第一部分 资金及其管理

第2章 资金的时间价值

周光辉　教授

中国科学院大学经济与管理学院

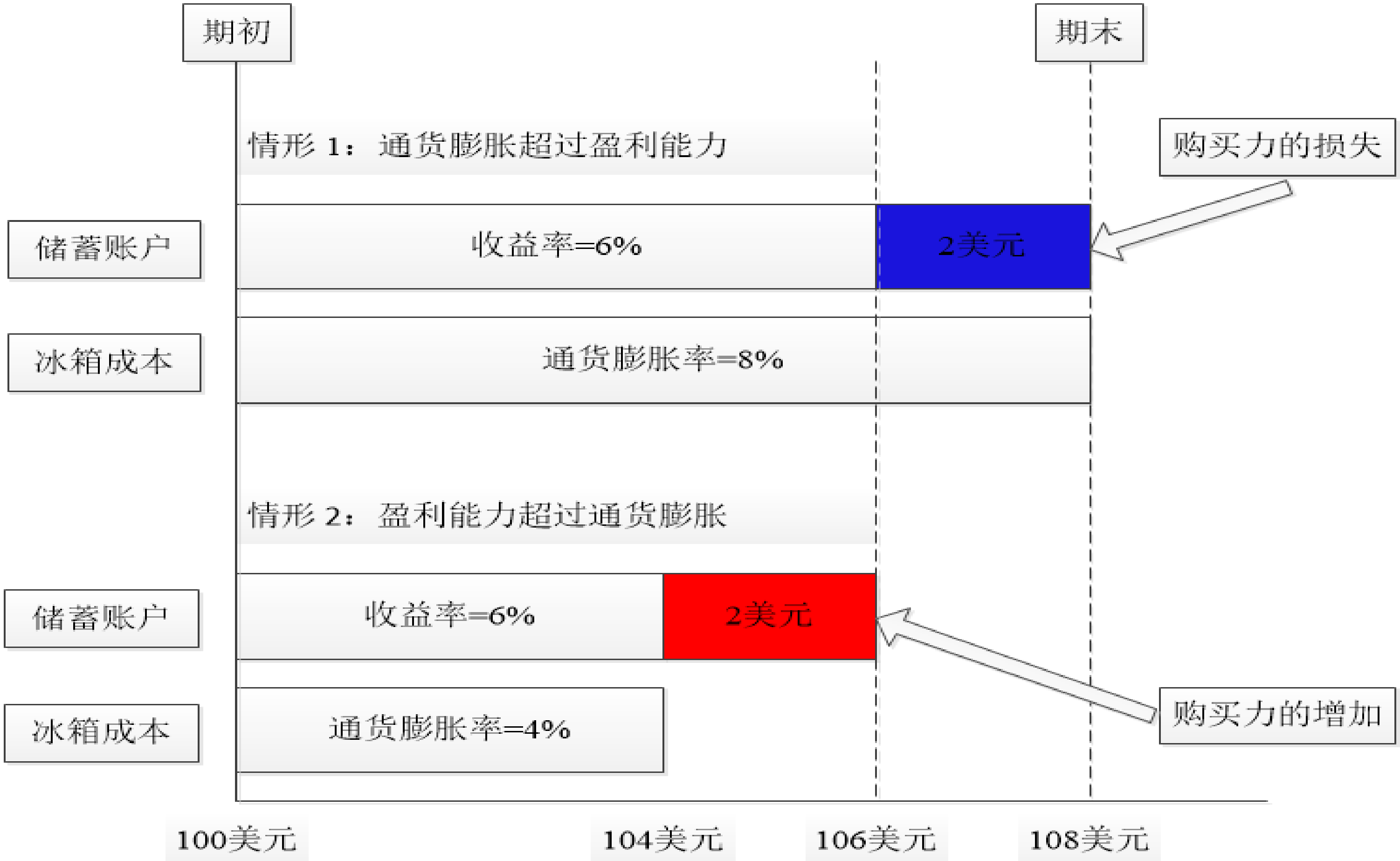
2560万美元强力球彩票大奖的获奖者

- 奖金的领取方式:
  - 29年内分30次分期领取：在29年内分30次分期领取，首次付款是当时即付，分期领奖的奖金总额为2560万美元。
  - 一次性领取奖金：税前利润为1350万元美元。
- **本章将运用资金的时间价值来进行讨论。**

2.1 利息：资金的成本

- 资金本身也是商品，和其他商品一样可以被买卖，这就是说，资金也有成本。
- 资金的成本建立在利率的基础上，用利率来衡量。利率是一个在一定的时间内被周期性地用来增加资金数量的百分比。
- 利息可以被定义为资金的使用成本。

- 2.1.1 资金的时间价值
  - 假设你目前和室友们在宿舍的公共区域共用一台冰箱，你现在有100美元，想为自己的房间买台100美元的冰箱。
  - 现在买，那就要花光了所有的钱。但是如果将这笔资金以6%的年利率进行投资，那么一年之后仍然可以买一台冰箱，并且还能剩下6美元。但是要衡量：一年内房间里没有冰箱对生活造成的不便是否可以通过投资所获得的6美元来补偿。
  - 如果冰箱的价格因通货膨胀以8%的年利率增长，那么在一年之后你将没有足够的钱（缺少2美元）去买这台冰箱了。这种情况下，现在就应该买冰箱。如果通货膨胀率仅4%，那么一年后不仅可以买到冰箱，还能剩余2美元。



由延迟消费所产生的收益或损失

因此，只有当投资收益率高于通货膨胀率，延迟购买才有经济意义。也就是说，在通货膨胀的经济时期，如果进一步延迟购买冰箱，购买力就会持续降低。

资金的时间价值：

资金的经济价值取决于获得资金的时间，因为随着时间的推移，资金不但具有盈利能力，而且具有购买力（资金可以通过运作为资金所有者赚取更多的资金），现在得到的1美元其价值要高于未来某个时刻得到的1美元。

理解：

等量资金在不同时点上，反映的价值不同。

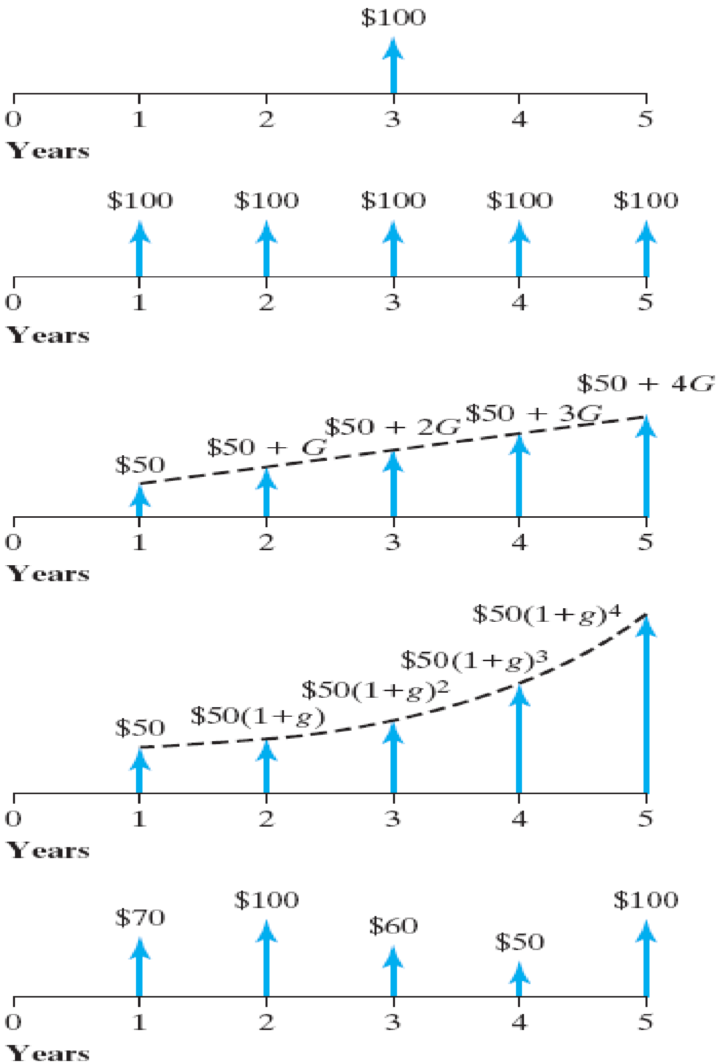
等量资金随时间推移而增值。

资金只有在使用过程中，时间才会对其产生影响。

- 2.1.2 与利息相关的要素
  - 本金（P）
    - 资金投资或借贷交易的初始资金。
  - 利率（i）
    - 衡量资金的成本，并且利率是计息周期内的一个百分数。
  - 计息周期（n）
    - 是时间段，其长短决定计算利息的频率。即使计息周期长短可变，利率通常是用年度百分比来报价。

