

太阳能热水器外置太阳光吸收板放置的最佳倾角计算

孔 敏

mkong@nju.edu.cn

南京大学数学系

July 10, 2017



- 1 题目
- 2 地球自转以及绕太阳公转简介
- 3 模型假设
- 4 所用符号及说明
- 5 模型的建立及求解
- 6 最佳安装角度的计算
- 7 最优角度推导方法二

太阳能热水器外置太阳光吸收板放置的最佳倾角计算

二十一世纪, 太阳能的利用越来越被人们所重视, 而太阳能热水器由于其洁净, 绿色环保等特点逐渐走进千家万户. 太阳能热水器的原理是接受太阳光的辐射作为水的热源. 请你根据地球围绕太阳公转, 同时本身做自转的原理, 使得太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置能最大限度地吸收太阳光辐射, 讨论南京地区(或你所在的地区)太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置倾角 α , 使其能够最大限度地吸收太阳光辐射, 从而使得热水器获得更多的热源, 这里倾角是指太阳能热水器的外置太阳光吸收板与水平面的夹角.

- 1 计算一年中春分, 夏至, 秋分, 冬至这四天中 α 的最优值;
- 2 如果太阳能热水器在安装时的倾角 α 不变, 求最优安装的倾角, 并求其热效率;
- 3 若允许一年中调节两次倾角, 请确定在一年中的具体日期为最好其倾角如何改变? 其热效率可提高多少? 若允许调节4次结论又将如何?

参考数据: 南京东经: $118^{\circ}46'$, 北纬 $32^{\circ}03'$, 北回归线 $23^{\circ}26'$

太阳能热水器外置太阳光吸收板放置的最佳倾角计算

二十一世纪, 太阳能的利用越来越被人们所重视, 而太阳能热水器由于其洁净, 绿色环保等特点逐渐走进千家万户. 太阳能热水器的原理是接受太阳光的辐射作为水的热源. 请你根据地球围绕太阳公转, 同时本身做自转的原理, 使得太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置能最大限度地吸收太阳光辐射, 讨论南京地区(或你所在的地区)太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置倾角 α , 使其能够最大限度地吸收太阳光辐射, 从而使得热水器获得更多的热源, 这里倾角是指太阳能热水器的外置太阳光吸收板与水平面的夹角.

- 1 计算一年中春分, 夏至, 秋分, 冬至这四天中 α 的最优值;
- 2 如果太阳热水器在安装时的倾角 α 不变, 求最优安装的倾角, 并求其热效率;
- 3 若允许一年中调节两次倾角, 请确定在一年中的具体日期为最好其倾角如何改变? 其热效率可提高多少? 若允许调节 4 次结论又将如何?

参考数据: 南京东经: $118^{\circ}46'$, 北纬 $32^{\circ}03'$, 北回归线 $23^{\circ}26'$

太阳能热水器外置太阳光吸收板放置的最佳倾角计算

二十一世纪, 太阳能的利用越来越被人们所重视, 而太阳能热水器由于其洁净, 绿色环保等特点逐渐走进千家万户. 太阳能热水器的原理是接受太阳光的辐射作为水的热源. 请你根据地球围绕太阳公转, 同时本身做自转的原理, 使得太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置能最大限度地吸收太阳光辐射, 讨论南京地区(或你所在的地区)太阳能热水器的外置太阳光吸收板的放置倾角 α , 使其能够最大限度地吸收太阳光辐射, 从而使得热水器获得更多的热源, 这里倾角是指太阳能热水器的外置太阳光吸收板与水平面的夹角.

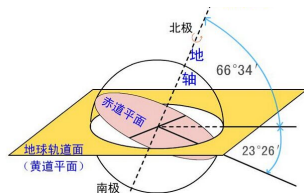
- 1 计算一年中春分, 夏至, 秋分, 冬至这四天中 α 的最优值;
- 2 如果太阳热水器在安装时的倾角 α 不变, 求最优安装的倾角, 并求其热效率;
- 3 若允许一年中调节两次倾角, 请确定在一年中的具体日期为最好其倾角如何改变? 其热效率可提高多少? 若允许调节 4 次结论又将如何?

