《理论力学》部分习题题解

邢一诺，倪子珺，刘浩森

2023 年 8 月 2 日

编者的话

很荣幸在 2022 年春季学期和倪子珺同学一起担任马宏昊老师主讲的“理论力学 (2)”课程的助教，这段宝贵的经历不仅巩固了我的力学基础知识，还让我学习到了马宏昊老师认真负责的工作态度。非常感谢倪子珺同学可以在我们毕业前完成这份答案的编写。希望这份答案可以帮助学弟学妹们更好地学习理论力学这门课程，也祝愿大家都能拥有美好的难忘的大学生活。

————邢一诺, PB19051072[1]

2022 年春季学期起，我开始担任马宏昊老师任教的“理论力学”系列课程（后更名为“理论力学 B”和“基础力学进阶”）的助教。其实一开始学这门课程的时候，我自己就苦于没有较为详细的习题解答供参考，使用诸如哈工大或者清华版本的理论力学教材又担心与科大的课程有所脱节，因此非常希望能有这么一份参考答案。参加了三个学期的助教工作之后，我同邢一诺、刘浩森同学一起整理了这么一份参考答案，希望能够帮助大家学好、学会这样一门工程科学学院的基础课程。在此也特地感谢邢一诺和刘浩森两位同学，他们对这份文档的撰写都付出了很多心血。

————倪子珺, PB19051007[2]

2022 年秋季我担任了“理论力学 B”的助教，这也是我本科生涯第二次接触理论力学这门课。时隔 3 个学期，好多重要的知识和技能早已遗忘。批改运动学相关的作业时我支离破碎的知识系统尚可应付，但涉及刚体动力学的部分时，不翻书改完作业的狂妄计划彻底泡汤。我不得不和第一次学理论力学的大二学生（物理竞赛佬除外）一样，边翻书，边复习，边做题。其实讲这段经历是想告诉大家，理论力学学起来并不是那么容易。学弟学妹们在学习过程中不仅要注重概念理解，认真做好习题也是十分必要的。这份习题解答集是为了帮助你们啃下习题而编写的，请务必在认真做题之后食用。换句话说，这本册子是消化酶，不是消化系统。

————刘浩森, PB19051009[3]

最后，限于编者的水平，参考答案中难免有错误或者疏漏，如在阅读过程中发现这些问题，欢迎随时发送邮件到任意一名编者进行说明。在这里还要特地感谢马宏昊老师，同时也感谢 2022 年春季学期到 2023 年春季学期选修马宏昊老师任教的理论力学相关课程的同学，他们为这份文档也做出了贡献，在此恕不一一感谢。

[1]ustcxyn@mail.ustc.edu.cn
[2]ustc_nzj1001@mail.ustc.edu.cn
[3]lhs13989729772@mail.ustc.edu.cn

目录

第一章 绪论 3

第二章 物体机械运动的基本规律 4

第三章 刚体运动学基础 11

第四章 刚体的平面运动 18

第五章 刚体的定点运动和一般运动 33

第六章 动力学基本定理 43

第七章 刚体静力学 61

第八章 刚体定点运动动力学 77

第九章 动静法 89

第十章 分析静力学 97

第十一章 拉格朗日力学 106

第十二章 微振动 115

第十三章 碰撞 122

第十四章 陀螺运动的近似理论 129

第十五章 变质量体动力学问题 132

第十六章 非惯性坐标系中的动力学问题 135

第十七章 哈密顿力学 142

第一章　绪论

本章无习题。

第二章　物体机械运动的基本规律

题 2.5　吉普车以匀速 v_B 向右运动, 试以函数 $f(x)$ 表示吊桶的速度、加速度。设已知 $x=0$ 时, A 和 B 重合于 C 点。

解:　由于绳长不变, 左边绳子的缩短等于右边绳子的伸长。因此:

$$\Delta y_A = \sqrt{x^2+H^2}-H$$

所以

$$v_A = \dot{y}_A = \frac{xv_B}{\sqrt{x^2+H^2}}$$

$$a_A = \ddot{y}_A = \frac{v_B H^2}{(x^2+H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中: $x = v_B t$

题 2.6　求动点的轨迹、速度和加速度，点的运动由极坐标方程给出:

(1) $\rho = l\mathrm{e}^t, \varphi = \dfrac{t}{k}$

(2) $\rho = l(1+\cos\omega t), \varphi = \omega t$

(3) $\rho = l\sqrt{2\cos t}, \varphi = \dfrac{t}{2}$

(4) $\rho = l\dfrac{t^2-1}{\sqrt{t^2+1}}, \varphi = \arctan t$

解:　取 $\boldsymbol{e}_r$ 为径向单位矢量，$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\theta}}$ 为法向单位矢量，则有:

(1) 速度为

$$\boldsymbol{v} = le^t(\boldsymbol{e_r}+\boldsymbol{e_\theta}/k)$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = le^t\left[\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\boldsymbol{e_r}+\frac{2}{k}\boldsymbol{e_\theta}\right]$$

轨迹方程为

$$\rho = le^{k\varphi}$$

(2) 速度为

$$\boldsymbol{v} = l\omega\left[-\sin\omega t\boldsymbol{e_r}+(1+\cos\omega t)\boldsymbol{e_\theta}\right]$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=-\omega^2 l\left[(1+2\cos\omega t)\,\boldsymbol{e_r}+2\sin\omega t\boldsymbol{e_\theta}\right]$$

轨迹方程为

$$\rho=l(1+\cos\varphi)$$

(3) 速度为

$$\boldsymbol{v}=-\frac{l}{2}\sqrt{2\cos t}(\tan t\boldsymbol{e_r}-\boldsymbol{e_\theta})$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=-\frac{l}{2}\sqrt{2\cos t}\left[\left(1+\frac{1}{2\cos^2 t}\right)\boldsymbol{e_r}+\tan t\boldsymbol{e_\theta}\right]$$

轨迹方程为

$$\rho=l\sqrt{2\cos 2\varphi}$$

(4) 速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{t(t^2+3)}{(t^2+1)^{3/2}}l\boldsymbol{e_r}+\frac{t^2-1}{(t^2+1)^{3/2}}l\boldsymbol{e_\theta}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{-4(t^2-1)}{(t^2+1)^{5/2}}l\boldsymbol{e_r}+\frac{8t}{(t^2+1)^{5/2}}l\boldsymbol{e_\theta}$$

轨迹方程为

$$\rho=l\frac{\tan^2\varphi-1}{\sqrt{\tan^2\varphi+1}}=-l\cos 2\varphi|\cos\varphi|$$

题 2.14　一点以变减速度 $a=-f(t)$ 沿一直线作减速运动。此运动于开始后经过 T 秒停止。试证明此点走过的路程可用下式表示：

$$s=\int_0^T tf(t)\mathrm{d}t$$

解：　路程可以表示为

$$s=\int_0^T |v|\mathrm{d}t$$

由于是一维运动，并且是减速运动，质点朝一个方向运动，因此

$$s=\int_0^T |v|\mathrm{d}t=\int_0^T v\mathrm{d}t$$

分部积分，得：

$$s=\int_0^T v\mathrm{d}t=(vt)|_0^T-\int_0^T t\mathrm{d}v=(vt)|_{t=T}-\int_0^T t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^T tf(t)\mathrm{d}t$$

注意：题目中的 T 秒停止即 $v|_{t=T}=0$

题 2.15　杆 LC 穿过套筒 A 而铰接于套筒 B 上，B 可沿杆 MN 滑动。若 $\varphi=\omega t$(ω 为常数)，求点 C 的运动方程、速度、加速度。

解：　易知：

$$x_C = b\cos\varphi$$

$$y_C = a\tan\varphi + b\sin\varphi$$

消去 φ, 得到：

$$y_C = \left(\frac{a}{x_C}+1\right)\sqrt{b^2-x_C^2}$$

C 点速度：

$$\boldsymbol{v}_C = \dot{x}_C\boldsymbol{i} + \dot{y}_C\boldsymbol{j} = -\omega b\sin\varphi\boldsymbol{i} + \left(\frac{\omega a}{\cos^2\varphi}+\omega b\cos\varphi\right)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}_C = \dot{\boldsymbol{v}}_C = -\omega^2 b\cos\varphi\boldsymbol{i} + \left(2\omega^2 a\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}-\omega^2 b\sin\varphi\right)\boldsymbol{j}$$

题 2.17　从海岸边一点 A 需走至离岸垂直距离为 9 公里的另一点 B。设船速为 $v_1 = 1.5\mathrm{m/s}$, 步行速度为 $v_2 = 1.2\mathrm{m/s}$, A, B 两点直线距离为 41 公里。试问乘船从哪一点上岸方可以最短时间到达 B 点?

解：　设船行距离为 x，则全程总用时

$$T = T(x) = \frac{x}{1.5}+\frac{\sqrt{81+(40-x)^2}}{1.2}$$

对其求导，得到：

$$T'(x) = \frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\frac{2(x-40)}{\sqrt{81+(x-40)^2}}$$

令上式等于零，求得 $x = 40\pm 12$，验证舍去 $x = 52$ 的解，即在距离出发点 28 公里处上岸用的总时间最短。

题 2.20　A, B 两点以大小不变的速度 v_1, v_2 在平面内运动, 它们垂直于两点的连线的速度分量相等：$v_1\sin\varphi_1 = v_2\sin\varphi_2$。如果 A 点沿直线运动, 求点 B 的轨迹、接近规律 $AB = r(t)$ 和相遇之前的运动时间 t。设开始时 A, B 相距 r_0。

解：　根据下列两等式

$$\boldsymbol{v}_A\times\overrightarrow{AB} = |\boldsymbol{v}_A|\left|\overrightarrow{AB}\right|\sin\varphi_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_B\times\overrightarrow{AB} = |\boldsymbol{v}_B|\left|\overrightarrow{AB}\right|\sin\varphi_2\boldsymbol{k}$$

根据题目条件，知上两式右端相等，故左端相等，因此

$$(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\times\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{0}$$

展开化简后为

$$-\dot{x}_A y_B + \dot{x}_B y_B + \dot{y}_B x_A - x_B\dot{y}_B = 0$$

变形以后得到

$$\frac{\mathrm{d}\left(x_B-x_A\right)}{x_B-x_A} = \frac{\mathrm{d}y_B}{y_B}\Rightarrow x_B-x_A = Cy_B$$

代入初始条件得到

$$C = \frac{1}{\tan\varphi_1}$$

得到关系式

$$x_B - v_1 t = \frac{y_B}{\tan\varphi_1}, \dot{x}_B - v_1 = \frac{\dot{y}_B}{\tan\varphi_1}$$

B 点速度不变，故

$$\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = v_2^2$$

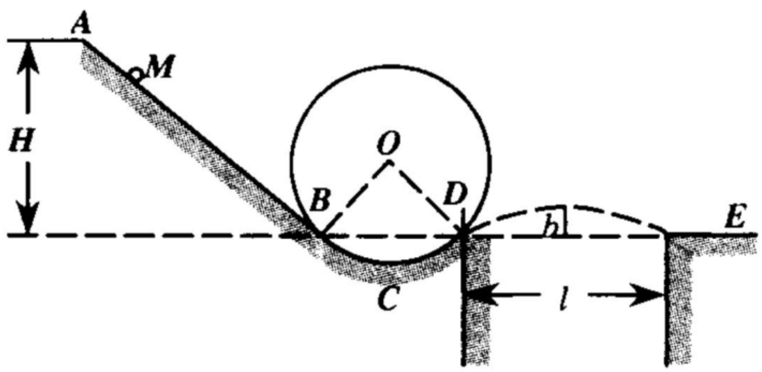
得到

$$\dot{x}_B^2 + (\dot{x}_B - v_1)^2 \tan^2\varphi_1 = v_2^2$$

因此 $\dot{x}_B$ 为恒值, $\dot{y}_B$ 也为恒值, 因此 B 点做匀速直线运动。
因此

$$r(t) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

题 2.35　小球 M 经过路程 $ABCDE$，弧 $\widehat{BCD}$ 是半径为 R 的圆周的四分之一，如图所示。忽略阻力。要使小球能跳过宽 $l = 40\text{cm}$ 的沟槽 DE，求无初速度释放小球的最小高度 H，并问沟槽上方小球轨迹的高 h 是多少?



题 2.35 图

解:　由能量守恒得到离开 D 点的速度大小 $v_D = \sqrt{2gH}$，方向与水平面成 $45°$ 向上。此后作斜抛运动后到达沟槽对面。斜抛时间为

$$t = \frac{2v_D \sin 45°}{g}$$

故射程为

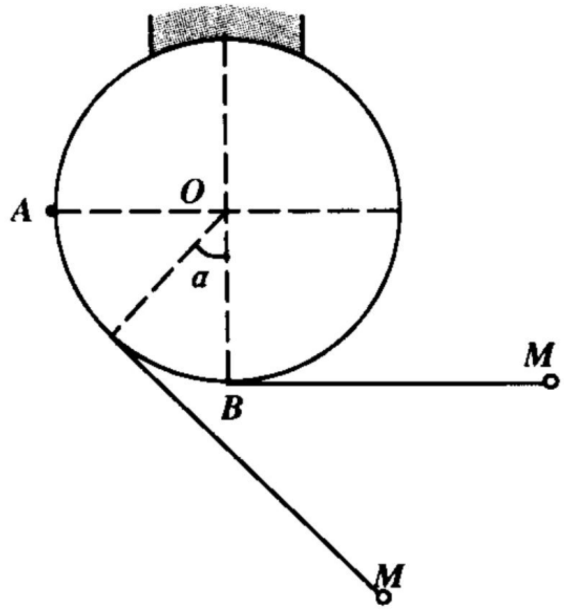
$$d = v_D \cos 45° \cdot t = v_D^2/g = 2H$$

所以若要跳过沟槽，应满足

$$d \geq l \implies l \leq H/2$$

而 $h = (v_D \sin 45°)^2/2g = H/2$，故当上述等号成立时，$H = l/2 = 0.2\text{m}$，$h = H/2 = l/4 = 0.1\text{m}$

题 2.36　固定圆柱半径为 20cm, 轴线水平，如图所示。在圆柱的水平直径的 A 端固结一长为 68.3cm 的无重绳，绳绕过四分之一圆弧 AB，其余部分平直地位于水平方向，末端固连一质点 M。把 M 无初速度释放，求当 $\alpha = 60°$ 时点 M 的速度。

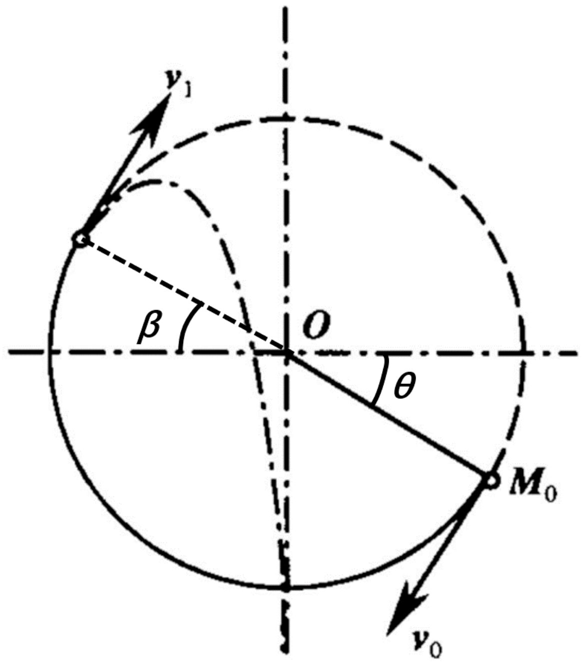


题 2.36 图

解:　过程略:

$$v=\sqrt{2g}\cdot\sqrt{\left[L-R\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]\sin\alpha+R(\cos\alpha-1)}=2.8\mathrm{m/s}$$

题 2.38　质量为 1kg 的小球系于长 0.5m 且一端固定的细绳上。小球开始时处于 M_0 位置，它与铅垂线成 60° 角。令小球在铅垂平面内有一初速度 $v_0=3.5\mathrm{m/s}$，其方向垂直于绳且指向向下。求:



题 2.38 图

(1) 绳中张力等于零时小球的位置 M 及重物在此位置时速度 v_1；

(2) 此后小球的运动轨迹（直到线重新受到张力为止），再求出小球走完这段轨迹所需的时间。

解:

(1) 显然，当小球运动在水平直径下方时，绳子一直张紧，则设绳子在如图所示位置张力为零，有机械能守恒:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = gR(\sin\beta + \cos\alpha)$$

以及零张力条件

$$mg\sin\beta = m\frac{v_1^2}{R}$$

联立即得 $v_1 = 1.57\text{m/s}, \sin\beta = 1/2 \implies \beta = 30°$

(2) 建立原点在圆心的直角坐标系，则可写出轨迹方程为:

$$x = x(t) = -R\cos 30° + v_1 \sin 30° t y = y(t) = R\sin 30° + v_1\cos 30° - \frac{1}{2}gt^2$$

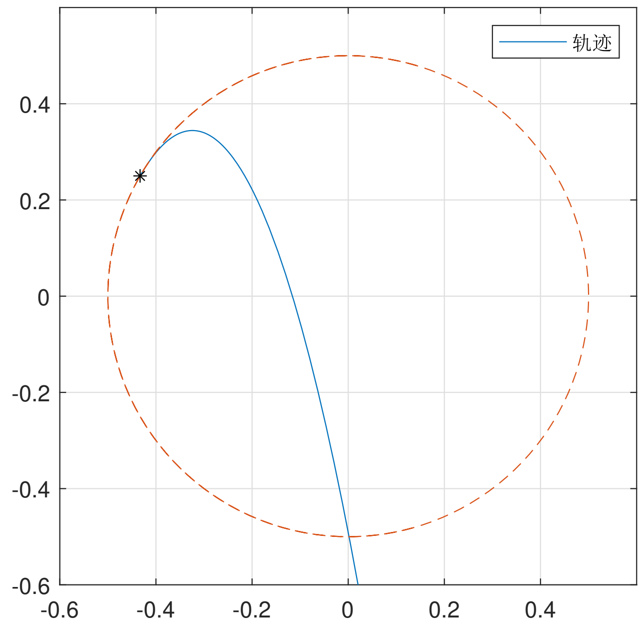
其中 t 为参数，将上两式与

$$x^2 + y^2 = R^2$$

联立，可以解得

$$x = 0\text{m}, y = -0.5\text{m}, t = 0.55\text{s}$$

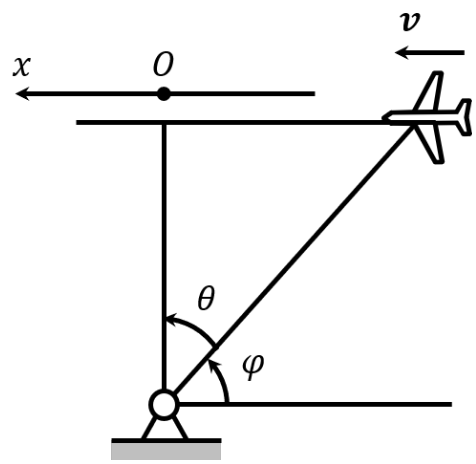
即小球恰到达圆的下顶点，如下图所示。



题 2.38 解图

第三章　刚体运动学基础

题 3.12　一架飞机沿水平直线轨道匀速飞行，速度为每小时 1200 公里；地面上一摄影机要跟踪该飞机拍摄飞行情况，已知摄影机距飞机飞行轨道的最近距离为 3 公里，求摄影机镜头转动的角速度和角加速度。



题 3.12 图

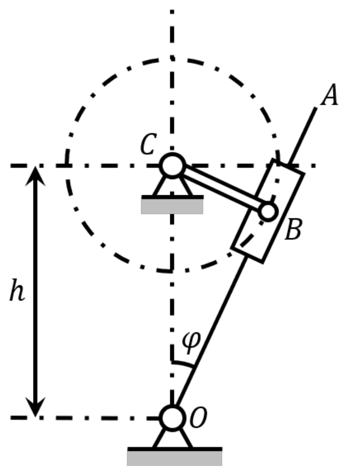
解:　如题 3.12 图所示，设 $t=0$ 时飞机位于 $x=0$ 处，则有

$$\cot\theta = vt/d \implies \theta = \arctan(vt/d)$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = \frac{1}{1+(vt/d)^2}\frac{v}{d} = \frac{vd}{d^2(1+\tan^2\theta)} = \frac{v}{d}\cos^2\theta = \frac{v}{d}\sin^2\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \varepsilon = \frac{-2v^3dt}{(d^2+v^2t^2)^2} = \frac{-2d^2v^2\tan\theta}{(d^2+d^2\tan^2\theta)^2} = \frac{2v^2}{d^2}\sin\theta\cos^3\theta = -\frac{2v^2}{d^2}\cos\varphi\sin^3\varphi$$

题 3.15　曲柄 CB 以等角速度 ω_0 绕 C 轴转动，滑块 B 又带动摇杆 OA 绕 O 轴转动，已知 $OC=h, CB=r$，求摇杆的运动方程 $\varphi=\varphi(t)$。



题 3.15 图

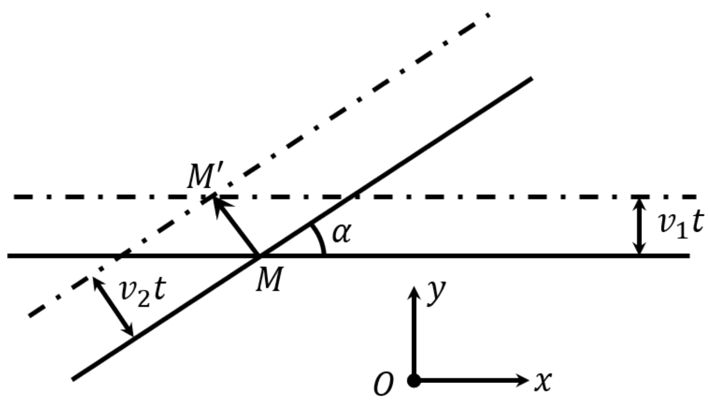
解：　取 $t=0$ 时 $\overrightarrow{CB}$ 水平向左，且逆时针为正，则在 $\triangle OBC$ 中可知 $\angle OCB=\omega_0 t+\frac{\pi}{2}$，则 $\angle ABC=\omega_0 t+\frac{\pi}{2}+\varphi$，利用正弦定理可以得到：

$$\frac{h}{\sin(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}+\varphi)}=\frac{r}{\sin\varphi}$$

变形即得

$$\tan\varphi=\frac{r\sin\omega_0 t}{h-r\cos\omega_0 t}$$

题 3.19　直线 AB 以速度 $\vec{v}_1$ 沿垂直于 AB 的方向移动，而直线 CD 以速度 $\vec{v}_2$ 沿垂直于 CD 的方向移动。设二线之夹角为 α，求二线交点 M 的速度 v。



题 3.19 图

解：　如题 3.19 图所示，假设经过一段时间 t，则 M 点运动到 M'，由矢量合成可以得到；

$$\overrightarrow{MM'}=-v_2 t\,\vec{i}/\sin\alpha+v_1 t/\sin\alpha(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{i})$$

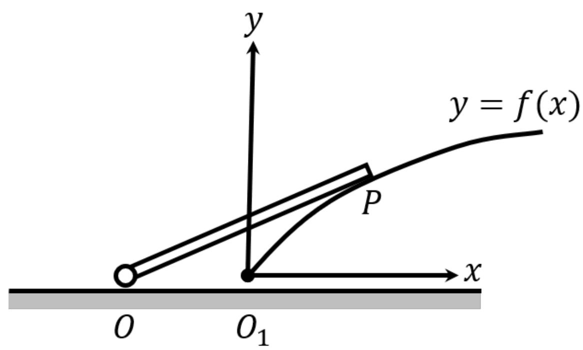
即 M 点的速度为

$$\vec{v}_M=\left(-\frac{v_2}{\sin\alpha}+\frac{v_1\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\vec{i}+v_1\vec{j}$$

大小为

$$v_M=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

题 3.27 [1]凸轮以等速 $\vec{v}_0$ 自右向左移动，对于固结在凸轮上的坐标系 O_1xy，凸轮的形廓方程为 $y=f(x)$。长 l 的直杆 OP 的一端铰接于 O_1x 轴上的某定点 O，另一端靠在凸轮上。求 OP 杆的角速度 ω。若已知 OP 杆的角速度为常数 ω_0，求凸轮的形廓方程。



题 3.27 图

解:

割线的情况 记 $P(v_0t, f(v_0t))$，则 $\sin\angle POO_1=\sin\varphi=f(v_0t)/l \implies \varphi=\arcsin\left[f(v_0t)/l\right]$ 即得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{\sqrt{l^2-f^2(v_0t)}}\frac{v_0}{l}f'(v_0t)=\frac{v_0}{\sqrt{l^2-f^2(v_0t)}}f'(v_0t)$$

$\omega=\omega_0$ 时有

$$\sin\varphi=\sin\omega_0t=f(v_0t)/l$$

换元后即得

$$f(x)=l\sin(\omega_0x/v_0)$$

切线的情况 根据题设条件:

$$\text{凸轮向左移动: }\frac{\mathrm{d}x_{OO_1}}{\mathrm{d}t}=-v_0$$
$$\text{杆与凸轮相切: }f'(x)=\frac{f(x)}{x_{OO_1}+x}$$

设 $\theta=\angle POO_1$, 则:

$$\theta=\arctan\frac{f(x)}{x_{OO_1}+x}=\arctan f'(x)$$

[1]本题的图片误导性较大。题干中并未说明 l 足够长，并没有明确“靠在凸轮上”到底是取切线还是取割线，而题图中则更像割线，所以本题事实上有两种理解，解：中均有说明。

故角速度:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{1+f'^2(x)}\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{1+f'^2(x)}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f(x)}{x_{OO_1}+x}\right)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{1}{1+f'^2(x)}\frac{f'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(x_{OO_1}+x\right)-\left(\frac{\mathrm{d}x_{OO_1}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)f(x)}{\left(x_{OO_1}+x\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+f'^2(x)}\frac{v_0 f(x)}{\left(x_{OO_1}+x\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+f'^2(x)}\frac{v_0 f(x)}{\left(\frac{f(x)}{f'(x)}\right)^2} \\
&= \frac{v_0 f'^2(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)f(x)}
\end{aligned}$$

若角速度 $\omega=\omega_0$, 得到:

$$\frac{v_0 f'^2(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)f(x)}=\omega_0$$

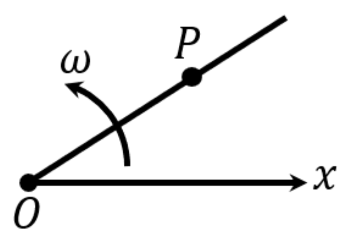
化简为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}=\sqrt{\frac{1}{\frac{\omega_0}{v_0}f}-1}$$

积分后, 代入边界条件 $x=0, f(x)=0$, 得:

$$\frac{\omega_0}{v_0}x-\frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{\omega_0}{v_0}f(x)-\left(\frac{\omega_0}{v_0}f(x)\right)^2}-\arctan\sqrt{\frac{v_0}{\omega_0 f(x)}-1}$$

题 3.29 一线段以等角速度 ω 固定平面内绕其端点 O 转动，当它位于 Ox 位置时，有一质点 P 开始从点 O 沿该线段运动。若要使点 P 之绝对速度的大小为常数，该点应按何规律沿该线段运动？又求点 P 之轨迹及其加速度。



题 3.29 图

解： 取极坐标系，设 P 相对线段的速度（即径向速度）为 $v_P=\dot{r}$，而绝对速度大小

$$v=\sqrt{\dot{r}^2+\omega^2r^2}\implies\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\sqrt{v^2-\omega^2r^2}\implies\frac{\mathrm{d}r/v}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega r}{v}\right)^2}}=\mathrm{d}t$$

两边积分即得

$$r=\frac{v}{\omega}\sin(\omega t+C)$$

其中 C 为常数，代入 $t=0, r=0$ 的初始条件可以得到 $C=0$，即运动规律为

$$r=\frac{v}{\omega}\sin\omega t, \varphi=\omega t$$

其轨迹为一个圆。

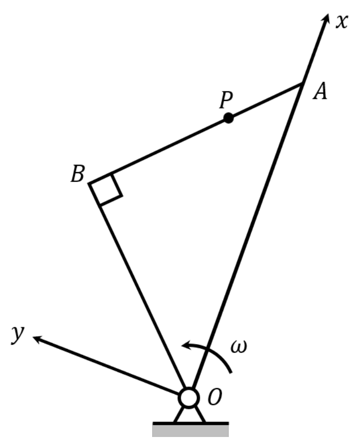
利用极坐标下的加速度公式

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi}$$

有 P 点加速度

$$\vec{a}_P=2v\omega(-\sin\omega t\vec{e_r}+\cos\omega t\vec{e_\varphi})$$

题 3.33　一直角边长为 a 的等腰直角三角形 OAB 在自身平面内以等角速度 ω 绕顶点 O 转动。点 M 沿 AB 边运动，相对速度为常数。当三角形转过一周时，M 点走过了 AB。求点 M 在 A 处时的绝对速度与绝对加速度。



题 3.33 图

解:　容易得到点 M 相对三角形的运动速度大小为

$$v_r=\frac{a\omega}{2\pi}$$

建立如题 3.33 图所示的固连在三角形上的直角坐标系 xOy，则有相对速度和牵连速度如下

$$\begin{aligned}\vec{v_r}&=-\frac{\sqrt{2}}{2}v_r\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}v_r\vec{j}\\ \vec{v_e}&=\sqrt{2}a\omega\vec{j}\end{aligned}$$

故 M 点的速度为

$$\vec{v_M}=\vec{v_r}+\vec{v_e}=-\frac{\sqrt{2}a\omega}{4\pi}\vec{i}+\sqrt{2}a\omega\left(1+\frac{1}{4\pi}\right)\vec{j}$$

其大小为

$$v_M=a\omega\sqrt{\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi}+2}\approx 1.531a\omega$$

又知相对加速度、牵连加速度和科氏加速度为

$$\vec{a_r}=0$$

$$\vec{a_c}=2\vec{\omega}\times\vec{v}_r=-\frac{\sqrt{2}a\omega}{2\pi}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}a\omega}{2\pi}\vec{j}$$

$$\vec{a}_e=-\sqrt{2}\omega^2a\vec{i}$$

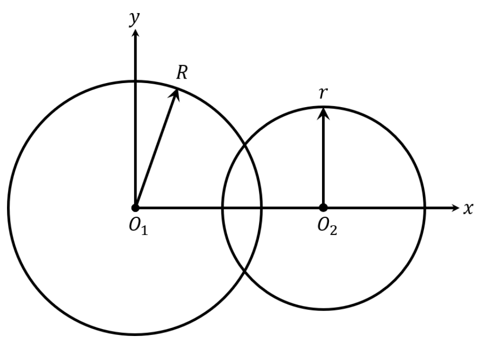
故 M 点的加速度为

$$\vec{a}=\vec{a_r}+\vec{a_e}+\vec{a_c}=-\sqrt{2}\omega^2a\left(1+\frac{1}{2\pi}\right)\vec{i}-\frac{\sqrt{2}a\omega^2}{2\pi}\vec{j}$$

其大小为

$$a_M=a\omega^2\sqrt{\frac{1}{\pi^2}+\frac{2}{\pi}+2}\approx1.655a\omega^2$$

题 3.35　半径为 R 和 r 的两个平行圆盘分别以角速度 ω_1 和 ω_2 绕本身中心轴 O_1 和 O_2 转动。已知 $OO_2=1$。求盘 O_2 边缘上与 O_1O_2 相交的点 A 相对于盘 O_1 的速度与加速度。



题 3.35 图

解:　如题 3.35 图所示，建立固连在圆盘 1 上的直角坐标系 xO_1y，则有：A 点的绝对速度和加速度分别为;

$$\vec{a}_A=\omega_2^2r\vec{i}$$

$$\vec{v}_A=-\omega_2r\vec{j}$$

由速度合成知

$$\vec{v}_A=\vec{v}_{Ar}+\vec{v}_e=\vec{v}_{Ar}-\omega_1(l-r_2)\vec{j}\implies\vec{v}_{Ar}=(\omega_1l-\omega_1r-\omega_2r)\vec{j}$$

而 $\vec{a}_A=\vec{a}_r+\vec{a}_c+\vec{a}_e$，且其中

$$\vec{a}_c=2\vec{\omega}_1\times\vec{v}_{Ar}=2\omega_1(\omega_1l-\omega_1r-\omega_2r)\vec{i}$$

$$\vec{a}_e=-\omega_1^2(l-r)\vec{i}$$

故

$$\vec{a}_r=\vec{a}_A-\vec{a}_c-\vec{a}_e=(\omega_2^2r+2\omega_1\omega_2r+\omega_1^2r-\omega_1^2l)\vec{i}$$

题 3.40　摆动汽缸式蒸汽机之曲柄 $OA=15\text{cm}$，曲柄角速度 $\omega_0=15\text{rad/s}$ 为常数。求当曲柄垂直于连杆时活塞的速度及汽缸的角速度。

题 3.40 图

解： 建立如题 3.40 图所示的固连于 OA 杆上的坐标系 xOy 并记 $OA=r$，则 O_1 点相对于坐标系的速度为

$$\vec{v}_1=\omega_0 r\vec{i}-\sqrt{3}\omega_0 r\vec{j}$$

而在 xOy 系中，杆 AB 绕不动点 A 旋转，且在 O_1 点处 AB 杆的在垂直于杆的方向上的速度 $\vec{u}_\perp$ 等于 O_1 点的速度在垂直于杆方向上的分量相同，即

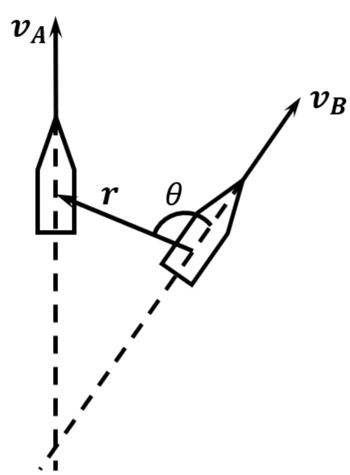
$$\vec{u}_\perp=-\sqrt{3}\omega_0 r\vec{j}$$

故在 xOy 系中杆 AB 相对 A 点旋转的角速度满足 $\vec{\omega}'_{AB}\times\overrightarrow{AO_1}=\vec{u}_\perp \implies \omega'_{AB}=-\omega_0$ 由绕平行轴旋转的角速度合成定理知杆 AB 在惯性系中的角速度为 $\omega_{AB}=\omega'_{AB}+\omega_0=0$，即 AB 杆作平动，活塞速度大小与 A 点相同：

$$v=v_A=\omega_0 r=225\text{cm/s}$$

题 3.42 A,B 两船各以 v_A 和 v_B 沿直线匀速航行，B 船上的观察者记录下两船的距离 r 与角 θ，试证明 r 与 θ 满足：

$$\ddot{\theta}=-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r},\quad \ddot{r}=r\dot{\theta}^2$$



题 3.42 图

解： 取 B 为参考系，则此系下 $\vec{v}_{Ar}=\vec{v}_A-\vec{v}_B$，即 A 仍做匀速直线运动，a_A 等于零。又知极坐标系下的加速度

$$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r}+(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi})\vec{e_\varphi}=0$$

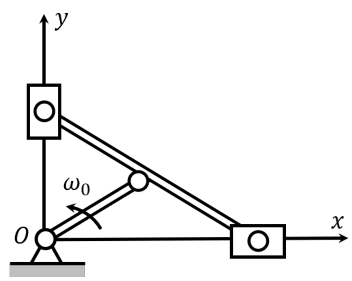
得到

$$\ddot{\theta}=-\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r},\quad \ddot{r}=r\dot{\theta}^2$$

即原命题得证。

第四章　刚体的平面运动

题 4.1　椭圆规尺的曲柄 OC 以等角速度 ω 绕 O 轴转动，带动 AB 杆运动，A 和 B 分别沿 Oy 轴和 Ox 轴运动。已知 $OC = BC = AC = r$，写出 AB 杆平面运动的运动方程。



题 4.1 图

解答　取 C 为基点，有

$$\vec{v}_C = \omega_0 r \cos\omega_0 t\vec{j} + \omega_0 r \sin\omega_0 t\vec{i}$$

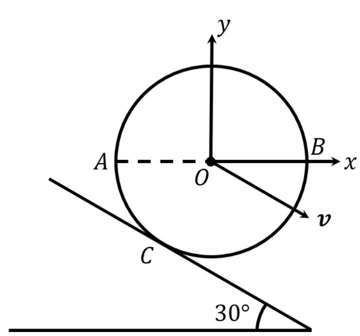
故

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CB} = \vec{v}_C + \omega r \sin\omega_0 t\vec{i} + \omega r \cos\omega_0 t\vec{j}$$

且由约束条件知 B 点无竖直方向的速度分量，即

$$\omega_0 r \cos\omega_0 t + \omega r \cos\omega_0 t = 0 \implies \omega = -\omega_0$$

题 4.2　轮子沿一斜面滚下，斜面倾角为 30°，当轮心速度 $v = 2\mathrm{m/s}$ 时，轮子水平直径上两个端点的速度是多少?



