

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_{n-1},\ \forall n = 1, 2, \cdots, 27.$$

于是

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

再利用$\sum_{n=0}^{27} P_n = 1$, 可得

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{28}},$$
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4.5}{7.3} \approx 0.616.$$
$$1-\rho^{28} \approx 0.9999987$$

不妨假设$P_0 = 1-\rho$, 于是

$$P_n = \rho^n(1-\rho),\ \forall n = 1, 2, \cdots, 27.$$

从而

$$P(X_t > 0) = 1 - P(X_t = 0) \approx 1 - P_0 = \rho \approx 0.616$$
$$EX_t = \sum_{n=1}^{27} nP_n \approx \sum_{n=1}^{27} n\rho^n(1-\rho) \approx 1.607$$

第五步：回答问题

结论： 我们考虑一个系统，其中铲车以每月4.5台的速率损坏，同时被送到具有每月能修理7.3台铲车的修理厂修理。因为铲车送修理厂的速率仅仅大约是修理厂潜在的修理能力的60%，修理工人忙于这一工作仅仅大约是60%的时间。然而，铲车的损坏实质上是随机的，有时即使修理工没有误工也会出现在同一时间有多辆铲车停在修理厂的情形。事实上，平均一天我们将期望在修理厂看到1.6辆铲车。对于这一点，我们是说如果我们跟踪在修理厂的铲车的数量，则到年底这些数据的平均大约是1.6. 更详细的，我们有一个概率分布（上面求出的$(P_0, P_1, \cdots, P_{27})$）。

两个管理问题： 一个是闲散时间的问题；另一个是工作的积压。

灵敏性分析:

- 对参数 $\rho = \lambda/\mu$ 的灵敏性分析：当前 $\rho = 0.616$. 关系式

$$P(X_t > 0) \approx \rho$$

无须进一步解释。令$A = EX_t$表示系统的平均数，则（使用$1-\rho^{28} \approx 1$)我们有

$$A = \sum_{n=0}^{27} n\rho^n(1-\rho),$$

可以简化为

$$A = \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{27} - 27\rho^{28}$$

近似地有

$$\rho(1+\rho+\rho^2+\cdots) = \frac{\rho}{1-\rho},$$

于是

$$\frac{dA}{d\rho} \approx \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

进一步可得

$$S(A,\rho) \approx 2.6$$

因此，关于 ρ 的小的误差不会明显地影响我们基于 $A = EX_t$ 的结论。

- 对 $K = 27$ 的灵敏性分析:

$$P_n = \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}}$$

改变K, 不会影响$\rho = \lambda/\mu \approx 0.616$. 由此可知增大$K$，工厂性能的两个指标是不灵敏的，其效果仅仅是增加了可等待修理的铲车的数量。

2.3. 线性回归

一个非常普遍的随机模型是假设状态变量的期望值是时间的线性函数。这个模型之所以引人注目不仅是因为它应用的范围很广，还因为有很好的软件工具。

例2.5. 私人家庭可调节的抵押贷款率通常是基于由联邦家庭贷款银行制定的若干市场指数之一确定的。贷款者的抵押贷款是依据每年五月一年期的美国公债到期的指数（CM1,Constant Maturity index)来调节的。从1986年六月开始的三年期间的历史资料列于下表。使用这些信息给出下一次调节时，即1990年五月这个指数的估计值。

数据如下:

$(6/86, 6.73)$	$(7/86, 6.27)$	$(8/86, 5.93)$
$(9/86, 5.77)$	$(10/86, 5.72)$	$(11/86, 5.80)$
$(12/86, 5.87)$	$1/87, 5.78)$	$(2/87, 5.96)$
$(3/87, 6.03)$	$(4/87, 6.50)$	$(5/87, 7.00)$
$(6/87, 6.80)$	$(7/87, 6.68)$	$(8/87, 7.03)$
$(9/87, 7.76)$	$(10/87, 7.59)$	$(11/87, 6.96)$
$(12/87, 7.17)$	$(1/88, 6.99)$	$(2/88, 6.64)$
$(3/88, 6.71)$	$(4/88, 7.01)$	$(5/88, 7.40)$
$(6/88, 7.49)$	$(7/88, 7.75)$	$(8/88, 8.17)$
$(9/88, 8.09)$	$(10/88, 8.11)$	$(11/88, 8.48)$
$(12/88, 8.99)$	$(1/89, 9.05)$	$(2/89, 9.25)$
$(3/89, 9.57)$	$(4/89, 9.36)$	$(5/89, 8.98)$
$(6/89, 8.44)$		

根据上述数据我们可画出散点图（略）。

第一步：提出问题

变量： X_t: 1986年5月以来第t个月的CM1, $t = 1, 2, \cdots, 37$.
目标： 估计 X_{48}.

若假设X_t部分依赖于随机因素，则我们不能精确地预测 X_{48}, 最好就是得到平均值和不确定性大小的某种度量。我们专注于 EX_{48}.