- 计息周期的期数（N）
  - 表示交易期的一个特定时间长度。
- 收支计划（A_n）
  - 在确定的时间段内，在特定时期内发生特定模式的现金流量。
- 终值（ F ）
  - 利率在若干个计息周期累积作用的结果。

• 现金流量图（cash flow diagram）



(a) Single cash flow

(b) Equal (uniform) payment series at regular intervals

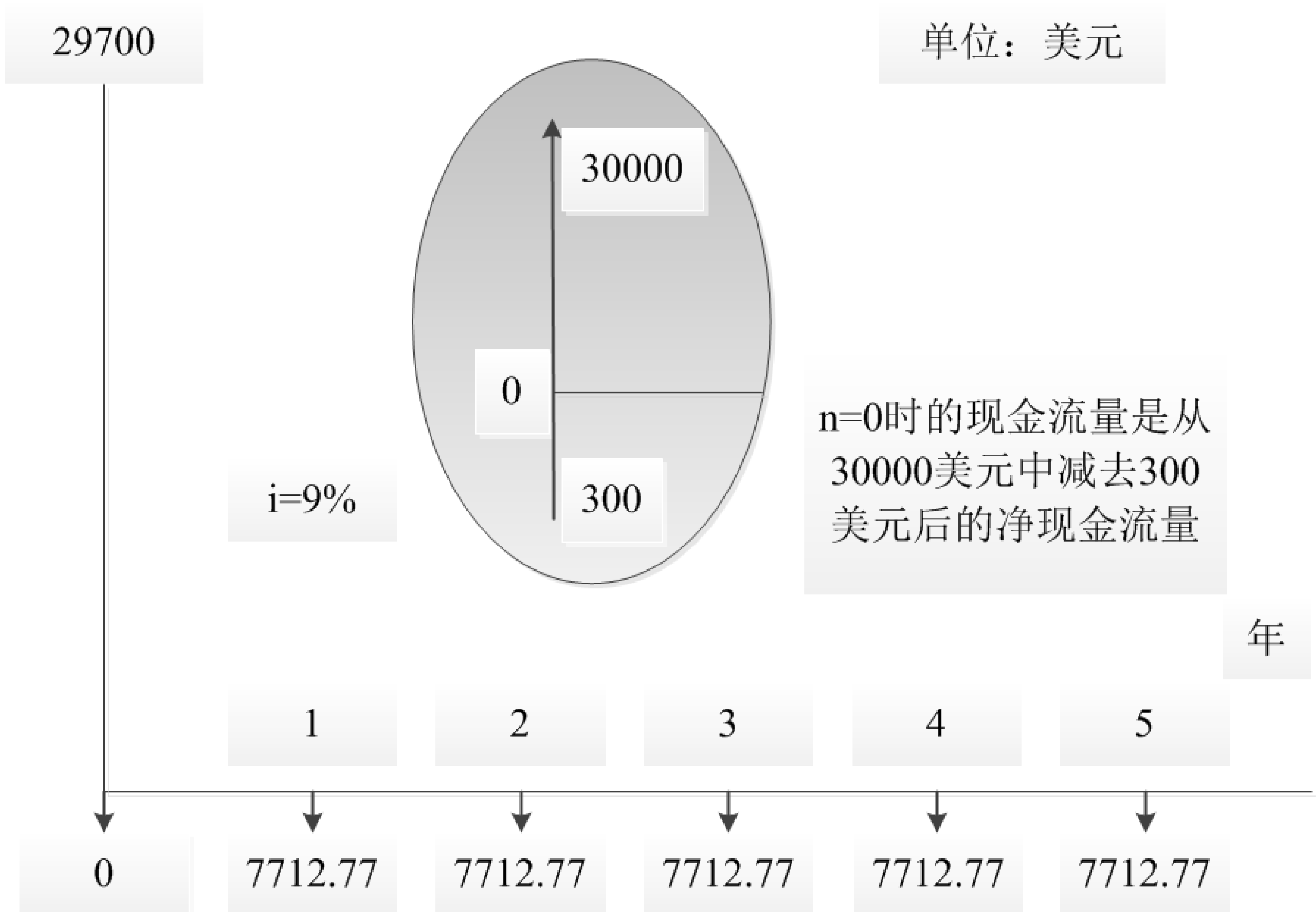
(c) Linear-gradient series, where each cash flow in the series increases or decreases by a fixed amount *G*

(d) Geometric-gradient series, where each cash flow in the series increases or decreases by a fixed rate (percentage) *g*

(e) Irregular payment series, which exhibits no regular overall pattern

- 一个利息交易的例子

年	收益（美元）	还款（美元）	
		方案 1	方案 2
0	30,000	300.00	300.00
1		7712.77	0
2		7712.77	0
3		7712.77	0
4		7712.77	0
5		7712.77	46,158.72



方案1的贷款偿还计划现金流量图

- 期末惯例(end-of –period convention)
  - 现金流量发生的时间记在每个计息周期的期末
  - 假设你有100,000美元，并以10%的年利率在银行中定期存1年，如果在1年到期之前的1个月取出贷款，那么投资者就要损失所有的利息，即10,000美元。

- 2.1.3 利息计算方法
  - 单利
    - 在每一个计息周期内只有本金产生利息，以单利利率i计息的本金P，存N期后的总利息

$$I=(iP)N$$

    - N期期末的本利和（终值） F为

$$F=P+I=P(1+iN)$$

- 复利
  - 每期所获利息的计算是以上期资金总量为基础来计算，包括原始本金和累计利息
  - 存款P，年利率为i，在第一个计息周期后将获得

$$P + iP = P(1 + i)$$

  - 经过N个计息周期后，本利和为

$$F = P(1 + i)^N$$

- 例 2.1 单利VS复利
  - 假设你在银行中存款1000美元，年利率为8%。每年末不取出利息，仍存在账户中：三年后，分别按单利、复利计算你将获得多少钱?
  - 分析
    - 已知：$\mathrm{P}=1000$美元，$N=3$年，年利率$i=8\%$。
    - 求：F。

- 求解
  - 单利，可以计算出终值F

$F=1000(1+0.08*3)$=1240（美元）

年末	年初金额（美元）	所获利息（美元）	年末金额（美元）
1	1000	80	1080
2	1080	80	1160
3	1160	80	1240

- 复利，可以计算出终值F，所获总利息为259.71美元，高于单利情况19.71美元

$F=1000(1+0.08)^3$=1259.71（美元）

年末	年初金额（美元）	所获利息（美元）	年末金额（美元）
1	1000.00	80	1080.00
2	1080.00	86.40	1166.40
3	1166.40	93.31	1259.71

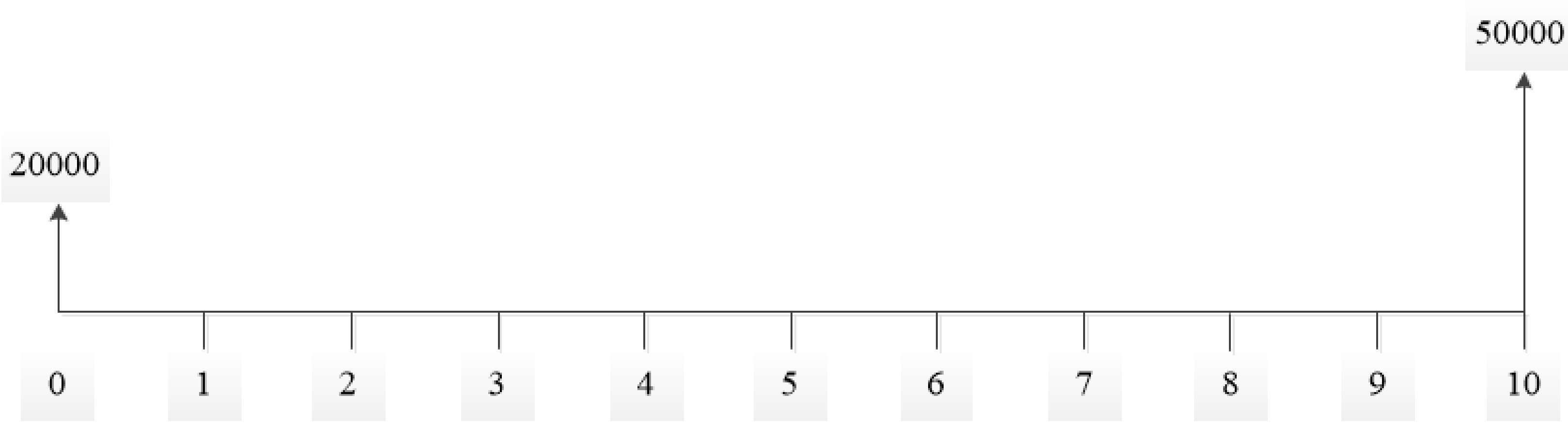
2.2 经济等值

- 2.2.1 定义和简单计算

今天你的100美元与你将来获得的100美元不相等，那么如何衡量和对比不同的现金流量呢?