题 4.2 图

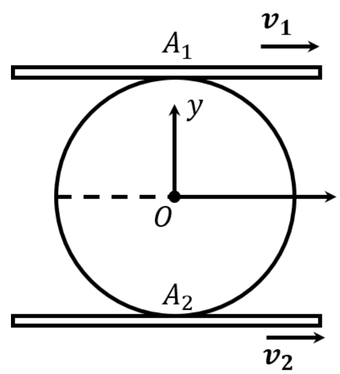
解答　取 O 为基点，并建立如题 4.2 图中所示的平动系 xOy，则有：

$$\vec{v}_P=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OP}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\omega r+v)\vec{i}-\frac{1}{2}(\omega r+v)\vec{j}=0\implies\omega=-\frac{v}{r}$$

所以

$$\vec{v}_A=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}v\vec{i}+\frac{1}{2}v\vec{j}$$
$$\vec{v}_B=\vec{v}_O+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}v\vec{i}+\frac{3}{2}v\vec{j}$$

题 4.6　两平行板以等速 $v_1=6\text{m/s}$ 和 $v_2=2\text{m/s}$ 同方向运动，平板间夹一半径为 α 的圆柱，圆柱在平板间只滚动不滑动。求圆柱的角速度及圆柱中心 O 的速度。



题 4.6 图

解答　设圆柱角速度为 $\vec{\omega}$，取 A_1 为基点建立如题 4.6 图所示的平动系 xOy，则有：

$$\vec{v}_{A_2}=\vec{v}_{A_1}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{A_1A_2}=v_{A_1}\vec{i}+2\omega r\vec{i}=v_{A_2}\vec{i}$$

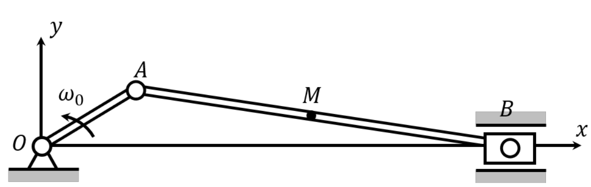
即得

$$\omega=\frac{v_{A_2}-v_{A_1}}{2r}=-\frac{2}{a}\text{rad/s}$$

同理可以得到

$$\vec{v}_O=\vec{v}_{A_1}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{A_1O}=(v_{A_1}-\frac{2}{a}\times a)\vec{i}=4\vec{i}\text{m/s}$$

题 4.7　曲柄长 $OA=40\text{cm}$，连杆长 $AB=200\text{cm}$，曲柄以 $\omega_0=180\text{r/min}$ 的角速度绕固定轴 O 转动。当曲柄位于 $\angle AOB$ 等于 0，$\pi/2$，π，$3\pi/2$ 四个位置时，求连杆之角速度及其中点 M 的速度。



题 4.7 图

解答　建立如题 4.7 图所示的直角坐标系 xOy，取 A 为基点，则:

$$\vec{v}_A = -\omega_0 r\sin\theta\vec{i} + \omega_0 r\cos\theta\vec{j}$$

设 AB 杆角速度为 $\vec{\omega}$，则 $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}$

(1) 当 $\theta = 0$ 时，有 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}\mathrm{m}$，则

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \omega_0 r\vec{j} = 2.4\pi\vec{j}\mathrm{m/s}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB} = 2.4\pi\vec{j}\mathrm{m/s} + 2\omega\vec{j}\text{在 }\vec{j}\text{ 方向上的分量为零} \implies \omega = -1.2\pi\mathrm{rad/s}\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AM} = 1.2\pi\vec{j}\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

(2) 当 $\theta = \pi/2$ 时，有 $\overrightarrow{AB} = (0.8\sqrt{6}\,\vec{i} - 0.4\vec{j})\mathrm{m}$，则

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \omega_0 r\vec{j} = -2.4\pi\vec{i}\mathrm{m/s}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}\text{在 }\vec{j}\text{ 方向上的分量为零} \implies \omega = 0\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_A = \vec{v}_B = -2.4\pi\vec{i}\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

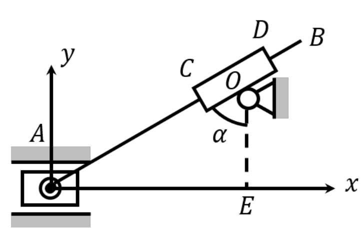
(3) 当 $\theta = \pi$ 时，有 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}\mathrm{m}$，则

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \omega_0 r\vec{j} = -2.4\pi\vec{j}\mathrm{m/s}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB} = -2.4\pi\vec{j}\mathrm{m/s} + 2\omega\vec{j}\text{在 }\vec{j}\text{ 方向上的分量为零} \implies \omega = 1.2\pi\mathrm{rad/s}\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AM} = -1.2\pi\vec{j}\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

(4) 当 $\theta = 3\pi/2$ 时，有 $\overrightarrow{AB} = (0.8\sqrt{6}\,\vec{i} - 0.4\vec{j})\mathrm{m}$，则

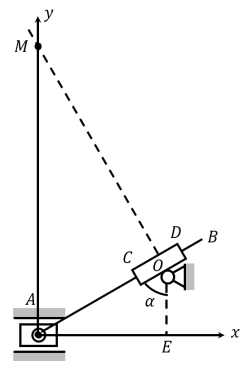
$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \omega_0 r\vec{j} = 2.4\pi\vec{i}\mathrm{m/s}\\ \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}\text{在 }\vec{j}\text{ 方向上的分量为零} \implies \omega = 0\\ \vec{v}_M &= \vec{v}_A = \vec{v}_B = 2.4\pi\vec{i}\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

题 4.10　套筒 CD 绕固定轴 O 转动，AB 杆穿过套筒，可在套筒内滑动。A 点可沿水平滑槽移动。O 点到水平滑槽的距离 $OE = 30\vec{c}m$，点 A 速度为 80cm/s。当 $\alpha = 60°$ 时求套筒 CD 的角速度。



题 4.10 图

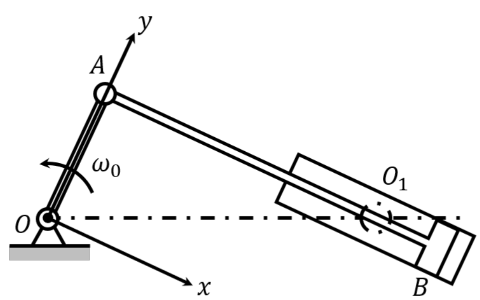
解答　显然套筒 CD 的角速度与杆 AB 的角速度相同。下面来求杆 AB 的角速度:



题 4.10 解图

如题 4.10 解图所示，易知 A 点的速度方向平行于 $\vec{i}$，而杆上与 O 点重合的点此时的速度方向必沿杆，故可以得到此时 AB 杆的速度瞬心为图中 M 点，由几何关系有求得 $\overline{AM}=120\text{cm}$，故杆 AB 的角速度为 $\omega_{AB}=v_A/\overline{AB}=\frac{2}{3}\text{rad/s}$，正号表示角速度为逆时针方向。即套筒 CD 的角速度为 $\omega_{CD}=\frac{2}{3}\text{rad/s}$

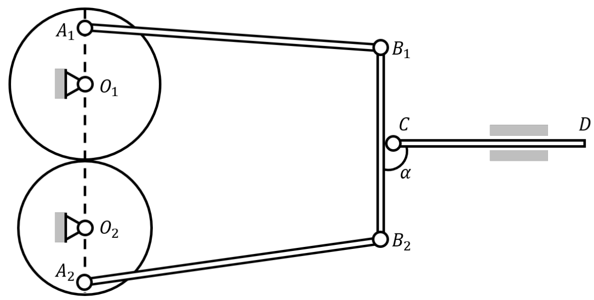
题 4.13　用速度投影定理解题 3.40：动汽缸式蒸汽机之曲柄 $OA=15\text{cm}$，曲柄角速度 $\omega_0=15\text{rad/s}$ 为常数。求当曲柄垂直于连杆时活塞的速度及汽缸的角速度。



题 3.40 图

解答　由于曲柄垂直于连杆，故 $\vec{v}_A$ 没有垂直于杆 AB 的速度分量。而杆 AB 上与 O_1 重合的点的速度同样没有垂直于杆 AB 的分量，故杆的角速度为 0。再利用速度投影定理，活塞的速度等于 A 点的速度，即 $v_B=v_A=\omega_0\cdot\overline{OA}=2.25\text{m/s}$

题 4.15　吊环式传动机构中，主动齿轮 I 以等角速度 ω_0 绕固定轴 O_1 转动。当 $\alpha=90^\circ$ 时，铰链 A_1 和 A_2 位于轮心 O_1O_2 的连线上，且 $B_1B_2\parallel O_1O_2$。齿轮半径分别为 r_1 和 r_2，$O_1A_1=O_2A_2=a, CB_1=CB_2$，该时刻杆 CD 的速度。



题 4.15 图

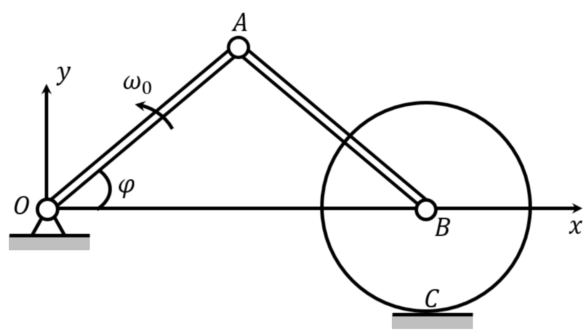
解答　由约束条件可知，C 点无竖直方向上的速度，故由速度投影定理知，B_1B_2 杆整体没有竖直方向上的速度，即 B_1 点和 B_2 点的速度均仅有水平分量。而点 A_1 和点 A_2 的速度亦只有水平分量，故杆 A_1B_2 和杆 A_2B_2 各自整体均只有水平方向上的速度，即有

$$v_{A_1} = v_{B_1}, v_{A_2} = v_{B_2}$$

而 $v_{A_1} = \omega_0 a$，$v_{A_2} = \omega_2 a = \frac{r_1}{r_2}\omega_0 a$，其中已利用 $\omega_0 r_1 = \omega_2 r_2$ 的关系，故

$$v_C = \frac{v_{B_1} + v_{B_2}}{2} = \frac{1}{2}\omega_0 a\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$$

题 4.19　曲柄 OA 按方程 $\varphi = \frac{\pi t^2}{2}$ 绕固定轴 O 转动，带动杆 AB 和圆盘运动，圆盘沿水平无滑动滚动，$OA = AB = 6r$，圆盘半径为 r，求当 $t = 2\text{s}$ 时圆盘的角速度和角加速度。



题 4.19 图

解答　由题意，此时 $\varphi = 2\pi$，即 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = 6r\vec{i}$。取 A 为平动系基点，则

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB} = 6r(\dot{\varphi} + \omega_{AB})\vec{j}\text{无 } \vec{j} \text{ 向分量} \implies \omega_{AB} = -\dot{\varphi}$$

故 $v_B = 0$，而 $v_C = 0$，故圆盘角速度为 $\omega_0 = 0$。下面再来计算圆盘的角加速度：由于

$$\vec{a}_A = \dot{\vec{\varphi}} \times (\dot{\vec{\varphi}} \times \overrightarrow{OA}) + \ddot{\vec{\varphi}} \times \overrightarrow{OA} = -6\dot{\varphi}^2 r\vec{i} + \ddot{\varphi} r\vec{j}$$

故

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}) = -12\dot{\varphi}^2 r\vec{i} + (\ddot{\varphi} - 6\varepsilon_{AB})r\vec{j}$$

由于 $\vec{a}_B$ 无 $\vec{j}$ 向分量，故有

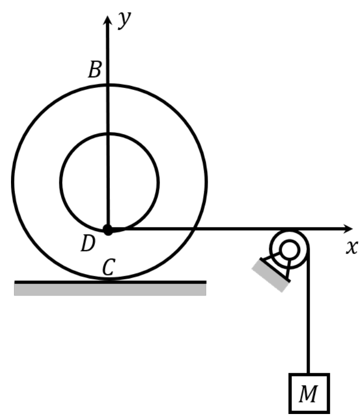
$$(\ddot{\varphi} - 6\varepsilon_{AB})r = 0 \implies \varepsilon_{AB} = \ddot{\varphi}/6 \implies \vec{a}_B = -12\dot{\varphi}^2 r\vec{i}$$

从而得到

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_0 \times \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \overrightarrow{BC}) = (-12\dot{\varphi}^2 + \varepsilon_0) r\vec{i}$$

而 $\vec{a}_C$ 无水平分量，即 $\varepsilon_0 = 12\dot{\varphi}^2 = 12\pi^2 t^2\,\mathrm{rad/s^2} = 48\pi^2\,\mathrm{rad/s^2}$

题 4.21　半径为 R 的卷筒借重物 M 带动，沿水平面只滚动不滑动。卷筒的鼓轮上缠有绳子，绳子跨过定滑轮拴一重物 M。设某瞬时重物具有向下的速度 v 和加速度 a，鼓轮半径为 r，求该瞬时处于铅垂直径两端点 B 和 C 的加速度以及鼓轮下沿点 D 的加速度。



题 4.21 图

解答　建立如题 4.21 图中所示的直角坐标系，以 D 为基点，则有

$$\vec{v}_D = v\vec{i}, \quad \vec{a}_D = a_{Dy}\vec{j} + a\vec{i}$$

则

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DC} = [v + \omega(R-r)]\vec{i} = 0 \implies \omega = -v/(R-r)$$

故

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{DC} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{DC}) = [a + \varepsilon(R-r)]\vec{i} + [a_{Dy} + \omega^2(R-r)]\vec{j}$$

而 $\vec{a}_C$ 无 $\vec{i}$ 向分量，故

$$a + \varepsilon(R-r) = 0 \implies \varepsilon = -a/(R-r), \vec{a}_C = [a_{Dy} + \omega^2(R-r)]\vec{j}$$

再由

$$\vec{a}_O = \vec{a}_D + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{DO} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{DO}) = (a - \varepsilon r)\vec{i} + (a_{Dy} - \omega^2 r)\vec{j}$$

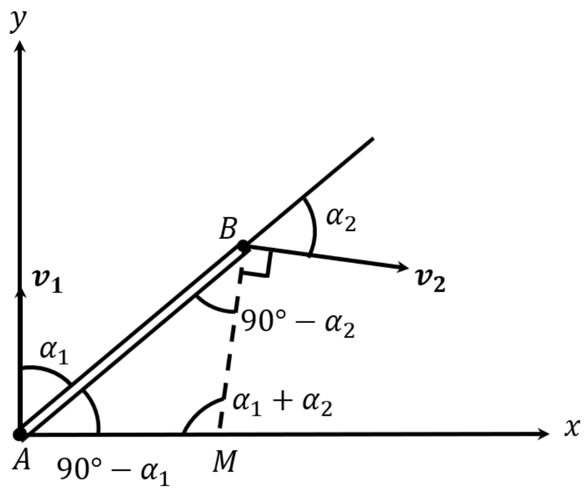
无 $\vec{j}$ 分量可知 $a_{Dy} = \omega^2 r$，代入上式即得

$$\vec{a}_D = a\vec{i} + \frac{v^2 r}{(R-r)^2}\vec{j}$$
$$\vec{a}_C = \omega^2 R\vec{j} = \frac{v^2 R}{(R-r)^2}\vec{j}$$

同理可以得到 B 点的加速度

$$\vec{a}_B = \frac{2aR}{R-r}\vec{i} - \frac{v^2 R}{(R-r)^2}\vec{j}$$

题 4.22 杆 AB 长为 L，在一个固定平面内运动，两端点速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$，它们的方向与 AB 之夹角分别为 α_1 和 α_2，求速度方向恰好沿杆 AB 的点 M 的位置及该点的速度值。又求速度瞬心到 AB 的距离 h 及杆 AB 的角速度 ω。



题 4.22 图

如题 4.22 图所示，容易知道杆 AB 的速度瞬心即为图中所示 M 点，利用正弦定理即可得到

$$\frac{\overline{AM}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right)}=\frac{l}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

即得

$$\overline{AM}=l\cos\alpha_2/\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

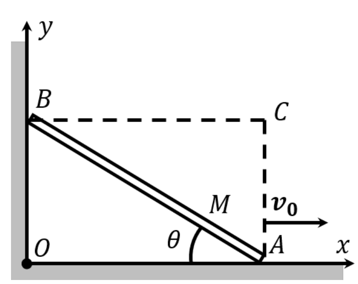
故点 M 到杆 AB 的距离为

$$h=\overline{AM}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)=l\cos\alpha_1\cos\alpha_2/\sin(\alpha_1+\alpha_2)$$

而角速度为

$$\omega=\frac{v_1}{x}=v_1\sin(\alpha_1+\alpha_2)/l\cos\alpha_2$$

题 4.23 杆 AB 长 l，其两端沿直角的两边滑动。A 端速度为 v_0；M 为杆上一点，且 $MA=l/3$，求点 M 的速度、加速度以及速度瞬心的加速度，并求瞬时加速度中心的位置。



题 4.23 图

解答　建立如题 4.23 图所示的直角坐标系，则有 $\overrightarrow{AB} = -l\cos\theta\vec{i} + l\sin\theta\vec{j}$，而

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\overrightarrow{AB} = (v_0 - \omega l\sin\theta)\vec{i} + \omega l\cos\theta\vec{j}\text{无水平分量} \Longrightarrow \omega = v_0/l\sin\theta$$

由几何关系，$\vec{v}_M$ 在水平方向上的分量大小等于 $2v_0/3$，竖直方向上的分量等于 $v_B/3$，即

$$\vec{v}_M = \frac{2v_0}{3}\vec{i} + \frac{v_0\cot\theta}{3}\vec{j}$$

又

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}) = (\omega^2 l\cos\theta - \varepsilon l\cos\theta)\vec{i} - (\omega^2 l\sin\theta + \varepsilon l\sin\theta)\vec{j}$$

且 $\vec{a}_B$ 无 $\vec{i}$ 分量，即

$$\varepsilon = \omega^2\cot\theta = \frac{v_0^2\cos\theta}{l^2\sin\theta},\quad \vec{a}_B = -v_0^2/l\sin^3\theta\vec{j}$$

故

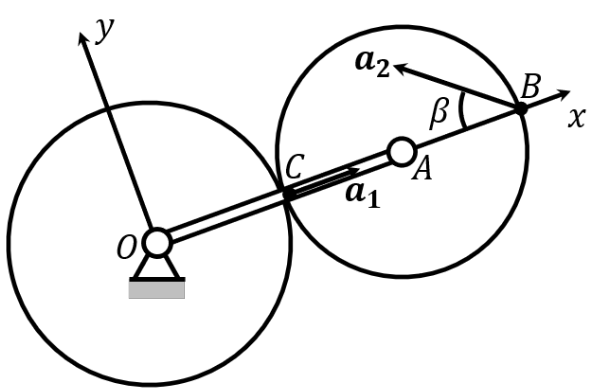
$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB}/3 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{AB}/3) = \vec{a}_B/3 = -\frac{v_0^2}{3l\sin^3\theta}\vec{j}$$

速度瞬心易知为题 4.23 图中 C 点，其水平方向上的投影点 A 点的加速度为零，故其水平方向上的加速度为零，而竖直方向上的投影点 B 点的加速度为 $\vec{a}_B$，故速度瞬心的加速度即为

$$\vec{a}_C = -v_0^2/l\sin^3\theta\vec{j}$$

而加速度瞬心即为 A 点。

题 4.25　在周转齿轮差动机构中，曲柄 OA 与轮 I 均作变速转动，在给定瞬时，已知轮 II 上位于啮合处之点 C 的加速度大小为 a_1 方向指向轮 II 的中心；轮 I 上与 C 对称的点 B 的加速度大小为 a_2，其方向与直径 BC 交成锐角 β。求该瞬时曲柄与轮 II 的角速度和角加速度，并确定当角 β 为何值时轮 I 的角速度方为零。轮半径设为 r_1 和 r_2。



题 4.25 图

解答　建立如题 4.25 图所示的平动系，以 A 为基点，则有 $\overrightarrow{OA} = (r_1 + r_2)\vec{i}, \overrightarrow{AC} = -r_2\vec{i}$，再设杆的角速度和角加速度为 $\vec{\omega},\vec{\varepsilon}$，轮 II 的角速度和角加速度为 $\vec{\omega}_2,\vec{\varepsilon}_2$，则有；

$$\begin{aligned}
\vec{a}_A &= \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{OA} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}) = \varepsilon(r_1 + r_2)\vec{j} - \omega^2(r_1 + r_2)\vec{i} \\
\vec{a}_{II_C} &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_2\times\overrightarrow{AC} + \vec{\omega}_2\times(\omega_2\times\overrightarrow{AC}) = \left[\omega_2^2 r_2 - \omega^2(r_1 + r_2)\right]\vec{i} + \left[\varepsilon(r_1 + r_2) - \varepsilon_2 r_2\right]\vec{j} = a_1\vec{i} \\
\vec{a}_{II_B} &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_2\times\overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_2\times(\omega_2\times\overrightarrow{AB}) = -\left[\omega_2^2 r_2 + \omega^2(r_1 + r_2)\right]\vec{i} + \left[\varepsilon(r_1 + r_2) + \varepsilon_2 r_2\right]\vec{j} \\
&= a_2\sin\beta\vec{j} - a_2\cos\beta\vec{i}
\end{aligned}$$

由上三式可以得到方程组:

$$\begin{cases} \omega_2^2 - \omega^2(r_1+r_2) = a_1 \\ \varepsilon(r_1+r_2) - \varepsilon_2 r_2 = 0 \\ -\omega_2^2 r_2 - \omega^2(r_1+r_2) = -a_2\cos\beta \\ \varepsilon(r_1+r_2) + \varepsilon_2 r_2 = a_2\sin\beta \end{cases}$$

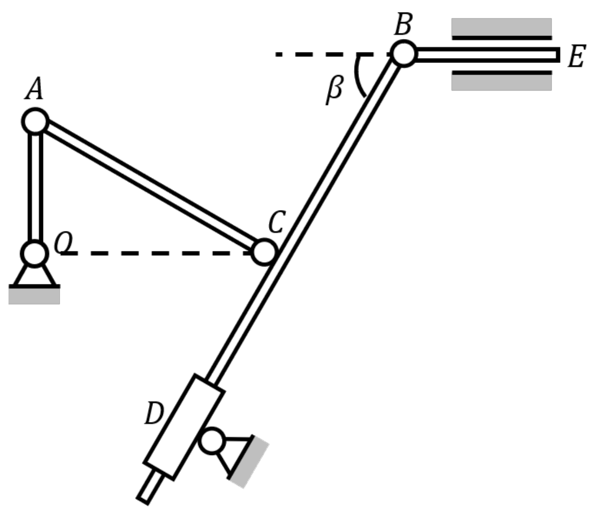
联立可以解得

$$\begin{cases} \varepsilon = a_2\sin\beta/2(r_1+r_2) \\ \varepsilon_2 = a_2\sin\beta/2r_2 \\ \omega = \sqrt{(a_2\cos\beta - a_1)/2(r_1+r_2)} \\ \omega_2 = \sqrt{(a_2\cos\beta + a_1)/2r_2} \end{cases}$$

而

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_2\times\overrightarrow{AC} = \vec{\omega}\times\overrightarrow{OA} + \vec{\omega}_2\times\overrightarrow{AC} = [\omega(r_1+r_2) - \omega_2 r_2]\,\vec{j} = 0 \implies \cos\beta = \frac{(2r_2+r_1)a_1}{a_2 r_1}$$

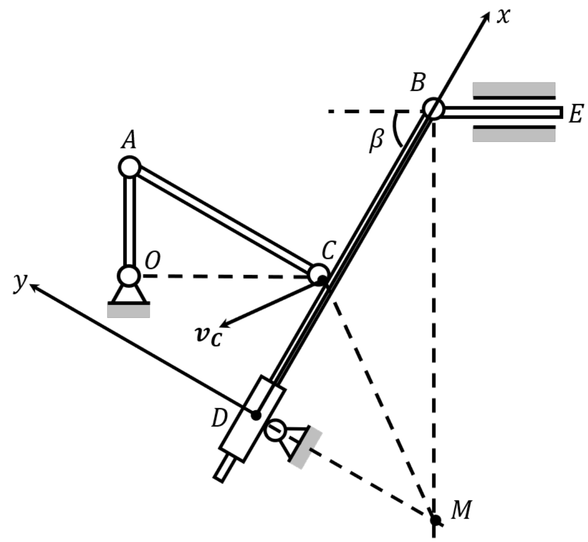
题 4.26 纵向刨床机构的曲柄 OA 长 r，以匀角速度 ω 转动。连杆 AC 长 $2r$，摇杆 BC 长 $2r$。当 $\varphi = 90°$ 时，恰好 $\beta = 60°$，$AC \perp BD, CD = r$，且 $OC \parallel BE$。D 是一个套筒，杆 BC 从套筒中穿过。求该瞬时杆 BE 的速度和加速度。



题 4.26 图

解答 建立如题 4.26 解图所示的直角坐标系 xDy，则有

$$\vec{v}_A = -\frac{1}{2}v\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}v\vec{j},\ \vec{a}_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{i} - \frac{1}{2}\omega^2 r\vec{j}$$



题 4.26 解图

由上图还容易得到，杆 BD 的速度瞬心为图中 M 点，再利用速度投影定理即可得到

$$v_C\sin 30^\circ = v\cos 30^\circ \implies v_C=\sqrt{3}v$$

故 $\omega_{BC}=v_C/2r=\sqrt{3}v/2r \implies v_B=\omega_{BD}\cdot 2\sqrt{3}r=3v=3\omega_0 r$，方向水平向左。下面求 B 点的加速度。

由于

$$\begin{aligned}\vec{a}_C&=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}_{AC}\times\overrightarrow{AC}+\vec{\omega}_{AC}\times(\vec{\omega}_{AC}\times\overrightarrow{AC})\\&=\vec{a}_B+\vec{\varepsilon}_{BC}\times\overrightarrow{BC}+\vec{\omega}_{BC}\times(\vec{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC})\end{aligned}$$

将第二个等号两端向 $\vec{j}$ 向投影，即可得到

$$-\frac{1}{2}\omega_0^2 r+\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2\cdot 2r=\frac{\sqrt{3}}{2}a_B-\beta_{BD}\cdot 2r \implies \frac{\sqrt{3}}{2}a_B=\beta_{BD}\cdot 2r \tag{1}$$

由于 D 点为固定点，故 $\vec{a}_B$ 还可以表示为如下极坐标形式：

$$\vec{a}_B=\left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2}-\left(\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right]\vec{e}_\rho+\left(2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_\varphi$$

其中 $\rho=\overline{DB}=3r,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=\beta_{BD},\vec{e}_\rho=\vec{i},\vec{e}_\varphi=\vec{j}$ 又知

$$\vec{v}_B=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho+\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi=-\frac{3}{2}\omega_0 r\vec{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\omega_0 r\vec{j} \implies \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{2}\omega_0 r,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$$

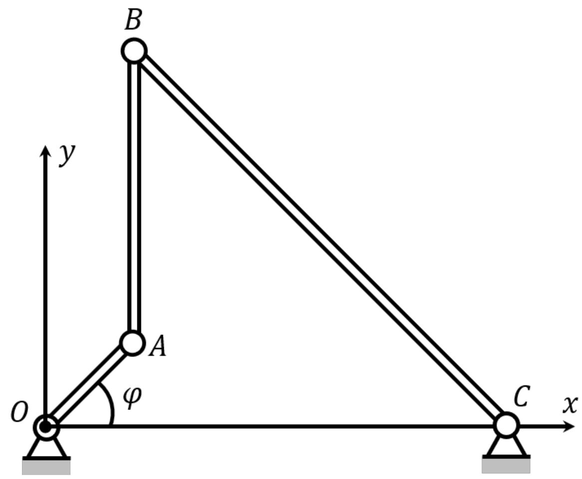
代入 $\vec{a}_B$ 的极坐标分量式中得

$$2\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\rho\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}=2\left(-\frac{3}{2}\omega_0 r\right)\cdot\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2}+3r\cdot\beta_{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_B \tag{2}$$

由式(1)和(2)联立可以解得

$$a_B=6\omega_0^2 r$$

题 4.27 曲柄 OA 以匀角速度 $\omega=\pi\mathrm{rad/s}$ 转动，带动 AB 和 BC 杆运动。$OA=6\sqrt{2}\mathrm{cm}, AB=18\mathrm{cm}, OC=30\mathrm{cm}, BC=24\sqrt{2}\mathrm{cm}$。当 $\varphi=45°$ 时，求点 B 的速度和加速度，以及杆 AB 和 BC 的角速度和角加速度。



题 4.27 图

解答 为便于叙述，记 $v=\omega r=6\sqrt{2}\pi\mathrm{cm/s}, a=\omega^2 r=6\sqrt{2}\pi^2\mathrm{cm/s^2}$，则有；

$$\vec{v}_A=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}v\vec{j}$$

由速度投影定理容易得到

$$\vec{v}_B=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}v\vec{j}$$

再利用 AB 杆的速度瞬心即可求得

$$\omega_{AB}=-\omega r\bigg/\frac{3}{2}r=-\frac{2\omega}{3}, \omega_{BC}=\frac{-v_B}{4r}=-\frac{1}{4}\omega$$

又知

$$\vec{a}_A=-\frac{\sqrt{2}}{2}a(\vec{i}+\vec{j})$$

由基点法，得到

$$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}_{AB}\times(\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB})=-\frac{\sqrt{2}}{2}a(\vec{i}+\vec{j})-\frac{3\sqrt{2}}{2}\varepsilon_1 r\vec{i}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\omega_{AB}^2 r\vec{j}$$

又

$$\vec{a}_B=\frac{\sqrt{2}}{2}(\omega_{BC}^2 r+\varepsilon_{BC}r)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_{BC}r-\omega_{BC}^2 r)\vec{j}$$

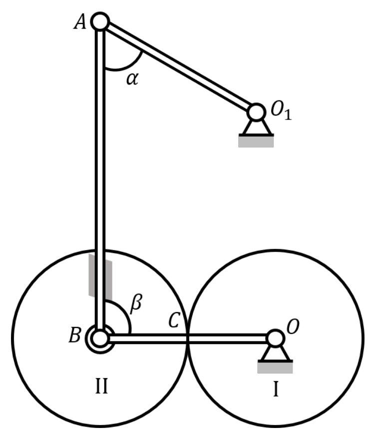
联立上两式即可解得

$$\varepsilon_{AB}=\frac{5}{18}\pi^2\mathrm{rad/s^2}$$
$$\varepsilon_{BC}=\frac{25}{48}\pi^2\mathrm{rad/s^2}$$

且

$$\omega_{AB}=-\frac{2}{3}\pi\mathrm{rad/s}$$
$$\omega_{BC}=-\frac{1}{4}\pi\mathrm{rad/s}$$

题 4.30　瓦特行星传动机构由曲柄 O_1A 和 OB，以及连杆 AB 组成。O_1 和 O 是固定转动轴。在 O 轴上装有齿轮 I，齿轮 II 与 AB 杆的 B 端固接。已知两齿轮半径 $r_1=r_2=30\sqrt{3}\text{cm}, O_1A=75\text{cm}, AB=150\text{cm}$，$O_1A$ 的角速度为 $\omega_0=6\text{rad/s}$，角加速度为 0。求当 $\alpha=60^\circ$ $\beta=90^\circ$ 时，曲柄 OB 及齿轮 I 的角加速度。



题 4.30 图

解答　由题意，记 $O_1A=r, AB=l$，则有

$$\omega_{AB}=\frac{\omega_0 r}{2l}, \vec{v}_B=-\sqrt{3}\omega_{AB}l\vec{j}, \omega_{OB}=\frac{v_B}{2r_1}=-\frac{\sqrt{3}r}{4r_1}\omega_0=-\frac{15}{4}\text{rad/s}$$

故有

$$\begin{aligned}\vec{a}_B&=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}_{AB}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}_{AB}\times(\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB})\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0^2r\vec{i}-\frac{1}{2}\omega_0^2r\vec{j}+\varepsilon_{AB}l\vec{i}+\omega_{Ab}^2\vec{j}\\&=-2\varepsilon_{OB}r_1\vec{j}+2\omega_{OB}^2r_1\vec{i}\end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases}\varepsilon_{AB}=-\dfrac{27}{8}\sqrt{3}\text{rad/s}^2\\ \varepsilon_{OB}=-\dfrac{45}{8}\sqrt{3}\text{rad/s}^2\end{cases}$$

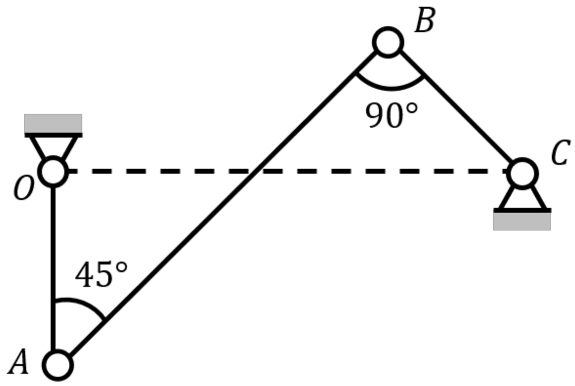
又知

$$\begin{aligned}\vec{a}_C&=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}_{BC}\times\overrightarrow{BC}+\vec{\omega}_{AB}\times(\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{BC})\\&=-2\varepsilon_{OB}r_1\vec{j}+2\omega_{OB}^2r_1\vec{i}+\varepsilon_{AB}r_1\vec{j}-\omega_{AB}^2r_1\vec{i}\end{aligned}$$

且 $\vec{a}_C$ 在 $\vec{j}$ 向的分量等于 ε_1r_1，故有

$$\varepsilon_1r_1=\varepsilon_{AB}r_1-2\varepsilon_{OB}r_1 \implies \varepsilon_1=\varepsilon_{AB}-2\varepsilon_{OB}=-\frac{117}{8}\sqrt{3}\text{rad/s}^2$$

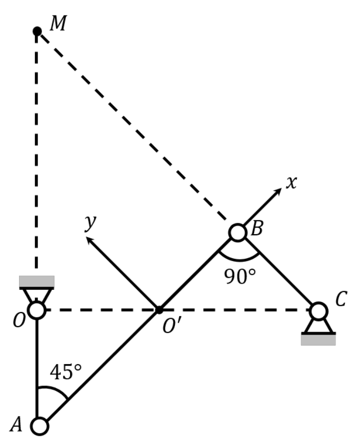
题 4.32　反平行四边形机构中，主动杆 OA 以等角速度 ω_0 绕固定轴 O 转动。杆 CB 可绕固定轴 C 转动。设 $OA=CB$，在某瞬时 $\angle AOC=90^\circ$，$\angle BAO=\angle BCO=45^\circ$，求该瞬 BC 杆的角速度和角加速度。



题 4.32 图

解答　如下题 4.32 解图所示，M 点为杆 AB 的速度瞬心，从而可以求得

$$\omega_{AB}=\frac{\omega_0}{2+\sqrt{2}},\omega_{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$$



题 4.32 解图

而

$$\vec{a}_A=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2r\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2r\vec{j}$$

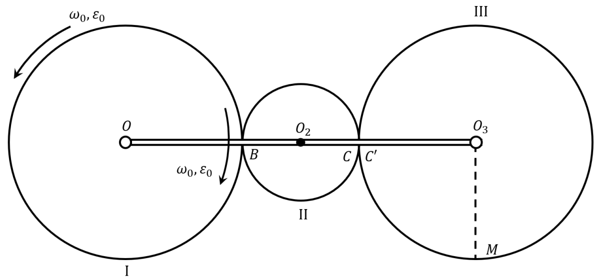
故

$$\begin{aligned}\vec{a}_B&=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{AB}+\vec{\omega}_{AB}\times(\vec{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB})\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2r\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0^2r\vec{j}+(\sqrt{2}+1)\varepsilon r\vec{j}-(\sqrt{2}+1)\omega_{AB}^2r\vec{i}\\&=\vec{\varepsilon}_{BC}r\vec{i}-\omega_{BC}^2r\vec{j}\end{aligned}$$

解得

$$\varepsilon_{BC}=\frac{1}{2}\omega_0^2$$

题 4.36　在周转轮系中，半径为 R 的主动轮 I 以角速度 ω_0 和角加速度 ε_0 逆时针转动，长 $3R$ 的曲柄以同样角速度和角加速度绕 O 轴顺时针转动，求轮 I 边缘下方一点 M 的速度和加速度。



题 4.36 图

解答 设各轮的角速度分别为 $\omega_1=\omega_0,\omega_2,\omega_3,\omega_4$，角加速度分别为 $\varepsilon_1=\varepsilon_0,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$，再取固连在 OA 杆上的参考系，则此时的角速度和角加速度有如下关系：

$$\omega_1'=2\omega_0,\varepsilon_1'=2\varepsilon_0$$
$$\omega_2'=\omega_2+\omega_0,\varepsilon_2'=\varepsilon_2+\varepsilon_0$$
$$\omega_3'=\omega_3+\omega_0,\varepsilon_3'=\varepsilon_3+\varepsilon_0$$
$$\omega_4'=\omega_4+\omega_0,\varepsilon_4'=\varepsilon_4+\varepsilon_0$$

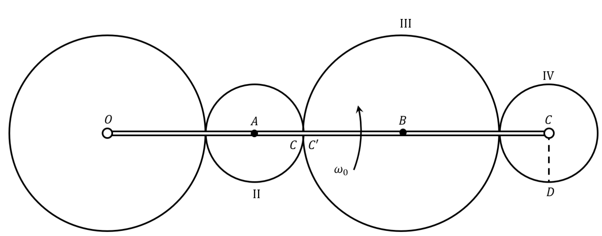
再利用轮接触点处切向速度/加速度相等可以得到：

$$\omega_1'r_1=-\omega_2'r_2=\omega_3'r_3 \implies \omega_2=-5\omega_0,\omega_3=\omega_0$$
$$\varepsilon_1'r_1=-\varepsilon_2'r_2=\varepsilon_3'r_3 \implies \varepsilon_2=-5\varepsilon_0,\varepsilon_3=\varepsilon_0$$

故

$$\vec{v}_M=\vec{v}_A+\vec{\omega}_3\times\overrightarrow{AM}=\omega_0R\vec{i}-3\omega_0R\vec{j}$$
$$\vec{a}_M=\vec{a}_A+\vec{\varepsilon}_3\times\overrightarrow{AM}+\vec{\omega}_3\times(\vec{\omega}_3\times\overrightarrow{AM})=(\varepsilon_0R-3\omega_0^2R)\vec{i}+(3\varepsilon_0R+\omega_0^2R)\vec{j}$$

题 4.39 固定齿轮 I 半径为 R，齿轮 II 和 IV 空套在传动杆 OC 的 A 点和 C 点的轴上，其半径均为 r，半径为 R 的齿轮 III 空套在杆 O 的 B 点的轴上. 求齿轮 II，III，IV 的角速度以及齿轮 IV 边缘上一点 D 的速度，设 OC 的角速度为 ω_0, 并且 $CD\perp OC$。



题 4.39 图

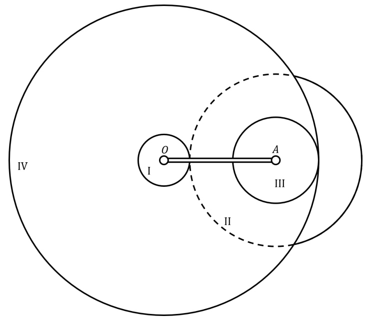
解答 同题 4.36，取固连于 OC 杆的参考系，可以计算得（过程略）：

$$\omega_2=\left(1+\frac{R}{r}\right)\omega_0,\omega_3=0,\omega_4=\left(1+\frac{R}{r}\right)\omega_0$$

而

$$\vec{v}_D=\vec{v}_C+\vec{\omega}_4\times\overrightarrow{CD}\implies v_D=\sqrt{10}(R+r)\omega_0$$

题 4.40　传动杆 OA 带动双联齿轮 I 和的转动轴 A 以 30r/min 转动，齿轮 V 以 20r/min 反向转动，设齿数 $Z_1 = 30, Z_2 = 100, Z_3 = 50$，求齿轮 I 的转速。



题 4.40 图

解答　由齿轮的相关知识可知齿数之比即为半径之比，又由题意知：

$$\omega_4 r_4 = \omega_{OA} r_{OA} + \omega_3 r_3, \omega_2 = \omega_3, \omega_1 r_1 = \omega_{OA} r_{OA} - \omega_2 r_2$$

且有几何关系：

$$r_4 = r_1 + r_2 + r_3, r_{OA} = r_1 + r_2$$

联立即可解得

$$\eta_1 = 630\text{r/min}$$

第五章　刚体的定点运动和一般运动

题 5.1　刚体绕固定点 $O(0,0,0)$ 运动，在某瞬时，转动瞬轴过点 $M(0,3,4)$，且已知角速度大小为 $\omega_1 = 25\mathrm{rad/s}$，求刚体上任意一点 $P(3,7,6)$ 的速度（距离单位为 1cm）。

解:　由瞬时角速度的定义可知角速度的方向与转动瞬轴的方向相同。而由题意易得转动瞬轴的单位方向矢量为

$$\vec{e} = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k}$$

故角速度

$$\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{e} = 15\vec{j} + 20\vec{k}\,\mathrm{rad/s}$$

而 P 点的位矢为

$$\vec{r} = \vec{OP} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 6\vec{k}$$

由定点运动的速度分布公式有:

$$v_{\vec{OP}} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 15 & 20 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -50\vec{i} + 60\vec{j} - 45\vec{k}\,\mathrm{cm/s}$$

题 5.2　刚体作定点运动，固定点坐标为 $A(0,0,0)$，某瞬时角速度为 $\vec{\omega} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\,\mathrm{rad/s}$，求转动瞬轴的方程。

解:　由于转动瞬轴的方向与瞬时角速度的方向相同，故转动瞬轴的方程为

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

题 5.3　刚体绕定点 $A(0,0,0)$ 转动，已测定刚体上任一点 $P(1,4,3)$ 的速度为 $\vec{v} = 14\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$，能否求出该瞬时刚体的角速度矢量，并说明理由。

解:　假设瞬时角速度为

$$\vec{\omega} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

而 P 点的位矢为 $\vec{r} = \vec{OP} = 1\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$，代入定点运动速度分布公式即得:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

结合题给数据，得到方程组：

$$\begin{cases} 3y-4z=14 \\ z-3x=-5 \\ 4x-y=2 \end{cases}$$

此方程组有无数组解，故无法确定瞬时角速度矢量。

题 5.4 刚体绕固定点 $(0,0,0)$ 转动，某瞬时刚体上点 $M(2,2,3)$ 的速度在 x 方向上的分量为 1，并已知该瞬时转动瞬轴的方向余弦为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{15},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{7\sqrt{3}}{15}\right)$，求刚体上另一点 $N(a,b,c)$ 的速度。

解： 设瞬时转动角速度为 $\vec{\omega}=\omega_0\left(\frac{\sqrt{3}}{15},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{7\sqrt{3}}{15}\right)$，则有：

点 M 的速度

$$\vec{v}_M=\vec{\omega}\times\vec{OM}$$

其在 x 方向上的速度分量为：$v_{Mx}=\frac{\omega_0\sqrt{3}}{15}=1\implies\omega_0=5\sqrt{3}\implies\vec{\omega}=(1,5,7)$

故点 N 的速度为

$$\vec{v}_N=\vec{\omega}\times\vec{ON}=(5c-7b,7a-c,b-5a)$$

题 5.5 刚体绕点 $(0,0,0)$ 作定点运动，已知某瞬时角速度为 $\vec{\omega}=2\vec{i}+3\vec{k}$，求刚体上速度大小等于 $2\sqrt{13}\text{cm/s}$，速度矢量的三个方向余弦为 $(\frac{3}{\sqrt{13}},0,\frac{-2}{\sqrt{13}})$ 的点的轨迹[1]。其中角速度用 rad/s 计。

解： 由题意在该瞬时此点的速度为 $\vec{v}=6\vec{i}-4\vec{k}\text{cm/s}$，假设此点的位矢为 $\vec{r}=(a,b,c)$，再利用 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$，则可解得此点的位矢为

$$\vec{r}=(2k,-2,3k),\ \text{其中 } k \text{ 为参数}$$

此即所求点的轨迹。

题 5.6 刚体绕坐标原点转动，已知某瞬时点 $P_1(-1,1,0)$ 的速度大小为 $v_1=2\text{m/s}$，其方向与 x 轴夹角为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，另一点 $P_2(0,0,1)$ 的速度与 x 轴夹角 $\alpha_2=0$。求该瞬时刚体的转动角速度、点 P_2 的速度，及转动瞬轴的方程。

解： 由于点 P_2 的速度与 x 轴平行，由 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 可知此时瞬时角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与 x 轴垂直，不妨设为 $\vec{\omega}=(0,\omega_y,\omega_z)\text{rad/s}$。

又知 P_1 点的速度方向，故设其速度方向矢量为 $\hat{v}_1=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta)$，其中 θ 为参数，则对 P_1 点，利用 $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ 有：

$$\vec{v}_1=v_1\hat{v}_1=(1,\sqrt{3}\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)=\vec{\omega}\times\vec{OP}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_y & \omega_z \\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}\omega_y &=\sqrt{2} \\ \omega_z &=-1\end{cases}\implies\vec{\omega}=\sqrt{2}\vec{j}-1\vec{k}\ \text{m/s}$$

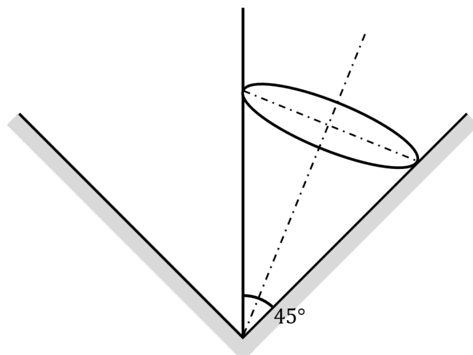
[1]此处之轨迹可能是指所有满足条件的点组成的轨迹，笔者注。

故 P_2 点的速度为 $\vec{v}_2 = \vec{\omega} \times O\vec{P}_2 = \sqrt{2}\vec{k}$ m/s 转动瞬轴的方程则为

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= \sqrt{2}\zeta \\ z &= -\zeta \end{cases}$$

其中 ζ 为参数。

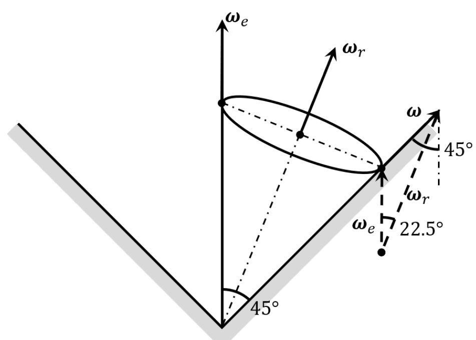
题 5.7　顶角为 45° 的圆锥在顶角为 90° 的固定圆锥内作纯滚动，圆锥高为 100cm，底面中心每 0.5 秒画出一个圆周。求动圆锥的进动角速度、自转角速度、瞬时角速度和角加速度。



题 5.7 图

解：　在规则进动[2]中，进动角速度即自转轴的转动角速度，由题意易得，此时的进动角速度大小为

$$\omega_e = \frac{2\pi}{0.5\text{s}} = 4\pi\,\text{rad/s} \approx 12.57\text{rad/s}$$



题 5.7 解图

建立如题 5.7 解图所示的坐标系，再设自转角速度为 $\vec{\omega}_r$，容易知道，此时自转角速度方向沿着圆锥轴线，而转动瞬轴为圆锥与壁面的接触线，故总角速度 $\vec{\omega}$ 的方向即为此方向。由于 $\vec{\omega} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_e$，利用矢量合成和余弦定理容易得到自转角速度大小

$$\omega_r = 8\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\pi\,\text{rad/s} \approx 27.20\text{rad/s}$$