第二步：选择模型—线性回归模型

线性回归模型假设

$$X_t = a + bt + \varepsilon_t,$$

其中a和b是实常数，ε_t表示随机波动效应的随机变量。假设

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$$

是独立的，同分布具有零均值。一般还假设ε_i是正态的，即对某个$\sigma > 0$,

$$\frac{\varepsilon_i}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

在由ε_i表示的随机波动是相当大量的随机因子相加的结果的情形下，这个正态的假设由中心极限定理保证是合理的。

因为$E\varepsilon_t = 0$, 故

$$EX_t = a + bt.$$

于是估计EX_t的问题就转化为估计参数a, b的问题了。

拟合直线: 给定数据

$$(t_1, y_1), \cdots, (t_n, y_n).$$

寻找直线使得(t_i, y_i) 到回归直线上$t = t_i$的点之间的垂直距离$|y_i - (a + bt_i)|$尽可能地小，为避免绝对值符号在优化问题上带来的麻烦，我们使用

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bt_i))^2.$$

最小化$F(a, b)$, 我们通过解以下方程组得到a, b的估计值。

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

上述方程组可具体表示为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b\sum_{i=1}^n t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i y_i = a\sum_{i=1}^n t_i + b\sum_{i=1}^n t_i^2 \end{cases} \tag{4}$$

以下来讨论回归方程预测的效率的估计。令

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$$

表示资料点y的平均值，同时对于每个i令

$$\hat{y}_i = a + bt_i$$

于是我们有如下分解

$$y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}),$$

其中，右边第一部分表示误差（资料点距回归直线的垂直距离），第二部分表示回归直线上y的改变量。简单的代数变换可得

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

统计量

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \tag{5}$$

度量了在全部的变化中由回归直线解释的部分，总变差中剩余的部分是随机误差也就是ε_t 的影响的贡献。

- 若R^2接近于1，则资料点非常接近直线；
- 若R^2接近于0，则资料点很接近随机。

第三步：建立模型

$$\begin{aligned}
&X_t = a + bt + \varepsilon_t \\
&EX_t = a + bt \\
&(t_1, y_1) = (1, 1.73) \\
&(t_2, y_2) = (2, 6.27) \\
&\quad\vdots \\
&(t_{37}, y_{37}) = (37, 8.44)
\end{aligned}$$

利用(4)求出参数a, b,利用(5)求拟合优度统计量R^2.

第四步：求解模型

使用统计软件可得

$$y_t = 5.45 + 0.0970t$$
$$R^2 = 83.0\%$$
$$EX_{48} = 5.45 + 0.0970 \times 48 = 10.106$$

第五步：回答问题

结论： 我们得到了关于CM1指数每月增长大约0.097点的一般的趋势。这个数字是基于最近三年的历史观测得到的。基于这一点我们得到1990年5月指数的估计值为10.106. 它大约要比1989年5月高出1.1 个点。

灵敏性分析：

- X_t的随机波动量：假设ε_i服从正态分布，可估计它的标准差$\sigma \approx 0.4812$. 由此可推出95%信度X_{48}介于10.106±2σ之间，即

$$9.14 \le X_{48} \le 11.07$$

- 对于非正常的资料值的灵敏性：回归直线总通过$(\bar{t},\bar{y})$, 对于所给数据为$(19,7.29)$. 统计软件包Minitab 表明资料点（1，6.73）为非正常点。删去此点，重新计算可得

$$
\begin{aligned}
&EX_t = 5.30 + 0.103t \\
&R^2 = 86.2\% \\
&EX_{48} = 10.24 \\
&95\% : \ 9.24 \le X_{48} \le 11.22
\end{aligned}
$$

不是十分敏感。

稳健性分析：

$$X_t = f(t) + \varepsilon_t,$$

$f(t)$不一定为线性函数，所给数据表明线性近似较好（$R^2 = 83\%$）。

- 线性回归模型是**时间序列模型**的简单的例子，时间序列模型是随时间变化的一个或多个变量的随机模型，**时间序列分析**是统计学的一个重要分支。

3 概率模型的模拟

最优化问题是数模中出现最多的问题，然而许多最优化的问题非常难于解析地解出来，因此此类问题的计算方法很重要。对于**动态模型**，通常人们能够解析地确定稳定状态的行为，但是，关于瞬时（时变的）行为研究就需要计算机模拟。**概率模型**更加复杂，在许多情况下，概率模型是用模拟的办法解出的。本章将讨论概率模型中某些通常使用的模拟方法。

3.1. 蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟

随机过程中包含有瞬时的或时变的行为的问题是很难解析地解出的，蒙特卡罗模拟是有效解决这一类问题的一般的建模技术。蒙特卡罗模拟软件开发是耗时间的，为了提高精确度需要多次模拟，灵敏性分析可能变得出奇的费时间。尽管如此，蒙特卡罗模拟模型仍然享有非常广泛的声誉。**模型很直观且易于解释，同时也是对许多复杂的随机系统进行建模的仅有的方法。** 蒙特卡罗模拟模型的随机行为，它是基于诸如抛硬币或掷骰子这类简单的随机化处理的办法，但通常使用了计算机的伪随机数发生器。由于包含有随机元素，模型的每次重复将产生不同的结果。

例3.1. 你的假期来到了，但当地的气象预报告诉你这一周每天有50%的可能下雨。连续三天下雨的可能性有多大?