参考数据: 南京东经: $118^{\circ}46'$, 北纬 $32^{\circ}03'$, 北回归线 $23^{\circ}26'$

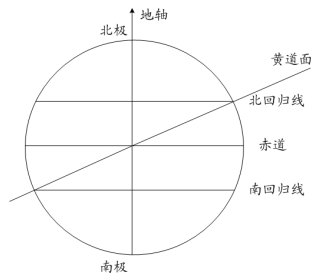
地球自转以及绕太阳公转简介

地球在围绕太阳旋转(公转)时,地轴(地球自转轴)与黄道面(公转轨道平面)永远保持 $66^{\circ}33'$ 的夹角.公转轨道是一个椭圆,太阳位于这个椭圆的焦点上(见右下图).也就是说,地球总是斜着身子在绕着太阳旋转.这样,地球有时是北半球倾向太阳,有时又是南半球倾向太阳,因而太阳光直射地球的位置会随时间而发生南北的移动.到夏至这一天,太阳光直射北纬 $23^{\circ}27'$ 的纬线上.

过了夏至,太阳光逐渐南移,北半球受太阳照射的时间逐渐减少.北纬 $23^{\circ}27'$ 的纬线是太阳光在北半球上直射点的最北界限,因此把这条纬线称为**北回归线**.在一年中的春分和秋分,太阳光直射在赤道上,这时地球上各地昼夜长短都相等.冬至时太阳光直射在南纬 $23^{\circ}27'$ 的纬线上,冬至过后,太阳光又开始逐渐北移,到夏至时,再次直射北回归线.南纬 $23^{\circ}27'$ 的纬线则是太阳光在南半球上直射点的最南界限,因此把这条纬线称为**南回归线**.**南北回归线**是太阳每年在地球上直射来回移动的分界线.



赤道,是赤日炎炎,骄阳似火的地方.在赤道地区,太阳终年直射,气温高,天气热,是有名的热带.赤道是通过地球中心垂直于地轴的平面和地球表面相交的大圆圈,把地球拦腰缚住,并把地球平分为南北两个半球.赤道是南北纬度的起点(即零纬度线),也是地球上最长的纬度线,全长40075.24公里(约8万多里),所以住在赤道上的人能够“坐地日行8万里”.



模型假设

- 1 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- 2 太阳与地球之间的距离为定值;
- 3 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- 4 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

模型假设

- ① 太阳能热水器把光能转化成水的热能的效率是个定值;
- ② 太阳与地球之间的距离为定值;
- ③ 除了地球以外, 其它任何事物(包括楼、塔、云、雾等)对阳光的遮挡都忽略不计;
- ④ 天气等其它环境因素不予考虑.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

所用符号及说明

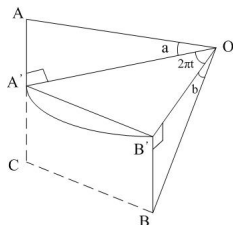
- ① T : 以年为单位表示的日期. $T \in [-1/2, 1/2]$, 设夏至时 $T = 0$;
- ② t : 以天为单位表示的时刻. $t \in [-1/2, 1/2]$, 设正午时 $t = 0$;
- ③ t_0 : T 日日落的时刻;
- ④ a : 太阳能热水器安置所在地的纬度;
- ⑤ τ : 太阳直射热水器太阳能板时由光能转换为热能的转换率;
- ⑥ c : 黄赤交角, 亦为回归线纬度的绝对值, 即 $c = 23^\circ 26'$;
- ⑦ α : 热水器的太阳能板平面与水平面的夹角;
- ⑧ α' : 热水器的太阳能板平面与地球赤道面的夹角 ($\alpha' + a = \frac{\pi}{2} + \alpha$);
- ⑨ β : T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, 它是关于 T 的函数;
- ⑩ b : 太阳光与赤道面的夹角, $b = \frac{\pi}{2} - \beta$, 并规定北纬为正, 南纬为负;
- ⑪ γ : T 日 t 时太阳光与太阳能板的夹角, 它是关于 T 和 t 的函数;
- ⑫ H_T : T 日太阳照射热水器全部的太阳能板全天所产生的热能, 它是关于 T 的函数.

模型的建立及求解

我们知道, 根据地球围绕太阳公转, 同时本身做自转. 以托密勒的地心说视角来看, 太阳每天在垂直于地轴的圆上周而复始地匀速运动着. 阳光与地轴北极的夹角 β 只随 T 而变化, 对 t 的影响完全可以忽略. 下面我们以地球作参照, 太阳绕地球转动.

对于给定的某一天 T , 我们首先求日落时间 t_0 .