[2]即刚体自身绕自转轴匀角速度转动，自转轴本身又绕着某与自转轴相交的固定轴匀角速度转动，且该固定轴与自转轴的夹角为定值的运动。

规则进动的角加速度大小[3]

$$\varepsilon = |\vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r| = \omega_e \omega_r \sin 22.5^\circ = 130.82\text{rad/s}^2$$

题 5.8 已知刚体的瞬时角速度为 $\omega_x = 5\sin(\pi t/2)\text{rad/s}, \omega_y = 5\cos(\pi t/2)\text{rad/s}, \omega_z = 5\sqrt{3}\text{rad/s}$，求当 $t = 1\text{s}$ 时，刚体上点 $M(0,2,3)$ 的速度与加速度。其中点的坐标以 cm 计。

解： $t = 1\text{s}$ 时角速度为

$$\vec{\omega}|_{t=1\text{s}} = (5, 0, 5\sqrt{3})\text{rad/s}$$

角加速度为

$$\vec{\varepsilon}|_{t=1\text{s}} = \left(\frac{\text{d}\vec{\omega}}{\text{d}t}\right)_{t=1\text{s}} = (0, -\frac{5\pi}{2}, 0)\text{rad/s}^2$$

故点 M 的速度为

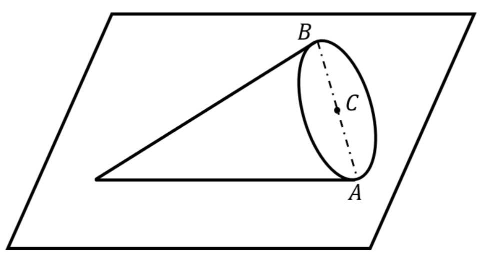
$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \vec{r} = (-10\sqrt{3}, -15, 10)\text{cm/s}$$

加速度为

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (-\frac{15\pi}{2} - 75\sqrt{3}, 200, -75)\text{cm/s}^2$$

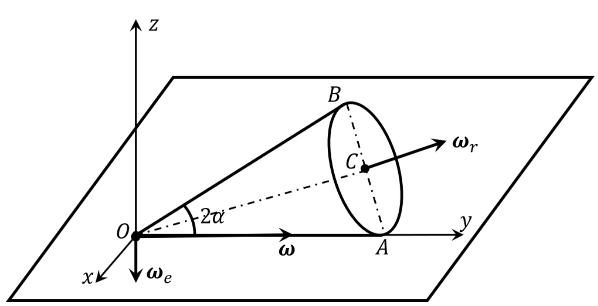
注： 可以看出，本题事实上也为一规则进动，其进动角速度为 $\omega_e = \frac{\pi}{2}\text{rad/s}$。

题 5.9 正圆锥的顶角为 $2a = 60^\circ$，其母线长 $\frac{40}{\sqrt{3}}\text{cm}$ 在水平面上滚动而不滑动。已知锥底中心点 C 的速度为 30cm/s，并为常数，求底面上最低点 A 和最高点 B 的速度和加速度。



题 5.9 图

解： 如题 5.9 解图所示，以圆锥与水平面交线 OA 为 Oy 轴，以水平面为 Oxy 面建立坐标系。设圆锥转动方向如图所示，即 $\vec{\omega}_e = -\omega_e \vec{k}$、$\vec{\omega}_r = \omega_r(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k})$。



题 5.9 解图

[3]此处来源于课本第 130 页结论：规则进动的角加速度 $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$。

由圆锥在水平面上滚动而不滑动，易知 Oy 为转动瞬轴，则有：

$$\vec{v_A}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{OA}=(\vec{\omega_r}+\vec{\omega_e})\times\vec{r}_{OA}=0$$

又 $\vec{\omega}$ 沿 OA 也就是 Oy 轴方向，即 $\vec{\omega}=\omega\vec{j}$，根据矢量合成法则有

$$\begin{cases}\omega_e=\omega_r\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\omega_r\\ \omega=\omega_r\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_r=\sqrt{3}\omega_e\end{cases}$$

又已知锥底中心点 C 的速度，$\vec{v_C}=\vec{\omega}\times\vec{r_{OC}}$，即

$$v_C=\omega\cdot r_{OC}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\omega_e\cdot(\frac{40}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot\frac{1}{2}=30\text{cm/s}$$

$\Longrightarrow\quad\omega_e=\sqrt{3}\quad\omega_r=2\sqrt{3}\quad\omega=3$（角速度单位均为 rad/s）
则可求 B 点的速度，

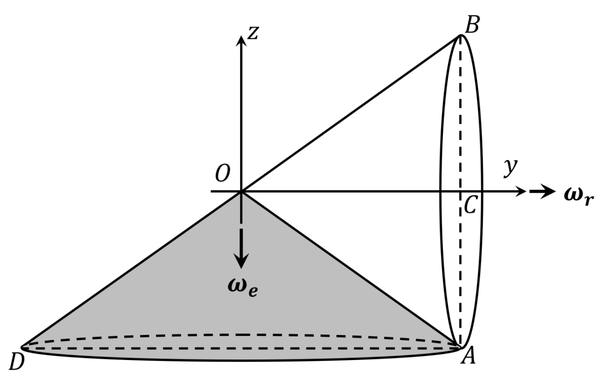
$$\vec{v_B}=\vec{\omega}\times\vec{r_{OB}}=\frac{40}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&3&0\\0&\dfrac{1}{2}&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=60\vec{i}\text{cm/s}$$

规则进动，角加速度 $\vec{\varepsilon}=\vec{\omega_e}\times\vec{\omega_r}=-\sqrt{3}\vec{k}\times3\vec{j}=3\sqrt{3}\vec{i}\text{rad/s}^2$
计算 A、B 两点的加速度，$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$
则有，

$$\vec{a_A}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r_A}=120\vec{k}\text{cm/s}^2$$

$$\vec{a_B}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r_B}+\vec{\omega}\times\vec{v_B}=-60\sqrt{3}\vec{j}-120\vec{k}\text{cm/s}^2$$

题 5.12　顶角为 60° 的正圆锥 OAB 在顶角为 120° 的固定圆锥 OAD 上滚动而不滑动。锥底面中心 C 的速度 $v_c=6t\text{cm/s}$，$OC=6\text{cm}$，求 $t=2\text{s}$ 时，铅垂直径 AB 两端点的速度和加速度。



题 5.12 图

解：　建立如图动系，易知 OA 为瞬轴，即 $\vec{\omega}$ 沿 OA 方向，则 $\dfrac{\omega_r}{\omega_e}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$
已知 $\vec{v_C}=\vec{\omega}\times\vec{r_{OA}}=(\vec{\omega_e}+\vec{\omega_r})\times\vec{r_{OC}}=\vec{\omega_e}\times\vec{r_{OC}}$, 则 $v_C=\omega_e\cdot r_{OC}=6t\text{cm/s}$
可以得出，

$$\omega_e=\frac{v_C}{r_{OC}}=t\text{rad/s}\qquad\varepsilon_e=\frac{\mathrm{d}\omega_e}{\mathrm{d}t}=1\text{rad/s}^2$$

$$\omega_r = \sqrt{3}t\mathrm{rad/s} \qquad \varepsilon_r = \frac{\mathrm{d}\omega_r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}\mathrm{rad/s}^2$$

角加速度表示为，$\vec{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\vec{\omega_e} + \vec{\omega_r})}{\mathrm{d}t} = -\dot{\omega}_e\vec{k} + \dot{\omega}_r\vec{j} + \omega_e \times \omega_r$

所以，圆锥运动的角速度与角加速度可以表示为，

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \sqrt{3}t\vec{j} - t\vec{k} \\ \vec{\varepsilon} = -\vec{k} + \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}t^2\vec{i} \end{cases}$$

将 A、B 两点的坐标代入速度与加速度的计算公式，

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} + \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

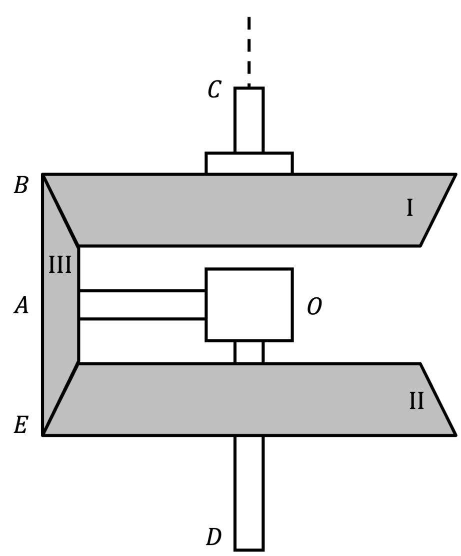
得到结果，

$$\begin{cases} \vec{v_A} = 0 & \vec{a_A} = 6t^2\vec{j} + 6\sqrt{3}t^2\vec{k} \\ \vec{v_B} = 12t\vec{i} & \vec{a_B} = 12\vec{i} - 18t^2\vec{j} - 6\sqrt{3}t^2\vec{k} \end{cases}$$

当 $t = 2\mathrm{s}$ 时，

$$\begin{cases} \vec{v_A} = 0 & \vec{a_A} = \left(24\vec{j} + 24\sqrt{3}\vec{k}\right)\mathrm{cm/s}^2 \\ \vec{v_B} = 24\vec{i}\mathrm{cm/s} & \vec{a_B} = \left(12\vec{i} - 72\vec{j} - 24\sqrt{3}\vec{k}\right)\mathrm{cm/s}^2 \end{cases}$$

题 5.14　差动机构由圆锥齿轮 I 和 II 以及行星齿轮 I 构成。轮 I 活动地装在曲柄 OA 上，CM 可绕固定轴 CD 转动。已知轮 I 和轮 II 的转动角速度为 $\omega_1 = 5\mathrm{rad/s}, \omega_2 = 3\mathrm{rad/s}$，且转向相同。轮 III 半径为 $r = 2\mathrm{cm}$，轮 I 和轮 II 的半径均为 $R = 7\mathrm{cm}$，求曲柄 OA 的角速度，行星齿轮相对于曲柄的角速度和 A 点的速度。



题 5.14 图

解：　如图所示，不妨设轮 I 和轮 II 的角速度方向均沿 $\overrightarrow{DC}$ 方向，再分别记轮 I 和轮 II 与轮 III 的接触点为 B 点和 E 点，则有两点的速度大小为：

$$v_B = \omega_1 R$$
$$v_E = \omega_2 R$$

设轮 III 绕轴 OA 旋转的角速度为 ω_3，则有：

$$v_B = v_E + \omega_3 \cdot 2r$$

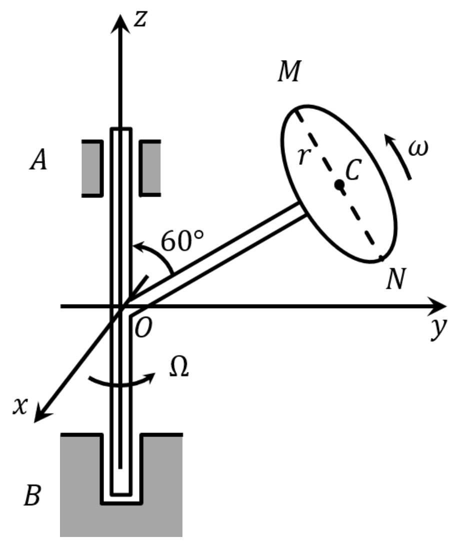
解得 $\omega_3 = 3.5\text{rad/s}$，即可得到

$$v_A = v_E + \omega_3 r = 28\text{cm/s}$$

故 OA 的角速度为

$$\Omega = v_A/R = 4\text{rad/s}$$

题 5.15　半径为 r 的圆盘由电机带动绕 OC 轴转动，角速度为 ω；OC 轴与 AB 轴固连成 $60°$ 角并绕 AB 轴转动，角速度为 Ω，若 $OC = 2r$，求圆盘的最高点 M 和最低点 N 的速度、加速度（ω, Ω 均为常数）。



题 5.15 图

解：　如题 5.15 图所示，图中坐标系 $Oxyz$ 与 AB 固连并随之一起旋转，且 OC 在 yOz 平面内。则有自转角速度

$$\vec{\omega_r} = \omega \cdot (\sin 60° \vec{j} + \cos 60° \vec{k}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{j} + \frac{1}{2}\omega\vec{k}$$

公转角速度

$$\vec{\omega_e} = \Omega\vec{k}$$

故圆盘的角速度为

$$\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{j} + (\frac{\omega}{2} + \Omega)\vec{k}$$

易知圆盘作规则进动，故圆盘的角加速度为

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\Omega\vec{i}$$

又由题给几何参数可以知道:

$$\vec{r}_{OM} = (\sqrt{3} - \frac{1}{2})r\vec{j} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)r\vec{k}$$
$$\vec{r}_{ON} = (\sqrt{3} + \frac{1}{2})r\vec{j} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)r\vec{k}$$

故有 M 点和 N 点的速度:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \sqrt{3}\omega/2 & \omega/2 + \Omega \\ 0 & (\sqrt{3} - \frac{1}{2})r & (\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)r \end{vmatrix} z = [\omega - (\sqrt{3} - \frac{1}{2})\Omega]r\vec{i}$$
$$\vec{v}_N = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{ON} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \sqrt{3}\omega/2 & \omega/2 + \Omega \\ 0 & (\sqrt{3} + \frac{1}{2})r & (-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)r \end{vmatrix} = -[\omega + (\sqrt{3} + \frac{1}{2})\Omega]r\vec{i}$$

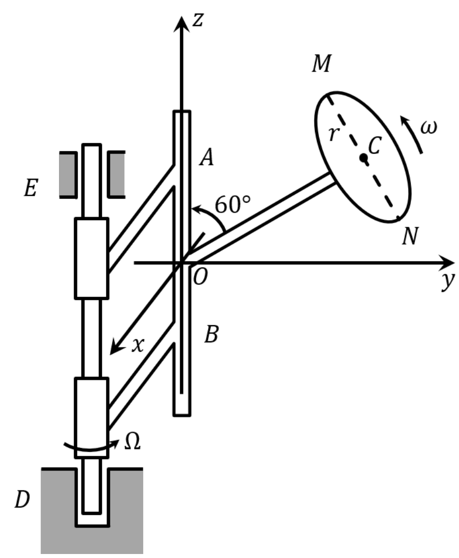
由公式

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

可得 M 点和 N 点的加速度为:

$$\vec{a}_M = \left[\frac{1}{2}(\omega + \Omega)^2 + (1 - \sqrt{3})\omega\Omega\right] r\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$
$$\vec{a}_N = -\left[\frac{1}{2}(\omega + \Omega)^2 + (1 + \sqrt{3})\omega\Omega\right] r\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$

题 5.17 在题 5.15 中若轴 AB 并非固定轴，它绕另一与之平行且距离为 d 的固定轴 DE 作匀速转动，角速度为 ω_1，且 AB 与 DE 确定的平面与 AOC 确定的平面垂直。求圆盘的角速度和角加速度，以及点 M 和点 N 的速度、加速度。



题 5.17 图

解：　如上题 5.17 图所示，取 O 为基点，其中坐标系 $Oxyz$ 为固连在 AB 杆上的系，其 x 轴在平面 $ABDE$ 内，y 轴在平面 AOC 内。容易得出，此时圆盘的运动可以视为题 5.15 中的运动与基点作匀速圆周运动的合成，故利用题 5.15 结果得到此时相对基点的运动速度与加速度：

$$\vec{v}_{Mr} = [\omega - (\sqrt{3} - \frac{1}{2})\omega_1]r\vec{i}$$
$$\vec{v}_{Nr} = -[\omega + (\sqrt{3} + \frac{1}{2})\omega_1]r\vec{i}$$
$$\vec{a}_{Mr} = \left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)^2 + (1 - \sqrt{3})\omega\omega_1\right] r\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$
$$\vec{a}_{Nr} = -\left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)^2 + (1 + \sqrt{3})\omega\omega_1\right] r\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$

而基点 O 运动的速度和加速度为：

$$\vec{v}_O = \omega_1 d\vec{j}$$
$$\vec{a}_O = \omega_1^2 d\vec{i}$$

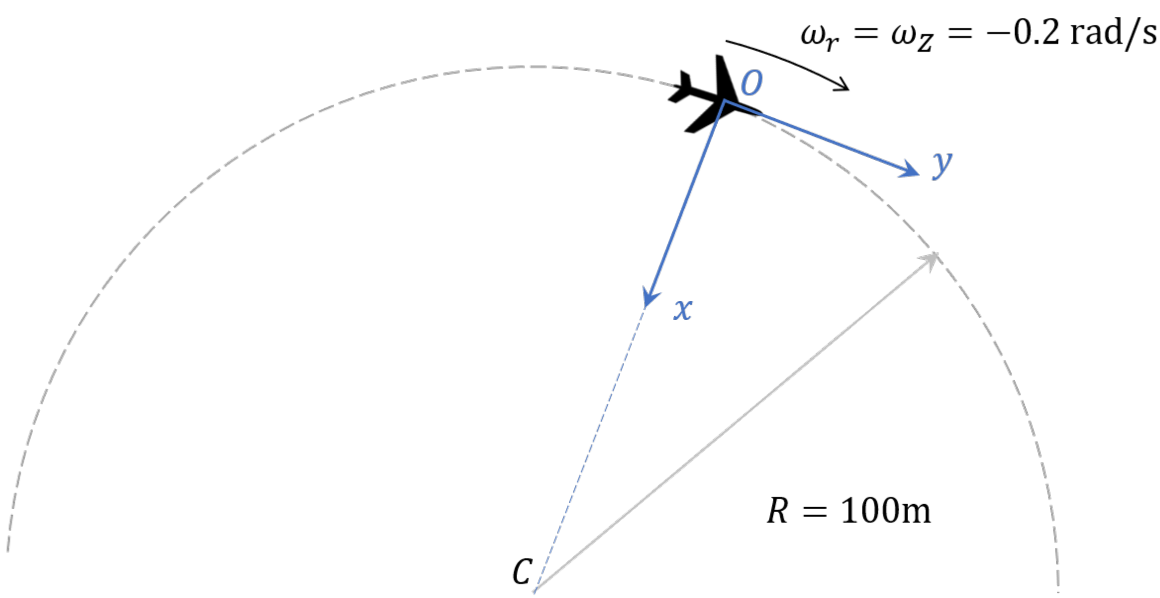
故 M 点和 N 点的速度和加速度分别为：

$$\vec{v}_M = [\omega - (\sqrt{3} - \frac{1}{2})\omega_1]r\vec{i} - \omega_1 d\vec{j}$$
$$\vec{v}_N = -[\omega + (\sqrt{3} + \frac{1}{2})\omega_1]r\vec{i} - \omega_1 d\vec{j}$$
$$\vec{a}_M = \omega_1^2 d\vec{i} + \left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)^2 + (1 - \sqrt{3})\omega\omega_1\right] r\vec{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$
$$\vec{a}_N = \omega_1^2 d\vec{i} - \left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)^2 + (1 + \sqrt{3})\omega\omega_1\right] r\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 r\vec{k}$$

由于基点 O 的运动为平动，故圆盘的角速度和角加速度仍为题 5.15 中的值，即：

$$\vec{\omega}_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\vec{j}+(\frac{\omega}{2}+\omega_1)\vec{k}$$
$$\vec{\varepsilon}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega\omega_1\vec{i}$$

题 5.18　战斗机的重心 O 沿半径为 100m 的平面圆弧轨道运动，圆弧轨道的中心在 C 点。已知飞机前后翻滚的角速度 $\omega_x=0.1\text{rad/s}$；侧向倾斜的角速度为 $\omega_y=0.15\text{rad/s}$；偏航角速度为 $\omega_z=-0.2\text{rad/s}$；并且 ω_x,ω_y 和 ω_z 均为常数。飞行员位于重心前两米处，求飞行员的加速度。



俯视图

解：

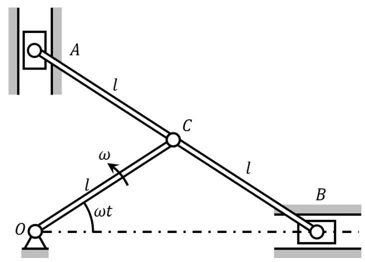
$$\vec{\varepsilon}=-\omega_z\omega_x\vec{j}+\omega_z\omega_y\vec{i}$$

而飞行员的位矢为 $\vec{r}=r\vec{j}$，则飞行员相对基点 O 的速度为 $\vec{v}_r=\vec{\omega}\times\vec{r}=\omega_x r\vec{k}$，从而得到飞行员相对 O 点的加速度为：

$$\vec{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=-\omega_x\omega_z\vec{j}+\omega_y\omega_z\vec{i}$$

第六章　动力学基本定理

题 6.3　图示椭圆规尺 AB 质量为 $2m_1$，曲柄 OC 质量为 m_1，滑块 A 和 B 质量均为 m_2。已知 $OC = AC = CB = l$，曲柄和尺均为均质杆。曲柄以角速度 ω 转动。求此椭圆规机构的动量。



题 6.3 图

解:　由题意易得

$$\vec{v}_C = -\omega l \sin \omega t \vec{i} + \omega l \cos \omega t \vec{j}$$
$$\vec{v}_A = 2\omega l \cos \omega t \vec{j}$$
$$\vec{v}_B = -2\omega l \sin \omega t \vec{i}$$

而

$$\vec{p}_{OC} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_C$$
$$\vec{p}_{AB} = 2m_1 \vec{v}_C$$
$$\vec{p}_A = m_2 \vec{v}_A, \vec{p}_B = m_2 \vec{v}_B$$

故总动量为

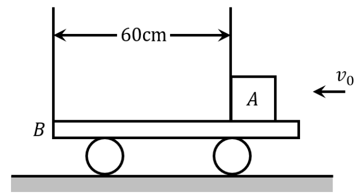
$$\vec{p} = \frac{5}{2} m_1 \vec{v}_C + m_2(\vec{v}_A + \vec{v}_B) = \left(\frac{5}{2} m_1 + 2m_2\right) \omega l(-\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j})$$

题 6.4　均质直角三角形平板 ABC，绕直角边 AC 以角速度 $\omega = 3\pi\,\text{rad/s}$ 旋转，板的重量为 20N，直角边 AB 长为 49cm。求板的动量。

解:　由题意易知

$$p = mv_0 = m \cdot \frac{1}{3} \omega \overline{AB} = \frac{20\text{N}}{9.8\text{m/s}^2} \cdot \frac{1 \times 3\pi\text{rad/s} \times 0.49\text{m}}{3} = \pi\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

题 6.8　一颗子弹质量为 0.3kg，以 $v_0 = 500\mathrm{m/s}$ 的速度射进质量为 45kg 的物块 A 中。A 放在一质量为 $35kg$ 的小车上，车停在光滑轨道上，如图所示。设物块与小车之间摩擦系数 $f = 0.5$，试求：



题 6.8 图

(1) 车与物块的末速度 u；

(2) 在车上物块离 B 端的最终距离。

解：

(1) 由水平方向上动量守恒可以得到

$$u = \frac{0.3 \times 500}{45 + 35 + 0.3}\mathrm{m/s} = 1.868\mathrm{m/s}$$

(2) 刚射入物块 A 时利用动量守恒可以得到物块 A 的速度为

$$v_A = \frac{0.3 \times 500}{45 + 0.3}\mathrm{m/s} = 3.31\mathrm{m/s}$$

而 A 与 B 相对运动时的绝对加速度为 $a_A = fg = 4.9\mathrm{m/s^2}$，故 A 和 B 达到共速用时

$$t = \frac{v_A - u}{a_A} = 0.2945\mathrm{s}$$

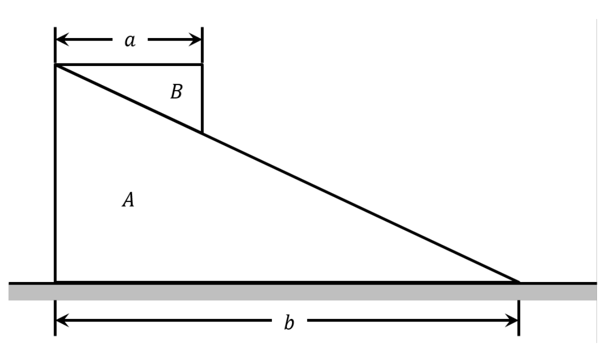
故相对位移为

$$\Delta x = \frac{1}{2}v_A t = 48.77\mathrm{cm}$$

即最终离 B 端的距离为

$$d = 60\mathrm{cm} - \Delta x = 11.23\mathrm{cm}$$

题 6.11　如题 6.11 图所示，水平面上放一均质三菱柱 A。此三菱柱上又放一均质三菱柱 B。两三菱柱的横截面都是直角三角形。三菱柱 A 比三菱柱 B 重两倍。设三菱柱和水平面都是绝对光滑的。求当三菱柱 B 沿三菱柱 A 滑至水平面时，三菱柱 A 的位移。



题 6.11 图

解:　注意题中"重两倍"[1]的意思是 $m_A = 3m_B$，故二者的位移大小之比为

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{m_B}{m_A}$$

而由几何关系知二者相对位移为 $(a-b)$，即

$$x_B + x_A = a - b$$

代入上式即得

$$x_A = \frac{a-b}{4}$$

题 6.15　计算下列情况下质点系对固定轴 O 的动量矩:

(1) 质量为 m，半径为 R 的均质圆盘以匀角速 ω_0 转动;

(2) 质量为 m，长为 l 的均质杆在某瞬时以角速度 ω_0 绕定轴 O 转动。

解:

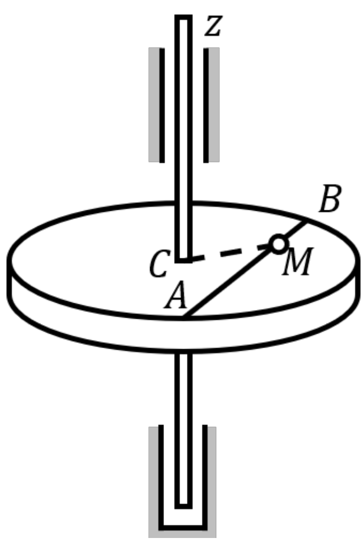
(1)

$$L = I\omega_0 = \frac{1}{2}mR^2\omega_0$$

(2)

$$L = I\omega_0 = \frac{1}{3}mR^2\omega_0$$

题 6.18　重为 P，半径为 r 的水平均质圆盘，绕通过其中心的垂直轴 Cz 以匀角速度转动。重为 Q 的点 M 从盘的边缘 A 由静止开始沿弦 AB 运动。求当点 M 位于离圆盘中心 C 的距离 a 为最小时的圆盘角速度。设此瞬时点的相对速度为 u。



题 6.18 图

[1] 与"重量是两倍"含义不同。

解:　初始的系统总角动量;

$$H_0 = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\omega_0 + \frac{Q}{g}r\cdot\omega_0 r$$

而题中时刻系统的总角动量:

$$H = \frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\omega + \frac{Q}{g}a(\omega a + u)$$

由角动量守恒 $H_0 = H$，可以得到

$$\omega = \frac{(P+2Q)r^2\omega_0 - 2Qau}{Pr^2 + 2Qa^2}$$

题 6.25　一半径为 r，重为 P 的均质水平圆盘可绕通过其中心 O 的铅垂轴而转动，一重为 q 的小虫 B 按规律 $AB = \frac{1}{2}at^2$ 沿圆盘的边缘爬行，a 为常数。圆盘初始时静止。试求圆盘的角速度 ω 和角加速度 ε。

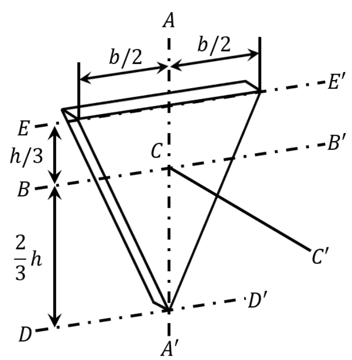
解:　此处小虫的运动规律是**相对于圆盘**的，即小虫在圆盘上以规律 $AB = \frac{1}{2}at^2$ 爬行，故小虫**相对圆盘**的速度为 $v = at$，则总角动量

$$H = -\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2\omega + \frac{q}{g}r^2(at - \omega r)$$

其中负号表示圆盘角速度与小虫运动方向相反，再利用角动量守恒 $H = 0$，即可解得

$$\omega = \frac{2qat}{2qr + Pr}, \varepsilon = \frac{2qa}{2qr + Pr}$$

题 6.31　图示为一等腰三角形薄板，其质量为 m，高为 h，底宽为 b，试求它的转动惯量，对:



题 6.31 图

(1) 在板的平面内过质心的 AA' 轴、BB' 轴;

(2) 过质心垂直于板的 CC' 轴。

解:

(1)

$$I_{AA'} = \frac{1}{24}mb^2, I_{BB'} = \frac{1}{18}mh^2$$

(2) 由垂直轴定理

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{72}m(3b^2 + 4h^2)$$

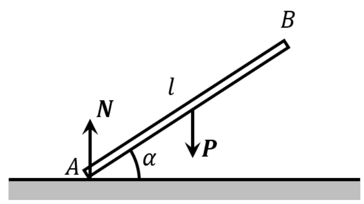
题 6.33　用直接积分法求一质量为 m、每边长为 a 的均质四面体对过 A 点垂直于底 BCD 的轴的转动惯量。（提示：利用题 6.31 的结果）

解:　过程略，转动惯量为

$$I = \frac{1}{20}ma^2$$

题 6.36　均质杆 AB 重为 P，与水平面的倾斜角为 α。杆的 A 端放在光滑水平地板上，无初速地放开 B 端，求此瞬时杆对地板的压力。

解:　如题 6.36 解图所示，杆 AB 只受支持力 N 和重力 P,，设杆长为 $2l$，则：



题 6.36 解图

在水平方向和竖直方向上利用动量定理可以得到：

$$\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$\frac{P}{g}\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = N - P$$

又由相对于质心的动量矩定理，可以得到：

$$-Nl\cos\alpha = \frac{1}{3}ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}ml^2\varepsilon$$

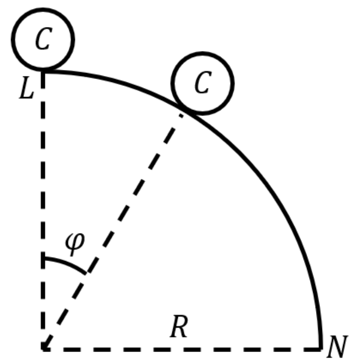
再利用刚体上加速度分布可以求得

$$\varepsilon l\cos\alpha = a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

联立以上各式可以求得

$$N = \frac{P}{1+3\cos^2\alpha}$$

题 6.38　均质圆盘半径为 r，放在位置 L。给中心 C 以水平初速度 v_0，圆盘开始沿置于铅垂平面内半径为 R 的圆弧滚动。求当圆盘脱离圆弧 LN 时的 φ 角。



题 6.38 图

解:　以初始位置 L 为势能零点，且初动能

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_0^2 = \frac{3}{4}mv_0^2$$

若在 φ 角处脱离，则有脱离条件

$$mg\cos\varphi - N = m\dot{\varphi}^2(R+r),\, N = 0$$

此时的总机械能为

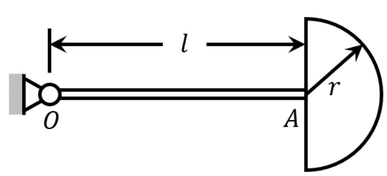
$$E = T + U = \frac{3}{4}m\omega^2r^2 - mg(R+r)(1-\cos\varphi)$$

其中 $\omega r = \dot{\varphi}(R+r)$，联立以上各式即可解得脱离时的 φ 满足：

$$\cos\varphi = \frac{4}{7} + \frac{v_0^2}{g(R+r)}, v_0^2 \leq \frac{3}{7}g(R+r)$$

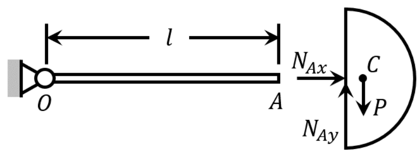
当 $v_0^2 > \frac{3}{7}g(R+r)$ 时，脱离时的 $\varphi = 0$。

题 6.41　均质半圆块重为 P，半径为 r，与长为 l 的无重杆固结，初始处于静止状态，如题 6.41 图所示。求该瞬时杆与半圆块固接处 A 的内力。



题 6.41 图

解:　记半圆块的质心 C 到 A 点的距离为 d，则有 $d = 4\pi/3r$。在初始时刻，由于系统角速度为零，所以半圆块没有水平方向上的加速度，仅有竖直方向上的加速度，故 A 点处的内力的水平分量 $N_{Ax} = 0$，如下题 6.41 解图所示。



题 6.41 解图

再利用动量矩定理，对系统整体有

$$P(l+d)=I_O\varepsilon$$

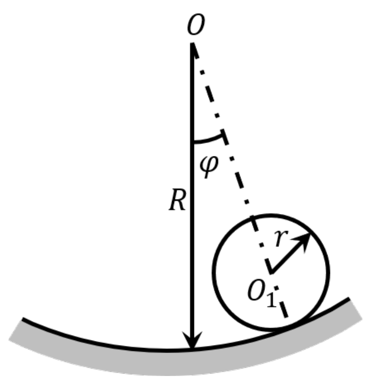
其中 $I_O=\frac{1}{2}mr^2-md^2+m(l+d)^2$，且

$$a_y=\varepsilon(l+d)=\frac{P-N_{Ay}}{m}$$

联立以上各式即可解得

$$N_{Ay}=\frac{\frac{1}{2}r^2-d^2}{\frac{1}{2}r^2+l^2+2dl}P=\frac{\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}}{r^2/2+l^2+8rl/3\pi}Pr^2$$

题 6.45　一质量为 m 半径为 r 的均质圆柱在半径为 R 的圆槽内作纯滚动，如题 6.45 图所示。如果起始时 OO_1 与铅直线夹角为 φ，圆柱由静止滚下，求当圆柱到达最低位置时对圆槽的正压力和摩擦力。



题 6.45 图

解：　记运动过程中 OO_1 与铅直线的夹角为 θ，则有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2+mgR(1-\cos\theta)=mgR(1-\cos\varphi)$$

由纯滚动条件得到

$$v-\omega r=0$$

即

$$v=\sqrt{\frac{4}{3}gR(\cos\theta-\cos\varphi)} \tag{1}$$

故

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{gR}{3(\cos\theta - \cos\varphi)}}\sin\theta \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

当圆柱位于最低点，即 $\theta = 0$ 时，由上式有 $a = 0$，即圆柱没有水平方向上的加速度，而圆柱在水平方向上至多只受一个摩擦力，故圆柱受的摩擦力为 $f = 0$。下面再来求圆柱受到的支持力 N：

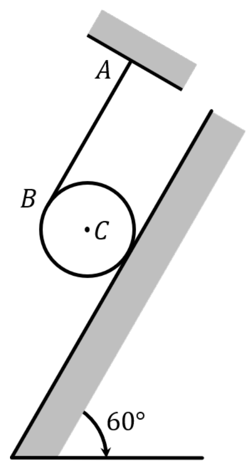
在竖直方向上，有

$$N - mg = ma_y = m\dot{\varphi}^2(R - r) = \frac{mv^2}{R - r}$$

由式(1)代入 $\theta = 0$ 可以得到

$$N = mg + \frac{4mgR(1 - \cos\varphi)}{R - r}$$

题 6.46　均质圆柱体质量为 m，半径为 r，放在倾斜角为 60° 的斜面上，如题 6.46 图所示。一细绳缠在圆柱体上，其一端固定在 A 点，AB 平行于斜面。若圆柱体于斜面间的摩擦系数 $f = 1/3$，试求圆柱体中心 C 的加速度。



题 6.46 图

解：　设绳子上的张力为 T，对斜面的正压力为 N，则有：在平行和垂直于斜面的两个方向上分别利用动量定理可得：

$$mg\sin\theta - fN - T = ma$$

$$mg\cos\theta = N$$

再对圆柱质心利用动量矩定理有

$$(fN - T)r = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon$$

B 点处还有加速度约束条件：

$$a + \varepsilon r = 0$$

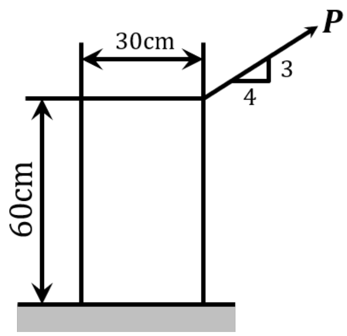
联立以上四式即可解得

$$a = \frac{3\sqrt{3} - 2}{9}g = 3.48\mathrm{m/s^2}$$

题 6.47 图示均质长方体的质量为 50kg，与地面间的摩擦系数为 0.20，在力 P 的作用下向右滑动。求：

(1) 不倾倒时 P 的最大值；

(2) 此时长方体的加速度。



题 6.47 图

解：

(1) 以质心为取矩点[2]，记 $\tan\theta = 3/4$，当达到恰好翻倒的临界条件时，摩擦力和支持力集中在物块右下角处，则有

$$(P\cos\theta + fN) \times 30\text{cm} = (P\sin\theta + N) \times 15\text{cm}$$

再在水平和竖直方向上由动量定理

$$mg = P\sin\theta + N$$
$$ma = P\cos\theta - fN$$

联立上述各式即可解得此时

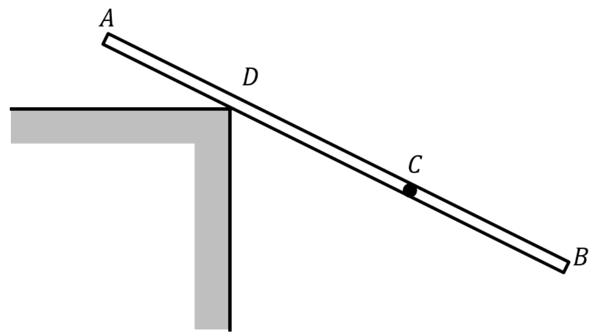
$$P = \frac{0.6mg}{1.36} = 216.176\text{N}$$

(2) 利用上问方程组，可以解得

$$a = \frac{0.28g}{1.36} = 2.018\text{m/s}^2$$

题 6.49 均质细长杆 AB 质量为 m，长为 $l, CD = b$，与铅直墙面的夹角为 α，棱线 D 是光滑的。在如图位置将杆突然释放。求刚释放时，质心 C 的加速度和 D 点的约束反力。

[2]更常见的想法是取右下角为取矩点，但是由于此时物块可能已经有加速度，若取右下角为取矩点相当于取了非惯性参考系，需要引入额外的惯性力，得不偿失，所以此时不便采用此种方法。



题 6.49 图

解： 对 D 点取矩：

$$-mgb\sin\alpha = \varepsilon I$$

其中相对 D 点的转动惯量 $I_D = ml^2/12 + mb^2$，再在水平和竖直方向上由动量定理：

$$N\cos\alpha = ma_{Cx}$$
$$N\sin\alpha - mg = ma_{Cy}$$

利用加速度合成的基点法，得 D 点的加速度

$$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{CD} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\overrightarrow{CD}) = (a_{Cx} - \varepsilon b\cos\alpha)\vec{i} + (a_{Cy} - \varepsilon b\sin\alpha)\vec{j}$$

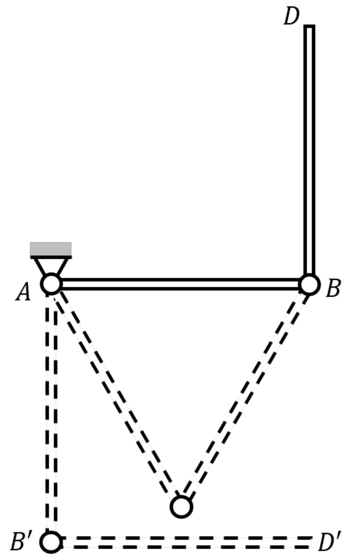
利用 $\omega = 0$ 及 D 点无垂直于杆方向上的加速度可得

$$\frac{a_{Cx}\varepsilon b\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{a_{Cy} - \varepsilon b\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

联立即可整理得到

$$a_{Cx} = \frac{l^2\sin\alpha\cos\alpha}{l^2 + 12b^2}$$
$$a_{Cy} = \left(\frac{l^2\sin^2\alpha}{l^2 + 12b^2} - 1\right)g$$
$$N = \frac{mgl^2\sin\alpha}{l^2 + 12b^2}$$

题 6.65　图示两杆的长度均为 1m，重 20N，D 点被限制在垂直线上移动。若机构在 AB 为水平时从静止释放，试求杆 BD 在通过其水平位置时点 B 和点 D 的速度。



题 6.65 图

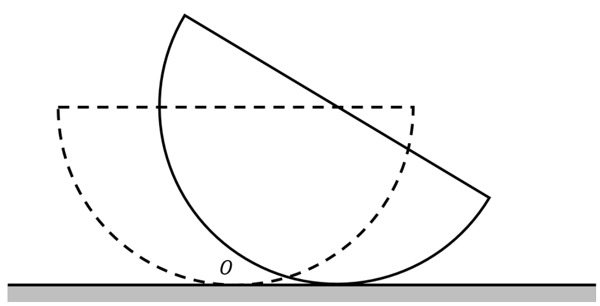
解： 由于 D 只有竖直方向上的速度分量，故由速度投影定理知此时 B 点没有水平方向上的速度分量，即杆 AB 此时角速度为 0，动能完全集中在杆 BD 上，即总动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}I_B\omega^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}mv_D^2$$

其中已经利用了 $\omega l = v_D$，再利用机械能守恒定律：

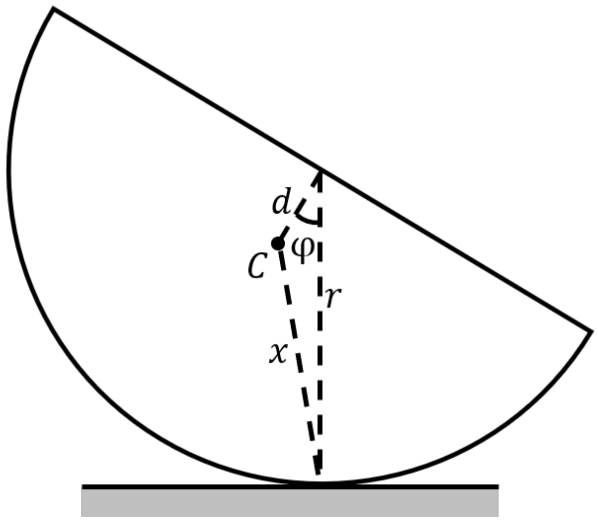
$$Pl/2 + 3Pl/2 = E_k = \frac{1}{6}mv_D^2 \implies v_D = 2\sqrt{3gl} = 10.84\text{m/s}$$