两种解决方法:

1. 直接计算
2. 五步法（利用蒙特卡罗模拟）

直接计算：

$$
\begin{aligned}
& P(\text{连续三天下雨}) \\
&= P(\text{第一天、第二天、第三天均下雨}) \\
&\ +P(\text{第一天没下雨、第二天、第三天、第四天均下雨}) \\
&\ +P(\text{第二天没下雨、第三天、第四天、第五天均下雨}) \\
&\ +P(\text{第三天没下雨、第四天、第五天、第六天均下雨}) \\
&\ +P(\text{第四天没下雨、第五天、第六天、第七天均下雨，前三天至少有一天下雨}) \\
&= (\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^3\cdot(1-(\frac{1}{2})^3) \\
&= \frac{47}{128} \approx 36.7\% \approx 40\%.
\end{aligned}
$$

五步法： 为了展示模拟的一些基本思想

第一步：提出问题

变量：

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{第}t\text{天没下雨} \\ 1 & \text{第}t\text{天下雨} \end{cases}$$

假设： $X_1, X_2, \cdots, X_7$ 相互独立，而且$\forall t = 1, 2, \cdots, 7,$

$$P\{X_t = 0\} = P\{X_t = 1\} = \frac{1}{2}.$$

目标： 确定对于$t = 1, 2, 3, 4$或5,$X_t = X_{t+1} = X_{t+2}$的概率.

第二步：选择模型—-蒙特卡罗模拟

蒙特卡罗模拟是可以应用于任何概率模型的技术。一个概率模型包含有若干随机变量，同时明确给出了每个随机变量的概率分布，蒙特卡罗模拟使用随机化的设备按照他们的概率分布给出每个随机变量的值。因为模拟的结果依赖于随机因素，接连重复同样的模拟将会产生不同的结果。通常，一个蒙特卡罗模拟将被重复若干次以便于确定平均数或期望的结果。

蒙特卡罗模拟通常被用于估计系统的性能的一个或多个系统表现的度量值。重复的模拟可以看作是独立的随机试验。

仅考虑一个模拟参数 Y. 模拟结果得到 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, 这些可看作独立同分布的随机变量，分布未知。根据强大数定律可知，当$n \to \infty$,

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \to EY,$$

i.e. 我们可用$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$的平均数来估计Y的真实的期望值。

令 $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, 根据中心极限定理，当n足够大时

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \approx N(0,1),$$

其中, $\mu = EY, \sigma^2 = VarY = E(Y - EY)^2$. 由上式可得

$$\frac{S_n}{n} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

由此我们希望 $\frac{S_n}{n}$ 趋于 μ 的速度与 $\frac{1}{\sqrt{n}}$一样快，i.e. 要是EY的精确度增加一位小数就需将模拟次数变为原来的100倍。

如果我们要使用蒙特卡罗模拟，我们必须满足平均性质的相当粗放的估计，明智的灵敏性分析完全可以保证模拟结果的适当使用。

第三步：建立模型

雨天问题的蒙特卡罗模拟的伪代码如下：

算法： 雨天模拟
变量：

$$p = \text{一个雨天的概率}$$

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{在第}t\text{天下雨} \\ 0, & \text{在第}t\text{天不下雨} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1, & \geq 3\text{个连续雨天} \\ 0, & < 3\text{个连续雨天} \end{cases}$$

输入： p

过程：

```
Begin
Y ← 0
C ← 0
for t = 1 to 7 do
    Begin
    if Random[0,1] < p then
            X(t) = 1
        else
            X(t) = 0
    if X(t) = 1 then
            C ← C + 1
        else
            C ← 0
    if C ≥ 3 then Y ← 1
    End
End
```

输出： Y

以上给出了我们的假期问题的蒙特卡罗模拟的算法。Random$\{S\}$表示从集合S中随机地选择一个点。此外，若从$[0,1]$中选出的数小于 p, 表示这一天是雨天，否则不是雨天。于是，p 就是任何一天下雨的概率。变量 C 记录了连续雨天的天数。以下我们用记号

$$Y \leftarrow \text{ Rainy Day Simulation}(p)$$

表示运行上述雨天模拟算法，当输入参数为 p 时得到的输出变量 Y.