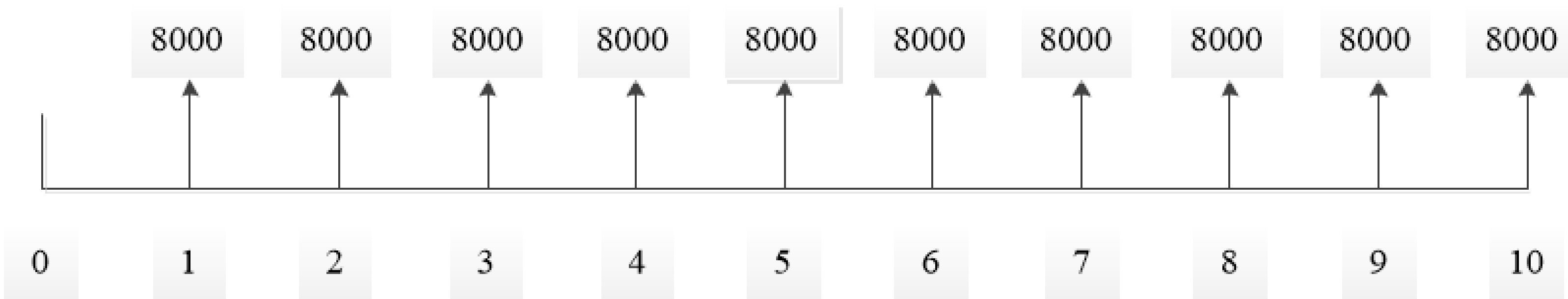
例如，今天获得20000美元，还是10年后获得50000美元，或在10年中每年获得8000美元合算呢?

经济等值存在于有相同经济效益的现金流量中，因此可以相互换算



a)

即使现金流量的大小和发生时间的不同，但总能找到合适的利率是它们等值

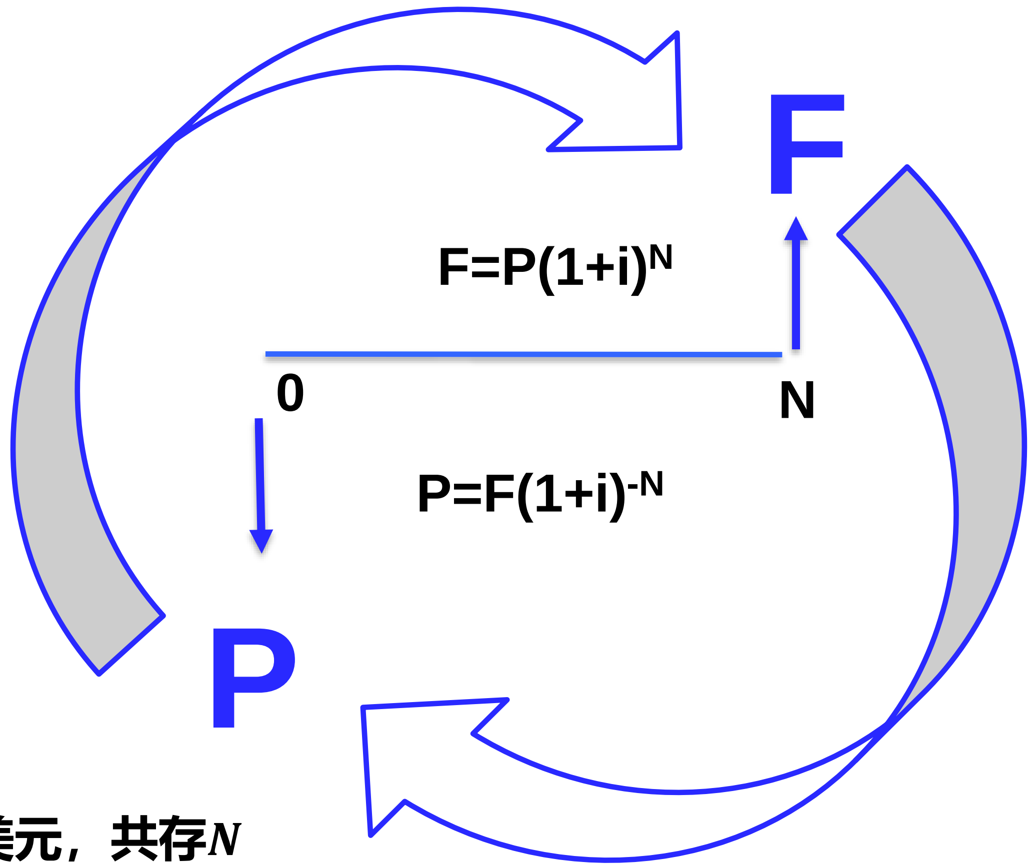


b)

如何抉择

- 2.2.1 定义和简单计算
  - 经济等值存在于具有相同经济效应的现金流量中，因而可以在金融市场中进行交易。
  - 任何现金流量（不管是一次性支付还是多次支付）都能转换成在任一时点相等的现金流量。
  - 将未来现金流量贴现的关键思路是现值总和在价值上等于未来的现金流量，因为如果你将现在所拥有的资金按照一定的利率（也称为贴现率）进行投资，你可以计算出未来的现金流量。