(1) 先假设热水器太阳光接收板水平放置, 即 $\alpha = 0$, 求 t_0



当 $\gamma = 0$ 时, 太阳光与热水器太阳光接收板的夹角为零, 此时正是日出或日落时刻, 故 $|t| = |t_0|$. 由对称性, 我们只需考虑半个白天的情况即可, 显然 $t \in [0, t_0]$.

如图左图所示, 我们将地球视作一个点.

OA 为太阳能热水器安置所在地面的铅垂线,

OB 为太阳光线, 平面 $A'OB'$ 为赤道面.

设 $|OA'| = |OB'| = 1$, 由上图有

$$|OA| = \sec a, |OB| = \sec b, |A'B'| = 2 \sin \pi t, |BC| = |A'B'| = 2 \sin \pi t, \\ |AA'| = \tan a, |BB'| = |\tan b|, |A'C| = |B'B|.$$

而由假设

$$\begin{aligned} |AC| &= \begin{cases} ||AA'| - |BB'| |, & b > 0 (\text{北纬}) \\ ||AA'| + |BB'| |, & b < 0 (\text{南纬}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} ||AA'| - |BB'| |, & b > 0 \\ ||AA'| + |BB'| |, & b < 0 \end{cases} \\ &= | \tan a - \tan b |, \end{aligned}$$

所以

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 = 4 \sin^2 \pi t + (\tan a - \tan b)^2.$$

由假设 γ

是 T 日 t 时太阳光与太阳光接收板的夹角,

$\angle AOB$ 是铅垂线与太阳光线的夹角,

因此 $\gamma + \angle AOB = \pi/2$ (参见右图). 于是

$$\sin \gamma = \sin(\pi/2 - \angle AOB) = \cos \angle AOB$$

$$= \frac{|OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2}{2|OA||OB|}.$$

$$\text{又 } |OA|^2 + |OB|^2 - |AB|^2$$

$$= \sec^2 a + \sec^2 b - 4 \sin^2 \pi t - (\tan a - \tan b)^2$$

$$= 2(\cos 2\pi t + \tan a \tan b),$$

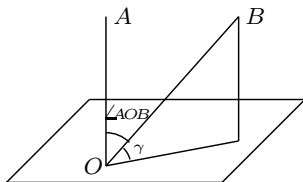
于是有

$$\sin \gamma = \cos a \cos b \cos 2\pi t + \sin a \sin b. \quad (5.1)$$

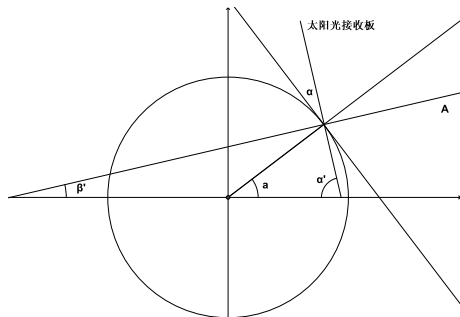
当 $t = t_0$

时, 正是日落时分, 此时 $\gamma = 0$, 由(5.1)得

$$\cos 2\pi t_0 = -\tan a \tan b \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2} - \frac{\arccos(\tan a \tan b)}{2\pi}. \quad (5.2)$$



当 $\alpha \neq 0$ 时, 如图所示, 我们只要将(5.1)式中的 a 用 $\beta' = \pi/2 - \alpha'$ 替换, 也就是将 OA 换为热水器太阳光接受板的垂线(参见图), 则有



$$\sin \gamma = \cos \beta' \cos b \cos 2\pi t + \sin \beta' \sin b = \sin \alpha' \cos b \cos 2\pi t + \cos \alpha' \sin b. \quad (5.3)$$

(2) 下面我们求 T 日太阳照射热水器太阳光接收板全天所产生的热能总和 H_T

由于热功率 $\frac{dH_T}{dt} = \tau \sin \gamma$, 故

$$\begin{aligned} H_T &= \tau \int_{-t_0}^{t_0} \sin \gamma dt = 2\tau \int_0^{t_0} (\sin \alpha' \cos b \cos 2\pi t + \cos \alpha' \sin b) dt \\ &= \frac{\tau}{\pi} (\sin \alpha' \cos b \sin 2\pi t_0 + 2\pi t_0 \cos \alpha' \sin b) \quad (\alpha' = \frac{\pi}{2} + \alpha - a) \\ &= \frac{\tau}{\pi} (\sin 2\pi t_0 \cos b \cos(a - \alpha) + 2\pi t_0 \sin b \sin(a - \alpha)). \end{aligned}$$

$$\text{令} \begin{cases} A = \sin 2\pi t_0 \cos b, \\ B = 2\pi t_0 \sin b, \end{cases} \quad \text{则}$$

$$\begin{aligned} H_T &= \frac{\tau}{\pi} (A \cos(a - \alpha) + B \sin(a - \alpha)) \\ &= \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(a - \alpha) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(a - \alpha) \right), \end{aligned}$$