以下为雨天问题重复进行蒙特卡罗模拟以确定平均特征的伪代码:

算法：重复雨天模拟

变量:

p =一个雨天的概率

n =模拟的周数

S =下雨周的数目

输入：p, n

过程:

Begin

$S \leftarrow 0$

for $k = 1$ to n do

Begin

$Y \leftarrow$ Rainy Day Simulation(p)

$S \leftarrow S + Y$

End

输出：S

第四步：求解模型

在计算机上运行上述“重复雨天模拟”算法，令参数$p = 0.5, n = 100$. 模拟结果是100次中有43个下雨周。在这个基础上我们估计下雨周的机会是43%. 可以做若干次模拟以确定这个结果，在每一次模拟中结果大约是每100次有40个下雨周。

第五步：回答问题

你的假期来了，但是你发现当地的气象台预报一周内每天有50%的可能下雨。模拟结果显示，如果这个预报是正确的，则这里只有40%的可能在这一周内将至少连续三天下雨，应用于晴天结果一样，有40%的机会至少三个连续的晴天。

灵敏性分析：

- 利用中心极限定理及

$$\frac{S_n}{n} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

  知有95% 的把握

$$\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \le \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

  若取$q = P(Y = 1) = 0.37$, 则$\sigma = 0.37 * 0.63$,从而对于$n = 100$有

$$2\sqrt{\frac{0.37 * 0.63}{100}} \approx 0.1$$

- 对于预报的50% 下雨的可能性的灵敏性分析：对于 $p = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$ 分别进行模拟，得到一周内连续三天下雨的概率分别约为10%, 20%, 40%, 54%, 72%.

稳健性分析： 关于$X_1, X_2, \cdots, X_7$的独立同分布假设（略）。

3.2. 解析模拟

蒙特卡罗模拟模型相对来说容易实现，而且很直观，它的主要缺点是需要进行多次的运行模型以得到可信的结果。解析模拟的实现更加困难，但推算更加有效。

例3.2. 一个军事行动的指挥官计划对敌方一个有很好的防卫的目标实行空中打击。高空战略轰炸机将被用于攻击这个重要目标。在战斗的初期确保这一攻击的成功是非常重要的，特别是在战斗的第一天。每一架战斗机有0.5的概率摧毁目标，假设它能够穿过空中防线并且发现目标。一架轰炸机发现目标的概率是0.9. 目标由两个地对空导弹(SAM)阵地和若干防控火炮保护。飞机的飞行方式使它们有效地避开了防控火炮（因为飞机很高），每一个SAM 阵地有它自己的跟踪雷达和计算机设备，它能够跟踪两架飞机，和同时操纵两枚导弹。情报估计一枚导弹有0.6的概率摧毁其目标飞行器。两个SAM 阵地共同一个目标搜索雷达，雷达对于50英里以上的高空轰炸机非常有效。搜索雷达的有效范围是15英里。轰炸机以500英里/小时的速度在5英里的高空飞行，发起攻击需要在目标的上空盘旋一分钟。每一个SAM 阵地每30秒可以发射一枚导弹，导弹以1000英里/小时的速度飞行。需要派多少轰炸机才能确保摧毁这个目标。

第一步：提出问题（将问题数学化）

我们希望有99%的把握摧毁目标，假设有N架飞机被派出执行这个任务。在它们完成攻击目标之前被空防击落的飞机的数目是一个随机变量，用X表示这个随机变量。令S表示任务完成的概率，p_i表示在完成攻击目标任务之前$X=i$架飞机被击落时任务完成的概率，则我们得到

$$S=\sum_{i=0}^{N}p_i\cdot P\{X=i\}$$

- 以下分析 p_i:

如果N架飞机被派出同时 $X=i$ 架在它们到达目标之前被击落，这时就有$(N-i)$ 架攻击的飞机，如果p是一架飞机摧毁目标的概率，则$(1-p)$是一架攻击飞机没有摧毁目标的概率，$(N-i)$架飞机中至少有一个成功摧毁目标的概率

$$p_i=1-(1-p)^{N-i}$$

- 以下分析 $P\{X=i\}$:

在飞往目标的途中在攻击之前暴露于空中防线的全部时间

$$\frac{15\text{英里}}{500\text{英里/小时}}\times\frac{60\text{分钟}}{\text{小时}}=1.8\text{分钟}$$

同时加上在目标上空盘旋的1分钟，一共是2.8分钟，在这段时间内每个SAM 阵地可以发射5枚导弹。于是，攻击的飞机将暴露于总共$m=10$枚导弹的射程之内。我们假设1枚导弹针对一架飞机，这样被击落的飞机数量$X\sim B(m,q)$, 即

$$P\{X=i\}=C_m^i q^i(1-q)^{m-i},$$

其中, $q=0.6, C_m^i$为从m个物体中选出i个的组合数.