如果资金的盈利能力就是年利率i，那么在N期期末，F美元和现在的P美元是等值的

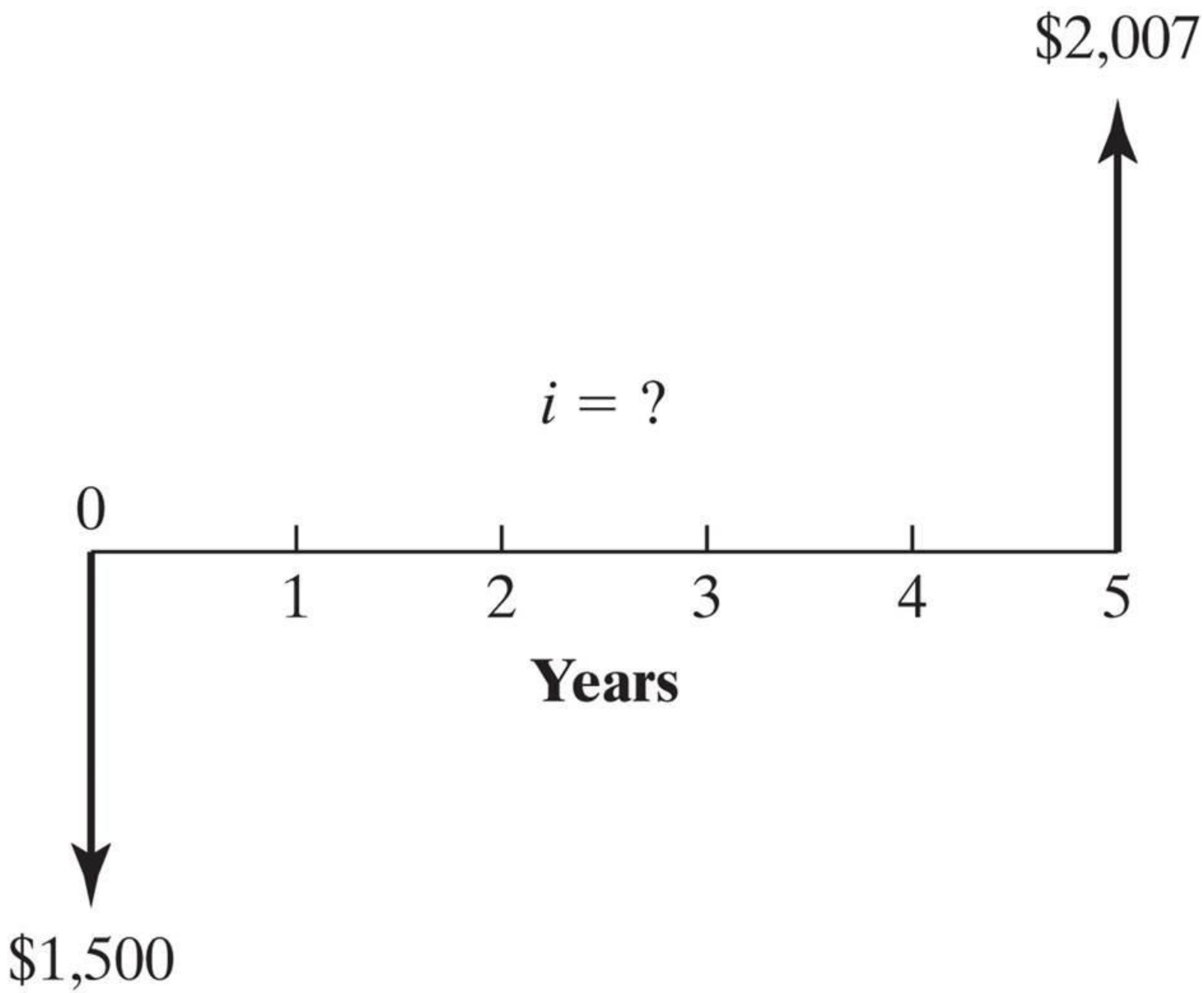


如果你现在存款P美元，共存N期，年利率为i，在N期期末你将获得F美元

- 等值计算：一个简单的例子
  - 假设投资1000美元，年收益率为12%，寿命期为5年。
  - 求解
    - 在投资期末，最后的资金总额为

$$1000(1+0.12)^5 = 1762.34(\text{美元})$$

- **例 2.2 等值**
  - 假设你现在有两种收益方案，一种是在5年后获得2007美元，另一种是现在获得1500美元。如果在5年内你不需要动用这笔资金，在年利率i下，你会将这1500美元存起来，当年利率i为多少时，你就不在意是选择现在获得1500美元还是在五年后获得2007美元?
  - 分析
    - 已知：$F=2007$美元，$N=5$年，$P=1500$美元。
    - 求：i。


$2,007
i = ?
0
1
2
3
4
5
Years
$1,500

- 求解
  - 我们能够获得

$$2007 = 1500(1+i)^5$$

  - 求 i

$$i = (\frac{F}{P})^{1/N} - 1 = (\frac{2007}{1500})^{1/5} - 1 = 0.06$$

- 步骤 1：确定基期，即第一年年初

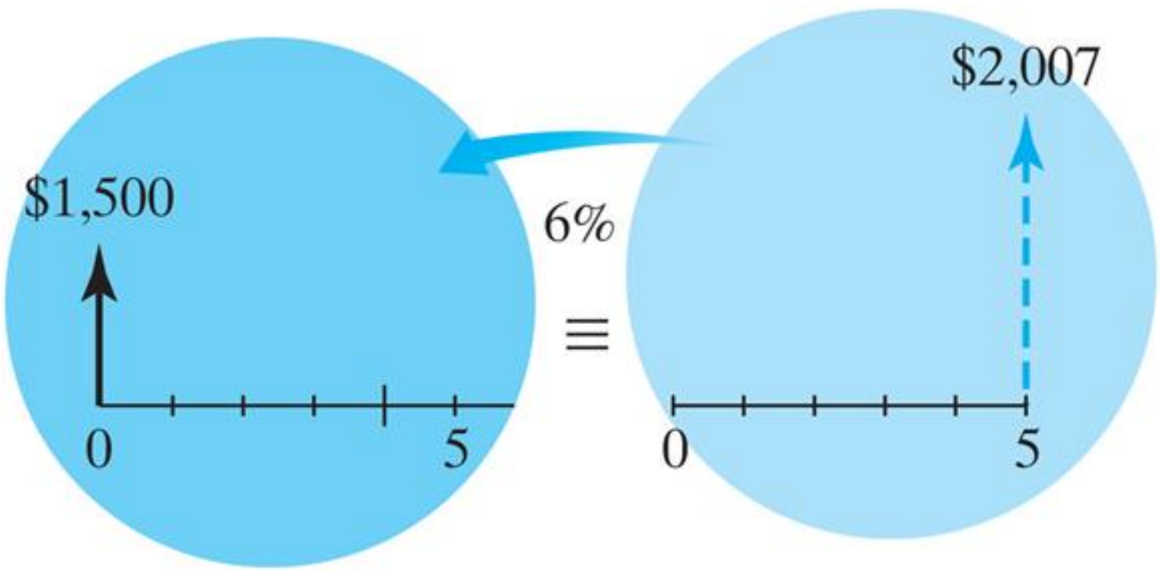
  $i = 3\%,,\ P = 2007$美元（$1 + 0.03$）$^{-5} = 1731$美元

- 步骤 2：确定要使用的利润

  $i = 6\%,\ P = 2007$美元（$1 + 0.06$）$^{-5} = 1500$美元

- 步骤 3：确定在基期的等值金额

  $i = 9\%,\ P = 2007$美元（$1 + 0.09$）$^{-5} = 1304$美元



- 2.2.2 以同一时间为比较基准的等值计算

  - 当选择对比现金流量价值的时间点时，要么使用当前时间[其产生的收入为现值（present worth），要么使用未来某个时间点[其产生的收入为终值(future worth)]。

- **例 2.3 等值计算**
  - 现金流量系列，在年利率为10%，$n = 3$情况下，计算等值的整付金额。
  - 分析
    - 已知：现金流量如图，利润率为10%。
    - 求：V_3（或$n = 3$等值金额）

- 求解

  - 步骤 1：计算前四次支付在$n = 3$时的整付终值：

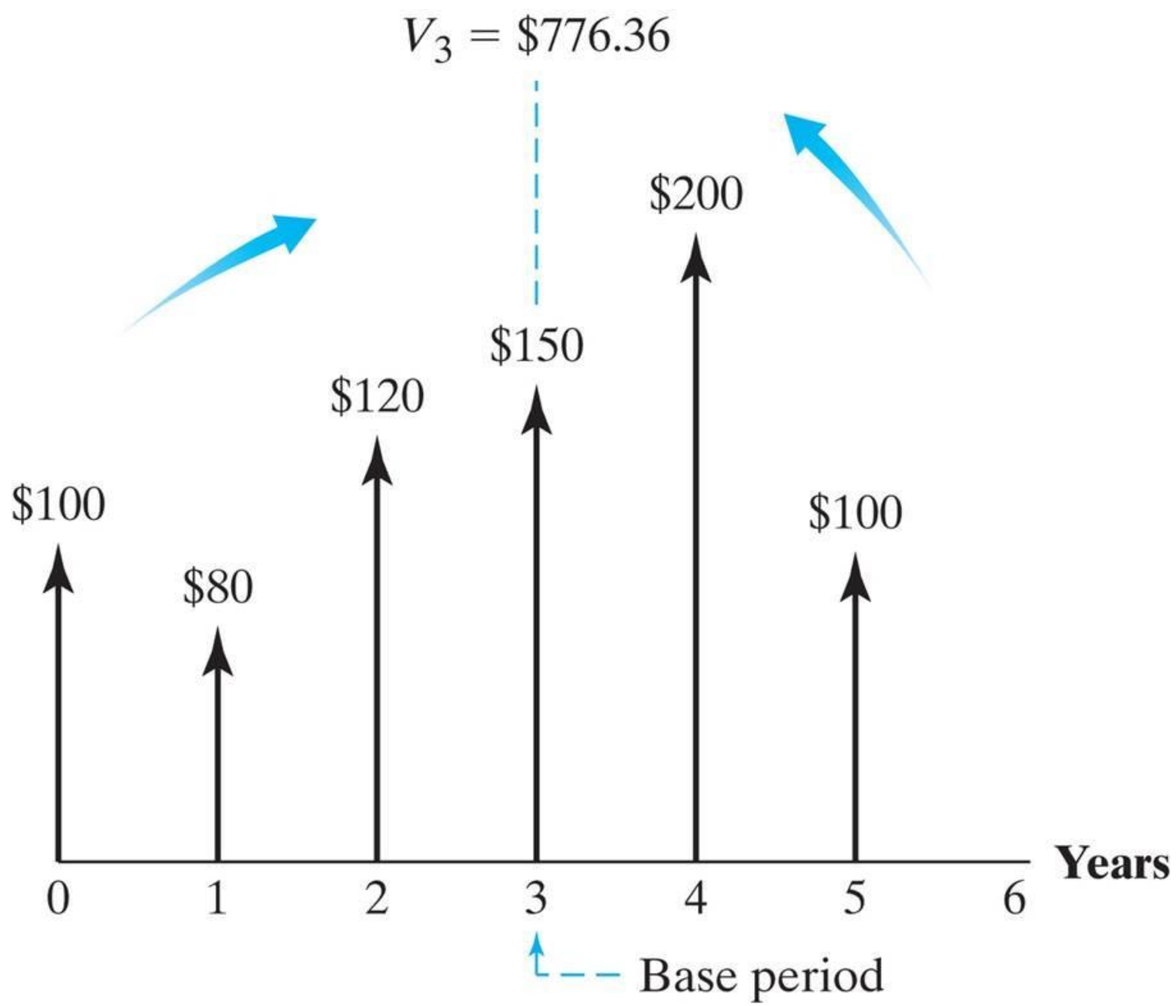
$100(1 + 0.10)^3 + 80(1 + 0.10)^2 + 120(1 + 0.10)^1 + 150 =$
511.90(美元)