命 $\cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 则 $\tan \theta = \frac{B}{A}$, 于是得

$$H_T = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - (a - \alpha)) = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - a + \alpha).$$

易见, 当 $\theta - a + \alpha = 0$ 时, 即当

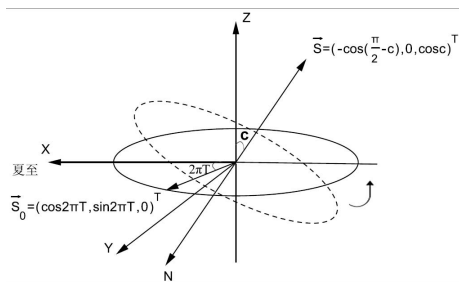
$$\alpha_{\text{opt}} = a - \theta = a - \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0} \quad (5.4)$$

时, H_T 取得最大值, 其最大值为 $H_{\text{max}} = \frac{\tau}{\pi} \sqrt{A^2 + B^2}$.

最后, 我们讨论太阳光与赤道面的夹角 b 与给定的某一天 T 的关系. 仍以地球为参照, 则太阳一年中绕地球转动, 转动与地球公转方向相同. 下面我们建立一个三维坐标系, 假设地心作为坐标原点, 太阳在 xOy 平面绕地球作圆周运动, 并以夏至时的地球与太阳的连线作为 x 轴的正方向, 如右下图所示.

令夏至时刻 $T = 0$, 此时太阳位于北回归

线上. 图中 xOy 平面为黄道面, 虚线所构成的平面为赤道面, 它与 xOy 平面的交角即为黄赤交角 c , 向量 \vec{S} 表示指向地轴南极的方向, 其单位向量为 $\vec{S} = (-\sin c, 0, \cos c)^T$, T 日太阳



与地球连线方向的单位向量为 $\vec{s}_0 = (\cos 2\pi T, \sin 2\pi T, 0)^T$. 注意到 β 是 T 日太阳光与地轴北极方向的夹角, b 是 T 日太阳光与赤道面的夹角, 故 $\angle(\vec{s}_0, \vec{N}) = \beta = \frac{\pi}{2} - b$.

而

$$\begin{cases} \vec{s}_0 \cdot \vec{N} = |\vec{s}_0| |\vec{N}| \cos \angle(\vec{s}_0, \vec{N}) = \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \sin b, \\ \vec{s}_0 \cdot \vec{N} = \vec{s}_0^T \vec{N} = -\vec{s}_0^T \vec{S} = \sin c \cos 2\pi T. \end{cases}$$

于是 T 日太阳光与赤道面的交角为

$$\sin b = \sin c \cos 2\pi T, \quad \Rightarrow \quad b = \arcsin(\sin c \cos 2\pi T). \quad (5.5)$$

这样, 由

$$\begin{cases} b = \arcsin(\sin c \cos 2\pi T), \\ 2\pi t_0 = \pi - \arccos(\tan a \tan b), \\ \theta = \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0}, \\ \alpha = a - \theta, \end{cases} \quad (5.6)$$

(其中 $c = 23^\circ 27'$ (黄赤交角), a 为太阳能热水器安置所在地的纬度(例如南京的纬度为 $32^\circ 03'$), 据此我们可以计算出 T 日太阳能热水器太阳光接收板的最佳倾角 α .)