以上的分析总结如下：

变量：

N =派出的轰炸机的数量

m =发射导弹的数量

p =一架轰炸机能够摧毁目标的概率

q =一枚导弹能够击落轰炸机的概率

X =攻击之前被击落的轰炸机的数量

p_i =给定$X = i$完成任务的概率

S =任务完成的最终概率

假设：

$$p = 0.9 \times 0.5$$

$$q = 0.6$$

$$m = 10$$

$$p_i = 1 - (1-p)^{N-i}$$

$$P\{X = i\} = C_m^i q^i (1-q)^{m-i},\ i = 0, 1, \cdots, m$$

$$S = \sum_{i=0}^{m} p_i \cdot P\{X = i\}$$

目标： 求最小的N使得$S > 0.99$

第二步：选择模型（解析模拟模型）

在蒙特卡罗模拟中我们引入随机数以模拟事件，同时使用重复试验来估计概率和期望值，在解析模拟中我们使用 **概率理论** 与 **计算机程序** 的组合去计算概率与期望值。解析模拟在数学上更加精密，这是它有更高效率的原因。其可行性依赖于问题的复杂性和建模者的能力。

第三步：模型的建立

算法： 轰炸机问题
变量：

N =派出的轰炸机的数量

m =发射的导弹的数量

p =一架轰炸机能够摧毁目标的概率

q =一枚导弹能够击落轰炸机的概率

S =任务完成的最终概率

输入： N, m, p, q

过程：

Begin

$S \leftarrow 0$

for $i = 0$ to m do

$p \leftarrow 1 - (1-p)^{N-i}$

$B \leftarrow$ Binomial(m, i, q)

$S \leftarrow S + p \cdot B$

End

End

输出： S

第四步：求解模型

输入$m = 10, p = 0.9 \times 0.5, q = 0.6$, 同时改变$N$得到函数关系图，最少需要15架飞机才能保证有99%的可能完成任务。

第五步：回答问题

结论：为保证有99%的可能完成任务，至少需要派出15架轰炸机。

灵敏性分析：

- 对成功概率 $S = 0.99$ 做灵敏性分析，结果如下

$$\begin{array}{ll} N = 10 & S \approx 87\% \\ N = 11 & S \approx 92.3\% \\ N = 12 & S \approx 95.8\% \\ N = 13 & S \approx 97.8\% \\ N = 14 & S \approx 98.8\% \\ N = 15 & S \approx 99.2\% \\ N = 16 & S \approx 99.6\% \\ N = 17 & S \approx 99.7\% \\ N = 18 & S \approx 99.9\% \\ N = 19 & S \approx 99.9\% \\ N = 20 & S \approx 99.9\% \end{array}$$

$N = 15$比较合理。

- 对$p = 0.9 \times 0.5$作灵敏性分析：
  若$p = 0.5 \times 0.5$, 要$S > 0.99$, 需$N \geq 23$;
  若$p = 0.3 \times 0.5$, 要$S > 0.99$, 需$N \geq 35$。
  由此可知若天气比较坏（导致发现目标的概率大大下降）时，不应派飞机去执行这样的任务。
- 对飞机的飞行速度作灵敏性分析：
  若$v = 1200$英里/小时，则$m = 4$, 只需$N = 11$架；若$m = 0$, 则$N \geq 8$.
- 对目标的识别能力的灵敏性分析：
  若$p = 0.9 \times 0.8$, 则为要$S > 0.99$, 只需$N \geq 13$.
- 对敌人的空中防卫力作灵敏性分析：
  若$q = 0.8$, 则$N \geq 17$; 若$q = 0.6, m = 15$（有3个SAM），则$N \geq 18$.

可考虑的问题： 飞机攻击目标后成功返回的（期望）飞机数。

4 几个概率模型介绍

4.1. 轧钢中的浪费

把粗大的钢坯变成合格的钢材（如钢筋，钢板）通常要经过两道工序，第一道是粗轧（热轧），形成钢材的雏形；第二道是精轧（冷轧），得到规定长度的成品材。粗轧时由于设备、环境等方面众多因素的影响，得到的钢材的长度是随机的，大体上是正态分布，其均值可以在轧制过程由轧机调整，而均方差则是由设备的精度决定的，不能随意改变。如果粗轧后的钢材长度大于规定长度，精轧时把多出的部分切掉，造成浪费；如果粗轧后的钢材已经比规定长度短，则整根报废，造成更大的浪费。请综合考虑这两种情况，使得总浪费最小。

1. 问题数学化

已知成品材的规定长度为 l 和粗轧后钢材长度的均方差 σ, 确定粗轧后钢材长度的均值 m, 使得当轧机调整到 m 进行粗轧，再通过精轧以后得到成品材时总的浪费最少。

2. 问题分析

粗轧后钢材长度记作 X. X（近似）服从均值为m, 均方差为σ 的正态分布，概率密度记作$p(x)$,记

$$p = P\{X \geq l\}$$

浪费分两种情况：如果$X \geq l$, 浪费$X - l$; 如果$X < l$, 浪费X. 定义

$$\begin{aligned} W &= E\left[I_{\{X\geq l\}}\cdot(X-l) + I_{\{X<l\}}\cdot X\right] \\ &= \int_l^\infty (x-l)p(x)dx + \int_0^l xp(x)dx \\ &\approx \int_l^\infty (x-l)p(x)dx + \int_{-\infty}^l xp(x)dx \end{aligned} \tag{6}$$