题 6.67 一个均质半圆盘半径为 R，放在不光滑的水平面上，半圆盘可以沿这平面作无滑滚动。求它作微小振动的周期。



题 6.67 图

解： 如下题 6.67 解图所示，其中 C 点为半圆的质心，$d = 4r/3\pi$，且 $\dot{\varphi} = \omega$，则有：



题 6.67 解图

半圆盘的动能：

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

其中

$$v_C^2=\omega x=\dot{\varphi}^2(d^2+r^2-2dr),I=\frac{1}{2}mr^2-md^2$$

故

$$T=\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2(d^2+r^2-2dr)+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

记初始位置势能为零，则半圆盘的势能

$$U=mg(r-d\cos\varphi)$$

由机械能守恒，有

$$\frac{\mathrm{d}T+U}{\mathrm{d}t}=0$$

整理即得

$$m\ddot{\varphi}(d^2+r^2)-2mdr\ddot{\varphi}\cos\varphi+mdr\dot{\varphi}^2\sin\varphi+I\ddot{\varphi}+mgd\sin\varphi=0$$

由数学知识[3]可知上式中第一项和最后两项为一阶小量（φ 为一阶小量），第三项为三阶小量；$2mdr\ddot{\varphi}\cos\varphi\approx 2mdr\ddot{\varphi}-mdr\varphi^2\ddot{\varphi}$，前一项为一阶小量，后一项为三阶小量，略去一阶以上小量并整理后即可得到：

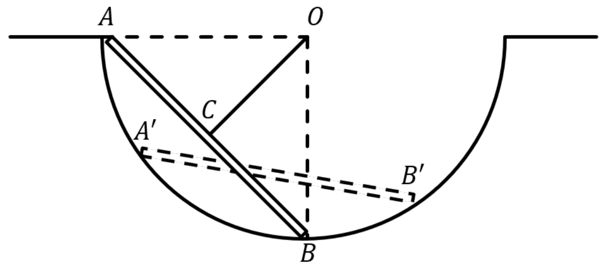
$$\left[m(d-r)^2+I\right]\ddot{\varphi}+mgd\varphi=0$$

此为一简谐运动方程，故周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m(d-r)^2+I}{mgd}}=2\pi\sqrt{\frac{9\pi-16}{8}\frac{r}{g}}$$

[3]主要是 Taylor 展开；$\sin\varphi\approx\varphi,\cos\varphi\approx 1-\varphi^2/2$。

题 6.69　长 $2a$ 重 P 的均质棒 AB 放在以 O 为中心的固定光滑半圆槽内，此时 $\angle AOB = 90°$。棒在本身重量作用下而运动，初始时静止，且 $\varphi = \varphi_0 = 45°$，$C$ 是棒的重心，试求棒的角速度 ω 以及 A, B 两点受到的约束反力（表示成 φ 的函数）。



题 6.69 图

解：　首先可以写出杆 AB 的动能和势能：

$$T = \frac{1}{6}ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{2}{3}ma^2\omega^2$$
$$U = -mga\sin\varphi$$

由机械能守恒

$$\frac{\mathrm{d}T+U}{\mathrm{d}t} = 0 = \frac{4}{3}ma^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - mga\cos\varphi\dot{\varphi} \implies \ddot{=}3g\cos\varphi/4a$$

$$T + U = -\frac{\sqrt{2}}{2}mga \implies \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{3g}{2a}(\sin\varphi - \sqrt{2}/2)}$$

上式中已经取半圆圆心所在的水平面为零势能面。再对杆分析，由动量矩定理，取质心为矩可得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(N_A - N_B)a = I\ddot{\varphi} = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\varphi}$$

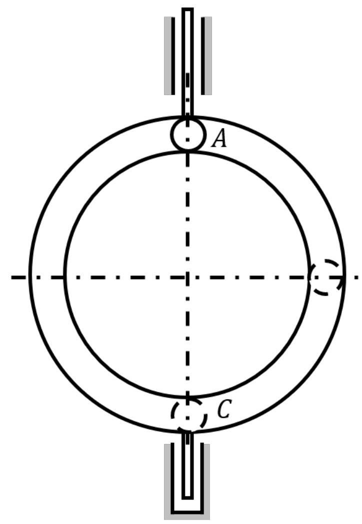
再在垂直于杆的方向上利用动量定理可得

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(N_A + N_B) = m\omega^2 a + mg$$

由上两式可以解得

$$N_A = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{8}\cos\varphi - \frac{3}{4}\right)mg$$
$$N_B = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{8}\cos\varphi - \frac{3}{4}\right)mg$$

题 6.70　圆环以角速度 ω 绕铅垂轴 AC 转动，此圆环半径为 r，对轴的转动惯量为 I。在圆环中的 A 点上放一质量为 m 的小球，由于微小扰动，小球偏离 A 点。求当小球到达 B 点和 C 点时，圆环的角速度和质点（即小球）的速度。设所有的接触处光滑。



题 6.70 图

解:　初始时刻系统的总角动量为

$$L = I\omega$$

由角动量守恒:

$$I\omega = I\omega_B + mr^2\omega_B = I\omega_C$$

其中 ω_B, ω_C 分别表示小球运动到 B, C 点处时圆环的角速度大小，则有

$$\omega_B = \frac{I}{I+mr^2}\omega, \omega_C = \omega$$

再由机械能守恒得

$$2mgr + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(\omega_B^2 r^2 + v_{Br}^2) + mgr = \frac{1}{2}I\omega_C^2 + \frac{1}{2}mv_{Cr}^2$$

其中 v_{Br}, v_{Cr} 均为小球在 B, C 点处相对圆环运动的速度大小。联立上述各式，即可解得

$$v_{Br} = \sqrt{2gr + \frac{Ir^2\omega^2}{I+mr^2}}, v_{Cr} = 2\sqrt{gr}$$

故小球在 B 点处的速度大小为

$$v_B = \sqrt{v_{Br}^2 + \omega_B^2 r^2} = \sqrt{2gr + \frac{mr^2+2I}{(I+mr^2)^2}Ir^2\omega^2}$$

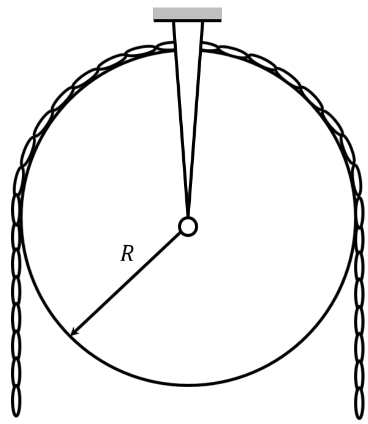
此时圆环角速度大小为

$$\omega_B = \frac{I}{I+mr^2}\omega$$

而小球在 C 点处的速度和圆环角速度则分别为

$$v_C = 2\sqrt{gr}, \omega_C = \omega$$

题 6.73　链条长 l，单位长度的重量为 ρ，悬挂在半径为 R 的滑轮上。滑轮均质，重量为 Q 可以看做是圆盘。现给一小扰动，使链条由平衡位置无初速滑下。设链与轮之间无相对滑动。试求链条下落的长度和下落速度的关系。



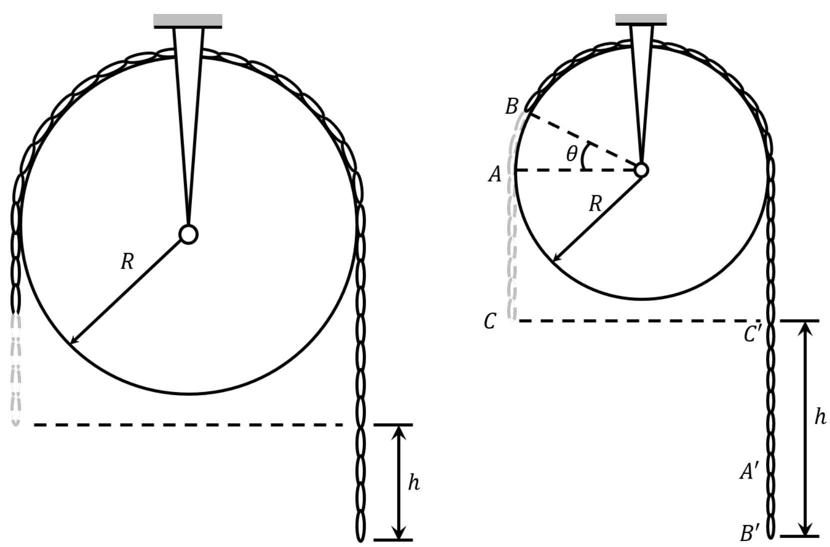
题 6.73 图

解：　设下落距离为 h。当 $h < \frac{l-\pi R}{2}$ 时，如题 6.73 解图左图所示，有

$$\rho hgh = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2 + \frac{1}{2}\rho l(\omega R)^2$$

得

$$v = \sqrt{\frac{4\rho}{Q+2\rho gl}gh}$$



题 6.73 解图

当 $\frac{l-\pi R}{2} < h < \frac{l+\pi R}{2}$ 时，如题 6.73 解图右图所示，由几何关系有

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{l-2h}{2R}$$

记弧 AB 段链条的质心相对定滑轮中心的高度为 e，则

$$e = \frac{\int_A^B y\,\mathrm{d}m}{\rho\left(h-\frac{l-\pi R}{2}\right)} = \frac{R^2\left(1-\sin\frac{l-2h}{2R}\right)}{h-\frac{l-\pi R}{2}}$$

这圆弧链条 AB 可视为移动到图中 $A'B'$ 处，此时这一段链条的质心与原来链条的质心的高度差为

$$H = e + (l - \pi R) + \frac{1}{2}\left(h - \frac{l - \pi R}{2}\right)$$

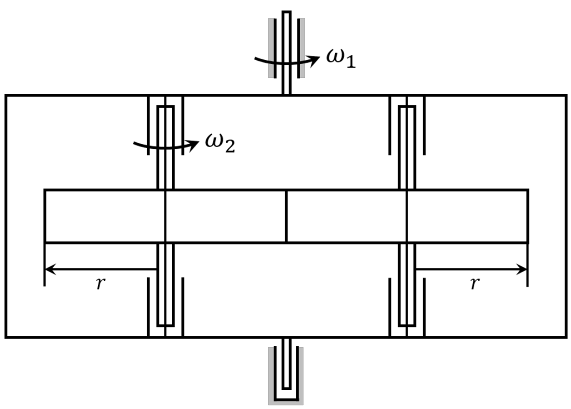
而另一段链条 AC 可视为平移到图中 $A'C'$ 处，由此利用机械能守恒即得：

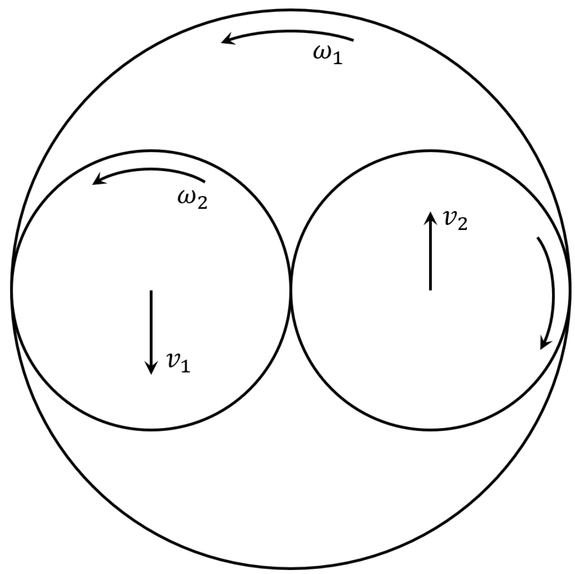
$$\rho\frac{l-\pi R}{2}\cdot g\cdot\frac{l-\pi R}{2} + \rho\left(h - \frac{l-\pi R}{2}\right)gH = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2\omega^2 + \frac{1}{2}\rho l(\omega R)^2$$

整理后即可得到 v 与 h 的关系如下；

$$\left(\frac{Q}{4\rho g^2} + \frac{l}{2g}\right)v^2 = \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}(l-\pi R)h + R^2\left(1 - \sin\frac{l-2h}{2R}\right) - \frac{(l-\pi R)^2}{8}$$

题 6.74 ω_1 为框架角速度，ω_2 为左齿轮相对于框架的角速度，两齿轮均可视为均质圆盘，其质量均为 m，半径均为 r，略去框架质量。试求整个机构的动量、动能及对 z 轴的动量矩。





题 6.74 图

解： 由于系统的质心始终静止，故整个机构的动量 $p=0$，下面来求动能：

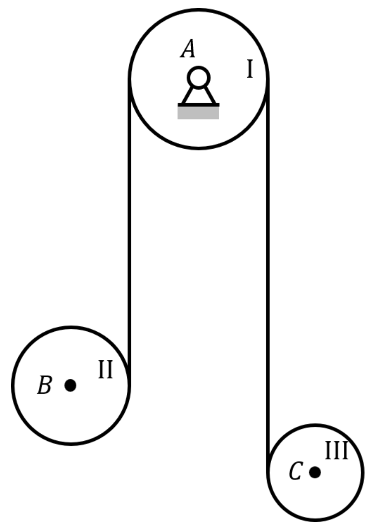
取框架为参考系，由接触点处切向速度相同可知右齿轮的相对角速度为 $\omega_2' = -\omega_2$，则绝对角速度为 $\omega_3 = \omega_2' + \omega_1 = \omega_1 - \omega_2$，而左齿轮的绝对角速度为 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$。而左齿轮的中心在框架参考系下的速度大小为 $v_1' = 0$，故其绝对速度大小为 $v_1 = v_1' + \omega_1 r = \omega_1 r$，同理可得 $v_2 = \omega_1 r = v_1$。而动能：

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I\omega_0^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_3^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ &= m\omega_1^2 r^2 + \frac{1}{2}mr^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \end{aligned}$$

动量矩则为

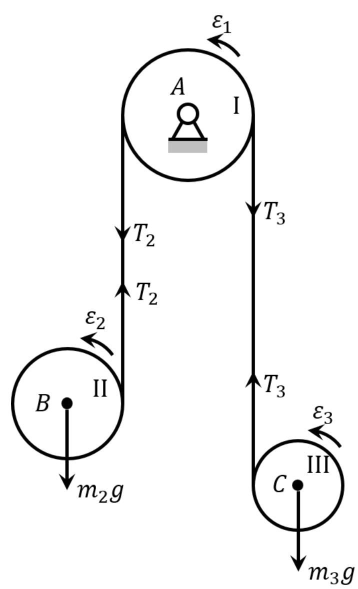
$$L = mv_1 r + mv_2 r + I\omega_0 + I\omega_3 = 3m\omega_1 r^2$$

题 6.80　定滑轮 I 的半径为 r_1，质量是 m_1，滑轮上跨有绳子。绳的两端分别缠在轮 II 和轮 III 上, 这两轮的半径分别是 r_2 和 r_3 质量分别是 m_2 和 m_3 但 $m_2 > m_3$。设绳的下垂部分都是铅直的，绳与各轮间都没有相对滑动，绳的质量略去不计，各轮都可以看为均质圆柱. 试求滑轮 I 的角加速度以及轮 II、轮 III 的质心的加速度。



题 6.80 图

解:　取竖直向下为正方向，再设左侧绳中张力为 T_2，右侧绳中张力为 T_3，如下题 6.80 解图所示，则



题 6.80 解图

对于轮 I，有

$$(T_2 - T_3)r_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \varepsilon_1$$

对于轮 II，有

$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2 a_2 \\ T_2 r_2 &= \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

对于轮 III，同理有

$$\begin{aligned} m_3 g - T_3 &= m_3 a_3 \\ -T_3 r_3 &= \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \varepsilon_3 \end{aligned}$$

再利用绳子不可伸长的性质，得到:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 r_1 &= -a_3 + \varepsilon_3 r_3 \\ &= a_2 + \varepsilon_2 r_2 \end{aligned}$$

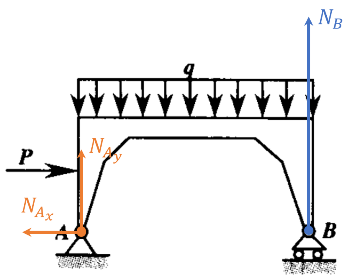
联立上述各式，即可解得

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2(3m_1 + 3m_2 + m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)} g \\ a_3 &= \frac{2(3m_1 + m_2 + 3m_3)}{3(3m_1 + 2m_2 + 2m_3)} g \\ \varepsilon_1 &= \frac{2(m_2 - m_3)}{3m_1 + 2m_2 + 3m_3} \cdot \frac{g}{r_1} \end{aligned}$$

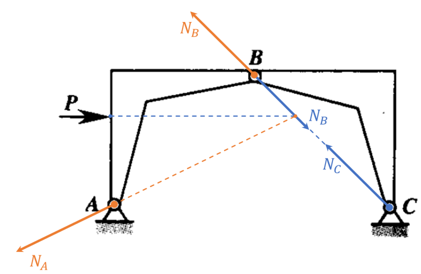
第七章　刚体静力学

题 7.2　画出下列物体的受力图（原图略）

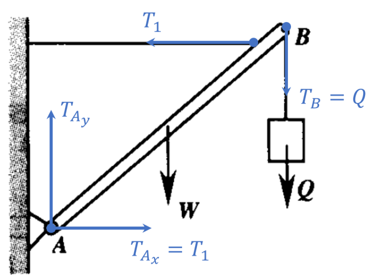
解：　如下图所示



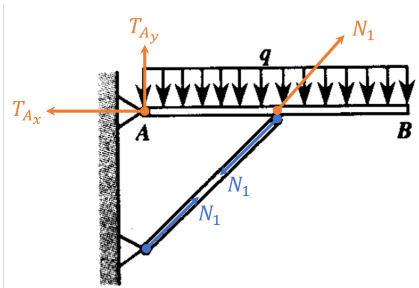
（a）



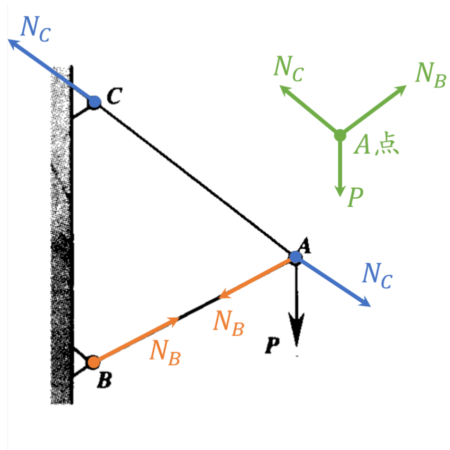
（b）



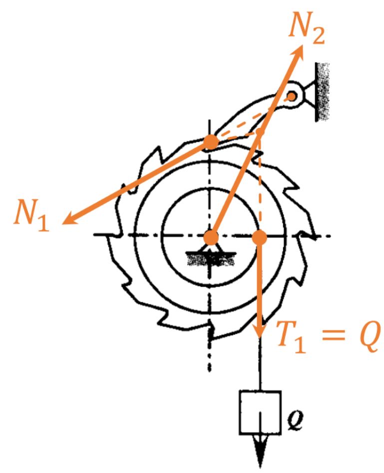
（c）



（d）



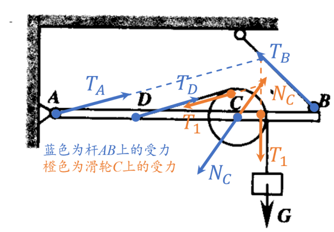
(e)



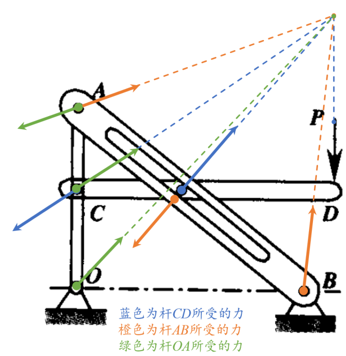
(f)

题 7.3　画出下列注有字母物体的受力图（原图略），各接触面均为光滑面，未画出重力的物体，其重量不计。

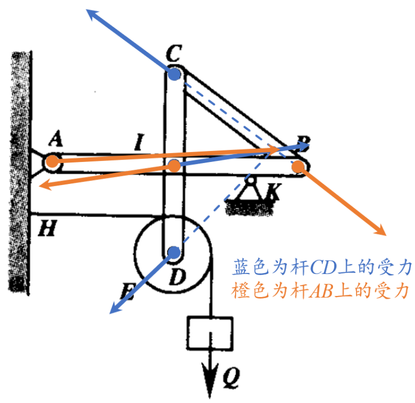
解：　如下图所示：



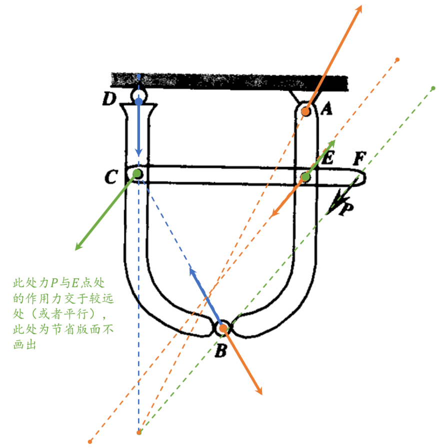
(a)



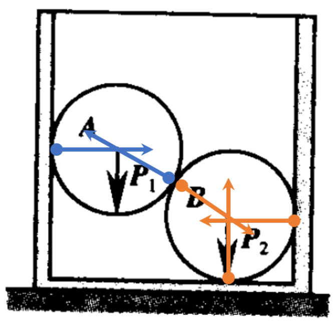
(b)



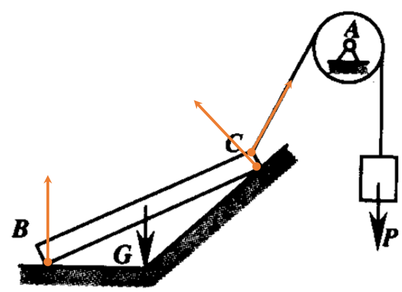
（c）



（d）



（e）



（f）

题 7.11　试分析驾驶员脚蹬机构中各杆受力的情况（原图略）。

解：　如下图所示：

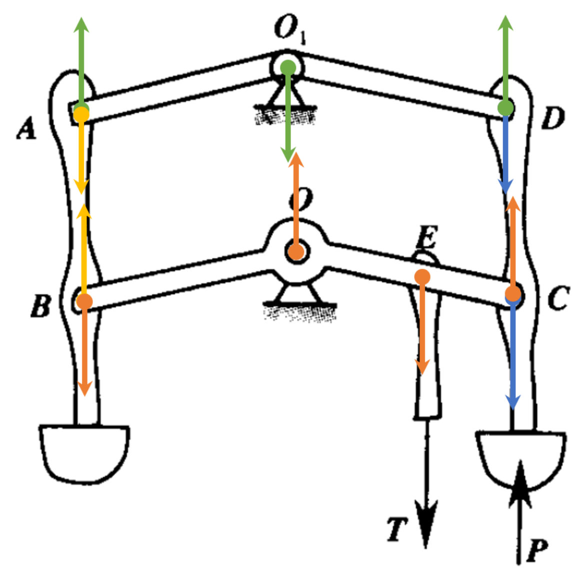
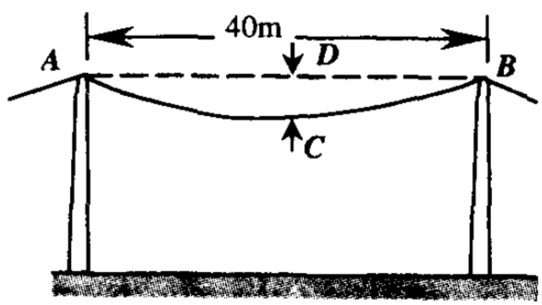


图 7.7: 题 7.11 解图

题 7.15　如图所示，输电线 ACB 架在两电线杆之间，形成一下垂曲线，下垂距离 $CD = f = 1\text{m}$，两电线杆间距离 $AB = 40\text{m}$。电线 ACB 段重 $Q = 400\text{N}$，求电线的中点和两端的拉力。



题 7.15 图

解：　取一半电线，易知电线中点的拉力为水平方向。又知电线的下垂高度 1m 远小于电线的长度 40m，从而可以近似认为一半电线的重力作用线约在其跨度中点位置，如下图所示。

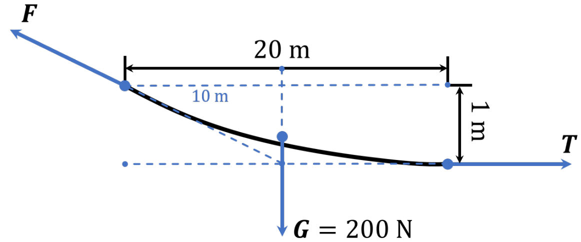
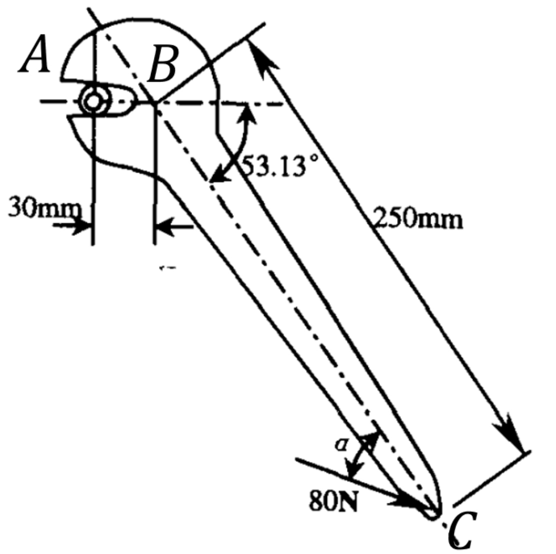


图 7.8: 题 7.15 解图

利用三力汇交原理即可得到端点作用力的方向，而一半电线的重量大小为 $G = 200\text{N}$，由平

衡条件可以算出中点拉力大小 $T=2000\text{N}$，而端点拉力大小为 $F=200\sqrt{101}\text{N}\approx 2010\text{N}$

题 7.18 80N 的力作用于扳手柄端，如图所示。



题 7.18 图

(1) 当 $\alpha=75^\circ$ 时，求此力对螺钉中心之矩；

(2) 当 α 为何值时，该力矩为最小值；

(3) 当 α 为何值时，该力矩为最大值。

解： 首先求解图中 $\angle ACB=\beta$ 的大小。利用余弦定理可以求得 AC 边的长度为 $AC=269.07\text{mm}$，再由正弦定理可以求得 β 的正弦值 $\sin\beta=\frac{30}{AC}\sin 53.13^\circ=0.089 \implies \beta=5.12^\circ$。而力 F 对螺钉中心的矩为 $M=F\cdot\overline{AC}\sin(\alpha-\beta)$

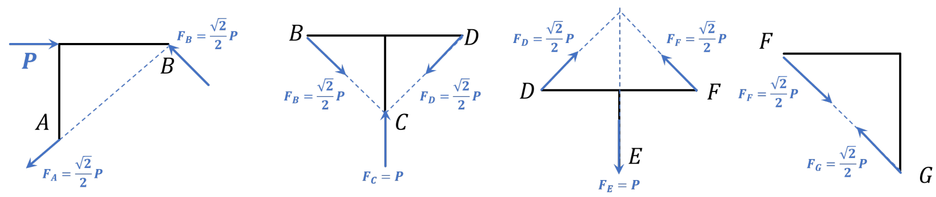
(1) $M|_{\alpha=75^\circ}=80\times 269.07\times\sin(75^\circ-5.12^\circ)\text{N}\cdot\text{mm}=20.21\text{N}\cdot\text{m}$；

(2) 当 α 等于 $\beta=95.12^\circ$ 时有力矩最大值；

(3) 当 α 等于 $\beta=5.12^\circ$ 时有力矩最小值。

题 7.19 拱架组由三个三铰拱组成，如图所示（原图略）。试求在水平力 P 作用下支座 A,E,C,G 的约束反力。

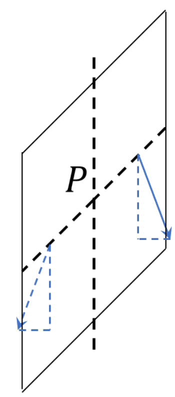
解： 如下图所示：



题 7.19 图

题 7.25　证明：作用在一刚体上的任何力系（设第二不变量不为零），能用与中心线成同一角度且大小相等的两个力来代替。

证明　由于第二不变量 $\vec{L}_A \cdot \vec{R} \neq 0$，故此力系必为空间力系。将 $\vec{L}_A$ 分解为与 $\vec{R}$ 平行的分量 $\vec{L}_{\parallel}$ 和与 $\vec{R}$ 垂直的分量 $\vec{L}_{\perp}$。由力的平移定理可以知道 $\vec{L}_{\perp}$ 和 $\vec{R}$ 可以简化为过某点 P 的合力 $\vec{R}_P$，此时 $\vec{L}_{\parallel}$ 与 $\vec{R}_P$ 即构成力螺旋。而力螺旋又可等价为如右图所示的与中心线成同一角度且大小相等的两个力，即原命题得证。



题 7.25 解图

题 7.26　证明：任何力系对空间任意两点主矩在通过该两点之轴的投影相等。

证明　由力的平移定理：

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \vec{R} \times \overrightarrow{BA}$$

两边点乘 $\overrightarrow{BA}$，即得

$$\vec{L}_A \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{L}_B \cdot \overrightarrow{BA} + (\vec{R} \times \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{L}_B \cdot \overrightarrow{BA}$$

原命题得证。

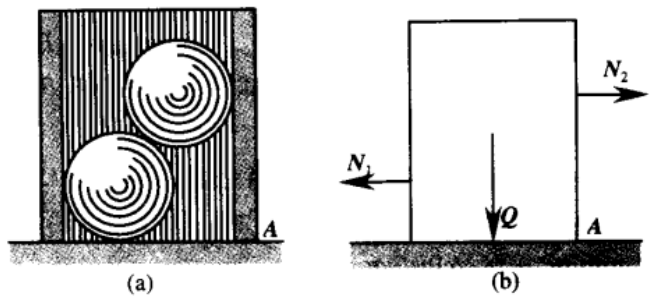
题 7.27　已知空间力系对其简化中心的主矩的大小有定值，求该简化中心的轨迹。

解：　设空间力系对 O 点 $(0,0,0)$ 的主矢为 $\vec{R}_O = (R,0,0)$，主矩为 $\vec{L}_O = (L_x, L_y, L_z)$，由于其对简化中心 $P(x,y,z)$ 的主矩大小有定值，故有

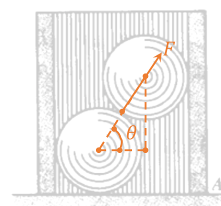
$$\vec{L}_P = \vec{L}_O + \vec{R}_O \times \overrightarrow{OP} = (L_x, L_y - Rz, L_z + Ry) \implies |\vec{L}_P|^2 = L_x^2 + (L_y - Rz)^2 + (L_z + Ry)^2 = const$$

即简化中心的轨迹是一个圆柱面或直线。

题 7.38　如图所示，无底的圆柱形空筒放在光滑的固定面上，内放两个重球。设每个球重为 P，半径为 r，圆筒的半径为 R。若不计各接触面的摩擦，不计圆柱筒厚度，求圆筒不致翻倒的最小重量 Q_{min}。



题 7.38 图



题 7.38 解图

解:　如右图所示，由几何关系可知 $\cos\theta = \frac{R-r}{r}$。对筒内两球整体分析可以得知 $N_1 = N_2 = N$，故筒翻倒时只会向右翻倒。取 A 为取矩点，则由题 7.38 图 (b) 有恰好翻倒时有:

$$N(r + 2r\sin\theta) - Nr - Q_{min}R = 0$$

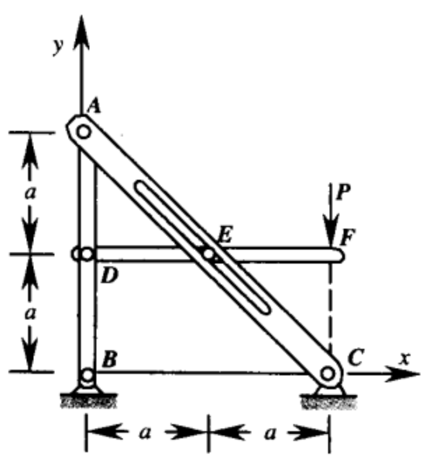
整理即得

$$Q_{min} = \frac{2r}{R} N \sin\theta$$

而对上方的球进行受力分析可以得到 $P/N = \tan\theta$，代入上式即可得到

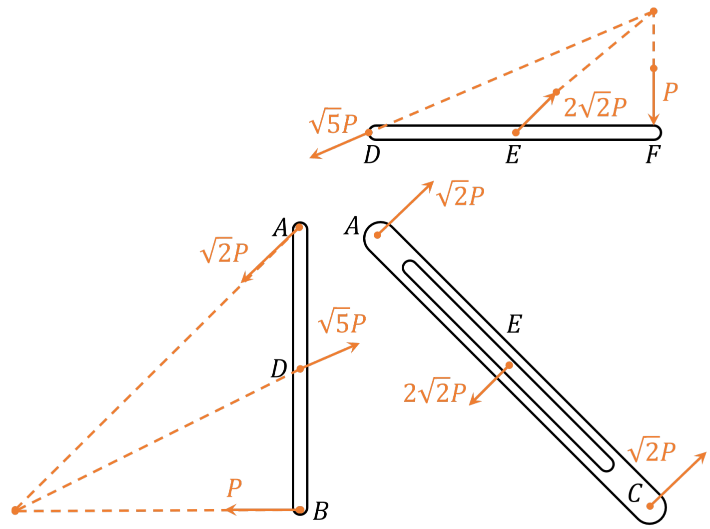
$$Q_{min} = 2P\frac{R-r}{r}$$

题 7.39　构架 ABC 由三根杆 AB, AC 和 DF 组成，如图所示。杆 DF 上的销子 E 可在杆 AC 的槽内滑动。求在水平杆 DF 的一端作用有铅垂力 $\vec{P}$ 时，杆 AB 上的点 A, D 和 B 所受的力。



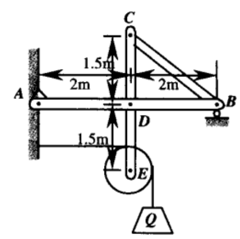
题 7.39 图

解:　如下图所示；



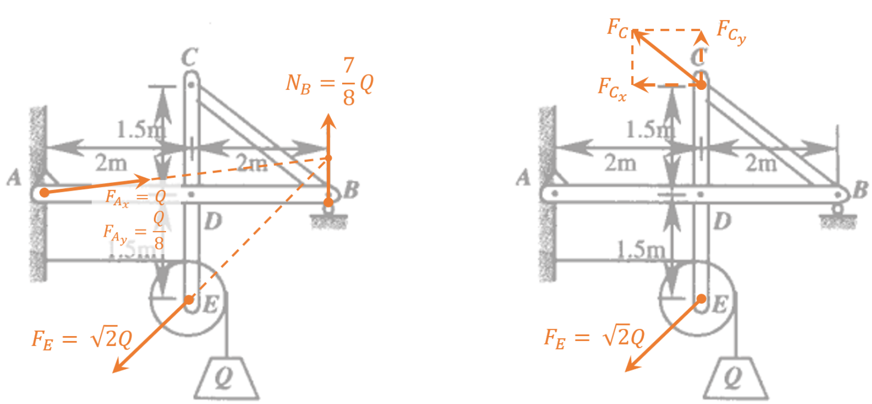
题 7.39 图

题 7.40　物体 Q 重 1200N，由三杆 AB, BC 和 CE 所组成的构架和滑轮 E 支持，如图所示。已知 $AD = DB = 2$m，$CD = DE = 1.5$m，不计杆和滑轮重量。求支承 A 和 B 处的约束反力，以及杆 BC 的内力 S。



题 7.40 图

解：　由题意，容易得到构架 $ABCDE$ 仅在 A, B, E 三点处受到外力，故其为三力构件，且 E 点受力 F_E 易得为图中所示，利用三力平衡求得 F_A 和 B 点处的约束反力 N_B 如下题 7.40 解图 (a) 所示。



(a)　(b)

题 7.40 解图

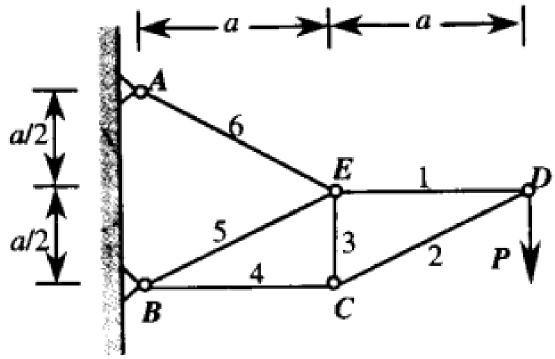
又知 BC 杆为二力杆，故内力及 C 点处受力 F_C 的方向必为如下题 7.40 解图 (b) 所示。此

时考虑杆 CDE[1]，取 D 为取矩点，则由力矩平衡可以得到

$$F_{C_x} = Q$$

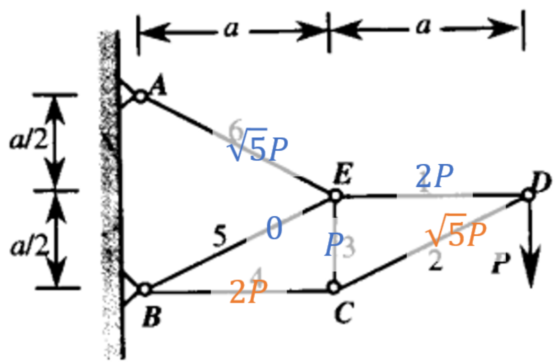
故 BC 杆内力 $S = F_C = \frac{5}{4}F_{C_x} = \frac{5}{4}Q = 1500\text{N}$，而 $F_A = \frac{\sqrt{65}}{8}Q = 1209.34\text{N}$，$N_B = 1050\text{N}$

题 7.41 平面桁架的载荷如题 7.41 图所示，求各杆的内力。



题 7.41 图

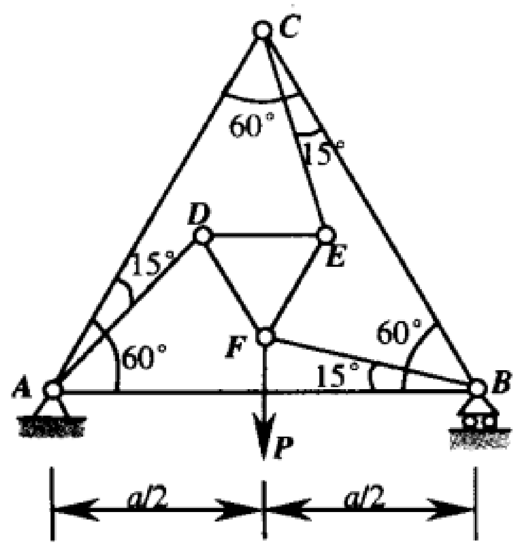
解： 如题 7.41 解图所示，其中橙色表示该杆受压力，蓝色表示受拉力。



题 7.41 解图

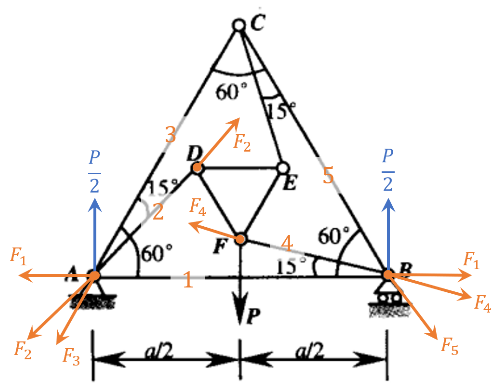
题 7.43 平面桁架的支座和载荷如图所示，求杆 AB 的内力。

[1] 此处不可选取 B 点受力分析，因构架 $ABCDE$ 并非理想构架，B 点处受的约束反力并不作用在 B 的轴上，不能认为 N_B 作用在 B 点上而后对 B 点进行受力分析。



题 7.43 图

解:　记 AB, AD, AC, BF, BC 分别为 $1\sim 5$ 号杆，其上力分别记为 $F_1\sim F_5$ 并取杆受压为正，如下图所示:



题 7.43 解图

首先对整体可以求得 A, B 两点处的约束反力均为 $P/2$，然后对 A 点由受力平衡可以得到:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F_2+\frac{\sqrt{3}}{2}F_3=\frac{P}{2}$$

$$F_1+\frac{\sqrt{2}}{2}F_2+\frac{1}{2}F_3=0$$

同理，对 B 点有

$$F_1+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}F_4+\frac{1}{2}F_5=0$$

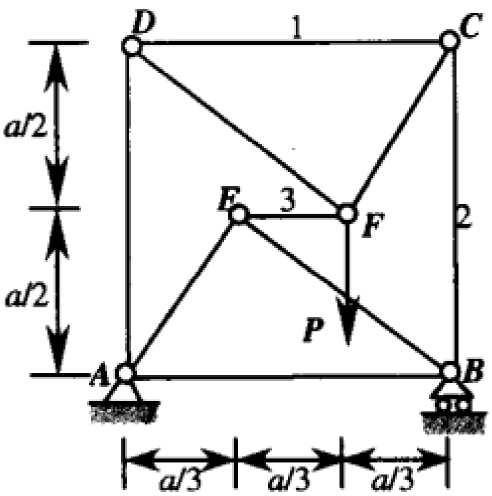
$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}F_4+\frac{\sqrt{3}}{2}F_5=\frac{P}{2}$$

再对三角形 DEF 用截面法，取三角形 DEF 为整体，以 E 为取矩点，从而可以得到[2]

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F_2+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}F_4=\frac{P}{2}$$

上述五式已经利用了 $\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，联立可以解得 $F_1=F_{AB}=-\frac{6+\sqrt{3}}{18}P\approx -0.4296P$