以南京为例, 将 $T = 0$, $T = 1/4$, $T = 1/2$ 以及 $T = -1/4$ 分别代入(5.6), 即可求出夏至、秋分、冬至和春分时的最优角度, 经计算分别为:

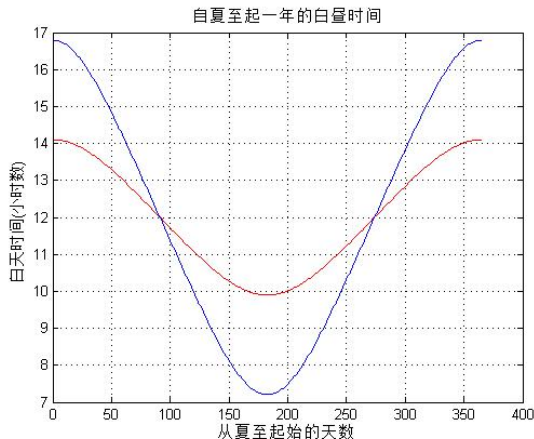
夏至($T = 0$): $\alpha = -7^{\circ}40'$; (略微向正北方)

秋分($T = 1/4$): $\alpha = 32^{\circ}03'$;

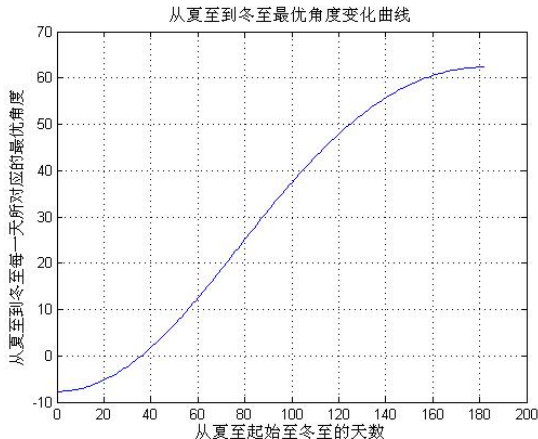
冬至($T = 1/2$): $\alpha = 62^{\circ}19'$;

春分($T = -1/4$): $\alpha = 32^{\circ}03'$.

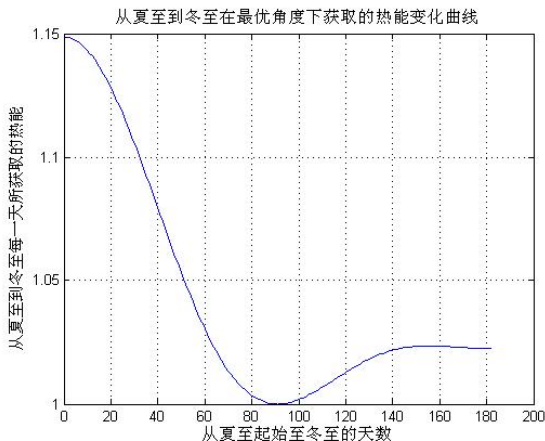
由关系式(5.6), 我们可以计算出给定地区一年中的白昼时间变化曲线, 例如南京(北纬 $32^{\circ}03'$)和我国纬度最高处黑龙江漠河(北纬 $53^{\circ}33'$)的白昼时间曲线图:



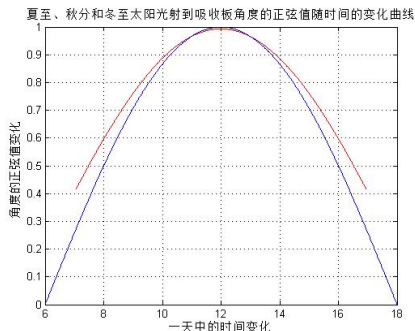
我们可以将 $T \in [0, 1/2]$ 这个区间 n 等分(如取 $n = 182$), 由上述公式(5.6), 用MATLAB软件编程, 可以得到 T 与最优角度关系, 如下图所示.



同样地, 我们将 $T \in [0, 1/2]$ n 等分(如取 $n = 182$), 由上述公式(5.6), 用MATLAB软件编程, 可以得到 T 与最大热能的关系, 如下图所示.



上图显示,冬至所接受到的热能要比春分(或秋分)大,究其原因是因为虽然春分日照时间比冬至长,但是,在白天相同时间点,冬至时在绝大部分时间内,在热水器吸收板以最优角度放置时,太阳光与吸收板的角度却比春分大,所以产生的热能反而大,如下图所示:



图中,蓝色的是春分(或秋分)一天中的角度正弦值变化曲线,红色是冬至一天中的角度正弦值变化曲线。

最佳安装角度的计算

由于太阳相对地球的运动具有对称性, 因此我们只需计算从夏至到冬至这半年的总热量即可.