  - 计算剩下两次支付在在$n = 3$时的整付现值：

$200(1 + 0.10)^{-1} + 100(1 + 0.10)^{-2} = 264.46$ (美元)

  - 计算V_3，即总等值：

V_3=511.90+264.46=776.36(美元)


V_3 = $776.36
$200
$150
$120
$100
$80
$100
Years
0
1
2
3
4
5
6
Base period

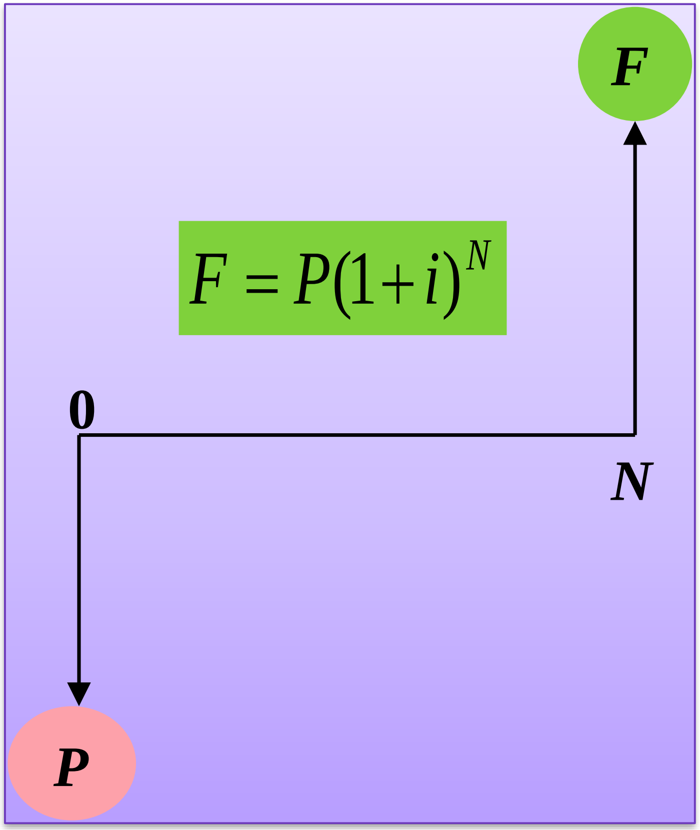
2.3 整付现金流量的计息公式

- 2.3.1 终值系数

$$F = P(1+i)^N$$

$(1+i)^N$是复利计算的起点，

称作**终值系数。**



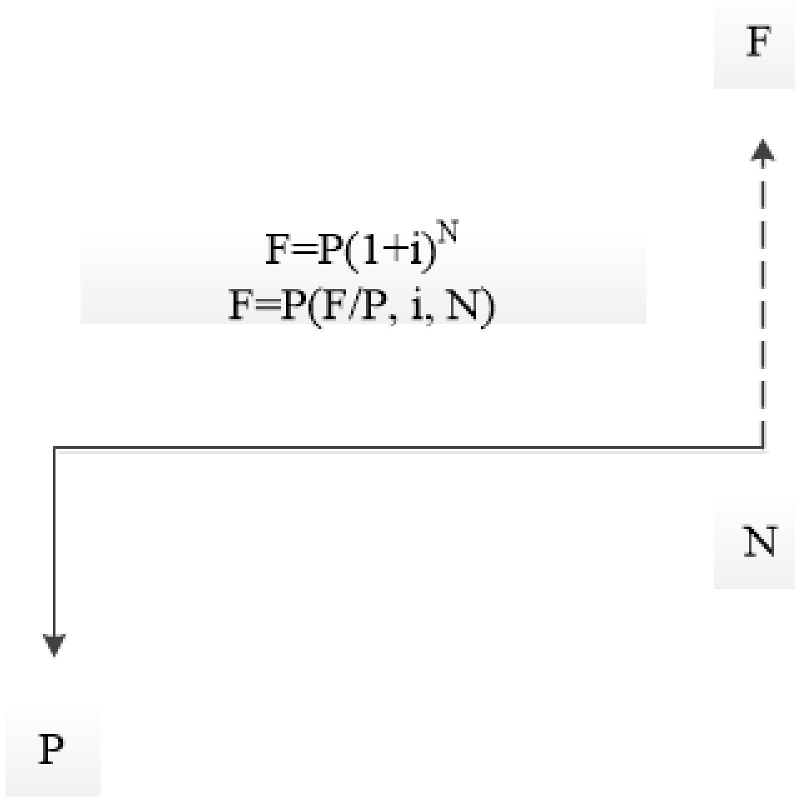
- 复利系数表
  - 为了简化计算过程，人们发明了复利系数表。只要给出年利率和计息期数，查表即可得对应的复利系数。
  - 例如，已知P，求F，已知年利率$i = 12\%$ ，计息周期数$N = 15$，需要知道乘以20000美元的系数是多少。

$$\mathrm{F} = 20000\underbrace{(1+0.12)^{15}}_{5.4736} = 109472（美元）$$

- 系数符号
  - 将$F=P(1+i)^N$表达为函数符号$(F/P,i,N)$，即已知P，i和N，求F，该系数被称作**整付终值系数。**

$$F=P(1+i)^N=P(F/P,i,N)$$

- 整付终值系数（增长系数）
  - 已知： $i = 10\%$， $\mathrm{N} = 8$年， $P = 2000$美元。
  - 求：F。
  - $F = 2000$美元 $(1 + 0.10)^8 = 2000$美元 $(F/P, i, N) = 4287.18$美元



复利计息过程：已知P, I, 和N, 求F

- **例 2.4 整付终值：已知P、 I、 N，求F**
  - 现在有1000美元，欲以7%年付利进行投资（按复利计算），那么在8年后能够获得多少钱?
  - 分析
    - 已知：$P = 1000$美元，$i = 7\%$，$N = 8$年。
    - 求：F。

- 求解
  - 使用计算器：

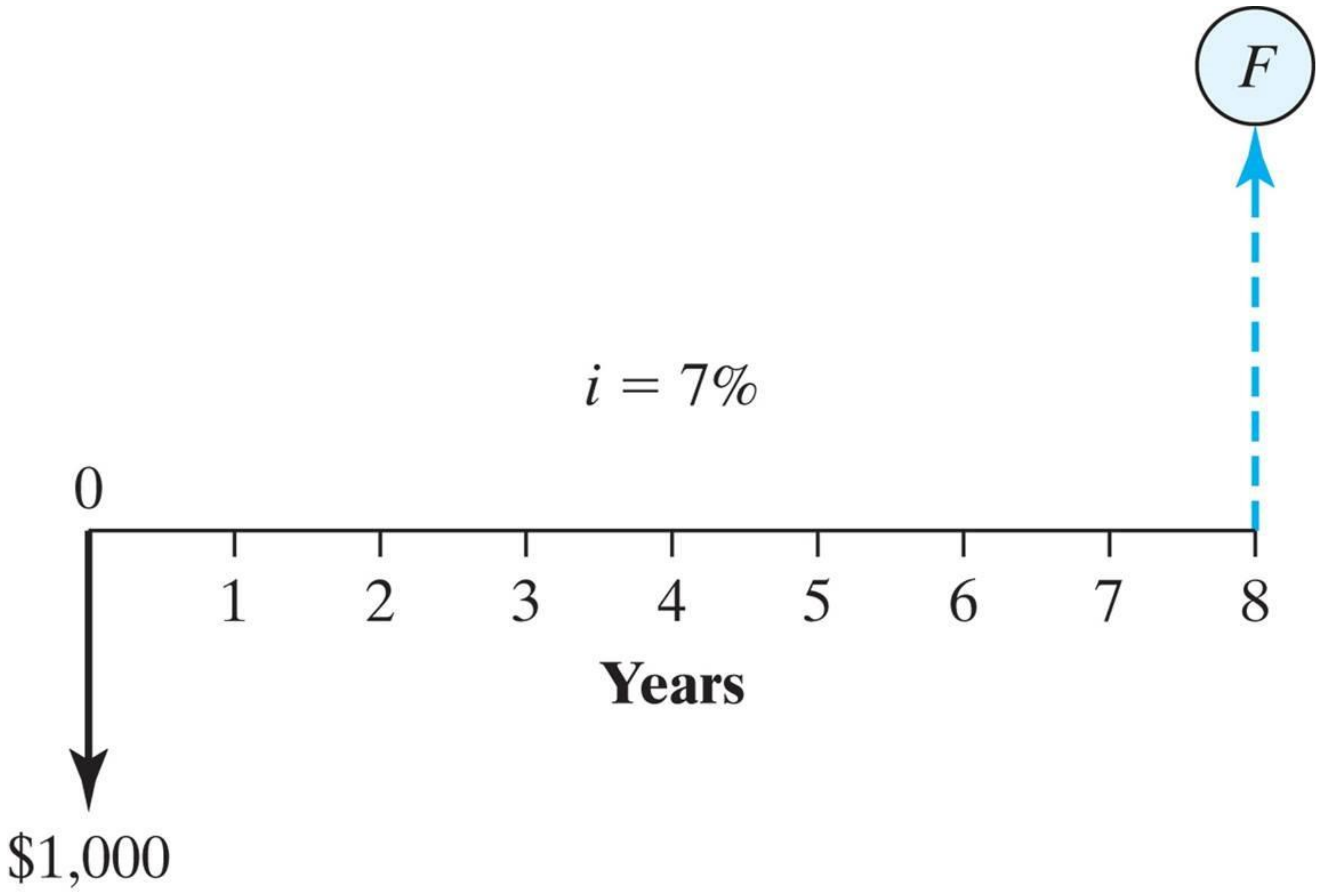
$$F = 1000(1+0.07)^8 = 1718.90(\text{美元})$$