题 7.44　平面桁衔架的支座和载荷图所示，求杆 1，2 和 3 的内力。

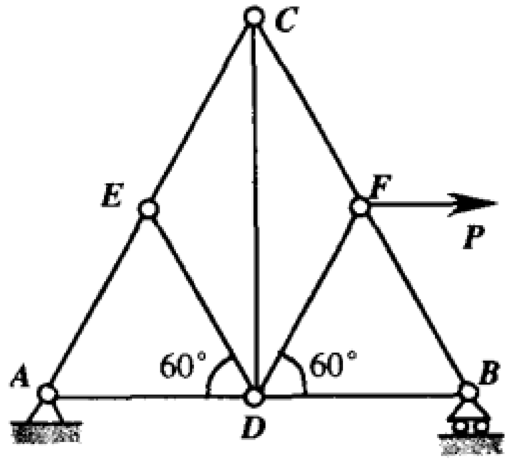


题 7.44 图

解：　首先对整体，由平衡条件可以得到 A,B 处的约束反力分别为 $N_A=\frac{P}{3},N_B=\frac{2P}{3}$，方向均为竖直向上。使用截面法，对三角形 CDF：由于三角形在 C,D 处受力均沿竖直方向，由三力平衡原理可知在 E 处受力也应沿竖直方向，即杆 3 内力为 0，再利用平衡条件可以求得 AD,BC 两杆的内力分别为 $F_{AD}=\frac{P}{3},F_2=F_{BC}=\frac{2P}{3}$，又知 $\tan\angle DCF=\frac{3}{2}$，故杆 1 内力为 $F_1=F_{BC}\cot\angle DC=\frac{4P}{9}$，且杆 1 和杆 2 均受压。

题 7.45　平面桁架的支座和载荷如图所示，ABC 为等腰三角形，E,F 为两腰中点，又 $AD=DB$，求杆 CD 的内力 $\vec{S}$。

[2] 由于三角形 DEF 为正三角形，三边长相等，故下式中已经约去边长长度 L



题 7.45 图

解: 对 C 点分析，由三力平衡条件可知杆 CE 和杆 CF 内力大小必相等且受力状态也相同[3]，即

$$F_{CE} = F_{CF}$$

再对 E 点分析，由于杆 AE 和杆 CE 同向，故 DE 杆中内力 F_{DE} 必为 0，且

$$F_{AE} = F_{CE} = F_2$$

对整体再有平衡条件，可以得到 A 点处的约束反力为 $F_{A_x} = P$，负号表示方向水平向左，$F_{A_y} = -\frac{\sqrt{3}P}{4}$，负号表示方向沿竖直向下。

再设杆 AD 的内力为 F_1，以受压为正，则对 A 点有受力平衡：

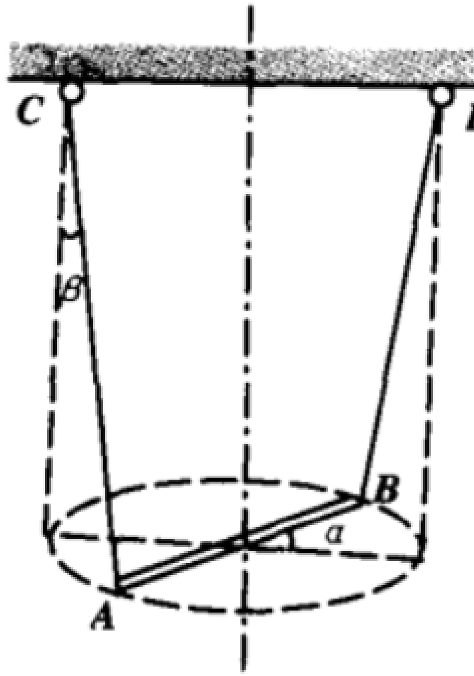
$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_2 = \frac{P}{2}$$

$$\frac{1}{2}F_2 = P + F_1$$

联立解得 $F_2 = \frac{1}{2}P$，从而 $F_{CE} = F_{CF} = F_2 = \frac{1}{2}P \implies S = \frac{\sqrt{3}P}{2}$，且 CD 杆受压。

题 7.55 均质杆 AB 的两端各用长 l 的绳吊住，绳的另一端分别固定在 C 和 D 两点上。杆长 $AB = CD = 2x$，杆重 P。设将杆绕铅直轴线转过 α 角，求使杆在此位置保持平衡所需的力偶矩 M 以及绳内的拉力 T。

[3]否则两杆内力合力不可能沿竖直方向（即与杆 CD 内力平行）



题 7.55 图

解:　由竖直方向上受力平衡可知

$$2T\cos\beta = P \implies T = \frac{P}{2\cos\beta}$$

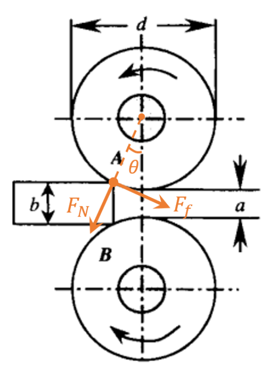
再在水平面上由力矩平衡有

$$M = 2T\sin\beta x = 2Px\cot\beta$$

将 $\sin\beta = \frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{l}$ 代入上两式，即得：

$$T = \frac{P}{2\sqrt{1-(2x\sin\frac{\alpha}{2}/l)^2}}, M = 2Px\sqrt{\frac{l^2}{4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1}$$

题 7.63　压延机由两轮构成，两轮的直径各为 $d = 50\text{cm}$，轮间的间隙为 $a = 0.5\text{cm}$，两轮反向转动，如图上箭头所示。已知烧红的铁板与铸铁轮间的摩擦系数为 $f = 0.1$，问能压延的铁板的厚度 b 是多少?（**提示**：欲使机器可操作，则铁板必须被两转动轮带动，亦即作用在铁板 A, B 处的反作用力和摩擦力的合力必须水平向右。）



题 7.63 图

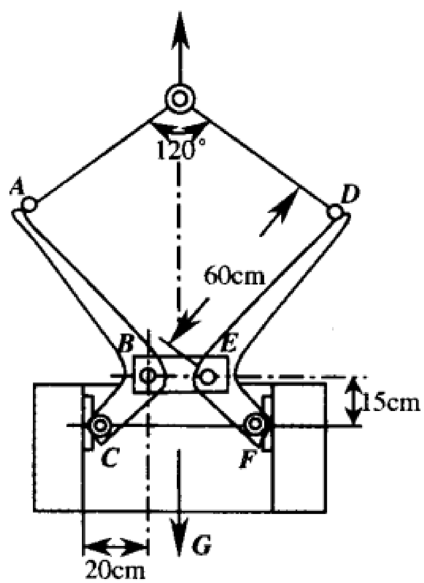
解:　如下图所示，若要反作用力和摩擦力的合力水平向右，则应有：

$$F_f\cos\theta - F_N\sin\theta > 0 \implies f > \tan\theta$$

而由几何关系可以得到 $\cos\theta = \frac{d/2-(b-a)/2}{d/2} = \frac{d+a-b}{d}$，代入
上式整理即可得到

$$0.5\text{cm} < b < d + a - \frac{d}{\sqrt{f^2+1}} = 0.7481\text{cm}$$

题 7.67 一起重用的夹具由 ABC 和 DEF 两个相同的弯杆组成，并用杆 BE 连接，两端 B 和 E 都是铰链，尺寸如图所示。试问要能提起重物 G 时，夹具与重物接触面处的摩擦系数 f 应为多大?

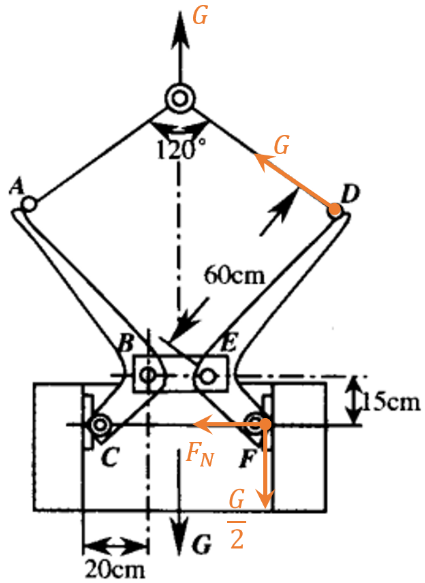


题 7.67 图

解: 如下题 7.67 解图所示，对杆件 DEF，取 E 为取矩点，则有力矩平衡;

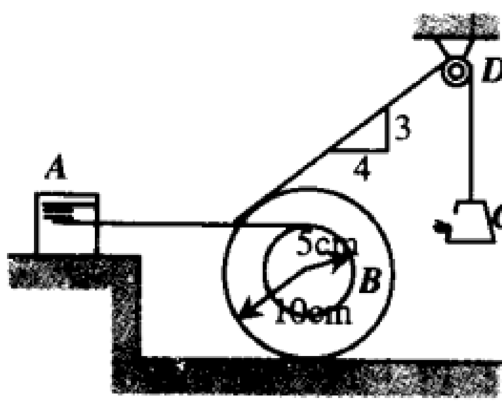
$$F_N \times 15 + F_f \times 20 = G \times 60$$

其中 $F_f = G/2$ 为 F 处受到的摩擦力，解得 $F_N = \frac{10}{3}G$，故摩擦系数至少为 $f = \frac{F_f}{F_N} = \frac{3}{20}$



题 7.67 解图

题 7.69　如图所示，A 块重 500N，轮轴 B 重 1000N，A 块与轮轴的轴以水平绳连接。在轮轴外绕以细绳，此绳跨过一光滑的滑轮 D，在绳的端点系一重物 C。如 A 块与平面间的摩擦系数为 0.5，轮轴与平面间的摩擦系数 0.2，试求使物体系平衡时物体 C 的重量最大值。



题 7.69 图

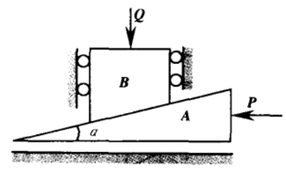
解：　显然，当 C 的质量最大时，A 与地面的摩擦力必达到最大，记轮轴与地面接触点为 O，则对轮轴，以 O 为取矩点由力矩平衡可以得到：

$$F_{f_A}\times 15=G_C(1+\cos\theta)\times 10\implies G_C=\frac{625}{3}\mathrm{N}\approx 208.33\mathrm{N}$$

此时，轮轴对地面的压力 $N=G_B-G_C\sin\theta=875\mathrm{N}$，而轮轴与地面的最大静摩擦力 $N_f=0.2\times 875\mathrm{N}=175\mathrm{N}>G_C\sin\theta=125\mathrm{N}$，成立。

即 C 的最大重量为 $\frac{625}{3}\mathrm{N}\approx 208.33\mathrm{N}$。

7.71　尖劈顶重装置如图所示，尖劈 A 的顶角为 α，在 B 块上受力 Q 的作用。A 与 B 块间的摩擦系数为 f（其他有滚珠处表示光滑）。如不计 A 和 B 块的重量，试求：(1) 顶住重物所需的力 P 的值；(2) 使重物不向上移动所需的力 P 的值。



题 7.71 图

解:

(1) 此时即重物恰不下滑，故有平衡方程:

$$N\cos\alpha + fN\sin\alpha = Q$$

$$P + fN\cos\alpha = N\sin\alpha$$

联立即可解得

$$P = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha}Q$$

(2) 此时即重物恰不上滑，故有平衡方程:

$$N\cos\alpha - fN\sin\alpha = Q$$

$$P - fN\cos\alpha = N\sin\alpha$$

联立即可解得

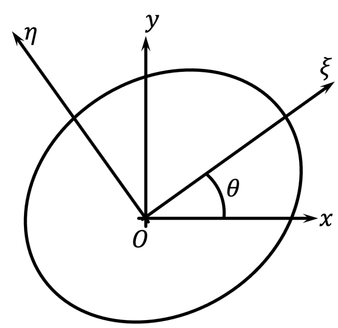
$$P = \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}Q$$

第八章　刚体定点运动动力学

题 8.1　设平面刚体对 O 点的转动惯量和惯性积为 I_x, I_y, I_{xy}，证明其主轴与 Ox 轴的夹角为

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$

解：　由题意可得如题 8.1 示意图所示的坐标系 Oxy 和 $O\xi\eta$，其中 $O\xi\eta$ 为主轴坐标系：



题 8.1 示意图

由坐标变换：

$$\begin{cases} \xi = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \eta = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

而在主轴坐标系中有惯性积

$$I_{\xi\eta} = \int \eta\xi \,\mathrm{d}m = 0$$

将上述坐标变换代入惯性积中，得到：

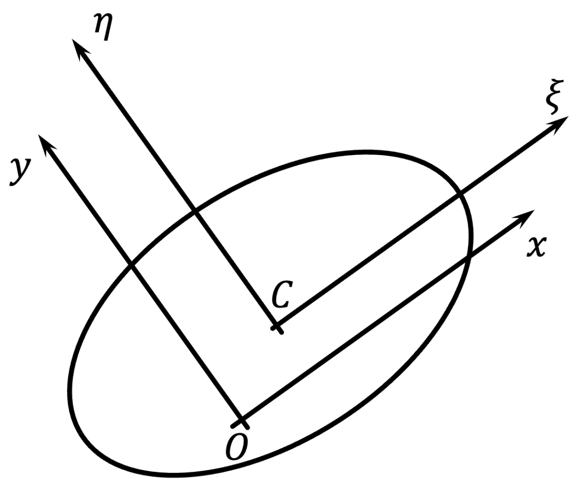
$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \int (x\cos\theta + y\sin\theta)(-x\sin\theta + y\cos\theta)\,\mathrm{d}m \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\int xy\,\mathrm{d}m - \sin\theta\cos\theta\int x^2\,\mathrm{d}m + \sin\theta\cos\theta\int y^2\,\mathrm{d}m \\ &= \cos 2\theta I_{xy} + \frac{1}{2}\sin 2\theta(I_x - I_y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

即得：

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \implies \theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right)$$

题 8.2　质量为 M 的薄片，其质心为 C，$C\xi$，$C\eta$ 是它在薄片平面内的主轴，O 点在薄片平面内，Ox，Oy 相应地与 $C\xi$，$C\eta$ 平行。求证：薄片相对于 Oxy 的惯性积是 Mab，其中 a,b 是 C 点在 Oxy 中的坐标。如果薄片关于 $C\xi$,$C\eta$ 的主惯量分别是 nMa^2,mMb^2, 并且薄片在 O 点有一与 Ox 轴成 $45°$ 角的主轴，求证：

$$(n-1)a^2=(m-1)b^2$$



题 8.2 示意图

解:　令 Oxy 系中坐标为 (x,y)，$C\xi\eta$ 系中的坐标为 (ξ,η), 则有，

$$\begin{cases} x=\xi+a \\ y=\eta+b \end{cases}$$

薄板相对于 Oxy 的惯性积为，

$$I_{xy}=\sum m_i x_i y_i=\sum m_i\left(\xi_i+a\right)\left(\eta_i+b\right)=\sum m_i\xi_i\eta_i+b\sum m_i\xi_i+a\sum m_i\eta_i+ab\sum m_i$$

因为 C 为质心，$C\xi$，$C\eta$ 为薄板平面内的主轴，

$$\begin{cases} \sum m_i\xi_i\eta_i=0 \\ \sum m_i\xi_i=M\xi_C=0 \\ \sum m_i\eta_i=M\eta_C=0 \end{cases}$$

所以，薄板相对于 Oxy 的惯性积 $I_{xy}=Mab$

设在 O 点有一与 Ox 轴成 $45°$ 的主轴为 $O\beta$、$O\eta$, 则有

$$\begin{aligned} I_\xi&=\sum m_i\eta_i^2=\sum m_i\left(y_i-b\right)^2=\sum m_i y_i^2-2b\sum m_i y_i+b^2\sum m_i^2 \\ &=I_x-2bMy_C+Mb^2=I_x-2Mb^2+Mb^2=I_x-Mb^2 \end{aligned} \tag{8.1}$$

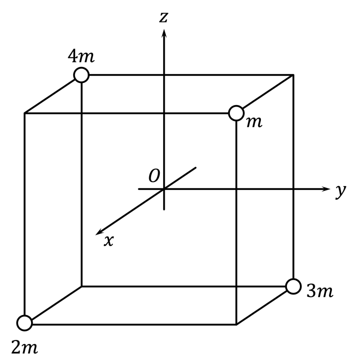
同理可得，

$$I_\eta=I_y-Ma^2 \tag{8.2}$$

将 $\alpha=45°$ 代入习题 8.1 中的结论，得到 $I_x=I_y$, 联立（1）、（2）两式即可得出 $(n-1)\,a^2=(m-1)\,b^2$

题 8.3 质量分别为 m，$2m$，$3m$ 和 $4m$ 的四个质点，分别位于 (a,a,a),$(a,-a,-a)$,$(-a,a,-a)$，$(-a,-a,a)$ 四点上，质点与质点之间用轻刚性杆相连，使这个质点系成为一个刚体。求这个刚体关于坐标原点的主惯量和相应的主轴的方向.

解： 建立如题 8.3 示意图所示的坐标系：根据



题 8.3 示意图

$$I_x=\sum_i m_i\left(y_i^2+z_i^2\right),\quad I_y=\sum_i m_i\left(x_i^2+z_i^2\right),\quad I_z=\sum_i m_i\left(y_i^2+x_i^2\right),$$
$$I_{xy}=\sum_i m_ix_iy_i,\quad I_{yz}=\sum_i m_iy_iz_i,\quad I_{xz}=\sum_i m_ix_iz_i,$$

计算得到惯量矩阵 $[I]$,

$$[I]=ma^2\begin{bmatrix}20&0&2\\0&20&4\\2&4&20\end{bmatrix}=ma^2[T]$$

$[T]$ 的特征值为，$J_1=60$、$J_2=1180$、$J_3=7600$

对于 $[H]=[T]-\lambda[E]$，有方程 $\lambda^3-J_1\lambda^2+J_2\lambda-J_3=0$ 成立，可以解得：

$$\lambda_1=20+2\sqrt{5}\quad\lambda_2=20\quad\lambda_3=20-2\sqrt{5}$$

即刚体关于坐标原点的主惯量为，

$$I_1=\left(20+2\sqrt{5}\right)ma^2\quad I_2=20ma^2\quad I_3=\left(20-2\sqrt{5}\right)$$

设每个主惯量对应的主轴方向分别为 $\vec{e_i}=(a_1^i,a_2^i,a_3^i)$，满足 $[H]\cdot[\vec{e_i}]^T=0$

当 $\lambda_1=20+2\sqrt{5}$, 有

$$[H_1]=\begin{bmatrix}-2\sqrt{5}&0&2\\0&-2\sqrt{5}&4\\2&4&-2\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

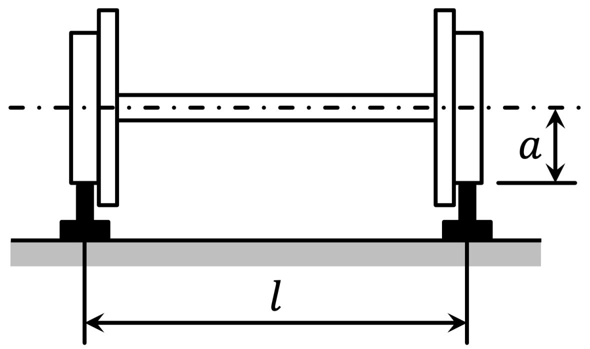
则与之对应的主轴方向 $\vec{e_1}=(a_1^1,a_2^1,a_3^1)$ 满足方程，

$$\begin{cases}-2\sqrt{5}a_1^1+2a_3^1=0\\-2\sqrt{5}a_2^1+4a_3^1=0\\2a_1^1+4a_2^1-2\sqrt{5}a_3^1=0\end{cases}$$

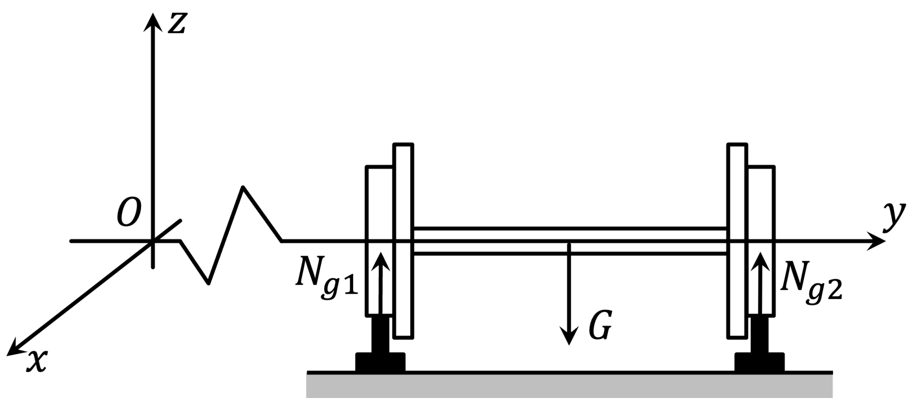
计算得到，$\vec{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(1, 2, \sqrt{5}\right)$

同理可得，$\vec{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)$、$\vec{e_3} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\left(1, 2, -\sqrt{5}\right)$

题 8.8　图示轮轴系统，共重 $P = 1400\text{kg}$，轮子半径 $a = 75\text{cm}$，回转半径 $\rho = \sqrt{0}.55a$，系统质心以等速度 $v = 20\text{m/s}$ 在半径 $R = 200\text{m}$ 的水平[1]圆周轨道上运动。如果两轮间的距离 $l = 1.5\text{m}$，求每个车轮对于道轨的正压力 N（$g = 9.82\text{m/s}^2$）。



解：　建立如下图所示坐标系，其中 O 点为圆形轨道圆心，坐标系与轮轴固连，Oy 轴与水平面的夹角为 $\theta = \arctan(a/R) = 0.212°$，则有：



系统的角速度

$$\vec{\omega} = \frac{v}{a}\vec{j} + \frac{v}{R}\vec{k}$$

且显然坐标系 $Oxyz$ 为主坐标系，其惯量矩阵为：

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

故

$$\vec{H}_0 = [I][\boldsymbol{\omega}] = \frac{I_y v}{a}\vec{j} + \frac{I_z v}{R}\vec{k} \implies \frac{\mathrm{d}\vec{H}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{I_y v^2}{aR}\vec{i}$$

[1]本题的表述不太完备。对于实际中的环形铁轨，其两条单轨之间必有一定高度差，才能让轮轴能够无滑动地运动，否则必须产生摩擦力或以外力介入来提供向心力。本题求解时采用前一种模型，即认为两条单轨之间存在高度差。

而相对 O 点的外力矩

$$\vec{L}_0 = [N_{lz}(R-l/2) + N_{rz}(R+l/2) - PgR]\vec{i}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_0}{\mathrm{d}t} = \vec{L}_0 \implies N_{lz}(R-l/2) + N_{rz}(R+l/2) - PgR = \frac{I_y v^2}{aR}$$

再由竖直方向上受力平衡得到

$$N_{lz} + N_{rz} = Pg$$

联立二式即可得到:

$$N_{lz} = \frac{Pg}{2} - \frac{I_y v^2}{aRl} = 6104\mathrm{N}, \quad N_{rz} = \frac{Pg}{2} + \frac{I_y v^2}{aRl} = 7644\mathrm{N}$$

题 8.9 求证：作定点运动的刚体，如果其动量矩向量与瞬时角加速度向量始终垂直，则此刚体的动能为常值。

解: 建立直角坐标系系 $Oxyz$，其中 Ox、Oy、Oz 是惯性主轴，动量矩向量可以表示为:

$$\vec{H}_O = \vec{H}_x + \vec{H}_y + \vec{H}_z = (I_x\omega_x, I_y\omega_y, I_z\omega_z)$$

而瞬时角加速度向量可以表示为 $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = (\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z)$
若 $\vec{H}_O \perp \vec{\varepsilon}$, 则有 $\vec{H}_O \cdot \vec{\varepsilon} = 0$, 所以,

$$I_x\omega_x \cdot \dot{\omega}_x + I_y\omega_y \cdot \dot{\omega}_y + I_z\omega_z \cdot \dot{\omega}_z = 0$$

即,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) = 0$$
$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = const = C$$

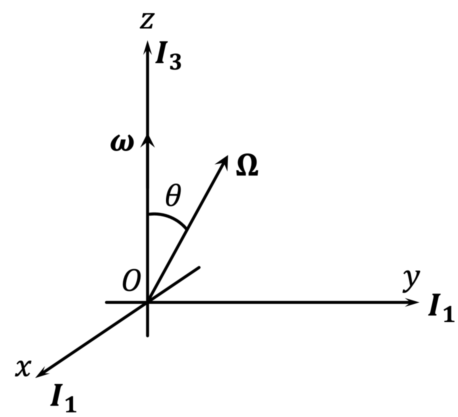
由课本 P310、P311 知，$C = 2E_k$, 因此 $E_k = const$, 此刚体动能为常数。

题 8.10 [2]轴对称的刚体绕对称轴上一定点作规则进动。证明：作用在刚体上的外力对定点的主矩为

$$\boldsymbol{L_0} = I_3(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega})\left(1 + \frac{I_3 - I_1}{I_3} \cdot \frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right)$$

解: 以 $\vec{\omega}$ 方向为 z 轴，$\vec{\omega}$、$\vec{\Omega}$ 交点为原点建立如下题 8.10 示意图所示的固连系:

[2]原题应该补充条件:$\vec{\omega}$ 方向沿 I_3 对应的主轴。



题 8.10 示意图

在此系中，绝对角速度 $\vec{\omega_a}=\vec{\omega}+\vec{\Omega}$, 自转角速度 $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$
动量矩向量为，

$$\begin{aligned}\vec{H_O}&=I_1\omega_{ax}\vec{i}+I_1\omega_{ay}\vec{j}+I_3\omega_{az}\vec{k}\\&=I_1\left(\omega_{ax}\vec{i}+\omega_{ay}\vec{j}+\omega_{az}\vec{k}\right)+\left(I_3-I_1\right)\omega_{az}\vec{k}\\&=I_1\vec{\omega_a}+\left(I_3-I_1\right)\left(\omega_z+\Omega_z\right)\vec{k}\\&=I_1\vec{\omega}+I_1\vec{\Omega}+\left(I_3-I_1\right)\left(\omega+\Omega\cos\theta\right)\vec{k}\\&=I_1\vec{\omega}+I_1\vec{\Omega}+\left(I_3-I_1\right)\left(1+\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right)\vec{\omega}\end{aligned}$$

规则进动，$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{\mathrm{d}t}=0$、$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\vec{\Omega}\times\vec{\omega}$ 由此计算动量矩向量的变化率，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{H_O}}{\mathrm{d}t}&=I_1\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}+\left(I_3-I_1\right)\left(1+\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right)\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\vec{\Omega}\times\vec{\omega}\right)\left[I_3+\left(I_3-I_1\right)\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right]\\&=I_3\left(\vec{\Omega}\times\vec{\omega}\right)\left(1+\frac{I_3-I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right)\end{aligned}$$

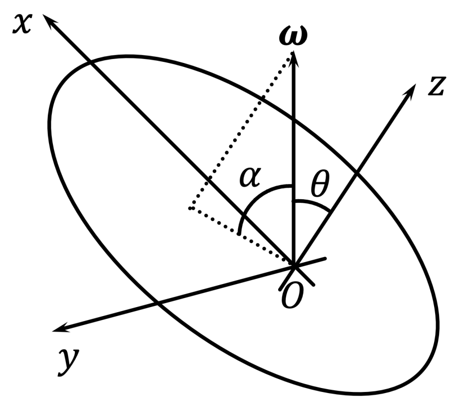
所以，作用在刚体上的外力对定点的主矩为

$$\vec{L_O}=I_3\left(\vec{\Omega}\times\vec{\omega}\right)\left(1+\frac{I_3-I_1}{I_3}\frac{\Omega}{\omega}\cos\theta\right)$$

题 8.11　一均质圆盘绕其质心作定点运动，不受外力矩作用。初始时给盘一角速度 $\boldsymbol{\omega}$，其方向与盘面夹角为 α，求圆盘的进动角速度 Ω 和章动角 θ。

解:　如题 8.11 示意图所示，建立动系 $Oxyz$:
易知 $I_z=\frac{1}{2}mR^2$、$I_x=I_y=\frac{1}{4}mR^2$，令 $I_x=I_y=I$，则有 $I_z=2I$
圆盘不受外力矩作用，即 $\vec{L}_O=0\implies\dfrac{\mathrm{d}\vec{H_O}}{\mathrm{d}t}=0$, 即:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H_O}}{\mathrm{d}t}=I_x\dot{\omega}_x\vec{i}+I_x\omega_x\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}+I_y\dot{\omega}_y\vec{j}+I_y\omega_y\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}+I_z\dot{\omega}_z\vec{k}+I_z\omega_z\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}$$



题 8.11 示意图

其中

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{i} = -\omega_y \vec{k} + \omega_z \vec{j} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{j} = -\omega_z \vec{i} + \omega_x \vec{k} \\ \dfrac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{k} = -\omega_x \vec{j} + \omega_y \vec{i} \end{cases}$$

化简可得到方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z &= 0 \\ \dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z &= 0 \\ 2\dot{\omega}_z &= 0 \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \omega_z &= \omega_{z0} = \omega \sin\alpha \\ \ddot{\omega}_y &= \omega_{z0} \dot{\omega}_x = -\omega_{z0}^2 \omega_y \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_{y0} \cos\omega_{z0} t = \omega \cos\alpha \cos\omega_{z0} t \\ \omega_x &= \dot{\omega}_y / \omega_{z0} = -\omega_{y0} \sin\omega_{z0} t \end{aligned}$$

在动系中, 角速度可表示为,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\phi - \dot{\theta} \sin\phi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{aligned}$$

比较系数得:

$$\begin{aligned} &\dot{\theta} = 0 \\ &\phi = -\omega_{z0} t \\ &\dot{\psi} \sin\theta = \omega_{y0} \\ &\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} = \omega_{z0} \end{aligned}$$

得到进动角速度

$$\Omega = \dot{\psi} = \sqrt{\omega_{y0}^2 + (2\omega_{z0})^2} = \omega \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$$

章动角

$$\theta = \arctan \frac{\omega_{y0}}{2\omega_{z0}} = \arctan\left(\frac{1}{2}\cot\alpha\right)$$

题 8.14　一刚体过其质心的主惯量是 I_1, I_2, I_3，它绕一过质心的固定轴转动，角速度在过质心的主轴上的方向余弦 (I_1, I_2, I_3) 是常量，固定轴约束在轴承上，不计摩擦。求证：

(1) 刚体的角速度为常量；

(2) 刚体作用在轴承上的力偶矩的大小为：

$$\omega^2\sqrt{[(I_2-I_3)l_2l_3]^2+[(I_3-I_1)l_3l_1]^2+[(I_1-I_2)l_1l_2]^2}$$

其中 ω 为角速度。

解：

(1) 建立固连在刚体上的动系 $Oxyz$，且 x, y, z 轴分别为惯量主轴，O 为此刚体的质心，设角速度

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$$

角速度的方向矢量为 $\hat{\boldsymbol{\omega}}=(l_1, l_2, l_3)$，再记 $|\boldsymbol{\omega}|=\omega$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{\omega}}+\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t}\omega \tag{1}$$

因为不计摩擦，所以角速度大小 ω 不变，又因为角速度在过质心的主轴上的方向余弦 $\hat{\boldsymbol{\omega}}=(l_1, l_2, l_3)$ 为常量，即

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t}=0$$

代入式 (1) 中可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=0$$

因此刚体的角速度是常量。

(2) 刚体的动量矩矢量为

$$\boldsymbol{H}_0=I_1\omega_x\boldsymbol{i}+I_2\omega_y\boldsymbol{j}+I_3\omega_z\boldsymbol{k}=(I_1l_1\boldsymbol{i}+I_2l_2\boldsymbol{j}+I_3l_3\boldsymbol{k})\omega$$

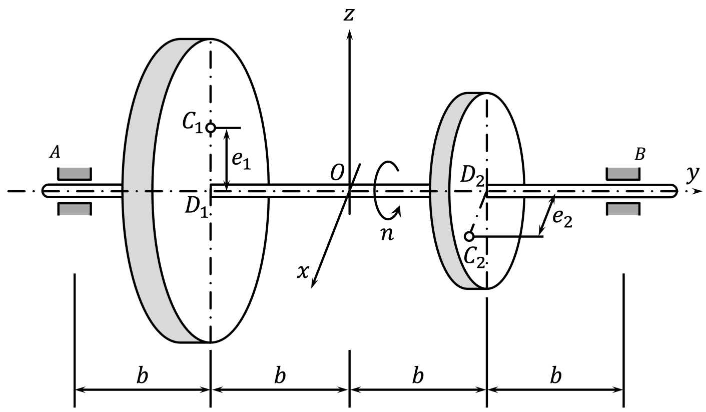
作用在轴承上的力偶矩为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_O=\omega^2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_1 & l_2 & l_3\\ I_1l_1 & I_2l_2 & I_3l_3\end{vmatrix}\\ =\omega^2\left[(I_3-I_2)\,l_2l_3\vec{i}-(I_3-I_1)\,l_1l_3\vec{j}+(I_2-I_1)\,l_1l_2\vec{k}\right]\end{aligned}$$

即得力偶矩大小为

$$L_O=\omega^2\sqrt{[(I_2-I_3)l_2l_3]^2+[(I_3-I_1)l_3l_1]^2+[(I_1-I_2)l_1l_2]^2}$$

题 8.17　某传动轴上安装有两个齿轮，质量分别是 m_1 和 m_2。偏心距分别 e_1 和 e_2。在图示瞬时，C_1D_1 平行于轴 z，D_2C_2 平行于轴 x, 轴的转速是 n(r/min)。求这时轴承 A 和 B 的附加动反力。



题 8.17 示意图

解:　建立如图所示的固连于杆 AB 上的坐标系 $Oxyz$，记两轴承上的动反力分别为

$$\boldsymbol{N}_A = N_{Ax}\boldsymbol{i} + N_{Ay}\boldsymbol{j} + N_{Az}\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{N}_B = N_{Bx}\boldsymbol{i} + N_{By}\boldsymbol{j} + N_{Bz}\boldsymbol{k}$$

则由动量定理 $\boldsymbol{F} = \sum m_i\boldsymbol{a}_i = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2$，以 $m_1\boldsymbol{a}_1$ 为例，可以计算得到:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= m_1\boldsymbol{a}_1 = m_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{OC_1}\right) = m_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{r}_{OD_1} + \boldsymbol{r}_{D_1C_1}\right)\right]\\
&= m_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{D_1C_1}\right)\\
&= m_1\left[\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{D_1C_1} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{D_1C_1}\right)\right]\\
&= -m_1\omega^2\boldsymbol{r}_{D_1C_1} = -m_1\omega^2 e_1\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

同理可得

$$\boldsymbol{F}_2 = -m_2\omega^2 e_2\boldsymbol{i}$$

故

$$\boldsymbol{F} = -m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = m_1\omega^2 e_1\boldsymbol{k} - m_2\omega^2 e_2\boldsymbol{i}$$

利用受力平衡可以得到方程组:

$$\left\{\begin{aligned}
N_{Ax} + N_{Bx} &= -m_2\omega^2 e_2\\
N_{Az} + N_{Bz} &= -m_1\omega^2 e_1
\end{aligned}\right. \tag{1}$$

再利用动量矩定理:

$$\boldsymbol{L}_O = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_O}{\mathrm{d}t} = \dot{H}_{Ox}\boldsymbol{i} + \dot{H}_{Oy}\boldsymbol{j} + \dot{H}_{Oz}\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\right)$$

两个齿轮的惯性积求得为:

$$\left\{\begin{aligned}
I_{xy}^1 &= \sum m_i x_i y_i = 0\\
I_{yy}^1 &= I_{C_1} + m_1 e_1^2\\
I_{yz}^1 &= \sum m_i y_i z_i = -m_1 b e_1
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
I_{xy}^2 &= \sum m_i x_i y_i = m_2 b e_2\\
I_{yy}^2 &= I_{C_2} + m_2 e_2^2\\
I_{yz}^2 &= \sum m_i y_i z_i = 0
\end{aligned}\right.$$

而

$$\boldsymbol{H}_i = -I_{xy}^i\omega\boldsymbol{i} + I_{yy}^i\omega\boldsymbol{j} - I_{zy}^i\omega\boldsymbol{k}, i = 1, 2$$

故得到:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_1}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & \omega & 0\\ 0 & I_{yy}^1\omega & m_1be_1\omega\end{vmatrix}=m_1be_1\omega^2\boldsymbol{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_2}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & \omega & 0\\ -m_2be_2 & I_{yy}^2\omega & 0\end{vmatrix}=m_2be_2\omega^2\boldsymbol{k}$$

再由动量矩定理

$$\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}_{OB}\times\boldsymbol{N}_B+r_{OA}\times\boldsymbol{N}_A$$

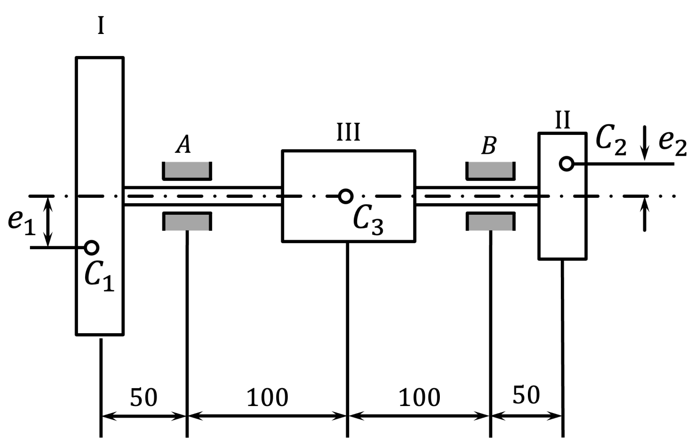
可以得到方程组:

$$\begin{cases}2b\left(N_{Bz}-N_{Az}\right)=m_1e_1\omega^2b\\ 2b\left(N_{Ax}-N_{Bx}\right)=m_2e_2\omega^2b\end{cases}\tag{2}$$

联立方程组 (1),(2) 即可得到:

$$\begin{cases}N_{Ax}=-\frac{1}{4}m_2\omega^2e_2 \quad N_{Bx}=-\frac{3}{4}m_2\omega^2e_2\\ N_{Az}=-\frac{3}{4}m_1\omega^2e_1 \quad N_{Bz}=-\frac{1}{4}m_1\omega^2e_1\end{cases}$$

题 8.18　砂轮 I 的质量 $m_1=1$ kg, 质心 C_1 有偏距 $e_1=0.5$ mm; 砂轮 II 的质量 $m_2=0.5$ kg, 其质心 C_2 有偏距 $e_2=1$ mm；电动机转子 III 的质心 C_3 在水平转轴上，该转轴和上述三个物体的对称面都垂直，且 C_1 和 C_2 偏到转轴的两侧。在电动机带动下轴以 $n=3000\mathrm{r/min}$ 作匀速转动。求在图示位置时的轴承附加动压力。图中尺寸单位是 mm。



题 8.18 示意图

解:　本题与题 8.17 基本相同。以 C_3 为圆心，建立与题 8.17 中平行的固连系，其中 C_3z 轴与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 在同一平面内。则与题 8.17 同理，利用动量定理可得:

$$\boldsymbol{F}=-(m_2e_2-m_1e_1)\omega^2\boldsymbol{k}$$

即得

$$N_{Az}+N_{Bz}=-(m_2e_2-m_1e_1)\omega^2$$

再利用动量矩定理，同理先计算各轮惯性积[3]：

$$\begin{cases} I_{xy}^1 &= \sum m_i x_i y_i|_{x_{C_1=0}=0} = 0 \qquad I_{zy}^1 = \sum m_i z_i y_i = m_1 e_1 (a+b) \\ I_{xy}^3 &= 0 \qquad I_{zy}^3 = 0 \\ I_{xy}^2 &= 0 \qquad I_{zy}^2 = m_2 e_2 (a+b) \end{cases}$$

利用动量矩定理可得：

$$2b(N_{Bz} - N_{Az}) = 3b\omega^2(m_1e_1 + m_2e_2)$$

其中 $b = 50\text{mm}$。联立以上各式即得

$$\begin{cases} N_{Az} = \frac{1}{4}\omega^2(5m_1e_1 + m_2e_2) = \frac{30}{4}\pi^2\text{N} = 74.02\text{N} \\ N_{Bz} = -\frac{1}{4}\omega^2(m_1e_1 + 5m_2e_2) = -74.02\text{N} \end{cases}$$

题 8.20　均质圆盘以等角速度 ω 绕通过盘心的铅直轴转动，圆盘平面与转轴交成 α 角，如图所示。已知两轴承 A 和 B 与圆盘中心相距分别为 m 和 n；圆盘半径 R，重 P。求两轴承 A 和 B 的动反力。

解：　类似于例题 8.4，为了方便求惯性积，再建立一个固结在圆盘上的动坐标系 $Ox'y'z'$，令轴 Oz' 为圆盘的法向，轴 Oy' 为圆盘的径向，则必有 Oyz 平面与 $Oy'z'$ 平面重合，即 Ox, Ox' 两轴重合由动量定理，$\vec{F} = m\boldsymbol{a}_C = m\boldsymbol{a}_O = 0$，即

$$\begin{cases} N_{Ax} + N_{Bx} = 0 \\ N_{Ay} + N_{By} = 0 \\ N_{Az} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

系统的动量矩表示为：

$$\left[\vec{H}_O\right] = [I]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{xz} \\ -I_{yz} \\ I_{zz} \end{bmatrix}\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{H}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -I_{xz}\omega & -I_{yz}\omega & I_{zz}\omega \end{vmatrix} = I_{yz}\omega^2\vec{i} - I_{xz}\omega^2\vec{j}$$

所以，无需求 I_{zz} 由坐标变换知，

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y'\cos\alpha - z'\sin\alpha \\ z = y'\sin\alpha + z'\cos\alpha \end{cases}$$

所以有，

$$I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = \sum x_i'\left(y'\sin\alpha + z'\cos\alpha\right) = \sin\alpha I'_{xy} + \cos\alpha I'_{xz}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum m_i y_i z_i = \sum\left(y'\cos\alpha - z'\sin\alpha\right)\left(y'\sin\alpha + z'\cos\alpha\right) \\ &= \sum m_i\left(y_i'^2\sin\alpha\cos\alpha - z_i'^2\sin\alpha\cos\alpha + y_i'z_i'\cos 2\alpha\right) \\ &= \sum m_i\left[\left(x_i'^2 + y_i'^2\right)\sin\alpha\cos\alpha - \left(x_i'^2 + z_i'^2\right)\sin\alpha\cos\alpha + y_i'z_i'\cos 2\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(I_z' - I_y'\right) + \cos 2\alpha I'_{yz} \end{aligned}$$