上述最后一步是因为通常$l, m \gg \sigma$, X取负值的概率很小。

利用

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = EX = m,$$
$$\int_{l}^{\infty} p(x)dx = P(X \geq l) = p,$$

可得

$$W = m - lp. \tag{7}$$

(7)式可以用更直接的办法得到：设想共粗轧了N根钢材（N很大），所用钢材总长为mN,N根中可以轧出成品材的只有pN根，成品材的总长为lPN, 于是浪费的总长度为$mN - lpN$, 平均每轧一根钢材浪费长度为

$$W = \frac{mN - lpN}{N} = m - lp. \tag{8}$$

通常将(8)中的分母N改写为成品材总数pN, 即$\frac{m}{p} - l$（每得到一根成品钢材浪费的钢材长度）作为目标函数。

3. **建模与求解**

$$J_1 = \frac{mN - lpN}{pN} = \frac{m}{p} - l.$$

因为 l 为常数，故目标函数可只取第一项，记作

$$J(m) = \frac{m}{p(m)}.$$

$J(m)$为平均得到一根成品材所需浪费钢材的长度。

目标： 求 m 使 $J(m)$ 最小。

以下分析 $p(m)$:

$$p(m) = \int_l^{\infty} p(x)dx, \qquad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

令 $y = \frac{x-m}{\sigma}$, 则

$$\begin{aligned} p(m) &= \int_{\frac{l-m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot \sigma dy \\ &= \int_{\frac{l}{\sigma}-\frac{m}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

令 $\mu = \frac{m}{\sigma}$, $\lambda = \frac{l}{\sigma}$, 则由 $J(m) = \frac{m}{p(m)}$ 知我们可将目标函数写为

$$J(\mu) = \frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda-\mu)},$$

其中

$$\Phi(\lambda-\mu) = \int_{\lambda-\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy := \int_{\lambda-\mu}^{\infty} \varphi(y)dy.$$

令 $z=\lambda-\mu$, 则

$$
\begin{aligned}
J(z) &= \frac{\lambda-z}{\Phi(z)}, \\
J'(z) &= \frac{-\sigma\Phi(z)-\sigma(\lambda-z)\Phi'(z)}{\Phi^2(z)} \\
&= \frac{-\sigma\Phi(z)-\sigma(\lambda-z)\varphi(z)}{\Phi^2(z)}, \\
J'(z) &= 0 \ \Rightarrow \ \frac{\Phi(z)}{\varphi(z)} = \lambda - z.
\end{aligned}
$$

令 $F(z)=\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}$, 则 $F(z)$ 可根据标准正态分布的函数值Φ 和密度函数φ 制成表格或给出图形。

比如，$l=2$米，$\sigma=20$厘米，则

$$
\lambda = \frac{l}{\sigma} = \frac{200}{20} = 10.
$$

4. 评注:

(1) 若$X<l$, 在实际中可用于规格 $l_1(<l)$ 的成品材;

(2) 日常生活中类似问题很多，如包装物品等（当然不一定都需要用概率方法来解决，要具体问题具体分析）。

4.2. 健康与疾病（再次介绍Markov chain, 介绍两种主要类型——正则链（遍历）和吸收链——的性质

人寿保险公司对投（受）保人的健康状况特别关注，它们欢迎年经力壮的人投保，患病者和高龄人则需要付较高的保险金，甚至被拒之门外。人的健康状况随着时间的推移会发生转变，转变是随机的，以下分两种情况来进行讨论。

1. 粗略地将人的健康状况分为健康和疾病两种状态，不防以一年为一个时间段研究状态的转变。

用随机变量 X_n 表示第n年的状态，$X_n = 1$表示健康，$X_n = 2$表示疾病，$n = 0, 1, 2, \cdots, a_i(n) = P(X_n = i), i = 1, 2.$ 状态转移概率

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

可认为$\{X_n\}$具有马氏性，由全概率公式有

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)P_{11} + a_2(n)P_{21} \\ a_2(n+1) = a_1(n)P_{12} + a_2(n)P_{22} \end{cases} \tag{9}$$

假设$P_{11}=0.8, P_{12}=0.2, P_{21}=0.7, P_{22}=0.3$, 投保人开始处于健康状态，即$a_1(0)=1, a_2(0)=0$. 经计算可知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_1(n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_2(n)$存在，在(9)中两边取极限可得

$$\lim_{n\to\infty} a_1(n)=\frac{7}{9}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_2(n)=\frac{2}{9}.$$