由假设一年为 $2n$ 天. 又我们所计算的范围是从夏至到冬至这半年的总热量, 所以我们考虑(从夏至到冬至). 令 $T = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\sin b = \sin c \cos \frac{\pi k}{n}.$$

第一步, 在假定每天热水器太阳光接收板与水平面的夹角取最优角度条件下, 求一年获得的总热能:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in [0, 1/2]} H_T &= \frac{2\tau}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(\theta_k - a + \alpha_k) \\ &= \frac{2\tau}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (\text{注意到 } \theta_k - a + \alpha_k = 0) \end{aligned}$$

其中 $b_k = \arcsin(\sin c \cos(\frac{\pi k}{n}))$, $A_k = \sqrt{1 - \sec^2 a \sin^2 b_k}$,

$B_k = (\pi - \arccos(\tan a \tan b_k)) \sin b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

用MATLAB软件编程, 可得 $H_{\text{总}} = 190.8571 \times \frac{2\tau}{\pi}$.

第二步, 假设热水器太阳光接收板与水平面的夹角 α 给定条件下求一年获得的总热能:

$$H_{\text{总}}^{\alpha} = \sum_{T \in [0, 1/2]} H_T^{\alpha} = 2 \sum_{k=1}^n H(k) = \frac{2\tau}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \cos(\theta_k - a + \alpha_k),$$

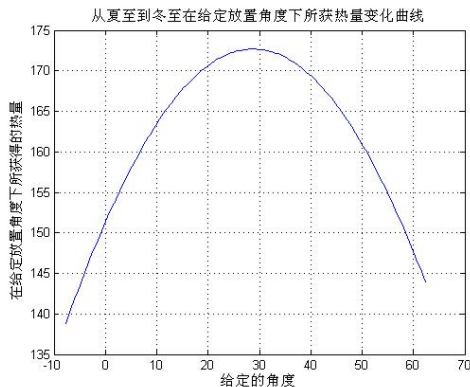
其中, A_k, B_k 同上, $\theta_k = \arctan \frac{B_k}{A_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

第三步, 求安装的最佳角度:

显然, 我们所要求的最优安装角度满足

$$\alpha_{\text{opt}} = \min(H_{\text{总}} - H_{\text{总}}^{\alpha}).$$

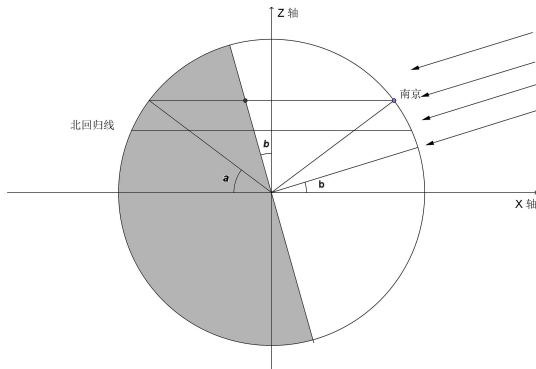
使用MATLAB软件编程,可以得到 $H_{\text{总}}^{\alpha}$ 的曲线,见下图所示(这里取常数 $\frac{2\tau}{\pi} = 1$).



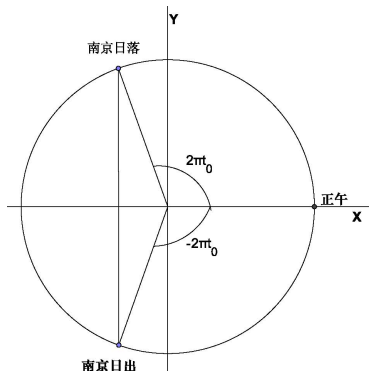
不难解得当 $n = 182$ 时, $\alpha = 28^{\circ}52'$,当 $n = 183$ 时, $\alpha = 28^{\circ}52'$.在实际操作中, α 只要精确到 1° ,再小就没有实际意义了,所以取 $\alpha_{\text{opt}} = 28^{\circ}$ 为最优解.

最优角度(公式(5.4))推导方法二

下面,我们介绍从另一角度来推导最优角度(即公式(5.4))的方法.我们以如下方式建立参照系.以地球球心为原点 O , Z 轴为自转轴,地球半径为1,北极坐标为 $(0, 0, 1)^T$, 太阳赤纬为 b (O 与太阳连线与地表交点处的纬度,北纬为正,南纬为负,也即太阳光线与赤道平面夹角),如下图所示.



在上图中我们在南京的水平面做平行于赤道的一个横截面, 这样就可以得到如下图所示的一个圆.