[3]注意到题 8.17 中 I_{yy} 实际上并没有被使用，因此此处不再计算之。

轴 Oz' 为圆盘的法向、轴 Oy' 为圆盘的径向, 可知轴 Oy' Oz' 为惯性主轴, 可知,

$$\begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{zy} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2}mR^2 - \frac{1}{4}mR^2\right) = \frac{1}{8}mR^2\sin 2\alpha \end{cases}$$

所以,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{H}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{H}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -I_{xz}\omega & -I_{yz}\omega & I_{zz}\omega \end{vmatrix} = I_{yz}\omega^2\vec{i} - I_{xz}\omega^2\vec{j} = \frac{1}{8}mR^2\omega^2\sin 2\alpha\vec{i}$$

轴承处的动反力的合外力矩为,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_O &= r_{OA}\times\vec{N}_A + r_{OB}\times\vec{N}_B \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -m \\ N_{Ax} & N_{Ay} & N_{Az} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & n \\ N_{Bx} & N_{By} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left[mN_{Ay} - nN_{By}\right] - \vec{j}\left[mN_{Ax} - nN_{Bx}\right] \end{aligned}$$

由动量矩定理, 得到

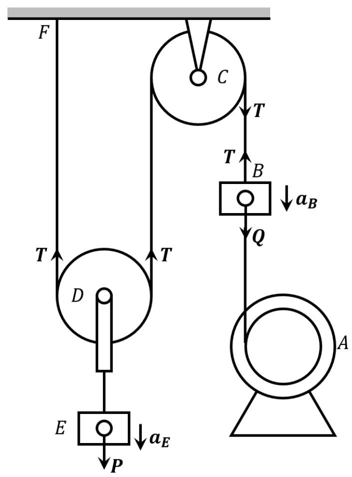
$$\begin{cases} mN_{Ay} - nN_{By} = \frac{1}{8}mR^2\omega^2\sin 2\alpha \\ mN_{Ax} - nN_{Bx} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

(1)、(2) 两式联立, 可解得,

$$\begin{cases} N_{Ax} = N_{bx} = 0 \\ N_{Ay} = -N_{By} = m\omega^2R^2\sin 2\alpha/8(m+n) \end{cases}$$

第九章　动静法

题 9.4　两物体的质量分别为 $m_B = 200\text{kg}$ 和 $m_E = 80\text{kg}$，连接如图所示，并由电动机带动。如已知绳的张力为 30N，不计滑轮的质量，试求重物 E 的加速度和绳 FD 的张力。



题 9.4 图

解:　如上题 9.5 图所示，加速度取竖直向下为正方向，对物块 B 受力分析:

$$Q + mg = ma_B + T$$

再对物块 E 分析得

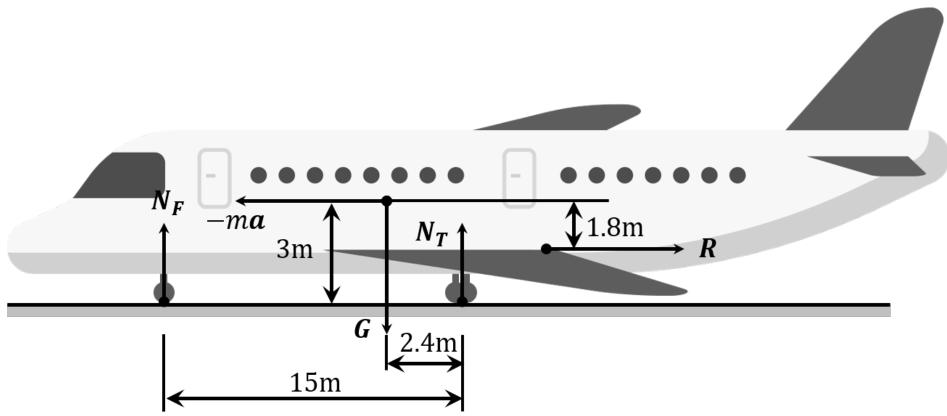
$$2T + ma_E = P + mg$$

又由几何关系，$a_B = -2a_E$ 联立上述三式即可得到:

$$a = \frac{2F + (2m_B - m_E)g}{m_E + 4m_B} = 3.632\text{m/s}^2$$

$$T = \frac{m_E(g + a)}{2} = 537.3\text{N}$$

题 9.7　一喷气式飞机的着陆速度为 200km/h，质量为 125t，质心在 G，如图所示，并在制动力作用下作匀减速运动，滑行 450m 后速度减为 50km/h。着陆后气动力（升力和阻力）可以忽略不计，若不计地面摩擦力，试求飞机前轮 B 对地面的压力。



题 9.7 图

解:　如题 9.7 图所示，引入惯性力后有

$$R = ma = m\frac{v_0^2 - v^2}{2x} = 125000 \times \frac{(200/3.6)^2 - (50/3.6)^2}{2 \times 450}\text{N} = 4.019 \times 10^5\text{N}$$

而在竖直方向上则有

$$mg = N_F + N_T$$

对质心使用动量矩定理

$$(15\text{m} - 2.4\text{m}) \cdot N_F = 1.8\text{m} \cdot R + 2.4\text{m} \cdot N_T$$

联立上两式即可解得

$$N_F = 244225\text{N}$$

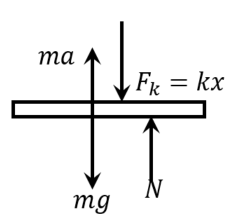
题 9.9　图示凸轮导板机构。偏心圆盘的圆心为 O，半径为 r，偏心距 $OA = e$，绕 O 轴作匀角速度如转动。设导板 CD 的质量为 m，当其在最高位置时弹簧的压缩量为 b，并始终与偏心圆盘相接触，试求弹簧的刚性系数 k。

解:　取板在最高点时为初始时刻，竖直向下为正方向，O 为原点，则有板的位移:

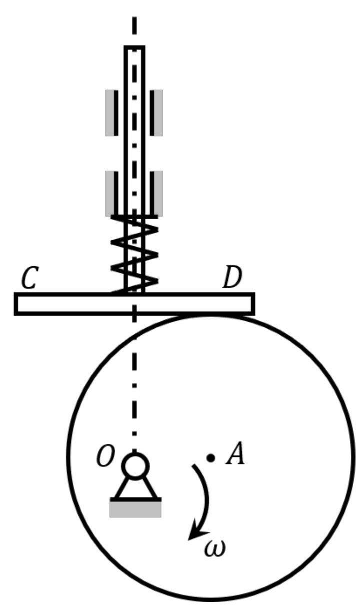
$$y = -e\cos\omega t - r$$

求两阶导数之后得到板的加速度:

$$a = \ddot{y} = \omega^2 e\cos\omega t$$



题 9.9 解图



题 9.9 图

如上题 9.9 解图所示，可以得到

$$N + ma = kx + mg$$

其中 $x = b - e(1 - \cos\omega t)$，代入整理即可得到

$$N = kx + mg - ma = k(b - e) + mg + e(k - m\omega^2)\cos\omega t$$

若要使板始终与圆盘接触，则 $N \geq 0$ 恒成立，即

$$k(b - e) + mg + e(k - m\omega^2)\cos\omega t \geq 0 \tag{1}$$

对任意 $t \geq 0$ 均成立。

(1) 当 $k - m\omega^2 \geq 0$ 时，式(1)恒成立等价于下式恒成立

$$k(b - 2e) + m(g + \omega^2 e) \geq 0$$

即

若 $b \geq 2e$，则 k 可取大于 $m\omega^2$ 的任意正值；

若 $b < 2e$，则

$$k \leq \frac{m(g + e\omega^2)}{2e - b}, \quad 且m\omega^2 \leq \frac{m(g + \omega^2 e)}{2e - b} \implies (e - b)\omega^2 \leq g$$

若第二个等式不成立，则不存在满足题意的 k 值；

整理即得：

$$\begin{cases} k \geq m\omega^2, & b \geq 2e \\ m\omega^2 \leq k \leq \dfrac{m(g + \omega^2 e)}{2e - b}, & (e - b)\omega^2 \leq g\ 且b < 2e \\ k不存在, & (e - b)\omega^2 > g\ 且b < 2e \end{cases}$$

(2) 当 $k - m\omega^2 < 0$ 时，式(1)恒成立等价于下式恒成立

$$kb + m(g - \omega^2 e) \geq 0$$

即

$$k \geq \frac{m(\omega^2 e - g)}{b} \implies k \geq \max\left\{0, \frac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\}, 且m\omega^2 \geq \frac{m(\omega^2 e - g)}{b} \implies \omega^2(e - b) \leq g$$

整理即得：

$$\begin{cases} \max\left\{0, \dfrac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\} \leq k < m\omega^2, & (e - b)\omega^2 \leq g \\ k不存在, & (e - b)\omega^2 > g \end{cases}$$

合并整理 (1)，(2) 所述的两种情况，可以得到

$$\begin{cases} m\omega^2 \leq k \leq \dfrac{m(g + \omega^2 e)}{2e - b}, & (e - b)\omega^2 \leq g\ 且b < 2e \\ \max\left\{0, \dfrac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\} \leq k < m\omega^2, & (e - b)\omega^2 \leq g\ 且b \geq 2e \\ \max\left\{0, \dfrac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\} \leq k < m\omega^2, & (e - b)\omega^2 \leq g\ 且b < 2e \\ m\omega^2 \leq k, & (e - b)\omega^2 \leq g\ 且b \geq 2e \\ m\omega^2 \leq k, & (e - b)\omega^2 > g\ 且b \geq 2e \end{cases}$$

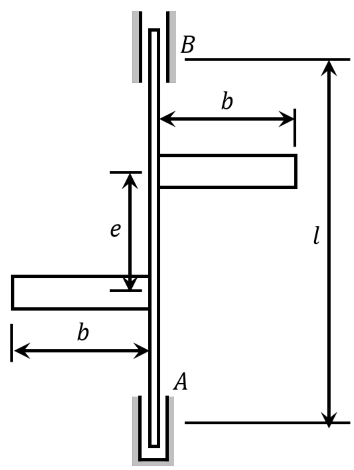
观察可知，前四式可以合并为

$$k \geq \max\left\{0, \frac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\}, \text{且}(e-b)\omega^2 \leq g$$

故 k 的取值范围为

$$\begin{cases} k \geq \max\left\{0, \dfrac{m(\omega^2 e - g)}{b}\right\}, & (e-b)\omega^2 \leq g \\ m\omega^2 \leq k, & (e-b)\omega^2 > g \text{ 且} b \geq 2e \\ k\text{不存在}, & (e-b)\omega^2 > g \text{ 且} b < 2e \end{cases}$$

题 9.14　图示的铅垂转轴 AB 上固结有垂直的两短杆，在同一平面内，长均为 b，质量均为 m，间距为 e，上下对称，如图所示。已知 $AB = l$ 转轴作等角速度 ω 转动，试求轴承 A 和 B 的动反力。



题 9.14 图

解：　首先计算一根杆所受的惯性力；

$$F = \int_0^b \lambda \,\mathrm{d}x \cdot \omega^2 x = \frac{1}{2} m\omega^2 b$$

其中已利用 $\lambda = m/b$ 为单位长度杆的质量。

由于两杆位置对称，故惯性力的合力为零，但合力矩为 $M = Fe = \frac{1}{2} m\omega^2 be$，方向垂直于杆。设 A, B 两点处的动反力分别为 N_A, N_B，易知 N_A, N_B 无竖直方向分量，则有

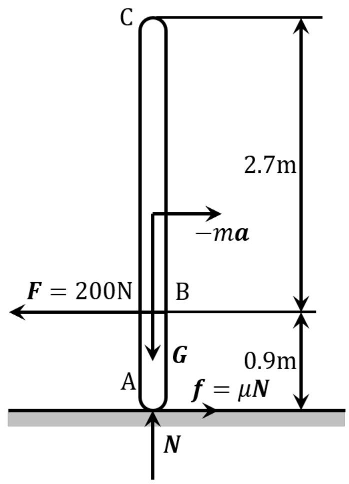
$$N_A + N_B = 0$$
$$N_A l = M$$

解得

$$N_A = -N_B = \frac{m\omega^2 be}{2l}$$

负号表示方向相反。

题 9.18　均质杆 AC 的质量为 30kg，在铅垂位置处于平衡，如图所示，已知杆与地面接触处的摩擦系为 $\mu=0.3$。若点 B 处突然加一水平的力，大小为 200N，试求该瞬时点 C 的加速度。



题 9.18 图

解:　如题 9.18 图所示，设质心的加速度为 a，方向水平向左，则可引入惯性力 $S=ma$，方向水平向右，且易得 $N=mg$。对质心取矩，假设 B 处的摩擦力大小已经达到最大值 $f=\mu N=\mu G=\mu mg$，由于 $f\times 1.8\text{m}=\mu N\times 1.8\text{m}<F\times 0.9\text{m}$，故 B 点处的摩擦力必达到了最大，假设成立。故

$$a=\frac{F-f}{m}=\frac{F}{m}-\mu g=\frac{11}{3}\text{m/s}^2$$

而

$$f\times 1.8\text{m}-F\times 0.9\text{m}=\frac{1}{12}m\cdot(2.7\text{m})^2\varepsilon\implies\varepsilon=\frac{5}{9}\text{rad/s}^2$$

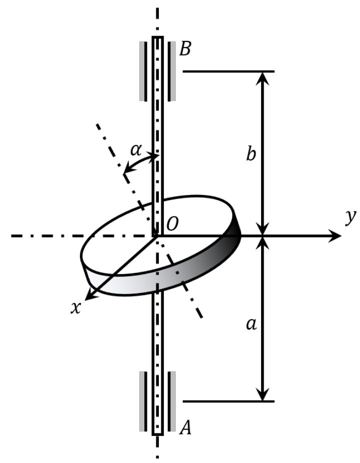
故 C 点的加速度大小为

$$a_C=a-\varepsilon l/2=\frac{8}{3}\text{m/s}^2$$

正号表示方向水平向左。

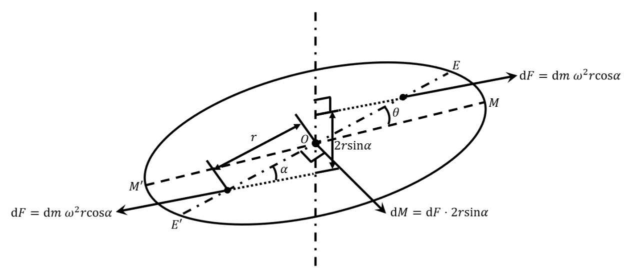
题 9.22　均质圆盘以等角速度 ω 绕铅垂轴转动，圆盘质心在轴上，圆盘平面与轴交成 α 角，如图所示，已知圆盘的半径为 R，质量为 m，其中心到轴承 A 和 B 的距离分别为 a 和 b，试求轴承 A 和 B 的动反力。[1]

[1]本题事实上是一个特殊的陀螺进动问题：公转角速度为 ω，自转角速度为 0，进一步学习到刚体的定点运动之后本题即可使用相关知识更方便地求解。



题 9.22 图

解: 由于转轴通过圆盘的质心，故惯性力的合力为零，圆盘对杆只有惯性力矩作用。在**圆盘面上建立极坐标系**，取与转轴夹角为 $90° - \alpha$ 的半径 OM 为 $\theta = 0$，并以逆时针为 θ 正向，则有如下题 9.22 解图:



题 9.22 解图

取图中所示的一对小质元 $\mathrm{d}m$，两质元的惯性力 $\mathrm{d}F$ 均背离转轴水平向外，大小为 $\mathrm{d}F = \mathrm{d}m \cdot \omega^2 r\cos\alpha$，而小质元的质量 $\mathrm{d}m = \sigma \cdot r\,\mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r$，其中 $\sigma = m/\pi r^2$ 为单位面积圆盘的质量。这一对 $\mathrm{d}F$ 等大反向，故合力为零，但合力矩 $\mathrm{d}M = \mathrm{d}F \cdot 2r\cos\alpha$ 并不为零。

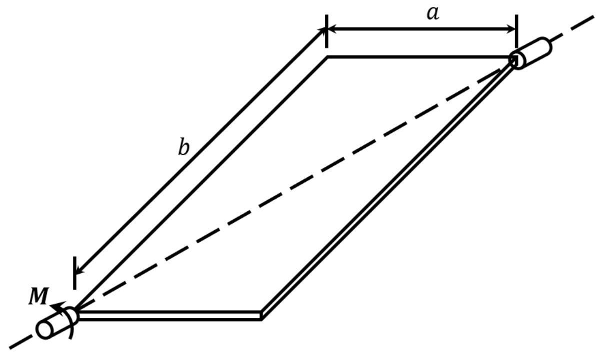
注意到对称性，即位置满足 $\theta = -\theta, r = r$ 时的两**对**质元的惯性力矩 $\mathrm{d}M$ 的平行于直径 MM' 的分量相互抵消，只有垂直于转轴和直径 MM' 的分量，故积分时只需考虑 $\mathrm{d}M\cos\theta$ 即可；同时，考虑到 $\theta = \pi - \theta, r = r$ 的两对质元的惯性力矩于 $\theta = -\theta, r = r$ 的两对质元相同，故合力矩

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}M\cos\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}M\cos\theta \\
&= 2\int_0^{R}\int_0^{\pi/2} \sigma \cdot r\,\mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r \cdot \omega^2 r\cos\alpha \cdot 2r\sin\alpha\cos\theta \\
&= 4\sigma\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\int_0^{R} r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{8}m\omega^2 R^2\sin 2\alpha
\end{aligned}
$$

再利用受力和力矩平衡即可求得 A, B 点处的动反力为

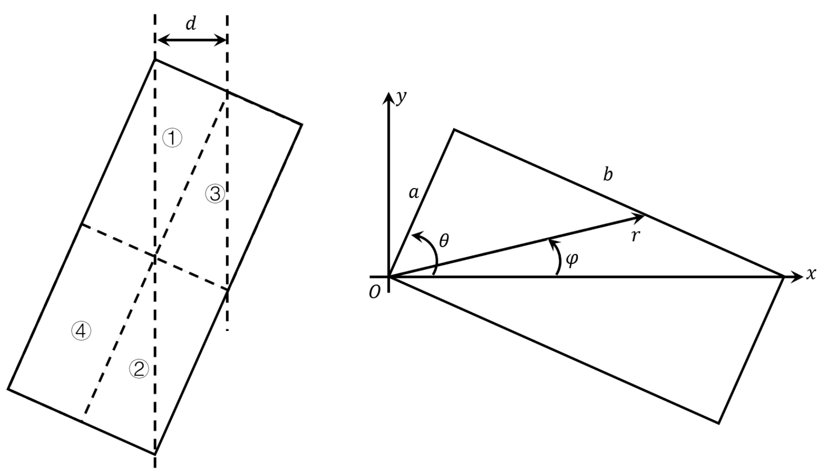
$$N_A = N_B = \frac{m\omega^2 R^2 \sin 2\alpha}{8(a+b)}$$

题 9.24　长方形薄板 $ABCD$ 质量为 m，可绕水平轴 AC 转动，如图所示。在薄板于水平位置静止时，轴上作用一力偶，其力偶矩为 M，试求薄板的角加速度和轴承 A 和 C 上的动反力。



题 9.24 图

解：　先求转动惯量：为了避免积分，这里采用自相似法和平行轴定理求解。



题 9.24 解图

如题 9.24 解图所示，其中各区域相对转轴的转动惯量记为 $I_n, n = 1, 2, 3, 4$，记整体的转动惯量为 $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$，则有 $I_1 = I_2, I_3 = I_4$，且由相似关系知 $I_1 = I_2 = I/16$，故有 $2I_3 = 7I/8 \implies I_3 = 7I/16$。再利用平行轴定理：

$$I_3 = \frac{I}{16} + \left(\frac{m}{4}\right) d^2 = \frac{I}{16} + \left(\frac{m}{4}\right) \frac{(a/2)(b/2)}{\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2}} = \frac{7I}{16}$$

整理即得

$$I = \frac{ma^2b^2}{6(a^2+b^2)}$$

故角加速度为

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{6M(a^2+b^2)}{ma^2b^2}$$

下面再来求动反力，设此时角速度为 ω，在板面上建立如题 9.24 解图右图所示的极坐标系，先考虑上半部分的薄板，则上半部分的薄板受的惯性力对 O 点的矩为：

$$M = \iint \omega^2 xy\sigma \,\mathrm{d}S$$

其中 $\sigma = m/ab$ 为单位面积的质量。将上式转换到极坐标系下：

$$\begin{aligned} M &= \sigma\omega^2 \iint r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sigma\omega^2 \int_0^\theta \mathrm{d}\varphi \int_0^{b/\cos(\theta-\varphi)} \sin\varphi\cos\varphi r^3 \,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\sigma\omega^2 b^4}{8} \int_0^\theta \frac{\sin 2\varphi}{\cos^4(\theta-\varphi)} \,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

此式为上半部分的惯性力矩，将积分所得的结果[2] 中 a, b 调换，即可得到下半部分的惯性力矩，二者相减即可得到结果为：

$$M = \frac{m\omega^2 ab(b^2-a^2)}{12(a^2+b^2)}$$

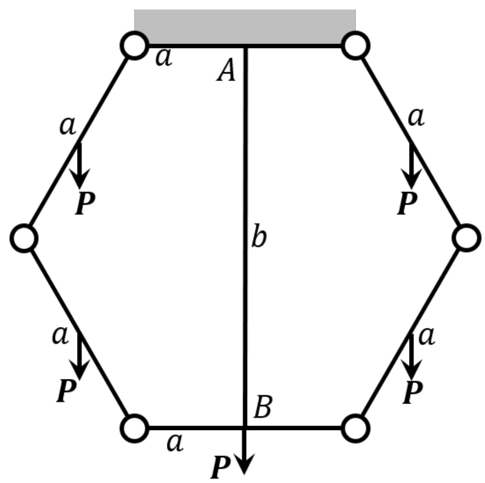
故转轴处的动反力为

$$N_A = N_B = M \Big/ \sqrt{a^2+b^2} = \frac{m\omega^2 ab(b^2-a^2)}{12(a^2+b^2)^{3/2}}$$

[2]复杂积分可以考虑使用 Wolfram Alpha 软件计算，当然 Mathematica 或者 Matlab 也是可以的。本题答案仅供参考（因复杂积分结果不确定是否正确），了解思路即可。

第十章　分析静力学

题 10.4　一六边形机构由六根长为 α 的均质杆铰接而成，其中一根固定在水平的天花板上，六边形机构悬于铅垂平面内，若上下两平行杆的中点 A, B 用一长为 b 的柔绳连接，各杆质量为 m，试求柔绳的张力。



题 10.4 图

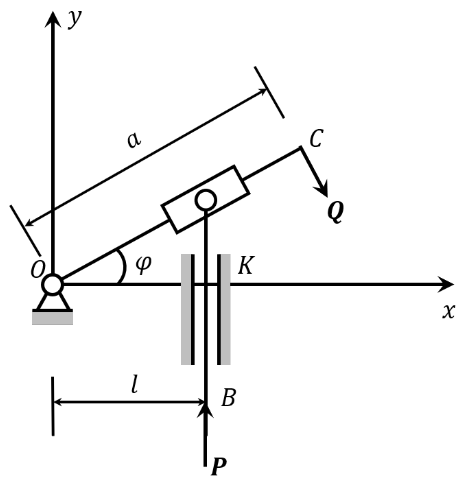
解：　解除柔绳约束，代之以主动力（即绳中张力）T，系统自由度数为 1，取最下方杆的竖直位移 y 为广义坐标，设其有虚位移 δy，则有虚功：

$$\delta W = (P - T)\delta y + 2P \times \frac{3}{4}\delta y + 2P \times \frac{1}{4}\delta y = (3P - T)\delta y$$

即广义力

$$Q_y = \frac{(\delta W)_y}{\delta y} = 3P - T = 0 \implies T = 3P$$

题 10.5　在题 10.5 图中所示机构中，滑块 A 套在杆 OC 上，并与通过铅垂导槽的杆 AB 铰接。已知 $OC = a, OK = l$。在点 C 垂直于曲柄 OC 作用一力 $\boldsymbol{Q}$ 时，试求杆 AB 向下的压力 $\boldsymbol{P}$。



题 10.5 图

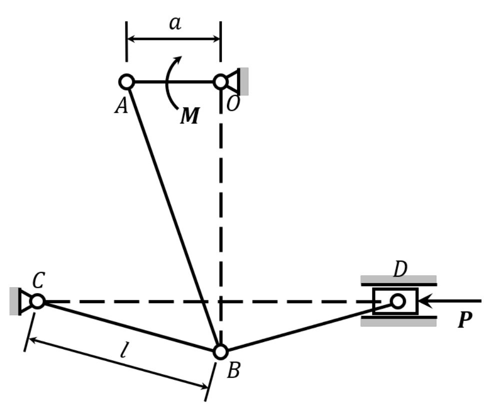
解： 系统为单自由度系统，故取广义坐标为杆 OA 的转角 φ，则有虚功：

$$\delta W = -Qa\delta\varphi + l\delta(\tan\varphi) = -Qa\delta\varphi + Pl\delta\varphi/\cos^2\varphi$$

即广义力

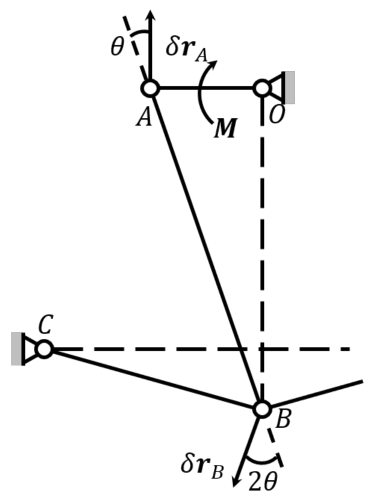
$$Q_\varphi = \frac{(\delta W)_\varphi}{\delta\varphi} = -Qa + \frac{Pl}{\cos^2\varphi} = 0 \implies P = Qa\cos^2\varphi/l$$

题 10.6 在题 10.6 图中所示机构中，曲柄 OA 上作用一力偶，其力偶距为 M，滑块 D 上作用一水平力 P，尺寸如图注。当机构平衡时，试求力偶矩 M 与力 P 的关系。



题 10.6 图

解： 机构为单自由度系统，记 OA 杆转角为 α，取 CD 间距 x 为广义坐标，则本题关键在于寻找 δx 与 $\delta\alpha$ 之间的关系。



题 10.6 解图

如题 10.6 解图，在满足约束的条件下，有虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_A$ 和 $\delta\boldsymbol{r}_B$，利用杆 AB 为刚性杆的性质，可以得到：

$$\delta\boldsymbol{r}_A\cdot\boldsymbol{r}_{AB}=\delta\boldsymbol{r}_B\cdot\boldsymbol{r}_{AB}$$

即

$$a\delta\alpha\cos\ \theta+l\delta\theta\cos2\theta=0\implies\delta\alpha=-\frac{l\cos2\theta}{a\cos\theta}\delta\theta$$

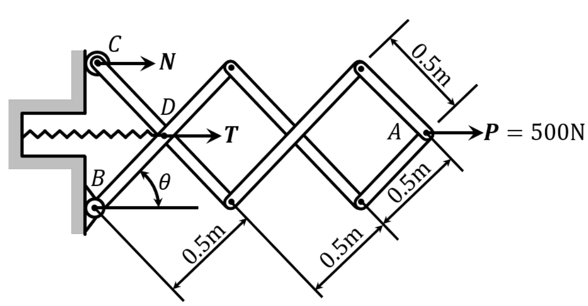
而 $2l\cos\theta=x\implies\delta x=-2l\sin\theta\delta\theta$，故有虚功：

$$\begin{aligned}\delta W&=M\delta\alpha+P\delta x\\&=-\frac{Ml\cos2\theta}{a\cos\theta}\delta\theta-2Pl\sin\theta\delta\theta\\\implies Q_\theta&=\frac{(\delta W)_\theta}{\delta\theta}\\&=-\frac{Ml\cos2\theta}{a\cos\theta}-2Pl\sin\theta=0\end{aligned}$$

化简即得 M 和 P 的关系：

$$\frac{M\cos2\theta}{a\cos\theta}+2P\sin\theta=0$$

题 10.8　一机构如题 10.8 图所示，各杆连接处均为铰接，已知 $\theta=90^\circ$ 时弹簧未受拉伸，其刚性系数 $k=20\text{kN/m}$，现在点 A 作用一水平的力为 500N，试求系统平衡的角 θ。



题 10.8 图

解：　机构为单自由度系统，取 θ 角为广义坐标，以 B 点为原点建立直角坐标系，则有

$$x_D = l\cos\theta, y_D = l\sin\theta$$
$$x_A = 5l\cos\theta, y_A = l\sin\theta$$
$$x_C = 0, y_C = 2l\sin\theta$$

易得虚位移[1]：

$$\delta \boldsymbol{r}_D = l\delta\theta(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$
$$\delta \boldsymbol{r}_A = l\delta\theta(-5\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})$$
$$\delta \boldsymbol{r}_C = 2l\delta\theta\cos\theta\boldsymbol{j}$$

故虚功为

$$\delta W = \boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{T}\cdot\delta\boldsymbol{r}_D + \boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A = -Tl\sin\theta\delta\theta - 5Pl\sin\theta\delta\theta$$

由虚位移原理：

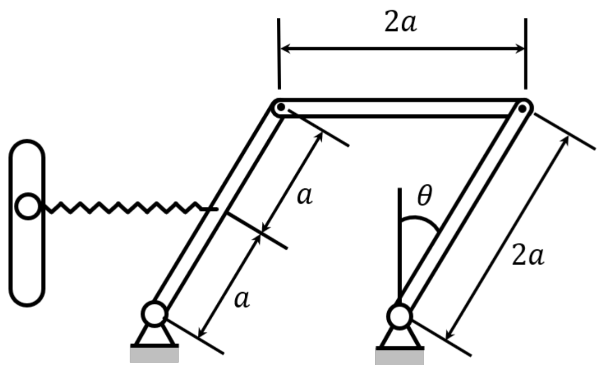
$$Q_\theta = \frac{(\delta W)_\theta}{\delta\theta} = 0 \implies T = -5P = kl\cos\theta$$

其中负号表示 $\boldsymbol{T}$ 的方向与假设的相反，故有

$$\cos\theta = \frac{5P}{kl} = \frac{5\times 500}{20\times 10^3\times 0.5} = \frac{1}{4} \implies \theta = 75.522^\circ$$

此即平衡时的 θ 角[2]。

题 10.10　三联杆机构中各杆长均为 $2a$，质量均为 5kg，如图所示。当 $\theta = 0$ 时弹簧未受拉伸[3]，已知 $a = 0.25$m，弹簧的刚性系数 $k = 800$N/m，试求机构平衡时的角 θ。



题 10.10 图

解：　本题采用势能原理求解，取 $\theta = 0$ 时系统势能为 0，则系统势能为

$$U = \frac{1}{2}k(a\sin\theta)^2 - 4Pa(1-\cos\theta)$$

[1]写虚位移时，一定要注意虚位移是需要满足约束的。利用坐标求虚位移时更要注意，不要误将特殊值当作一般的值然后求导（变分），不然会得到非常荒谬的结果。当然，更保险的做法是用矢量法，比如本题可以认为 $\boldsymbol{r}_C = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$，然后再对两边求导（变分）得到虚位移。

[2]事实上，本题同样可以利用势能原理求解：将系统整体逆时针旋转 90° 后，将 $\boldsymbol{P}$ 等效为一个恒定重力，则可计算系统总势能为弹性势能与重力势能之和，再利用势能原理即可求解得到平衡时的角度。

[3]图中弹簧左侧的圆球表示弹簧可以竖直移动。

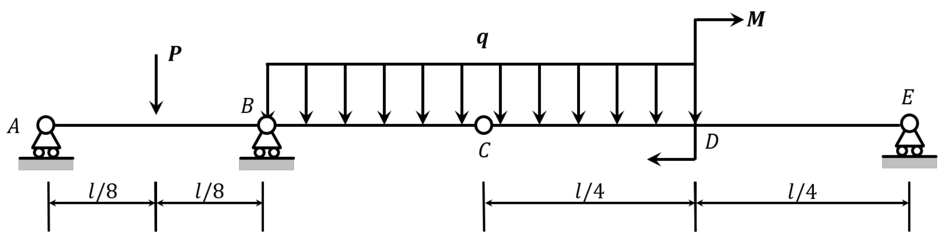
利用势能原理，即

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = ka^2 \sin\theta\cos\theta - 4Pa\sin\theta = 0 \implies \sin\theta = 0\text{或}\cos\theta = \frac{4P}{ka} = \frac{49}{50}$$

即

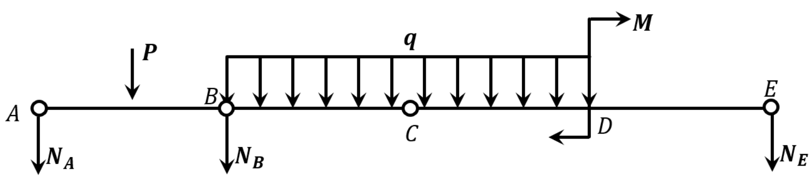
$$\theta = 0\text{或}11.478^\circ$$

题 10.12　组合梁由梁 AC 和 CE 铰接而成，如图所示。已知跨度 $l = 8\text{m}$。集中载荷 $P = 500\text{kg}$，分布载荷的线密度 $q = 250\text{kg/m}$，力偶矩 $M = 500\text{m}\cdot\text{kg}$，试求支座 A, B 和 E 的约束反力。



题 10.12 图

解：　首先解除系统约束，代之以主动力 N_A, N_B和N_E，如下图所示：



题 10.12 解图

此时系统有三个自由度，故取广义坐标为 C 点竖直位移 y_C、左侧杆转角 θ_1、右侧杆转角 θ_2。其中位移取竖直向下为正，转角取逆时针为正，则有虚功如下：

$$\begin{aligned}\delta W =& (P + N_A + N_B + \frac{1}{2}ql + N_E)\delta y_C \\ &+ \left(\frac{3}{8}Pl + \frac{1}{4}N_B l + \frac{1}{2}N_A l + \frac{1}{32}ql^2\right)\delta\theta_1 \\ &+ \left(-\frac{1}{2}N_E l - M - \frac{1}{32}ql^2\right)\delta\theta_2\end{aligned}$$

由虚位移原理：

$$\begin{aligned}Q_{y_C} &= \frac{(\delta W)_{y_C}}{\delta y_C} = P + N_A + N_B + \frac{1}{2}ql + N_E = 0 \\ Q_{\theta_1} &= \frac{(\delta W)_{\theta_1}}{\delta\theta_1} = \frac{3}{8}Pl + \frac{1}{4}N_B l + \frac{1}{2}N_A l + \frac{1}{32}ql^2 = 0 \\ Q_{\theta_2} &= \frac{(\delta W)_{\theta_2}}{\delta\theta_2} = -\frac{1}{2}N_E l - M - \frac{1}{32}ql^2 = 0\end{aligned}$$

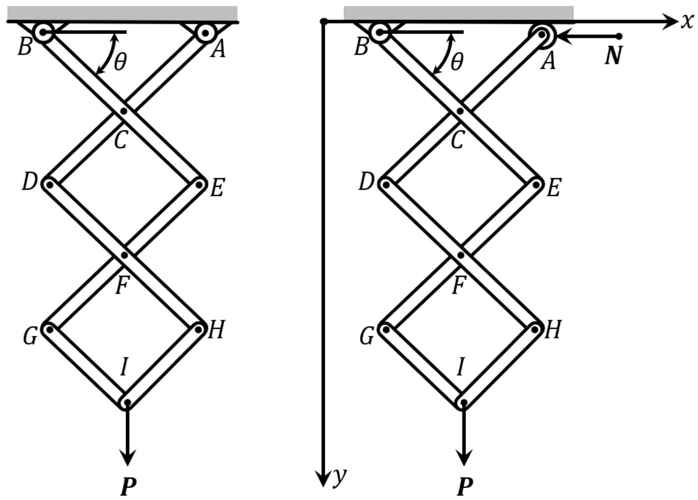
联立即可解得

$$N_A = 250\text{kg}$$

$$N_B = -1500\text{kg}$$

$$N_E = -250\text{kg}$$

题 10.15　题 10.15 左图示机构由直杆 AD, BE, DH, EG, GI 和 HI 铰接而成，点 C 和 F 处亦铰链连接，尺寸如注。已知点 I 处承接一载荷 P。设杆的质量均可忽略不计，试求支座 A 和 B 处的约束反力。



题 10.15 图

解:　简单的受力分析可知，两个支座处的约束反力在水平方向上的分量大小相同，方向相反；而竖直方向上的分量均为 $F_y = P/2$，方向竖直向上。故只需要求一侧支座的水平约束反力即可，如题 10.15 右图所示，断开 A 处水平约束，代之以主动力 N，则有:

显然系统此时为单自由度系统，取 θ 角为广义坐标，则有虚位移

$$\delta \boldsymbol{r}_A = -2L\sin\theta\delta\theta\boldsymbol{i}$$
$$\delta \boldsymbol{r}_I = 5L\cos\theta\delta\theta\boldsymbol{j}$$

故有虚功

$$\delta W = \boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{P}\cdot\delta\boldsymbol{r}_I = 2L\sin\theta\delta\theta N + 5PL\cos\theta\delta\theta = 0$$

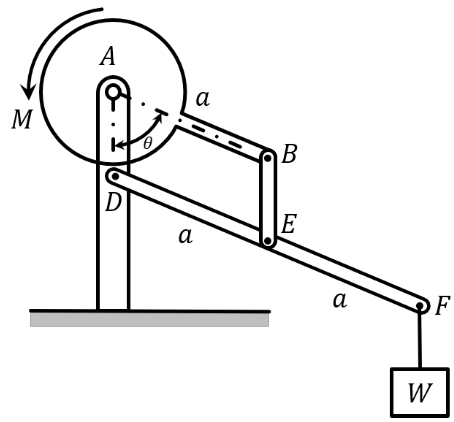
由虚位移原理

$$Q_\theta = \frac{(\delta W)_\theta}{\delta\theta} = 2L\sin\theta N + 5PL\cos\theta = 0 \implies N = -\frac{5}{2}P\cot\theta$$

故 A, B 处的约束反力分别为

$$\boldsymbol{N}_A = \frac{5}{2}P\cot\theta\boldsymbol{i} - \frac{P}{2}\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{N}_B = -\frac{5}{2}P\cot\theta\boldsymbol{i} - \frac{P}{2}\boldsymbol{j}$$

题 10.16　在题 10.16 图示机构中，点 A, B, D 和 E 处均为铰接，尺寸如注。若于点 F 处挂一重物，其质量为 W。各杆的质量忽略不计，试求用来平衡 W 所需的力偶矩 M。



题 10.16 图

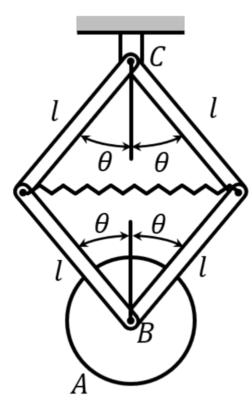
解： 系统此时为单自由度系统，取转角 θ 为广义坐标，则有虚功：

$$\delta W = M\delta\theta - 2a\sin\theta\delta\theta W \implies Q_\theta = \frac{(\delta W)_\theta}{\delta\theta} = M - 2aW\sin\theta = 0$$

即

$$M = 2aW\sin\theta$$

题 10.20 在图示四联杆机构中，圆盘 A 的质量为 $m = 2\text{kg}$，各杆长为 $l = 600\text{mm}$，弹簧的原长为 $l_0 = 1200\text{mm}$，刚性系数为 $b = 300\text{N/m}$。试求机构平衡时的角 θ，并讨论平衡位置的稳定性。



题 10.20 图

解： 系统为单自由度系统，取 θ 为广义坐标，并记 $\theta = 0$ 时为重力势能零点，则有系统总势能：

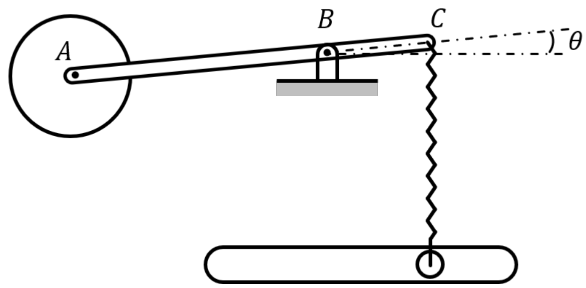
$$U = \frac{1}{2}k(l_0 - 2l\sin\theta)^2 - 2mgl\cos\theta$$

由势能原理：

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -2kl(l_0 - 2l\sin\theta)\cos\theta + 2mgl\sin\theta = 0$$

代值解得 $\theta = 63.17°(g = 9.8\text{m/s}^2)$，经计算得此时 $\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} > 0$，故为稳定平衡。

题 10.21 在图示机构中，圆盘的质量 $m = 2\text{kg}$，$AC = 100\text{mm}$，$AB = 75\text{mm}$，弹簧的刚性系数 $k = 600\text{N/m}$，当 $\theta = 0°$ 时弹簧未受拉伸，其 D 端可在水平槽内滑动，保持弹簧呈铅垂位置. 试求机构平衡时的角 θ 值，并讨论平衡的稳定性。



题 10.21 图

解： 系统为单自由度系统，记 $AB = a, BC = c$，取 θ 为广义坐标，并记 $\theta = 0$ 时系统的势能为零，则有总势能：

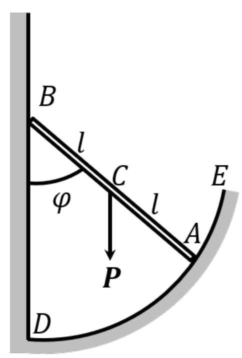
$$U = \frac{1}{2}k(c\sin\theta)^2 - mga\cos\theta$$

利用势能原理，即：

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = kc^2\sin\theta\cos\theta - mga\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0\text{或}\sin\theta = \frac{mga}{kc^2} = 3.92 > 1$$

故 $\theta = -90°\text{或}90°$，负号表示顺时针旋转；且 $\theta = 90°$ 时 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$，为稳定平衡；且 $\theta = -90°$ 时 $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} < 0$，为不稳定平衡。

题 10.25 均质杆 AB 长为 $2l$，一端靠在光滑的铅垂墙上，另一端放在光滑的固定曲线 DE 上。欲使细杆能随遇静止，即细杆在铅垂平面的任何位置上静止，试求出曲线 DE 的形状。