若$a_1(0)=0, a_2(0)=1$, 其结果一样。实际上，若$a_1(0)=a, a_2(n)=1-a, 0\le a\le 1$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} a_1(n)=\frac{7}{9}, \qquad \lim_{n\to\infty} a_2(n)=\frac{2}{9}.$$

这是具有“**遍历性**”的结果。

2. 把人的死亡作为第三种状态，用$X_n = 3$表示。此时设

$$P_{11} = 0.8, P_{12} = 0.18, P_{13} = 0.02,$$
$$P_{21} = 0.65, P_{22} = 0.25, P_{23} = 0.1,$$
$$P_{31} = P_{32} = 0, P_{33} = 1.$$

则由此我们可画出状态转移图（略）。根据全概率公式有

$$\begin{cases} a_1(n+1) = a_1(n)P_{11} + a_2(n)P_{21} + a_3(n)P_{31} \\ a_2(n+1) = a_1(n)P_{12} + a_2(n)P_{22} + a_3(n)P_{32} \\ a_3(n+1) = a_1(n)P_{13} + a_2(n)P_{23} + a_3(n)P_{33} \end{cases}$$

设$a_1(n) = 1, a_2(n) = a_3(n) = 0$, 此时有

$$\lim_{n\to\infty} a_1(n) = \lim_{n\to\infty} a_2(n) = 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} a_3(n) = 1.$$

这种马氏链称为“**吸收链**”。

- **马氏链及其基本方程**

设随机过程$\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$取值空间为$\{1, 2, \cdots, k\}$. 记$a_i(n) = P(X_n = i), P_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$. 若$a_i(n+1), i = 1, 2, \cdots, k$ 只依赖于X_n及$P_{ij}(n)$, 则称$\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$为马氏链；进一步，若$P_{ij}(n)$不依赖于$n$, 则称为（时间）齐次马氏链。

基本方程为:

$$a_i(n+1) = \sum_{j=1}^{k} a_j(n) P_{ji},\ i = 1, 2, \cdots, k,$$

并且

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} a_i(n) = 1,\ n = 0, 1, \cdots, \\ P_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{k} P_{ij} = 1. \end{cases}$$

写成矩阵形式为:

$$a(n+1) = a(n)P,\ \forall n = 0, 1, \cdots,$$
$$\Rightarrow a(n) = a(0)P^n.$$

- **正则链（遍历链）**

定义1. 对一个有k个状态的马氏链，如果存在正整数N，使得从任意状态i经N次转移都以大于零的概率到达状态$j(i, j = 1, 2, \cdots, k)$, 则称此马氏链为**正则链**。

遍历：任何一个状态可达另一状态，非周期.

定理1. 若马氏链的转移矩阵为P, 则它是正则链的充要条件是，存在正整数N使得$P^N > 0$ (指P^N的每一个元素大于零）。

定理2. 正则链存在唯一的极限状态概率（稳态概率）$W = (w_1, w_2, \cdots, w_k)$,使得当$n \to \infty$时，$a(n) \to W, W$与初始状态概率$a(0)$无关，满足

$$wP = w,$$
$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

定义$f_{ij}(n)$为从状态i出发，经n次转移首次到达状态j的概率，即

$$f_{ij}(n) = P(X_l \neq j, l = 1, 2, \cdots, n-1, X_n = j | X_0 = i).$$

于是

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n)$$

表示由状态i出发首次到达状态j的平均转移次数。特别，μ_{ii}为状态i首次返回的平均转移次数。

定理3. 对于正则链，有 $\mu_{ii} = \frac{1}{w_i}$.

- **吸收链**

定义2. 转移概率 $P_{ii} = 1$ 的状态i称为**吸收状态**。如果马氏链至少包含一个吸收状态，并且从每一个非吸收状态出发，能以正概率经有限次转移到达某个吸收状态，那么这个马氏链称为**吸收链**.

若有r个吸收状态，$k-r$个非吸收状态，则转移矩阵P可（分块）表示为

$$P=\begin{pmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ R & Q \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中$k-r$阶方阵Q的特征值λ满足$|\lambda|<1$, 这要求子阵$R_{(k-r)\times r}$中必含有非零元素（不一定每行都有非零元素），以满足从任一非吸收状态出发经有限次转移可到达某吸收状态的条件。

定理4. 对于吸收链P的标准形式(10), $I-Q$可逆，

$$M=(I-Q)^{-1}=\sum_{s=0}^{\infty}Q^s.$$

记 $e=(1,1,\cdots,1)^T$, 则

$$y=Me$$

的第i个分量为从第i个非吸收状态被某个吸收状态吸收的平均转移次数。

设状态i是非吸收状态，j是吸收状态，那么首达概率 $f_{ij}(n)$是从i出发经n次转移被j吸收的概率，而

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \\ &= P(\exists n \geq 1 \; s.t. \; X_n = j | X_0 = i) \end{aligned}$$