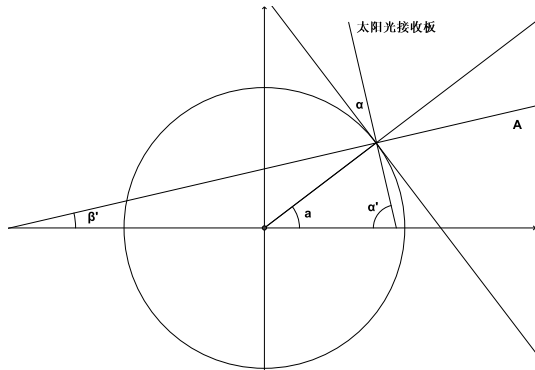
我们在这里假定太阳光不动, 地球在旋转.

太阳光线方向的单位向量为 $\vec{s} = -(\cos b, 0, \sin b)^T$, 这是不变的量. 上

图中的半径为 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$, 等腰三角形的高为 $\sin a \tan b$,

又 $\sin\left(2\pi t_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin a \tan b}{\cos a} = \tan a \tan b$, 所以

$$\cos 2\pi t_0 = -\tan a \tan b. \quad (7.1)$$



如上图所示, 正午时, 南京的热水器太阳光接收板平面的法向量
为 $\vec{n}_0 = (\cos\beta', 0, \sin\beta')^T$, 而 $\beta' = \frac{\pi}{2} - \alpha'$, $\alpha + \frac{\pi}{2} = a + \alpha'$, 故 $\beta' = a - \alpha$,
因此有

$$\vec{n}_0 = (\cos(a - \alpha), 0, \sin(a - \alpha))^T.$$

令 3×3 阶旋转矩阵 $M = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 这是一个标准正交矩

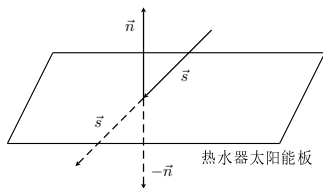
阵, 向量 $(x, y, z)^T$ 绕 Z 轴旋转 $2\pi t$ 弧度后变为 (x', y', z') , 则 $(x' y' z')^T = M(x, y, z)^T$. \vec{n}_0 旋转 $2\pi t$ 弧度后(即地球自转 $2\pi t$ 弧度后)为

$$\vec{n} = M\vec{n}_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(a - \alpha) \\ 0 \\ \sin(a - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a - \alpha) \cos 2\pi t \\ \cos(a - \alpha) \sin 2\pi t \\ \sin(a - \alpha) \end{bmatrix},$$

这里的 \vec{n} 表示一天中某时刻热水器太阳光接收板的法方向.

太阳辐射系数(即太阳光在 $-\vec{n}$ (注意 $-\vec{n}$ 是单位向量)方向上的投影), 参见下图

$$\begin{aligned}\rho &= -\vec{n} \cdot \vec{s} = -\vec{n}^T \vec{s} \\ &= (\cos(a - \alpha) \cos 2\pi t, \cos(a - \alpha) \sin 2\pi t, \sin(a - \alpha)) \begin{pmatrix} \cos b \\ 0 \\ \sin b \end{pmatrix} \\ &= \cos b \cos(a - \alpha) \cos 2\pi t + \sin(a - \alpha) \sin b,\end{aligned}$$



因此一天吸收能量为

$$H_T = \tau \int_{-t_0}^{t_0} \rho dt = 2\tau \int_0^{t_0} \rho dt = \frac{\tau}{\pi} (\cos(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 + 2\pi t_0 \sin(a-\alpha) \sin b),$$

下面求函数 H_T 极值.

$$\frac{dH_T}{d\alpha} = \frac{\tau}{\pi} [\sin(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 - 2\pi t_0 \cos(a-\alpha) \sin b],$$

$$\text{令 } \frac{dH_T}{d\alpha} = 0, \text{ 得}$$

$$\sin(a-\alpha) \cos b \sin 2\pi t_0 = 2\pi t_0 \cos(a-\alpha) \sin b,$$

$$\Rightarrow \tan(a-\alpha) = \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0},$$

故有

$$\alpha = a - \arctan \frac{2\pi t_0 \tan b}{\sin 2\pi t_0}. \quad (7.2)$$

因此, 当热水器太阳光接收板的倾角 α 满足 (7.2) 式时, 所接收的能量最大.

孔敏, 太阳能热水器太阳光接收板的最佳倾角计算, 工程数学学报, Vol. 28 Supp.2 (2011) 93-101

谢谢！