题 10.25 图

解： 建立如题 10.25 图所示的坐标系，取 $y = 0$ 处为重力势能零点，则有杆的势能为

$$U = P\frac{2l\cos\varphi + 2y}{2} = P(l\cos\varphi + y)$$

代入 $\sin\varphi = x/2l$，即得

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{P}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{-x}{\sqrt{l^2 - (x/2)^2}}\right) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2\sqrt{l^2 - (x/2)^2}}$$

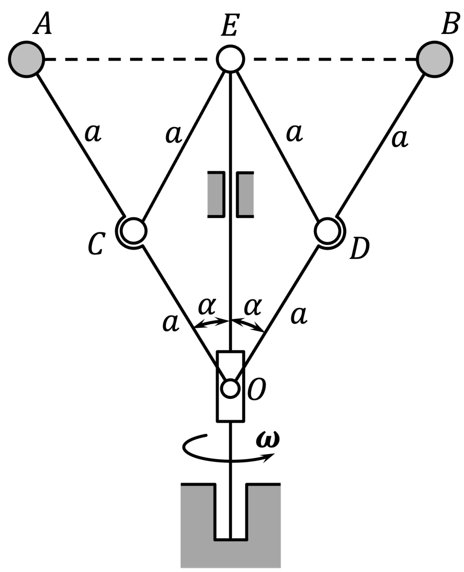
积分后代入 $x=0,y=0$ 的初始条件即得

$$y=l-\frac{\sqrt{4l^2-x^2}}{2}$$

此即 DE 曲线的形状。

第十一章　拉格朗日力学

题 11.1　图示离心调速器以角速度 ω 绕铅直轴转动。每个球重 P，套管 O 重 Q。杆重略去不计。$OC = EC = AC = OD = ED = BD = a$。求稳定旋转时，两臂 OA 和 OB 与铅直轴的夹角 α。



题 11.1 图

解：　系统为单自由度，取 α 为广义坐标。以下分别用两种方法进行求解：

达朗伯方程法：

$$\delta W = 2(\vec{F} + \vec{P}) \cdot \delta \vec{r}_B + \vec{Q} \cdot \delta \vec{r}_O \tag{1}$$

其中 $\vec{F} = 2m\omega^2 a \sin\alpha \vec{i}$ 为惯性力，其他物理量表示如下：

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= -P\vec{j}, \\
\vec{Q} &= -Q\vec{j}, \\
\delta \vec{r}_B &= \delta(2a\sin\alpha)\vec{i} = 2a\cos\alpha\delta\alpha\vec{i}, \\
\delta \vec{r}_O &= -\delta(2a\cos\alpha)\vec{j} = 2a\sin\alpha\delta\alpha\vec{j}.
\end{aligned}$$

代入式 (1) 中，整理即可得到

$$8m\omega^2 a^2 \sin\alpha\cos\alpha \cdot \delta\alpha - 2Qa\sin\alpha \cdot \delta\alpha = 0$$

即

$$\sin\alpha = 0 \text{ 或 } \cos\alpha = \frac{Qg}{4Pa\omega^2}$$

离心势能法： 建立固连在杆系上的参考系，且利用惯性离心力 $\vec{F}=-m\omega^2\vec{r}$ 为保守力的性质定义离心势能 $U_e=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$，其中 r 为到转轴的距离，从而可以写出系统的总势能：

$$U=-\frac{1}{2}m\omega^2(2a\sin\alpha)^2\times 2-2Qa\cos\alpha$$

故有

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=-8m\omega^2a^2\sin\alpha\cos\alpha+2Qa\sin\alpha$$

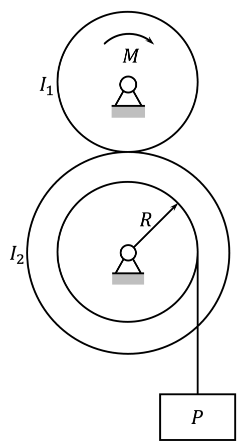
系统稳定时有

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}=0$$

即

$$\sin\alpha=0 \text{ 或 } \cos\alpha=\frac{Qg}{4Pa\omega^2}$$

题 11.2　图示电动绕车提升一重为 P 的物体。在其主动轴上作用一不变的力矩 $\boldsymbol{M}$。已知: 主动轴和从动轴连同安装在这两个轴上的齿轮以及其他附属零件对于各自的转动轴的转动惯量分别为 I_1 和 I_2; 传动比 $z_2:z_1=i$。吊索缠绕在鼓轮上，此轮半径为 R，轴承的摩擦和吊索的质量均略去不计。求重物的加速度。



题 11.2 图

解： 由题意知系统为单自由度，取 I_1 的转角 θ_1 为广义坐标，则有:

$$\delta\theta_2=i\delta\theta_1,\delta y_p=R\delta\theta_2=iR\delta\theta_1$$

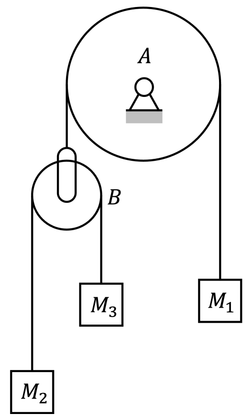
再由课本 (11.1) 式有

$$\begin{aligned}\delta W&=(M-I_1\beta_1)\,\delta\theta_1+(-I_2\beta_2)\cdot\delta\theta_2+(P-ma)\delta y_p\\&=(M-I_1\beta_1)\,\delta\theta_1+(-iI_2\beta_1)\,\delta\theta_1+(P-miR\beta_1)\cdot iR\delta\theta_1\\&=0\\ \Rightarrow M&+iRP-\left(I_1+i^2I_2+i^2R_m^2\right)\beta_1=0\\ \Rightarrow \beta_1&=\frac{M+iRP}{I_1+i^2I_2+mi^2R^2}\end{aligned}$$

故重物加速度为

$$a=iR\beta_1=\frac{iR(M+iRP)}{I_1+i^2I_2+i^2mR^2}=\frac{iR(M+iRP)}{I_1+i^2\left(I_2+PR^2/g\right)}$$

题 11.5　图示物系由定滑轮 A 、动滑轮 B 以及三个用不可伸长的绳的重物 M_1, M_2 和 M_3 所组成。各重物的质量分别为 m_1, m_2 和 m_3；且 $m_1 < m_2 + m_3$；滑轮的质量不计；各重物的初速均为零。求质量 m_1, m_2 和 m_3 应具有何种关系。



题 11.5 图

解： 如题 11.5 图所示，有几何关系

$$y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) = const$$

其中 y_i 为重物 M_i 相对定滑轮 A 中心的的位移，并取竖直向下为正方向。可得系统有两个自由度，故有：

$$2\delta W = 2m_2(g - a_2)\delta y_2 + 2m_3(g - a_3)\delta y_3 + 2m_1(g - a_1)\delta y_1$$

代入 $2\delta y_1 + \delta y_2 + \delta y_3 = 0$ 可得

$$2\delta W = [2m_2(g - a_2) - m_1(g - a_1)]\delta y_2 + [2m_3(g - a_3) - m_1(g - a_1)]\delta y_3 = 0$$

若要上式成立，则需满足：

$$\begin{cases} 2m_2(g - a_2) - m_1(g - a_1) = 0 \\ 2m_3(g - a_3) - m_1(g - a_1) = 0 \\ 2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

其中 a_i 为重物 M_i 的加速度大小，联立可解得:

$$a_1 = \left(\frac{2m_1m_3 + 2m_1m_2}{m_1m_2 + 4m_2m_3 + m_1m_3} - 1\right)g$$

而 M_1 下降 $\Leftrightarrow a_1 > 0$，利用上式即可得到 M_1 下降的条件为:

$$\begin{aligned} a_1 > 0 &\Rightarrow 2m_1m_3 + 2m_2m_1 > m_1m_2 + 4m_2m_3 + m_1m_3 \\ &\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1}{m_3} > 4 \end{aligned}$$

即

$$m_2 + m_3 > m_1 > \frac{4m_2m_3}{m_2 + m_3}$$

题 11.7　应用拉格朗日方程推导单摆的运动微分方程，分别以下列参数为广义坐标：

(1) 转角 φ；

(2) 水平坐标 x；

(3) 铅直坐标 y。

解：

(1) 由题意有动能和势能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}l)^2, U=mgl(1-\cos\varphi)$$

因此有拉格朗日量

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2l^2+mgl\cos\varphi-mgl$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

即得运动微分方程

$$\ddot{\varphi}+g\sin\varphi/L=0$$

(2) 由于 $x^2+y^2=l^2$, 故有

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0\Rightarrow\dot{y}=-\frac{x}{y}\dot{x}$$

因此

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}m\left(1+x^2/y^2\right)\dot{x}^2,\quad U=mg\left(l-\sqrt{l^2-x^2}\right)$$

因此有拉格朗日量

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\left(1+x^2/y^2\right)\dot{x}^2+mg\sqrt{l^2-x^2}-mgl$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

即得运动微分方程

$$\ddot{x}\left(1+x^2/y^2\right)+x\dot{x}^2/y^2+xg/\sqrt{l^2-x^2}=0$$

(3) 同 (2)，有

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}m\cdot\frac{l^2}{l^2-y^2}\dot{y}^2,\quad U=mg(l-y)$$

因此有拉格朗日量

$$L=T-U=\frac{ml^2}{2\left(l^2-y^2\right)}\dot{y}^2+mgy-mgl$$

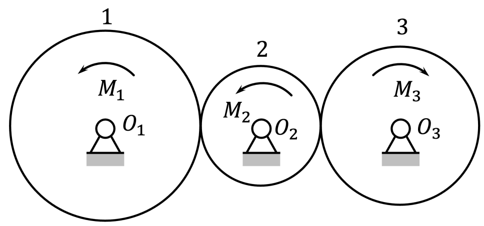
代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$$

即得运动微分方程

$$\frac{l^2}{l^2-y^2}\ddot{y}+\frac{yl^2}{\left(l^2-y^2\right)^2}\dot{y}^2-g=0$$

题 11.10 三个齿轮的质量分别为 m_1, m_2 和 m_3，相互啮合，如图所示。各齿轮可视为均质圆盘，其半径分别为 r_1, r_2 和 r_3。在第一个齿轮上作用转动力矩 M_1，而在其余两个齿轮上分别作用阻力矩 M_2 和 M_3，其转向如图所示。求齿轮 1 的角加速度和齿轮 1,2 之间的相互作用力。



题 11.10 图

解: 由题意系统为单自由度，取轮 1 的转角为广义坐标 θ_1, 则有 $\theta_1 r_1 = \theta_2 r_2 = \theta_3 r_3$

由虚功原理:

$$\begin{aligned}\delta W &= \left(M_1 - I_1\ddot{\theta}_1\right)\delta\theta_1 + \left(-M_2 - I_2\ddot{\theta}_2\right)\delta\theta_2 + \left(-M_3 - I_3\ddot{\theta}_3\right)\delta\theta_3 \\ &= \left(M_1 - I_1\ddot{\theta}_1\right)\delta\theta_1 + \left(-M_2 - I_2 r_1\ddot{\theta}_1/r_2\right) r\theta_1/r_2 + \left(-M_3 - I_3 r_1\ddot{\theta}_3/r_3\right) r_1\delta\theta_1/r_3 = 0\end{aligned}$$

解得

$$\ddot{\theta}_1 = \left(\frac{M_1}{r_1} - \frac{M_2}{r_2} - \frac{M_3}{r_3}\right)\frac{2}{(m_1+m_2+m_3)\,r_1}$$

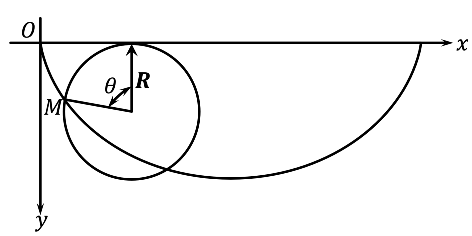
由 $M_1 - Fr_1 = I_1\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2\ddot{\theta}_1$ 可得齿轮 1,2 间的作用力为:

$$F = \frac{M_1}{r_1} + \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{M_2}{r_2} + \frac{M_3}{r_3} - \frac{M_1}{r_1}\right)$$

题 11.13 已知题 11.13 图示曲线为悬轮线，其方程为

$$x = R(\theta - \sin\theta),$$
$$y = R(1 - \cos\theta);$$

一小环 M 在重力作用下沿该光滑曲线运动，求小环的运动微分方程。



题 11.13 图

解： 由题意系统为单自由度系统，取广义坐标为 θ ，则有

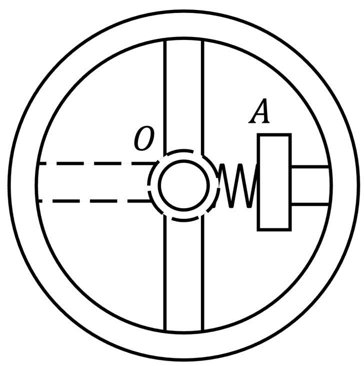
$$
\begin{aligned}
&\dot{x}=R(\dot{\theta}-\dot{\theta}\cos\theta)=R\dot{\theta}(1-\cos\theta)\\
&\dot{y}=R\dot{\theta}\sin\theta\\
&\Rightarrow T=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2(2-2\cos\theta)=mR^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta).\\
&U=-mgy=-mgR(1-\cos\theta)\\
&\Rightarrow L=T-U=mR^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta)-mgR\cos\theta+mgR\\
&\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2mR^2\dot{\theta}(1-\cos\theta),\frac{\partial L}{\partial\theta}=\left(R\dot{\theta}^2+g\right)mR\sin\theta,
\end{aligned}
$$

代入拉格朗日方程，有:

$$2R(1-\cos\theta)\ddot{\theta}+R\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2-g\sin\theta=0$$

此即小球的运动微分方程。

题 11.14　题 11.14 图示飞轮在水平面内绕铅直轴 O 转动，轮辐上套一滑块 A，并以弹黄与轴心相连。已知：飞轮的转动惯量为 I_0，滑块的质量为 m，弹黄的刚性系数为 k，弹簧原长为 l。试以飞轮的转角 θ 和弹簧的伸长 x 为广义坐标，写出系统的运动微分方程和首次积分式。



题 11.14 图

解： 由题意有:

$$
\begin{aligned}
T=\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(x+l)^2,U=\frac{1}{2}kx^2\\
\Rightarrow L=T-U=\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(x+l)^2-\frac{1}{2}kx^2.
\end{aligned}
$$

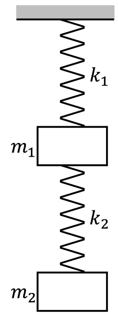
代入拉格朗日方程:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow m\ddot{x}-\left[m(x+l)\dot{\theta}^2-kx\right]=0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0\Rightarrow I_0\ddot{\theta}+2m(x+l)\dot{x}\dot{\theta}+m(x+l)^2\ddot{\theta}=0
\end{aligned}
$$

此即系统的运动微分方程，而首次积分为

$$T+U=\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(x+l)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

题 11.17　质量为 m_1 和 m_2 的两物体悬挂如图所示。弹簧刚度系数分别为 k_1 和 k_2 试列出两物体的运动微分方程。



题 11.17 图

解： 系统有两个自由度，设弹簧 1，2 的伸长量为 x_1, x_2, 则以 x_1, x_2 为广义坐标, 有:

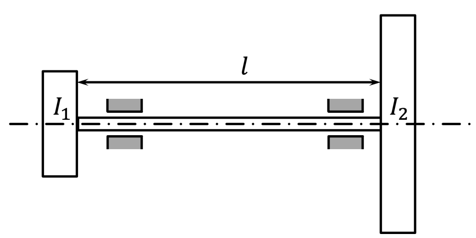
$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right)^2$$
$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - m_1 g \left(l_1 + x_1\right) - m_2 g \left(l_1 + l_2 + x_1 + x_2\right),$$

其中 l_1, l_2 为弹簧原长，故代入拉格朗日方程中有:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right), \frac{\partial L}{\partial x_1} = k_1 x_1 - \left(m_1 + m_2\right) g$$
$$\Rightarrow \left(m_1 + m_2\right) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + \left(m_1 + m_2\right) g = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right), \frac{\partial L}{\partial x_2} = k_2 x_2 - m_2 g$$
$$\Rightarrow m_2 \left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\right) - k_2 x_2 + m_2 g = 0$$

此即所求系统的运动微分方程。

题 11.19　图示扭振系统由一沿水平方向的圆截面钢轴和固结于轴的左右两端的两个圆盘所组成。设轴长为 l，质量忽略不计，轴的抗扭刚度为 GJ_p，圆盘的转动惯量分别为 I_1 和 I_2。试建立扭振系统的运动微分方程。



题 11.19 图

解： 由题意，系统为双自由度系统，取盘 1，2 的转角 θ_1, θ_2 为广义坐标，则有:

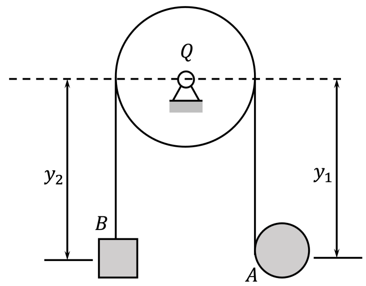
$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \theta_2^2, U = \frac{GI_p}{2l} \left(\theta_1 - \theta_2\right)^2$$
$$\Rightarrow L = T - U = \frac{1}{2} I_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \theta_2^2 - \frac{GI_P}{2l} \left(\theta_1 - \theta_2\right)^2$$

代入拉格朗日方程可得:

$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta}_1 + GI_p\left(\theta_1 - \theta_2\right)/l = 0 \\ I_2\ddot{\theta}_2 + GI_p\left(\theta_2 - \theta_1\right)/l = 0 \end{cases}$$

此即扭振系统的运动微分方程。

题 11.21 图示绕在圆柱体 A 上的绳子，跨过质量为 M 的均质滑轮 O，与一质量为 m_B 的重物 B 相连。圆柱体的质量为 m_A，半径为 r，对于轴心的回转半径为 ρ。如绳与滑轮之间无滑动，问回转半径 ρ 满足什么条件物体 B 向上运动? 开始时系统静止.



题 11.21 图

解: 如题 11.21 图所示，由几何关系有 $y_2 + y_1 - \theta r = const$，即系统为二自由度系统，其中 θ 为圆柱体 A 的转角。取 y_2 和 θ 为广义坐标，则有:

$$T = \frac{1}{2}m_B\dot{y}_2^2 + \frac{1}{4}M\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_A\left(\dot{\theta}r - \dot{y}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_A\rho^2\dot{\theta}^2, U = -m_Bgy_2 - m_Ag\left(\text{ const } + \theta r - y_2\right)$$

代入拉格朗日方程后整理得:

$$\begin{cases} \left(M/2 + m_A + m_B\right)\ddot{y}_2 - m_Ar\ddot{\theta} - \left(m_A - m_B\right)g = 0 \\ m_A\left(r^2 + \rho^2\right)\ddot{\theta} - m_Ar\ddot{y}_2 + m_Agr = 0 \end{cases}$$

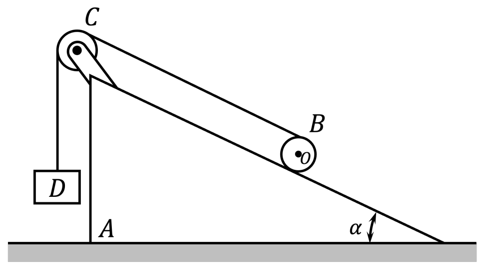
联立即可解得物块 B 的加速度为:

$$\ddot{y}_2 = \frac{m_Ar^2 - \left(m_A - m_B\right)\left(r^2 + \rho^2\right)}{m_Ar^2 - \left(N/2 + m_A + m_B\right)\left(r^2 + \rho^2\right)}g$$

若要物块 B 向上运动,则需要 $\ddot{y}_2 < 0$,而上式右端的分母显然小于零,故只需要 $m_Ar^2 - \left(m_A - m_B\right)\left(r^2 + \rho^2\right) > 0$，即物块 B 向上运动的条件为:

$$\begin{cases} \rho < \sqrt{\frac{m_B}{m_A - m_B}} \cdot r & ,\text{当} m_B \geqslant m_A \\ \rho > 0 & ,\text{当} m_A > m_B \end{cases}$$

题 11.24 图示直角三角块 A 可以沿光滑水平面滑动，在三角块的光滑斜面上放置一个均质圆柱 B，其上绕有不可伸长的绳索，绳索通过理想滑轮 C 悬挂一质量为 m 的物块 D。已知圆柱 B 的质量为 $2m$，三角块 A 的质量为 $3m$ $\alpha = 30°$。设开始时系统处于静止状态, 滑轮 C 的大小和质量略去不计。试确定系统的运动。



题 11.24 图

解： 如左图，由几何关系有 $y+l+\theta r=const$ 故系统为三自由度系统 (忽略 D 物块的横向自由度[1]) 取 $x, y\ \theta$ 为广义坐标，则有:

$$T=\frac{1}{2}\cdot 3m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\cdot 2m\left[(\dot{x}-(\dot{y}+\dot{\theta}r)\cos\alpha)^2+(\dot{y}+\dot{\theta}r)^2\sin^2\alpha\right]+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2.$$

$$U=-\mathrm{mg}\,gy-2mg(\cos nt-y-\theta r)\sin\alpha.$$

代入拉格朗日方程可得:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=3m\dot{x}+m\dot{x}+2m[\dot{x}-(\dot{y}+\dot{\theta}r)\cos\alpha],\frac{\partial L}{\partial x}=0\Rightarrow b\ddot{x}=\sqrt{3}\left(\ddot{y}+\ddot{\theta}r\right)\Rightarrow 2\sqrt{3}\ddot{x}=\ddot{y}+\ddot{\theta}r$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}=m\dot{y}+2m(\dot{y}+\dot{\theta}r)-2m\dot{x}\cos\alpha,\frac{\partial L}{\partial y}=-mg+2mg\sin\alpha=0\Rightarrow 3\ddot{y}+2\ddot{\theta}r=\sqrt{3}\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=2m\left(-\dot{x}r\cos\alpha+r\dot{y}+\dot{\theta}r^2\right)+mr^2\dot{\theta},\frac{\partial L}{\partial\theta}=2mgr\sin\alpha\Rightarrow 2\ddot{y}+3\ddot{\theta}r=g+\sqrt{3}\ddot{x}$$

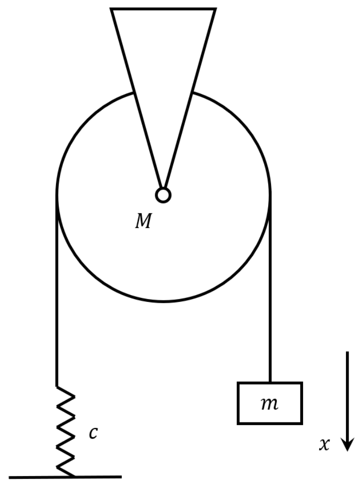
联立解得:

$$\begin{cases}\ddot{x}=\frac{\sqrt{3}}{24}g\\ \ddot{y}=-\frac{3}{8}g\\ \ddot{\theta}=\frac{5g}{8r}\end{cases}$$

[1]此假设并无道理，此处仅为简化模型。

第十二章　微振动

题 12.2　质量为 m 的物体悬挂于不可伸长的绳子上，该绳另一端跨过定滑轮后与一弹簧相连，弹簧刚性系数为 c；滑轮可视为均质圆柱，质量为 M，半径为 R。求该系统作微振动的微分方程及振动频率。



题 12.2 示意图

解：　取广义坐标为物体距离平衡位置的距离 x（也可以用滑轮的转角 θ），再取系统平衡时的位置为零重力势能点，则可以给出动能和势能表达式：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{2m+M}{4}\dot{x}^2$$

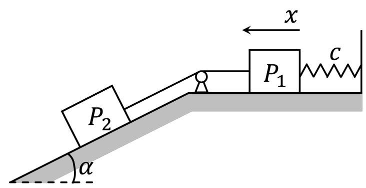
$$U = -mgx + \frac{1}{2}(x+\delta)^2 = \frac{1}{2}c(x^2+\delta^2),\, \delta = mg/c$$

代入拉格朗日方程化简即得：

$$(m+M/2)\ddot{x} + cx = 0$$

振动频率 $\omega = \sqrt{\frac{c}{m+M/2}}$。

题 12.3　物体 A 和 B 重量分别为 P_1 和 P_2，用弹簧和滑轮连接构成振动系统。系统平衡时，水平弹簧伸长为 δ，斜面倾角为 α，不计摩擦，求系统微振动的周期。



题 12.3 示意图

解： 取 A 到平衡位置的距离 x 为广义坐标，以平衡位置为零重力势能点，则有：

$$T = \frac{P_1 + P_2}{2g}\dot{x}^2,\, U = \frac{1}{2}c(x^2 + \delta^2),\, \delta = \frac{P_2 \sin\alpha}{c}$$

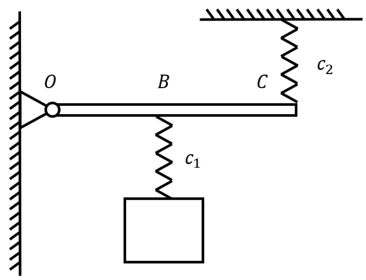
代入拉格朗日方程化简即得

$$(P_1 + P_2)\ddot{x} + cgx = 0$$

故得振动周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{P_1 + P_2}{cg}}$$

题 12.6 无重杆铰接于 O，重物 A 通过弹簧挂在杆上 B 点，振动系统如图所示。已知两弹簧的刚度系数为 c_1 和 c_2，$OB = a, OC = b$，求系统的固有频率。



题 12.6 示意图

解： 以本题为例展示第二类拉格朗日方程法、静伸长法和能量法的求解流程。

拉二法 取杆 OC 相对水平位置的转角 θ 为广义坐标，则系统的总势能为

$$U = \frac{1}{2}c_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}c_2\delta_2^2$$

其中 $\delta_1, \delta_2 = \theta b$ 分别为两根弹簧的伸长量。又知杆为无重杆，故杆受合外力矩必为零，即：

$$c_1\delta_1 a = c_2\delta_2 b \implies \delta_1 = \frac{c_2 b^2}{c_1 a}\theta$$

代入势能表达式中可得

$$U = \frac{c_2 b^2(c_1 a^2 + c_2 b^2)}{2c_1 a^2}\theta^2$$

而重物相对弹簧为原长时的位移可以表示为

$$x = \theta a + \delta_1 = \frac{c_1 a^2 + c_2 b^2}{c_1 a}\theta$$

故总动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m(c_1a^2 + c_2b^2)^2}{2c_1^2a^2}\dot{\theta}^2$$

代入第二类拉格朗日方程整理后可得：

$$m(c_1a^2 + c_2b^2)\ddot{\theta} + c_1c_2b^2\theta = 0 \implies \omega = \sqrt{\frac{c_1c_2b^2}{m(c_1a^2 + c_2b^2)}}$$

静伸长法 系统静止时，物体相对**两弹簧均为原长**时的位移为 $\delta = \frac{mg}{c_1} + \frac{mga^2}{c_2b^2} = \frac{mg(c_1a^2+c_2b^2)}{c_1c_2b^2}$ 故由静伸长法，得固有频率

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{c_1c_2b^2}{m(c_1a^2 + c_2b^2)}}$$

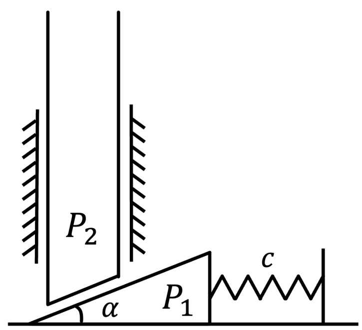
能量法 以平衡位置为零势能点，取物块相对平衡位置的位移 x 为广义坐标，则可写出势能和动能：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \implies T^* = \frac{1}{2}mx^2$$

$$U = -mgx + \frac{1}{2}c_1(x_1 + \delta_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(x_2 + \delta_2)^2 = \frac{c_1c_2b^2x^2}{2(c_1a^2 + c_2b^2)} + \frac{1}{2}c_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}c_1\delta_1^2$$

取平衡位置为**零势能点**，则 $U_{\max} = U - \frac{1}{2}c_1\delta_1^2 - \frac{1}{2}c_2\delta_2^2 = \frac{mg(c_1a^2+c_2b^2)}{c_1c_2b^2}$ 由 $\omega = \sqrt{U_{\max}/T^*}$ 即可得到相同结果。

题 12.7 楔块 A 重 P_1，B 重 P_2，它分别可以在水平面和铅锤滑道内滑动。弹簧刚性系数为 c，A 块斜角为 α。当系统平衡时 A 块获得一水平速度 v_0，求 B 块的运动方程。



题 12.7 示意图

解： 由几何关系可以得到 $\Delta x_A = \Delta x_B \cot\alpha$，故写出动能和势能表达式为：

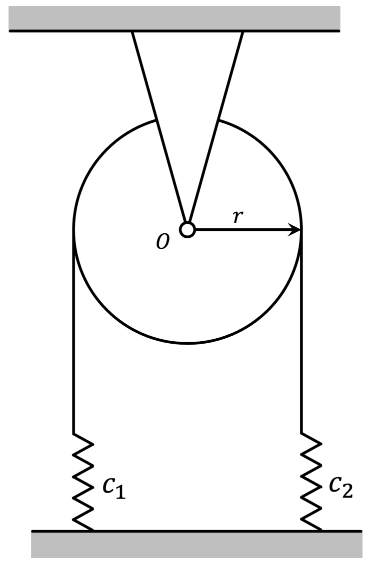
$$T = \frac{P_1\cot^2\alpha + P_2}{2g}\dot{x}_B^2$$

$$U = \frac{1}{2}c(x_B^2\cot^2\alpha + \delta^2),\ \delta = \frac{P_2\tan\alpha}{c}$$

代入拉格朗日方程即可得到 B 的运动方程

$$(P_1 + P_2\tan^2\alpha)\ddot{x}_B + cgx_B = 0$$

题 12.9　半径为 r 的轮子重对于转动轴 O 的回转半径为 ρ，一不可伸长的轻绳跨过滑轮，两端分别与二弹簧相连，二弹簧刚性系数分别为 c_1, c_2。调整底座的位置，使滑轮轴 O 受力为 $2P$，求系统作微振动的固有频率（摩擦不计）。



题 12.9 示意图

解：　取轮的转角 θ 为广义坐标，由于系统为单自由度，故系统动能和势能：

$$T = \frac{P}{2g}\rho^2\dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2}c_1(\theta r + l_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(l_2 - \theta r)^2$$

其中 l_1, l_2 满足 $c_1 l_1 = P/2, c_2 l_2 = P/2$。代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q_j}}\right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q_j} = 0$$

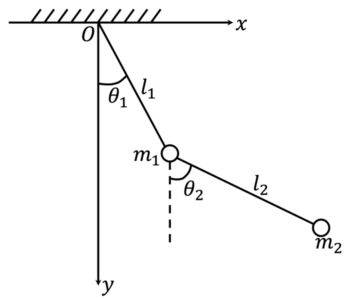
则有：

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\theta}^2 + (c_1 + c_2)r^2\theta = 0$$

即得系统微振动频率：

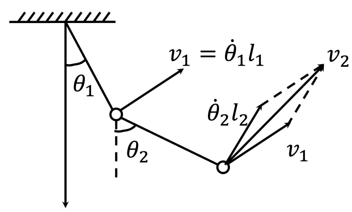
$$\omega = \sqrt{\frac{(c_1+c_2)r^2 g}{P\rho^2}}$$

题 12.12　质量为 m_1 和 m_2 的两个小球分别用长 l_1 和 l_2 的轻绳连接成双摆振动系统，如图所示。用角度 θ_1 和 θ_2 为广义坐标推导系统在铅垂平面内微振动微分方程和频率方程。并求当 $m_1 = m_2 = m, l_1 = l_2 = l$ 时系统的主频率，画出主振型图。



题 12.12 示意图

解： 如下题 12.12 解图所示：



题 12.12 解图

系统动能和势能：

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot\theta l_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot\theta l_1)^2 + (\dot\phi l_2)^2 - 2\cos(\theta-\phi)\dot\theta\dot\phi l_1 l_2\right]$$

$$U = m_1 g l_1(1-\cos\theta) + m_2 g\left[l_1(1-\cos\theta) + l_2(1-\cos\phi)\right]$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_j} = 0$$

其中 q_j 为广义坐标，本题取 $q_1=\theta, q_2=\phi$，即得：

$$\begin{aligned} m_1(l_1^2+l_2^2)\ddot\theta - m_2 l_1 l_2\ddot\phi + (m_1+m_2)g l_1\theta = 0 \\ m_2 l_2^2\ddot\phi - m_2 l_1 l_2\ddot\theta + m_2 g l_2\phi = 0 \end{aligned}$$

此即所求的运动微分方程。取 $\theta = A\sin(\omega t+\beta), \phi = B\sin(\omega t+\beta)$，则有：

$$\begin{aligned} [(m_1+m_2)g l_1 - m_1(l_1^2+l_2^2)\omega^2]A + m_2 l_1 l_2\omega^2 B = 0 \\ m_2 l_1 l_2\omega^2 A + (m_2 g l_2 - m_2 l_2^2\omega^2)B = 0 \end{aligned}$$

此即所求的频率方程，取 $m_1=m_2=m$，以及 $l_1=l_2=l$，则上式可以化为：

$$\begin{aligned} 2(g-\omega^2 l)A + \omega^2 l B = 0 \\ \omega^2 l A + (g-\omega^2 l)B = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

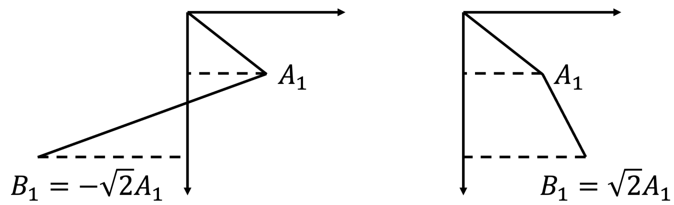
上述方程要有非零解，即得

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{2}g}{(\sqrt{2}\pm 1)l}$$

代入式(1)中即可得到主振型：

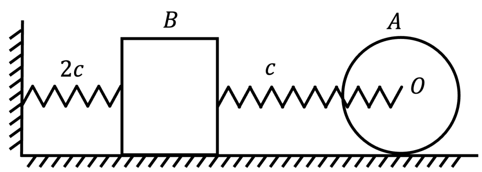
$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{l}{2(l-g/\omega_1^2)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{A_2}{B_2}=\frac{l}{2(l-g/\omega_2^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

此即两个主振型，绘出振型图如下：



题 12.12 振型图

题 12.15　均质圆柱 A 质量为 m，半径为 r，物块 B 质量为 $3m$，它们在水平面上用刚性系数为 c 和 $2c$ 的两个弹簧连接成振动系统。圆柱只滚不滑，物体 B 与平面之间的摩擦可略。初始时。轴 O 偏离平衡位置的距离为 x_0，B 位移为零，初速度均为零。求系统的微振动方程和主频率。



题 12.15 示意图

解：　取水平向右为正方向，则可写出系统动能和势能：

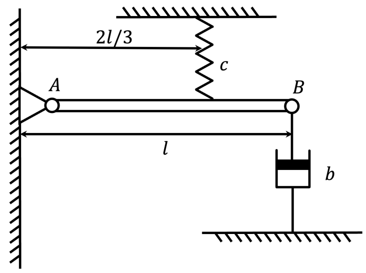
$$T=\frac{3}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2r^2}(I+mr^2)\dot{x}_2^2$$
$$U=\frac{1}{2}\cdot 2cx_1^2+\frac{1}{2}c(x_2-x_1)^2$$

代入拉格朗日方程即可得到

$$\begin{cases}3m\ddot{x}_1+3cx_1-cx_2=0\\3m\ddot{x}_2/2+cx_2-cx_1=0\end{cases}$$

从而可以求得主频率 $\omega^2=4c/3m$ 或 $c/3m$

题 12.19　计算图示系统的固有频率和有阻尼的自由振动的频率。设弹簧刚性系数为 c，广义阻尼系数为 b，B 球（质点）质量为 m，杆 AB 质量不计，其余参数如图所示。



题 12.19 示意图

解: 取杆转角 θ 为广义坐标，则容易得到固有频率 $\omega^2 = 4c/9m$，再由广义阻尼系数的定义可以得到运动方程

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{4c}{9m}\theta = 0$$

故 $n = b/2m$，即得阻尼振动的频率

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \sqrt{\frac{4c}{9m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

题 12.23 一台机器重 3500N，由四根刚度系数为 400N/cm 的弹簧支持。作用于机器的周期激振力的最大值为 100N，频率为 2.5Hz，广义阻尼系数值为 16N·s/cm，求该机器受迫振动的振幅。

解: 容易得到系统的运动方程

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_0 \sin(2\pi f t)$$

由课本式 (12.49) 和 (12.55) 可以得到振幅

$$B = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \kappa^2)^2 + 4n^2\kappa^2}}$$

其中 $\omega^2 = c/M$, $2n = b/M$, $h = F_0/M$, $\kappa = 2\pi f$，计算得到 $B = 1.313\text{mm}$。

题 12.24 机器重 9kN，其中转子重 1.8kN，其重心偏移轴线 0.5cm。支持机器的弹簧组（视为等效弹簧）静变形 $\delta = 1\text{cm}$。转子转速为 3000r/min。液压减振器的阻力与机器上下振动的速度 v 成正比，且 $v = 1\text{cm/s}$ 时阻力为 180N。由于采用该减振器，机器的附加动压力将减低多少倍?

解: 取广义坐标为机器的竖直方向位移 x，则可得到如下运动方程:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = H \sin \kappa t$$

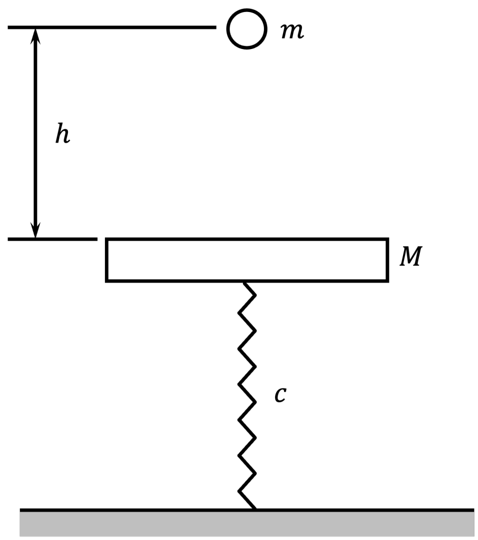
由题意易知 $M = 9\text{kN}/(9.8\text{m/s}^2)$, $b = 180\text{N}/(1\text{cm/s})$, $c = 9\text{kN}/1\text{cm}$, $\kappa = 2\pi n$, $H = 1.8\text{kN} \times \kappa^2 \times 0.5\text{cm}/9.8\text{m/s}^2$，代入隔振系数的公式

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2 + 4\xi^2\lambda^2}}$$

其中 $\lambda^2 = \kappa^2/\omega^2$, $\xi^2 = n^2/\omega^2 = b^2/4ac$ 计算得到 $\eta = 0.0637$

第十三章 碰撞

题 13.1 [1]质量为 m 的小球自高度 h 自由下落，与质量为 M 的板发生正碰撞。支持 M 的弹簧网性系数为 c，碰撞恢复系数为 k, 求弹簧压缩的最大距离。当 k 取何值时，碰撞后小球速度恰为零?