  - 使用复利计算表：

$$F = 1000(F/P, 7\%, 8) = 1000(1.7182) = 1718.2(\text{美元})$$

  - 使用$Excel$，终值计算如下：

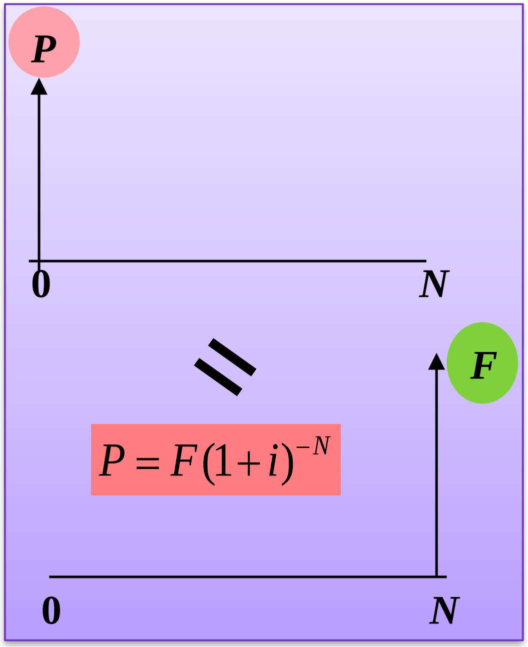
$$F = FV(7\%, 8, 0, -1000, 0) = 1718.20(\text{美元})$$


F
i = 7%
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Years
$1,000

- 2.3.2 整付现值系数

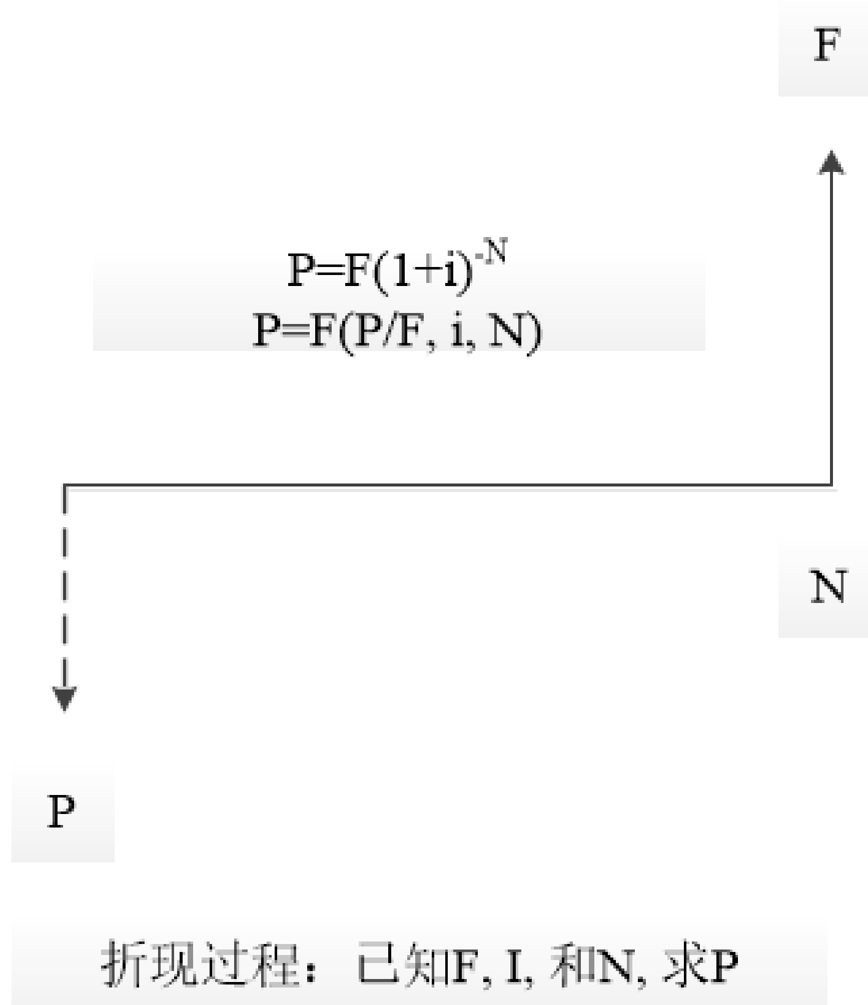
未来现金的现值过程是复利计息过程的逆运算，被称作**折现。**
已知F，求P？

$$P = F\left[\frac{1}{(1+i)^N}\right] = F(P/F, i, N)$$



其中系数$(1+i)^N$被称作**整付现值系数**，
记作$(P/F, i, N)$利率i被称作折现率，
P/F被称为**折现系数。**

- 整付现值系数
  - 已知：$i = 12\%$，$N = 5$年，$F = 1000$美元。
  - 求：P。
  - $P = 1000$美元
    $(1 + 0.10)^{-5} = 1000$美元
    $(P/F, i, N) = 567.40$美元



- **例 2.5 整付金额：已知F、i、N，求P**
  - 对投资者而言，零息债券是在主体债券的基础上进行了一些改变的债券。如果非零息债券的年利率为6%，那么8年后账面价值为1000美元的零息债券的现价为多少?
  - 分析
    - 已知：$F = 1000$美元，$\mathrm{i} = 6\%$，$N = 8$年。
    - 求：P。

- 求解
  - 使用计算器：

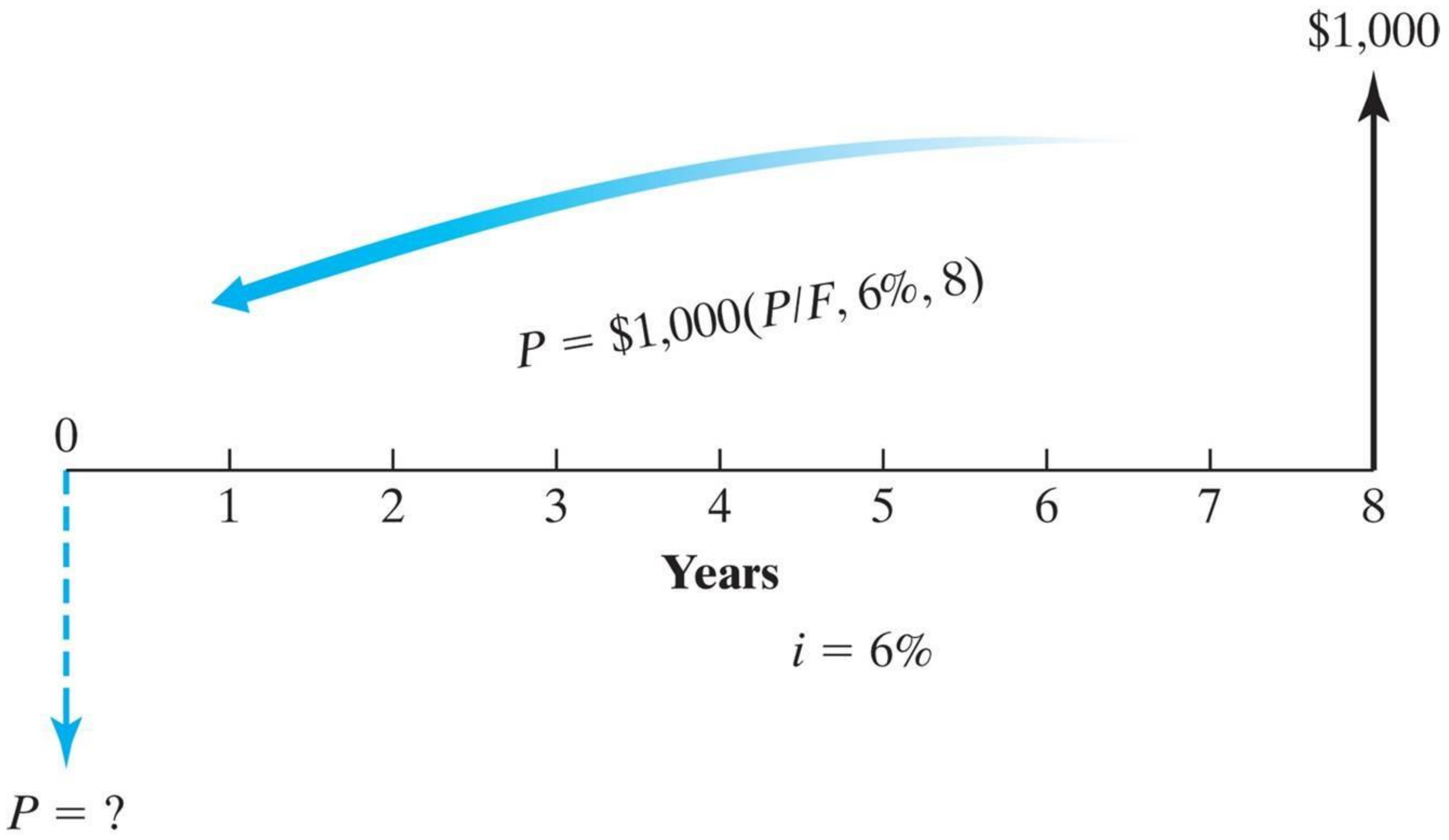
$$P = 1000(1+0.06)^{-8} = 1000(0.6274) = 627.4(\text{美元})$$