是从非吸收状态i出发终被吸收状态j吸收的概率，记 $F = \{f_{ij}\}_{(k-r)\times r}$, 有

定理5. $F = MR.$

4.3. 航空公司的预订票策略

在激烈的市场竞争中，航空公司为争取更多的客源而开展的一个优质服务项目是预订票业务。公司承诺，预先订购机票的乘客如果未能按时前来登机，可以乘坐下一班机或退票，无需附加任何费用。

开展预订票业务时，对于一次航班，若公司限制订票的数量恰好等于飞机的容量，那么由于总会有一些订了机票的乘客不按时前来登机致使飞机因不满员飞行而利润降低，甚至亏本。而如果不限制订票数量，那么当持票按时前来登机的乘客超过飞机容量时，必然会引起那些不能飞走的乘客的抱怨，公司不管以什么方式补偿，也会导致声誉受损和一定的经济损失。如何综合考虑经济利益和社会声誉，以确定预订票数量的最佳限额。

1. 问题分析

公司的经济利益可以用机票收入扣除飞行费和赔偿金后的利润来衡量，社会声誉可以用持票按时前来登机，因满员不能飞走的乘客（以下称为被挤掉者）限制在一定数量为标准。这是两目标优化问题，决策变量是预订票数量的限额。

2. 模型假设

(1) 飞机容量为常数 n, 机票价格为常数g, 飞行费用为常数r(假定与乘客数无关），机票价格按照 $g=\frac{r}{\lambda n}$来制订，$\lambda(<1)$为利润调节因子。

(2) 预订票数量的限额为常数$m(>n)$, 每位乘客不按时前来登机的概率为p,各位乘客相互独立。

(3) 每位被挤掉者获得的赔偿金为常数b.

3. 模型建立

(1) 公司的经济利益可以用平均利润S来衡量，每次航班的利润s为随机变量。当 m 位乘客中有 k 位不按时前来登记时，

$$s = \begin{cases} (m-k)g - r, & \text{当 } m-k \le n \text{ 时} \\ ng - r - (m-k-n)b, & \text{当 } m-k > n \text{ 时} \end{cases}$$

由假设（2）知，不按时前来登机的乘客数K服从二项分布,即

$$p_k = P(K = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}.$$

于是平均利润为

$$
\begin{aligned}
S(m) &= E(s) \\
&= \sum_{k=0}^{m-n-1}[(ng-r)-(m-k-n)b]p_k + \sum_{k=m-n}^{m}[(m-k)g-r]p_k \\
&= \sum_{k=0}^{m-n-1} ngp_k - r - b\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k + \sum_{k=m-n}^{m}(m-k)gp_k \\
&= -\sum_{k=0}^{m-n-1} g(m-k-n)p_k + \sum_{k=0}^{m-n-1} g(m-k)p_k - r \\
&\quad -b\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k + \sum_{k=m-n}^{m} g(m-k)p_k \\
&= g\sum_{k=0}^{m}(m-k)p_k - r - (g+b)\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k \\
&= (1-p)mg - r - (g+b)\sum_{k=0}^{m-n-1}(m-k-n)p_k.
\end{aligned}
$$

给定 n, g, r, p, b, 求 m 使得 $S(m)$ 最大。

(2) 记被挤掉的乘客数超过 j 人的概率为 $P_j(m)$, 因为被挤掉的乘客数超过 j 人等价于 m 位预订票的乘客中不按时前来登机的不超过 $m-n-j-1$ 人，故

$$P_j(m)=\sum_{k=0}^{m-n-j-1} p_k.$$

给定 n,j, 当 $m=n+j$时， $P_j(m)=0$, 而当 m变大时 $P_j(m)$ 单调增加。

4. 模型求解

可将 $P_j(m)$不超过某个给定值作为约束条件，以 $S(m)$ 为单目标函数求解，不便得到解析解，可以给定合理的数据，利用软件进行数值计算。

4.4. Google搜索引擎的奥妙

1. 为什么需要搜索?

2. Google如何搜索?

3. Google如何对对网页的重要性进行排序?

两大技术：“PageRank（网页级别）”与“页面分析”

参考以下文献：

姜启源，谢金星：数学建模案列分析，高等教育出版社，2006.

5 案例分析：眼科病床的合理安排（2009B)

参考以下文献：

李学文，李炳照，王宏洲：数学建模优秀论文精选与点评（2005-2010），清华大学出版社，2011.

概率模型简介
随机模型
概率模型的模拟
几个概率模型介绍
案例分析：眼科病床的...
概率论基础简介

访问主页
标题页
第 100 页 共 103
返回
全屏显示
关闭
退出

6 概率论基础简介

6.1. 测度空间与概率空间

- 可测空间
- 测度与概率

6.2. 可测函数与随机变量

- 可测函数的定义与性质
- 可测函数的构造
- 随机变量的分布与分布函数
- 可测函数的收敛

6.3. 积分与期望

- 积分的定义

- 积分的性质

- Riemann积分与Lebesgure 积分的关系

- 积分变换