题 13.1 图

解： 解：设碰撞前小球速度为 v_1, 板速度为 $v_2=0$.

$$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2\Rightarrow v_1=\sqrt{2gh}$$

碰撞前后动量守恒, 设碰后小球速度为 u_1, 板速度为 u_2

$$\begin{aligned} mv_1+Mv_2&=mu_1+Mu_2 \\ k=\left|\frac{\Delta u}{\Delta v}\right|&=\frac{u_2-u_1}{v_1} \end{aligned} \quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u_1=\frac{m-kM}{m+M}v_1 \\ u_2=\frac{(1+k)m}{m+M}v_1 \end{array}\right.$$

设弹簧初始形变为 $\delta=\frac{Mg}{c}$, 板再次下降的最大距离为 x，则根据能量守恒,

$$\frac{1}{2}Mu_2^2+Mgx+\frac{1}{2}c\delta^2=\frac{1}{2}c(x+\delta)^2$$

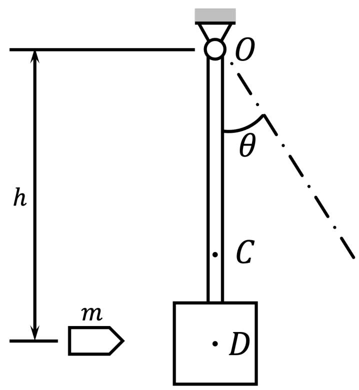
$$\Rightarrow x=\sqrt{\frac{M}{c}}u_2=\sqrt{2\frac{Mgh}{c}}\cdot\frac{(1+k)m}{M+m}\quad\Rightarrow x_{\max}=x+\delta$$

[1]本章题解主要由 2019 级邢一诺同学撰写。

若碰后小球速度为 0,　$u_1 = 0$.

$$\Rightarrow \frac{m-kM}{m+M}v_1 = 0 \Rightarrow k = \frac{m}{M}$$

题 13.15　测定子弹速度的冲击摆由摆杆和沙袋构成。摆的质量为 M，其重心到悬挂点的距离 $OC = l$；摆对于转动轴 O 的回转半径为 ρ；子弹质量为 m，射入砂袋后子弹到 O 轴之距离 $OD = h$；为使轴 O 处不产生碰撞约束反力，令 $hl = \rho^2$。若子弹射入后使摆偏开某一角度 θ，求子弹的速度。



题 13.15 图

解: 轴 O 处不产生碰撞约束反力，因此，系统碰撞前后对 O 轴动量矩守恒设子弹初速度为 v_0 ，碰撞结束时摆的角速度为 ω 碰撞后子弹速度为 v, 摆对 O 轴的转动惯量为 J_0

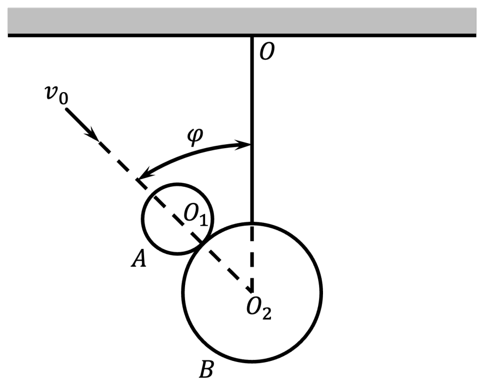
$$\begin{cases} m \cdot v_0 \cdot h = J_0 \cdot \omega + mvh \\ v = \omega h \\ J_0 = M\rho^2 = Mhl \end{cases} \Rightarrow \omega = \frac{mv_0}{Ml + mh.}$$

碰撞结束后, 由能量守恒

$$\frac{1}{2}J_0 w^2 + \frac{1}{2}mv^2 = Mgl(1-\cos\theta) + mgh(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{(Ml+mh)}{m}\sqrt{\frac{2g(1-\cos\theta)}{h}}$$

题 13.18　质量为 M 的小球由不可伸长的细绳吊在空中，另一质量为 m 的小球在与绳成 φ 角方向以速度 v_0 与 M 正碰撞，已知恢复系数为 k，求二球碰撞后的速度。



题 13.18 图

解：由于球 A、B 为正碰，故碰撞后球 A 速度沿 O_1O_2 方向, 设其大小为 v_1。又球 B 连接的细绳不可伸长，故碰撞后球 B 速度沿水平方向, 设其大小为 v_2。

碰撞前后关于 O 点动量矩守恒 (设不可伸长绳长为 l):

$$mv_0 l\sin\varphi = mv_1 l\sin\varphi + Mlv_2 \tag{1}$$

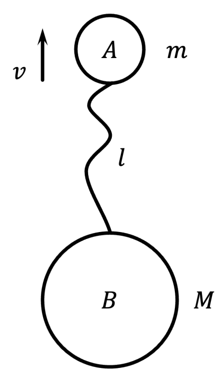
碰撞恢复系数为 k, 在 O_1O_2 方向上有:

$$k = \frac{v_2\cdot\sin\varphi - v_1}{v_0} \tag{2}$$

两式联立, 得到

$$\begin{cases} v_1 = \frac{mv_0\sin^2\varphi - Mkv_0}{m\sin^2\varphi + M} \\ v_2 = \frac{mv_0(1+k)\sin\varphi}{m\sin^2\varphi + M} \end{cases}$$

题 13.22　两个物体 A 和 B 可视为质点, 质量分别为 m 和 M, 以长 l 的轻绳相连。初始时两物体在同一位置, A 以初速 v_0 垂直上抛。求 A 物体所能达到的最大高度 H (设绳不可伸长, 并且绳子拉直后不再松弛)。



题 13.22 图

解：设绳拉直前 A 的速度为 v_1

$$mgl + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$$

(1) 若 $v_0^2 \le 2gl$ ，即 A 在上升至最大高度 H 时绳仍末拉直

$$mgH = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$$

(2) 若 $v_0^2 > 2gl$ ，设绳拉直后 A, B 共同速度为 v_2

$$(m+M)v_2 = mv_1 \Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{m+M}$$

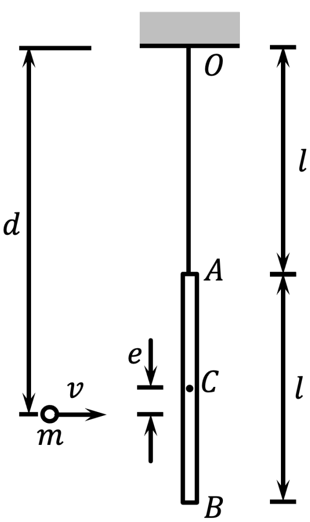
再上升 h:

$$\frac{1}{2}(m+M)v_2^2 = (m+M)gh \Rightarrow h = \frac{v_2^2}{2g} = \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \frac{v_0^2 - 2gL}{2g}$$

因此:

$$\Rightarrow H = \begin{cases} \frac{v_0^2}{2g} & v_0^2 \le 2gl \\ \left(\frac{m}{m+M}\right)^2 \left(\frac{v_0^2}{2g} - l\right) + l & v_0^2 > 2gl \end{cases}$$

题 13.23 重 0.5 N 的子弹以水平速度 500 m/s 射进重 80 N 长 0.6 m 的木杆中, 木杆由长 0.6 m 的细绳吊在空中, 初始杆静止, 绳质量不计。子弹射进木杆处距木杆质心 0.10 m, 求子弹射入后的瞬时木杆端点 A 的速度及杆的角速度。



题 13.23 图

解: 设子弹入射后瞬间, 杆获得角速度 ω, 子弹速度为 u_1 系统关于 O 轴动量矩守恒,

$$\begin{cases} mvd = mu_1 d + I_c\omega + Mu_c \cdot \frac{3}{2}l \\ I_c = \frac{1}{12}Ml^2 \\ u_1 = u_c + \omega \cdot e \end{cases}$$

水平方向动量守恒:

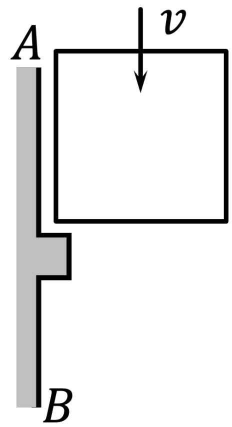
$$mv = mu_1 + Mu_c$$

联立可以解得:

$$\begin{cases} u_c = 3.099 \text{ m/s} \\ w = 10.331 \text{rad/s} \end{cases}$$

从而得到 A 点速度 $u_A = u_c - \omega \cdot \frac{l}{2} = 0$

题 13.25　质量为 m 的物块呈正方体, 边长为 a, 以速度 $\boldsymbol{v}$ 平行落下时, 在 B 点撞在小凸缘上, 设碰撞是完全弹性的, 求碰撞后质心的速度和物块的角速度.



题 13.25 图

解:　设小凸缘对物块的冲量为 S, 方向坚直向上, 物块碰撞后的速度为 u 动量定理:

$$mu - mv = -S$$

动量矩定理:(对物块的质心)

$$I_c \cdot \omega = S \cdot \frac{1}{2}a$$

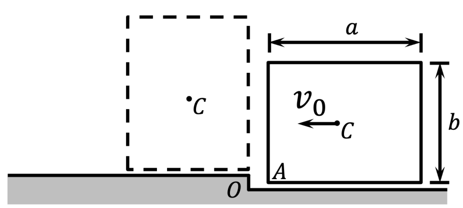
能量守恒:（完全弹性）

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \quad I_c = \frac{1}{6}ma^2$$

联立可以解得,

$$\begin{cases} w = \frac{12v}{5a} \\ u_c = \frac{1}{5}v \end{cases}$$

题 13.28　图示矩形物块长为 a, 宽为 b, 在水平面上以匀速 $\boldsymbol{v}_0$ 滑动时撞在一小台台上, 设恢复系数为零. 为使物块能绕凸台翻转上去, 并立在凸台上, 物块的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 至少应为多大?

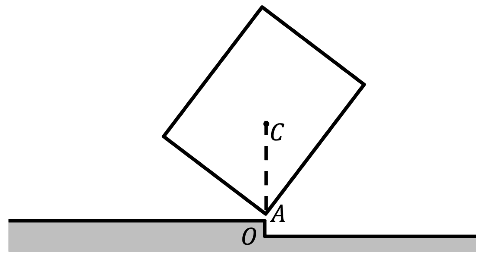


题 13.28 图

解: 设凸台高度为 h, 凸台角点 O 与物块 A 点碰撞碰后物块角速度为 w. 因为恢复系数为 0 , 所以碰后 A 点速度为 0 。碰撞过程中关于 O 点角动量守恒:

$$\Rightarrow mv_0\left(\frac{1}{2}b-h\right)=I_A\omega$$

$$I_A=I_C+m|AC|^2=\frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)+m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-h\right)^2\right)$$



题 13.28 解图

若物块能翻转到凸台上, C 点运动到最高点（AC 与地面垂直）时, 物块速度至少为 0 , 此时根据能量守恒:

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2+mg\frac{b}{2}=mg(h+|AC|)$$

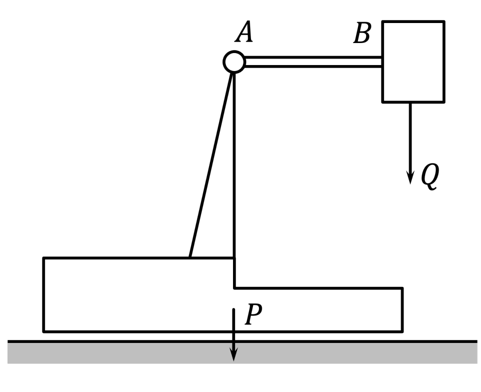
联立上述各式可以解得：1

$$v_{o\min}=\frac{1}{m\left(\frac{b}{2}-h\right)}\sqrt{2mgI_A\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\left(\frac{b}{2}-h\right)^2}-\frac{b}{2}+h\right)}$$

若 $h\to 0$ 则有

$$v_{o\min}=\frac{2}{\sqrt{3}b}\sqrt{g\left(a^2+b^2\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-b\right)}$$

题 13.30 一块重 P 的木板带一铰链支座 A, 铰接了一个重锤 $B, AB=R$, 锤 B 重为 Q, 锤柄重量不计。设板与地面间静摩擦系数与滑动摩擦系数均为 f, 初始时, AB 水平放置, 当 B 自由落下与板相碰之前, 板与地面没有相对滑动, 碰撞是非弹性的。问碰撞后系统 (板与锤) 之质心会不会移动? 如果不会移动, 说明原因; 如果会移动, 求出移动距离。



题 13.30 图

解: B 自由下落与板相碰之前, 板与地面没有相对滑动, 即地面提供的是静摩擦力. 系统的机械能守恒

$$mgR = \frac{1}{2}mV^2$$
$$\Longrightarrow \quad V = \sqrt{2gR}$$

水平向左, 为 B 碰撞前的速度。碰撞是非弹性的. 恢复系数为 $k = 0$ 。

则系统水平方向动量守恒, 碰撞后的系统速度 u

$$u = \frac{PV}{P+Q}$$

系统的动能 $T = \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}\frac{P+Q}{g}\left(\frac{PV}{P+Q}\right)^2 = \frac{P^2R}{P+Q}$ 由

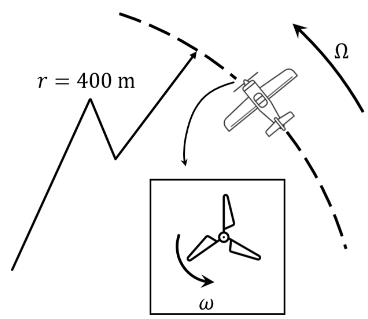
$$Fs = f(P+Q)s = \frac{Q^2R}{P+Q}$$

移动距离 S

$$s = \frac{Q^2R}{(P+Q)^2f}$$

第十四章　陀螺运动的近似理论

题 14.1　飞机螺旋桨的质量 $m = 150\text{kg}$，对转轴的回转半径 $\rho = 0.9\text{m}$；自转的转速 $n = 1500\text{r/min}$。当飞机以速度 $v = 600\text{km/h}$ 沿半径 $r = 400\text{m}$ 的圆弧作左盘旋时，求螺旋桨的陀螺力矩。



题 14.1 图

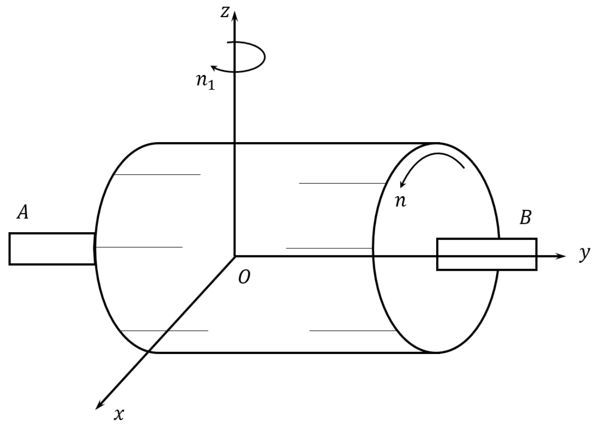
解：　如题 14.1 图[1]所示，由题意可知自转角速度为 $\omega = 2\pi n/60 = 50\pi\text{rad/s}$，公转角速度为 $\Omega = v/r = \frac{5}{12}\text{rad/s}$ 远小于自转角速度 ω，故本题可以利用陀螺近似。

由题意易知螺旋桨的 $I_z = m\rho^2 = 121.5\text{kg}\cdot\text{m}^2$，故其动量矩的大小为 $H_0 = \omega I_z = 6075\pi\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$，方向指向飞机前进方向。利用陀螺近似，得陀螺力矩的大小为

$$L_0 = H_0\Omega\sin<\vec{\omega},\vec{\Omega}>= H_0\Omega = \frac{10125}{4}\pi\text{N}\cdot\text{m} = 2531.25\pi\text{N}\cdot\text{m} = 7952.16\text{N}\cdot\text{m}$$

题 14.3　电机转子的质量 $m = 2.72\text{kg}$，对其自转轴 z 的回转半径 $\rho = 0.05\text{m}$，转速为 $n = 3600\text{r/min}$。已知电机底座以转速 $n_1 = 6\text{r/min}$ 绕轴 x 进动，求电子转子的陀螺力矩。又设两轴承 A 和 B 之间的距离 $l = 0.2\text{m}$；求陀螺力矩在轴承 A 和轴承 B 上引起的动压力。

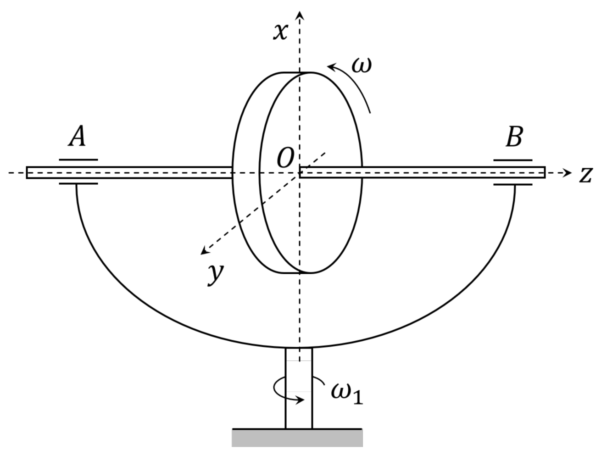
[1]本题的另一种理解方式为螺旋桨在飞机上端，自转角速度垂直于纸面，此时动量矩和公转角速度平行，螺旋力矩为零。



题 14.3 图

解： 由题意，自转角速度大小为 $\omega = 2\pi n/60 = 120\pi\mathrm{rad/s}$，方向沿 z 轴正方向；公转角速度大小为 $\Omega = 2\pi n_1/60 = 0.2\pi\mathrm{rad/s}$，方向沿 x 轴负方向。显然，公转角速度远小于自转角速度，故此题可以应用陀螺近似求解得到陀螺力矩大小为为 $L = m\rho^2\omega\Omega = 1.611\mathrm{N\cdot m}$，方向沿 y 轴负方向。动反力大小为 $F = \frac{L}{l/2} = 16.11\mathrm{N}$。

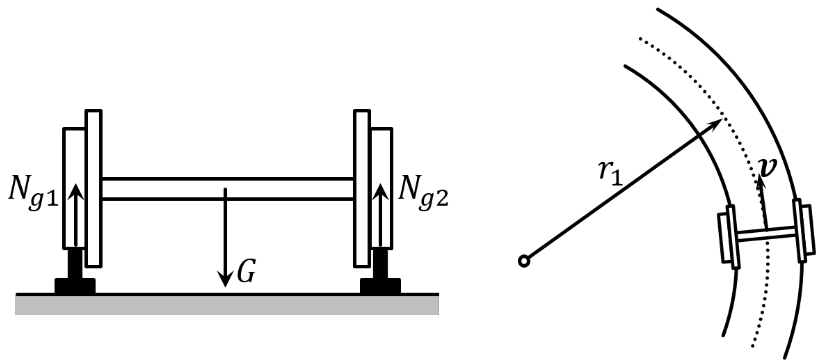
题 14.5 转子的质量是 m，半径为 r，可看成是匀质圆盘，以角速度 ω 绕对称轴高速转动，对称轴水平地装在轴承 A 和 B 上；而轴承支架又以角速度 ω_1 绕通过转子中心 O 的铅直轴线转动。两轴承之间的距离 $AB = l$，求转子的陀螺力矩以及它在轴承 A 和 B 上引起的动压力。



题 14.5 图

解： 由于转子绕自转轴高速转动，故本题可以利用陀螺近似的知识，从而容易得到陀螺力矩的大小 $L = I_z\omega\Omega = \frac{1}{2}mr^2\omega\omega_1$，方向沿 y 轴正方向。动压力大小易求得为 $P = L/l = mr^2\omega\omega_1/2l$

题 14.10 列车车厢的车轮轴的总质量 $m = 1400\mathrm{kg}$，对转轴的回转半径 $p = \sqrt{0.55}r$，其中车轮的半径 $r = 0.75\mathrm{m}$；两轮间的距离 $l = 1.5\mathrm{m}$。设列车以匀速 $v = 72\mathrm{km/h}$ 沿平均半径 $r_1 = 200\mathrm{m}$ 的水平圆弧轨道行驶。求车轮的重力和回转力矩在轨道上引起的压力 N_g。



题 14.10 图

解：　如题 14.10 图所示，车轮轴绕自己的转轴自转的同时，自转轴还绕通过圆弧轨道圆心的竖直轴公转，故本题可以采用陀螺近似处理。公转和自传的角速度大小分别为

$$\Omega = v/r_1, \quad \omega_r = v/r$$

陀螺力矩则为

$$L = I_z\omega_r\Omega = \frac{m\rho^2v^2}{rr_1}$$

由受力分析可以得到

$$\begin{aligned} mg =& N_{g1} + N_{g2} \\ L =& N_{g1}(r_1 - l/2) + N_{g2}(r_1 + l/2) - Gr \end{aligned}$$

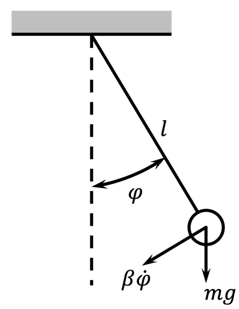
联立解得

$$N_{g1} = 6090\text{N}, \quad N_{g2} = 7630\text{N} \quad (g = 9.8\text{m/s}^2)$$
$$N_{g1} = 6230\text{N}, \quad N_{g2} = 7770\text{N} \quad (g = 10\text{m/s}^2)$$

第十五章　变质量体动力学问题

题 15.4 [1] 一个变质量摆在阻力与速度成正比的介质中运动, 摆的质量由于质点的离散, 按已知规律 $m = m(t)$ 而变化, 且质点离散的相对速度为 0 。已知摆线的长为 l, 摆球受到与其角速度 ω 成正比的阻力 $R = -\beta\dot{\varphi}$ 的作用。试写出这摆的运动方程式。

解: 由题意有题 15.4 解图:



φ

题 15.4 解图

利用物理量的对称关系，可以由课本式 (15.1)[2]得到角速度下的变质量体运动微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}(I\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\mu}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \implies I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{\mu}_r\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为分离后微粒的角速度，而 $\boldsymbol{\mu}_r$ 则为分离后微粒的相对速度。在本题中，微粒分离后的相对速度等于零，即 $\boldsymbol{\mu}_r = 0$ ，故有:

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\beta\omega l - mgl\sin\varphi$$

整理即得摆的运动方程:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{ml}\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

利用课本式 (15.1) 同样可以求解本题：此时设绳上的拉力为 T，x, y 轴正方向分别为水平向右和水平向上，则有运动微分方程:

$$m\ddot{x} = -\beta\omega\cos\varphi - T\sin\varphi$$

$$m\ddot{y} = T\cos\varphi - mg - \beta\omega\sin\varphi$$

[1]本章题解主要由 2019 级邢一诺同学撰写。

[2]参照课本上的推导，也可以给出角速度下的方程的严格推导，此处不作详细讨论。

又知 $\dot{x}=\dot{\varphi}l\cos\varphi$, $\dot{y}=\dot{\varphi}l\sin\varphi$，可得

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}&=\ddot{\varphi}l\cos\varphi-\dot{\varphi}^2l\sin\varphi\\
\ddot{y}&=\ddot{\varphi}l\sin\varphi+\dot{\varphi}^2l\cos\varphi
\end{aligned}
$$

代入运动微分方程中并消去拉力 T，即可得到与 (2) 式相同的结果。

题 15.6　火箭在真空均匀重力场中以匀加速度 $a=4g$ 铅直向上运动。喷射气流的相对速度 $u=2.5\ \mathrm{km/s}$。试求火箭质量减至原有质量的三分之一所经过的时间。

解:　由变质量体的运动微分方程:

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

以坚直向上方向为正方向, 则有:

$$
\begin{aligned}
&Ma=-Mg-u\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\\
&\implies \frac{\mathrm{d}M}{M}=-\frac{a+g}{u}\,\mathrm{d}t\\
&\implies \int_M^{M'}\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\int_0^{t'}\frac{a+g}{u}\,\mathrm{d}t.\\
&\implies \ln M'-\ln M=-\frac{a+g}{u}t'\\
&\implies \ln M'=\ln M-\frac{a+g}{u}t'
\end{aligned}
$$

当 $M'=\frac{1}{3}M$ 时, $t'=\frac{u\ln 3}{a+g}=56.05\ \mathrm{s}(g=9.8\mathrm{m/s^2})$

题 15.12　一气球重为 Q, 牵引一堆在地面上的绳子沿铅垂方向上升。作用在气球上的力有三个: 升力 R, 重力 Q 以及与速度平方成正比的阻力 $F=-\beta\dot{x}^2,\beta$ 为阻力系数。绳子的单位长度重为 γ。求气球的运动方程。

解:　由题意有:

$$M=\frac{Q}{g}+\frac{\gamma}{g}x,\quad \boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$$

且受的合外力

$$F_M=R-Q+F-\gamma x=R-Q-\beta\dot{x}^2-\gamma x$$

代入运动微分方程:

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_M+\boldsymbol{v}_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

即可得到:

$$M\left(\frac{Q}{g}+\frac{\gamma}{g}x\right)\dot{v}=R-Q-\beta\dot{x}^2-\gamma x-\frac{v\gamma}{g}\dot{x}$$

整理即得气球的运动方程:

$$\left(\frac{Q}{g}+\frac{\gamma}{g}x\right)\ddot{x}+\left(\beta+\frac{\gamma}{g}\right)\dot{x}^2+\gamma x+Q-R=0$$

题 15.14　一枚火箭总质量为 1000 kg, 其中包括燃料质量 900 kg。在 $t = 0$ 时, 火箭垂直地向上发射。已知燃料消耗量为 10 kg/s, 并以 $v_{\mathrm{r}} = 2100$ m/s 的相对速度喷出, 当 (1) $t = 0$; (2) $t = 45$ s; (3) $t = 90$ s 时, 试求火箭的速度和加速度。

解:　取火箭运动方向为正方向，由变质量体的运动微分方程有:

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Mg + v_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

其中 $M = M(t) = 1000 - 10t(\mathrm{kg}), v_r = -2100\mathrm{m/s}$，代入 (1) 中即得:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{2100}{100-t}\ \mathrm{m/s^2}$$

积分即得速度与时间的关系:

$$v = -gt + 2100\ln\left(\frac{100}{100-t}\right)\ \mathrm{m/s}$$

取 $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$，代入题中时刻，即得:

$$\begin{aligned}
t = 0\mathrm{s}:&\quad a = 11.20\mathrm{m/s^2},\quad v = 0\mathrm{m/s}\\
t = 45\mathrm{s}:&\quad a = 28.38\mathrm{m/s^2},\quad v = 814.5\mathrm{m/s}\\
t = 90\mathrm{s}:&\quad a = 200.2\mathrm{m/s^2},\quad v = 3953\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

题 15.16　变质量物体沿与水平面成 30° 角的光滑斜面以匀加速度 g 向下运动, 其初始速度是 v_0。设分离微粒的绝对速度等于零, 物体的初始质量等于 m_0, 试求物体的质量变化规律。

解:　取沿斜面向下为正方向，则由变质量体的运动微分方程:

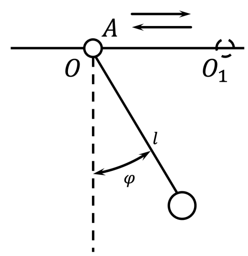
$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}Mg + v_r\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

其中 $v_r = -v$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g$, $v = gt + v_0$ 为物体的速度大小，代入上式即可解得

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{gt/v_0 + 1}}$$

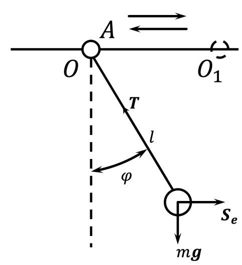
第十六章　非惯性坐标系中的动力学问题

题 16.2 [1] 图示单摆 AB 长 l, 已知点 A 在固定点 O 的附近沿水平作谐振动: $OO_1 = a\sin pt$, 其中 a 与 p 为常数。设初瞬时摆静止, 求摆的相对运动规律。



题 16.2 图

解: 如题 16.2 解图所示:



题 16.2 解图

则有:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k$$

$$S_e = -ma_e = map^2 \sin pt, \quad S_k = 0$$

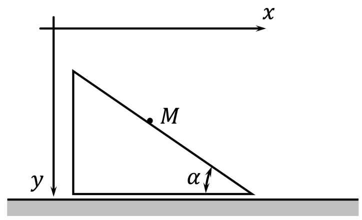
沿切向 $\boldsymbol{\tau}$ 投影,

$$m\ddot{\varphi}l = S_e \cos\varphi - mg\sin\varphi = map^2 \sin pt \cdot \cos\varphi - mg\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi - \frac{a}{l}p^2 \sin pt \cdot \cos\varphi = 0$$

题 16.4 倾角为 α 的光滑直角棱柱体, 沿一水平面作匀加速直线运动, 加速度大小为 a, 初速为零 (见题 16.4 图)。一重量为 P 的小球 M 无初速地沿棱柱体的斜面向下运动。求小球的相对加速度、绝对加速度、绝对轨迹及斜面的反作用力 N。讨论下列特殊情况:

[1]本章题解主要由 2019 级邢一诺同学撰写。

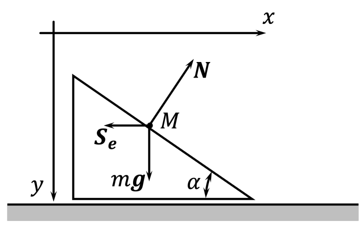


题 16.4 图

(1) $a = g\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

(2) $a = -g\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

解: 如题 16.4 解图所示:



题 16.4 解图

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k, S_k = 0$$

沿斜面方向分解:

$$m\ddot{s} = mg\sin\alpha - S_e\cos\alpha \Rightarrow \ddot{s} = g\cdot\sin\alpha - a\cdot\cos\alpha$$

垂直斜面方向分解:

$$N = S_e\sin\alpha + mg\cos\alpha = mg\cdot\cos\alpha + ma\cdot\sin\alpha$$

(1) $a = g\tan\alpha$，则有 $\ddot{s} = 0$，由

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_e + \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{a}$$

得到小球的绝对轨迹:

$$\begin{cases} \ddot{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + x_0 \\ \ddot{y} = 0 \Rightarrow y = y_0 \end{cases}$$

斜面的反作用力:

$$N = mg\cos\alpha + mg\sin\alpha\tan\alpha = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

(2) 由 $a = -g\cot\alpha$ 可得:

$$\ddot{s} = g\sin\alpha + g\cot\alpha\cos\alpha = \frac{g}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow a_{rx} = \ddot{s}\cos\alpha = \frac{g}{\tan\alpha} \quad a_{ry} = s\sin\alpha = g$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{g}{\tan\alpha} + a = 0, \quad a_y = g$$

故小球的绝对轨迹

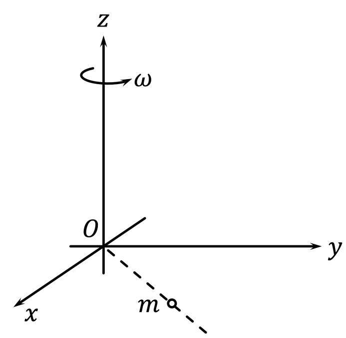
$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{cases}$$

斜面的反作用力 $N = 0$

题 16.8　一质点放在光滑水平面 Oxy 上, 这平面绕固定竖直轴 Oz 以等角速度 ω 转动。现给质点一水平初速度, 证明在质点相对运动中, 以下的等式成立:

1. $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right) =$ 常量;
2. $y\dot{x} - x\dot{y} - \omega\left(x^2 + y^2\right) =$ 常量.

解:　由题意有如题 16.8 解图所示的坐标系:



题 16.8 解图

故有:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k$$

$$\boldsymbol{S}_e = -m\boldsymbol{a}_e = m\omega^2\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{S}_k = -2m\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}_r = 2m\omega\dot{y}\boldsymbol{i} - 2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = m\omega^2 x + 2mw\dot{y} \\ m\ddot{y} = m\omega^2 y - 2m\omega\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x} & (2) \end{cases}$$

1.

$$\begin{aligned} (1)\cdot\dot{x} + (2)\cdot\dot{y} \Rightarrow & \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \omega^2\dot{x}x + \omega^2\dot{y}y \\ & \frac{1}{2}\left(\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{d\dot{y}^2}{dt}\right) = \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}\right) \\ & \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega^2\left(x^2 + y^2\right) + c_1 \end{aligned}$$

2.

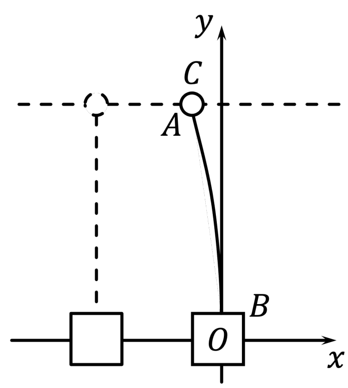
$$(1)\cdot y \Rightarrow \ddot{x}y = \frac{\mathrm{d}(\dot{x}y)}{\mathrm{d}t} - \dot{x}\dot{y} = \omega^2 xy + 2\omega\dot{y}y \quad (3)$$

$$(2)\cdot x \Rightarrow x\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}(x\dot{y})}{\mathrm{d}t} - \dot{x}\dot{y} = \omega^2 xy - 2\omega\dot{x}x \quad (4)$$

$$(3)-(4) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}y - x\dot{y}) = \omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2 + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}y - x\dot{y} = \omega\left(x^2 + y^2\right) + c_2$$

题 16.10　在竖直的弹性杆 AB 的一端 A 上附有重物 C, 其重量为 2.5 公斤。重物 C 能在平衡位置附近作简谐振动 (见图), 弹性力的大小与重物到平衡位置的距离成正比。杆 AB 的刚度是: 使 A 端离开平衡位置 1 厘米, 需用力 0.1 公斤。求当杆 AB 的 B 端沿水平线作振幅为 1 毫米, 周期为 1.1 秒的简谐振动时, 重物 C 作强迫振动的振幅。



题 16.10 图

解:　以杆 B 端为参考系，对物体 A 进行分析:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{S}_e$$

其中

$$S_e = 2.5\text{kg} \times \left(\frac{2\pi}{1.1\text{s}}\right)^2 \times 1\text{mm} \times \sin(\frac{2\pi}{1.1\text{s}}t) \tag{1}$$

由课本式 (12.55)，强迫振动的振幅公式为:

$$B = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega^2 - \kappa^2\right)^2 + 4n^2\kappa^2}} \tag{2}$$

下面来计算上式中的参数: 首先, 由 B 端进行简谐振动的条件可知激振力的频率 $\kappa = 2\pi/1.1\text{s}$; 由于系统不受阻尼，即阻尼系数 $b = 0$，从而可以得到 $n = b/2a = 0$；由杆 AB 的刚度条件，可以计算得到系统的固有频率为[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{0.1\text{kg} \times g/1\text{cm}}{2.5\text{kg}}} = 2\sqrt{g}\ \text{rad/s}$$

最后来计算 h：由式 (1) 可知激振力的振幅为

$$H = 2.5\text{kg} \times \left(\frac{2\pi}{1.1\text{s}}\right)^2 \times 1\text{mm} \implies h = H/2.5\text{kg} = \left(\frac{2\pi}{1.1\text{s}}\right)^2 \times 1\text{mm}$$

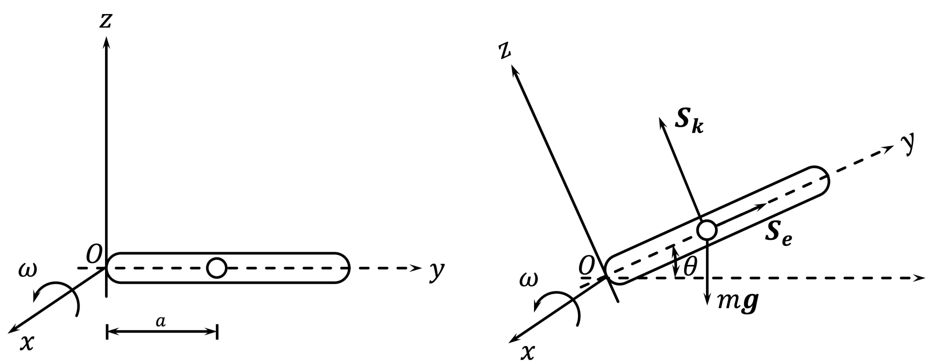
代入式 (2) 中即得:

$$B = \frac{\pi^2/1.1^2}{g - \pi^2/1.1^2}\ \text{mm} = \begin{cases} 4.9636\text{mm}, & g = 9.8 \\ 4.4250\text{mm}, & g = 10 \end{cases}$$

[2] 本题中相关物理量均取国际单位制下的数值。

题 16.19　一光滑细直管可在竖直平面内绕通过它的一端点的水平轴转动, 转动角速度 ω 为常量。管中有一质量为 m 的质点。开始时, 细管在水平位置, 质点与转动轴的距离为 a, 质点相对于管的速度大小为 v_0。求质点相对于管子的运动规律。

解:　建立如题 16.19 解图所示动系, 其中 Ox 轴沿水平方向，Oy 轴与管固连，Oz 轴初始时刻竖直向上。



题 16.19 解图

则有:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{i}$$

考虑重力作用:

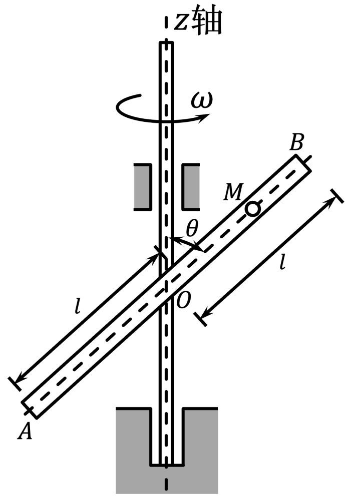
$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k$$

沿管子方向:

$$m\ddot{y} = S_e - mg\sin\theta = m\omega^2 y - mg\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{y} - \omega^2 y + g\sin(\omega t) = 0 \quad (t=0, y=a, \dot{y}=v_0)$$

题 16.27　如图所示, 球 M 质量为 m, 重 P, 在一光滑斜管中从点 B 开始自由下滑。已知斜管 AB 长为 $2l$, 对铅直轴的转动惯量为 I, 它与铅直轴的夹角为 θ, 斜管的初角速度为 ω_0, 摩擦不计。求:



题 16.27 图

(1) 小球对点 O 位置 x 与斜管转速 ω 之间的关系;

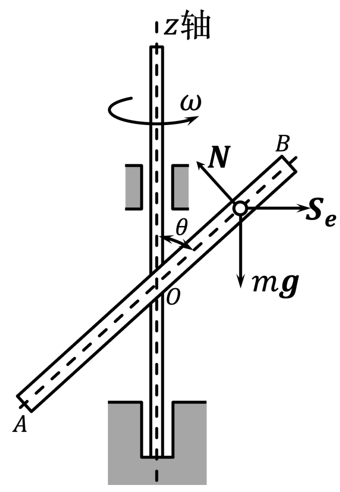
(2) 小球沿管道的运动微分方程.

解:

(1) 设小球与 O 点之间的距离为 x，则有：斜管与小球组成的系统对 z 轴动量矩守恒

$$\Rightarrow I\omega_0 + m\omega_0(l\sin\theta)^2 = I\omega + m\omega(x\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{I\left(\omega_0-\omega\right)+m\omega_0 l^2\sin^2\theta}{m\omega\sin^2\theta}}$$



题 16.27 解图

(2) 在动系中有:

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{S}_e + \boldsymbol{S}_k$$

$$S_e = m\omega^2 x\sin\theta$$

沿斜管方向投影，得到:

$$
\begin{aligned}
& m\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t} = -mg\cos\theta + m\omega^2 x\sin\theta\cdot\sin\theta \\
& \Rightarrow \ddot{x} - \omega^2 x\sin^2\theta + g\cos\theta = 0
\end{aligned}
$$

此即所求的运动微分方程。

第十七章　哈密顿力学

题 17.2　已知系统的拉格朗日函数具有下列各种形式，求哈密顿函数的表达式。

(1) $L = a\dot{x}^2 + b\dot{y}^2 - x^2 - cy^2 - xy$（$a, b, c$ 为常数）；

(2) $L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2 - \frac{1}{2}q_1q_2$；

(3) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m(x^2 + y^2)\omega^2 + m(x\dot{y} - y\dot{x})\omega - \pi(x, y, z)$（其中 m, ω 为常数）。

解:

(1) $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2a\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{p_x}{2a}$, $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 2a\dot{y} \implies \dot{y} = \frac{p_y}{2a}$ 故

$$H = -L + p_x\dot{x} + p_y\dot{y} = \frac{p_x^2}{4a} + \frac{p_y^2}{4b} + x^2 + cy^2 + xy$$

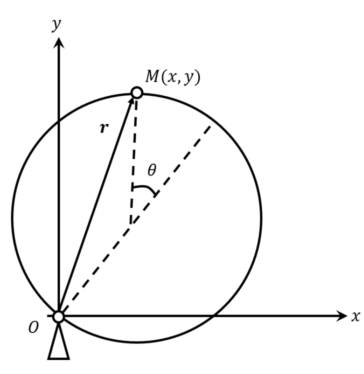
(2)

$$H = -L + p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 = \frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2) + q_1^2 + q_2^2 + \frac{1}{2}q_1q_2$$

(3)

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \omega(yp_x - xp_y) + \pi(x, y, z)$$

题 17.6　半径为 R 的光滑大圆环在水平面内以匀角速度 ω 绕环上一点 O 转动。圆环上有一个小环 M 可沿大环滑动，并可视为质点，其质量为 m。求小环沿大圆环切线方向运动的正则方程。



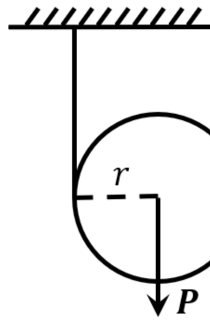
解:　取大圆环为参考系，θ 为广义坐标，如图所示。在该参考系下，小圆环受惯性离心力 $\boldsymbol{F}_e = -m\omega^2\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}$ 为小圆环相对大环上固定点的位矢。则有：

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 = -m\omega^2R^2(1 + \cos\theta) \implies L = T - U = \frac{1}{2}mR^2 + m\omega^2R^2(1 + \cos\theta)$$

从而得到广义动量 $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta \implies H = -L + p\dot\theta = \frac{p^2}{2mR^2} - m\omega^2R^2(1+\cos\theta)$ 即得正则方程：

$$\begin{cases}\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mR^2} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = m\omega^2R^2\sin\theta\end{cases}$$

题 17.9　均质圆柱体质量为 m 半径为 r，圆柱中部绕有细线，线的另一端固结在天花板上，圆柱体初始静止释放，在重力作用下运动，西线逐渐展开，下降过程中线保持铅直。试用正则方程求 $t=t_1$ 时圆柱的角速度 ω 和柱中心下降的高度 h。



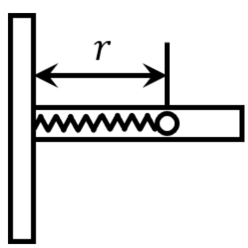
解：　取下落高度为广义坐标，则正则方程为：

$$\begin{cases}\dot h = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2p}{3m} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial h} = mg\end{cases}$$

即得到 $\ddot h = \frac{2}{3}g \implies h = \frac{1}{3}gt^2$

故当 $t=t_1$ 时，$h = \frac{1}{3}gt_1^2, \omega = \frac{\dot h}{r} = \frac{2gt_1}{3r}$

题 17.11　水平管中放入一光滑小球，质量为 m，小球用刚度系数为 c 的炎黄与铅直轴相连接。当水平管绕管端的铅直轴以匀角速度 ω 旋转时，求质点相对运动的正则方程。



解：　取小球离开轴线的距离 r 为广义坐标，在与圆管固连的参考系下，有势能和动能：

$$U = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}c(r-l_0)^2, T = \frac{1}{2}m\dot r^2$$

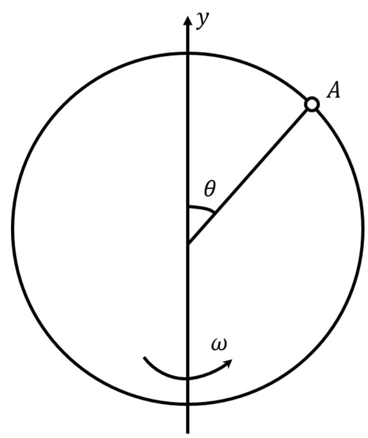
故有

$$L = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{1}{2}c(r-l_0)^2 + \frac{1}{2}m\dot r^2 \implies p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$$

故哈密顿函数

$$H = -L + p_r\dot r = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \frac{1}{2}c(r-l_0)^2 + \frac{p_r^2}{2m} \implies \dot r = \frac{p_r}{m}, \dot p = m\omega^2x - cx + cl_0$$

题 17.24　半径为 a 的光滑圆环以匀角速如绕铅垂直径旋转。圆环上有一质量为 m 的小质点 A 从圆环顶点沿环自由滑下，用哈密顿原理求质点 A 的运动微分方程。设质点与环中心连线与铅垂直径（向上为正向）的夹角为 θ。



解：　取图中 θ 为广义坐标，在与圆环固连的参考系下，有拉氏方程

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\theta-mga(1+\cos\theta)$$

由哈密顿原理 $\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L\,\mathrm{d}t=0 \implies \delta L=0$ ，即 L 满足欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

即得运动微分方程

$$\ddot{\theta}-\omega^2\sin\theta\cos\theta-\frac{g}{a}\sin\theta=0$$