  - 使用复利计算表：

$$P = 1000\overbrace{(P/F,6\%,8)}^{0.6274} = 627.40(\text{美元})$$

  - 使用Excel，现值计算如下：

$$P = FV(6\%,8,0,1000,0) = -627.40(\text{美元})$$


$1,000
P = $1,000(P/F, 6%, 8)
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Years
i = 6%
P = ?

- 2.3.3 计息期数和利率的求解
- 复利和折现是彼此相反的过程。
  - 终值形式

$$F=P(1+i)^{N}$$

  - 现值形式

$$P=F(1+i)^{-N}$$

在上述两个等式中，共有四个变量，因此给定其中任意三个变量的值，我们就可以求得第四个变量的值。

- **例 2.6 求解利率i**
  - 假设你以10美元一股买进某股票，并以20美元将它卖出。因此你的收益是10美元，如果这事发生在1年后，你的投资收益率就是100%。如果这事发生在5年后，那么你的投资收益率又是多少呢?
  - 分析
    - 已知：$P = 10$美元，$F = 20$美元，$N = 5$年。
    - 求：i。

- 求解
  - 试错法：

$$i = 14.87\%(\text{美元})$$

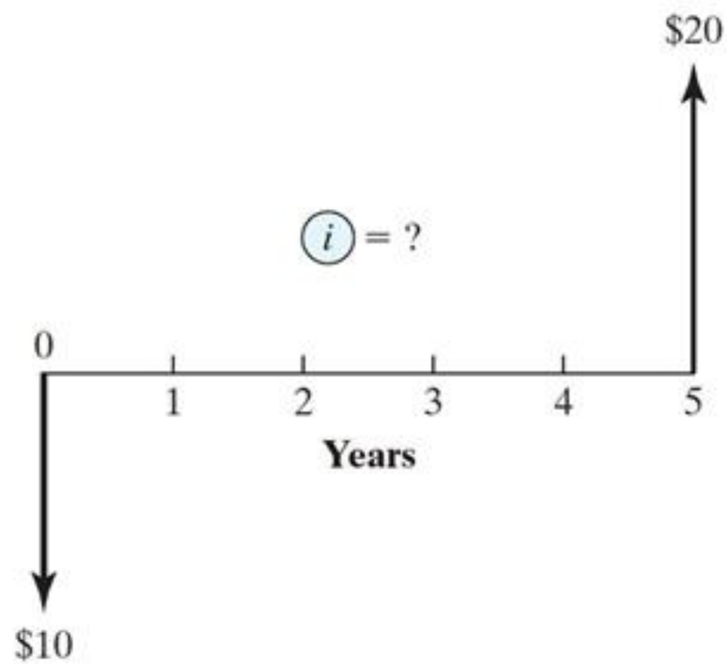
  - 使用复利系数表：

$$20 = (1+i)^5$$

$$2 = (1+i)^5 = (F/P, i, N)$$

  - 使用Excel表：

$$i = RATE(5,0,-10,20) = 14.87\%(\text{美元})$$


$20
i = ?
0
1
2
3
4
5
Years
$10

- **例 2.7 整付金额：已知$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{i}$，求$\boldsymbol{N}$**
  - 假设你以每股15美元的价格购买了通用电气200股的股票。你打算在股票价格翻倍时出售该股票。如果股票以每年12%的利率增长，那么你需要多久才能卖出股票?
  - 分析
    - 已知：$P=3000$美元，$F=6000$美元，$i=12\%$。
    - 求：N。

- 求解
  - 使用计算器：

$$6000 = 3000(1+0.12)^N = 3000(F/P, 12\%, N)$$

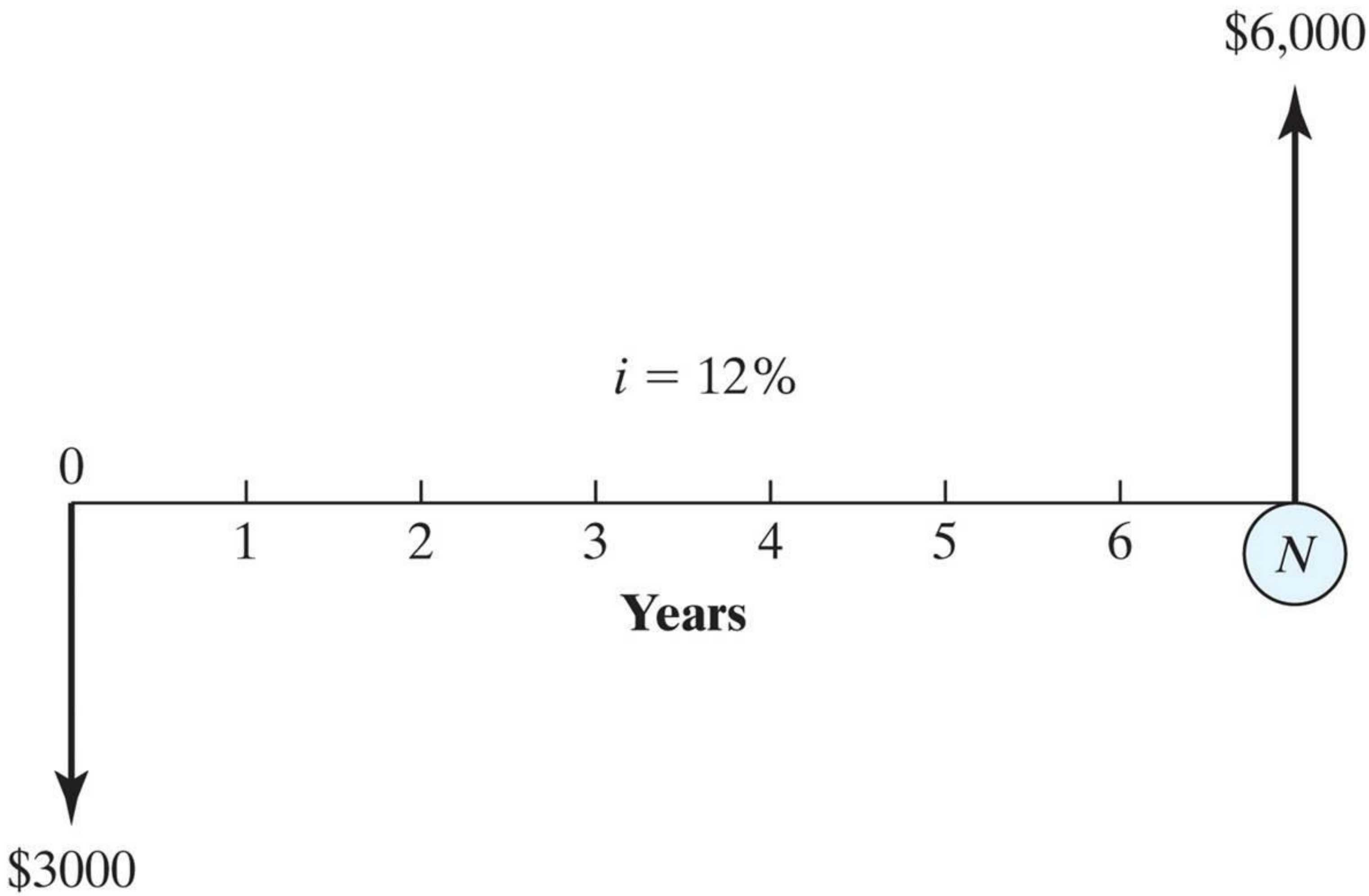
$$2 = (1.12)^N = (F/P, 12\%, N)$$

$$\log 2 = N \log 1.12$$

$$N = \frac{\log 2}{\log 1.12} = 6.12 \approx 6$$

  - 使用Excel表：

$$N = NPER(12\%, 0, -3000, 6000) = 6.1163\%(\text{年})$$


$6,000
i = 12%
0
1
2
3
4
5
6
N
Years
$3000

2.4 不规则支付系列

- 常见的现金流量交易中包括一系列的支出和收入。我们熟悉的支付系列的例子有贷款买车的分期付款和房屋抵押贷款的还款。这些例子都是按照固定的时间间隔进行等额分付。

- 当这些现金流量系列没有明确的模式时，我们将这些交易称为**不规则现金流量系列**。

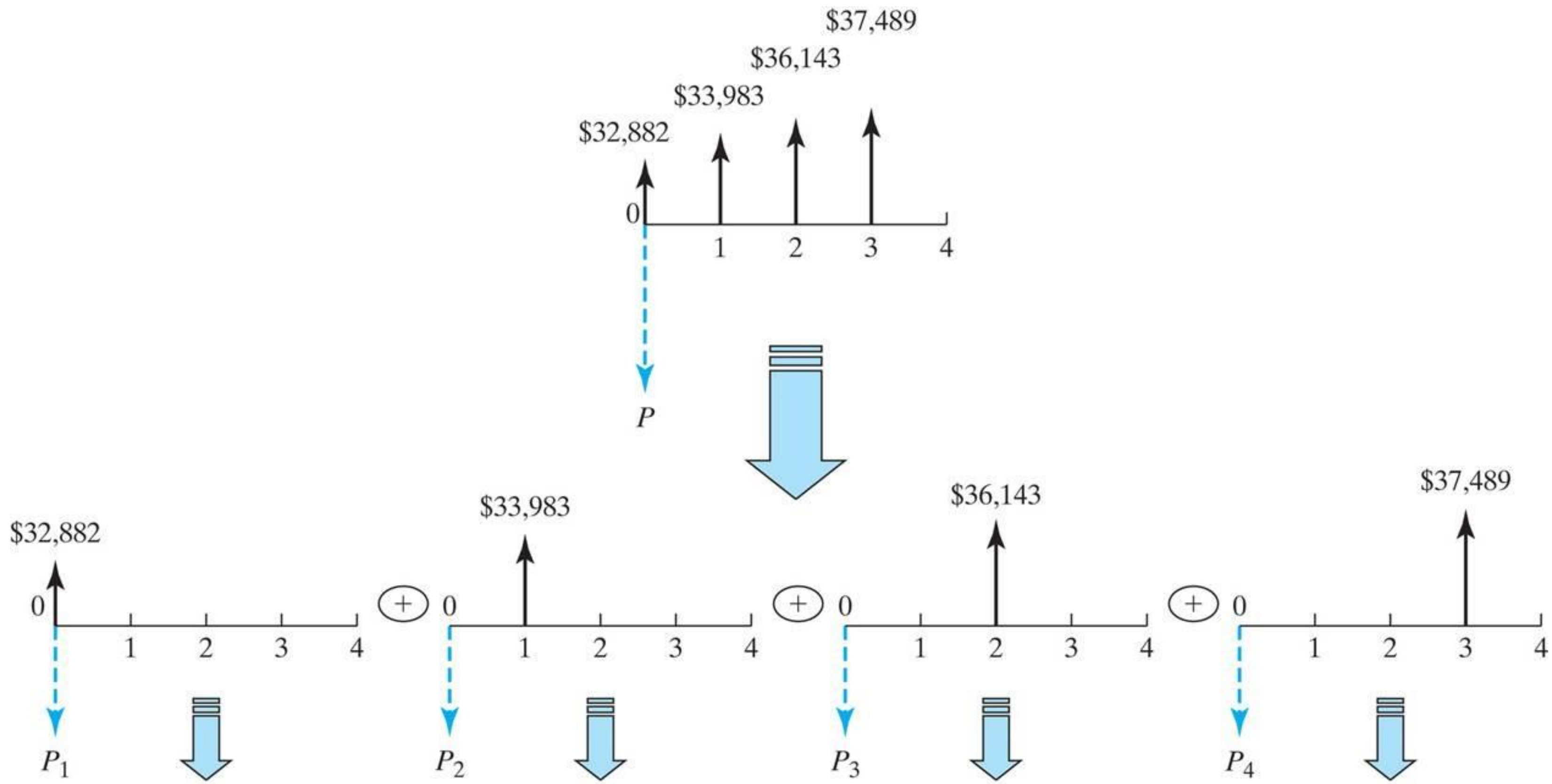
- 通过计算每笔现金流量的现值并求和，我们可以求出任意不规则现金流量系列的现值。一旦求出现值，我们就可以进行其他的等值计算。

- **例 2.8 整付金额：学费预支方案**
  - 许多大学都提供了学费预支方案（TPO），该方案通过消除未来学费的增长来节约资金。如果你参加这个计划，就需要按照参加此计划时刻的实际利率，提前支付剩余的学费和必需费用。
  - 哈佛大学2011-2012学年的学费和必需费用（不包含住宿费和伙食费）是37489美元，在即期利率下，大一新生需要缴纳全部费用为149956美元。学费、必需费用、住宿费以及伙食费基本上每年都会增长，但由于这些成本取决于未来的经济趋势和学校的排名，所以很难具体预测是多少。

学年	学费和必须费用 （美元）	必须提前支付金额 （美元）
2007-2008	31665	126660
2008-2009	32882	131528
2009-2010	33983	135932
2010-2011	36143	144572
2011-2012	37489	149956

- 假设你在2008-2009学年参与了提前支付学费计划。在2012年，回头看这大学四年，你可以准确知道每年的实际学费是多少，从“节约的钱或投资获得的收益”的经济视角看，你认为按年利率6%算，你的决策是经济合理的吗？

- 分析：
  - 此问题等同于问你当P是多少时，你不会在意选择如今一次性支付P还是选择未来逐年支付（32882美元，33983美元，36143美元，37489美元）。
  - 已知： 不规则现金流量如图，年利率$i = 6\%$。
  - 求：P。



$P_1 = \$32{,}882$

$P_2 = \$33{,}983(P/F, 6\%, 1) = \$32{,}059$

$P_3 = \$36{,}143(P/F, 6\%, 2) = \$32{,}167$

$P_4 = \$37{,}489(P/F, 6\%, 3) = \$31{,}476$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \$128{,}585$$

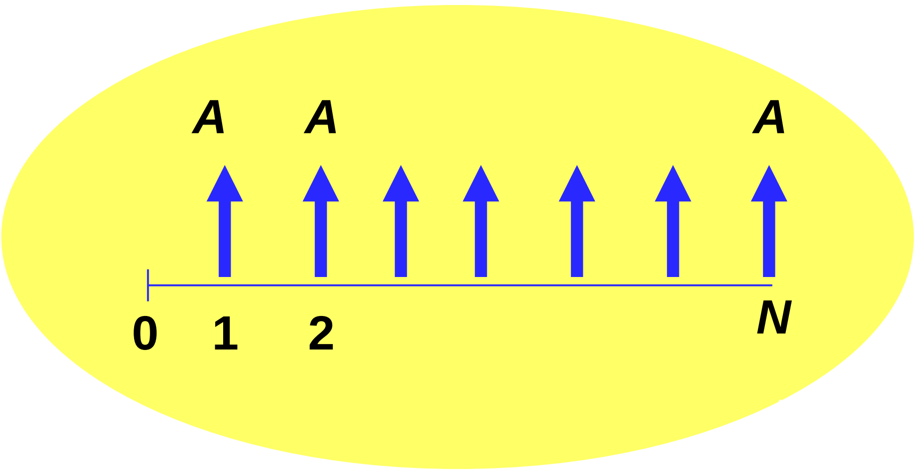
- 求解
  - 解决不规则现金流量系列的一个方法是计算每笔现金流量的等值限制，并将其求和，求出现值P 。
  - 假设每次缴学费的时间都是在每学年的年初，将每笔现金流量的现值加起来，得到如下的等式

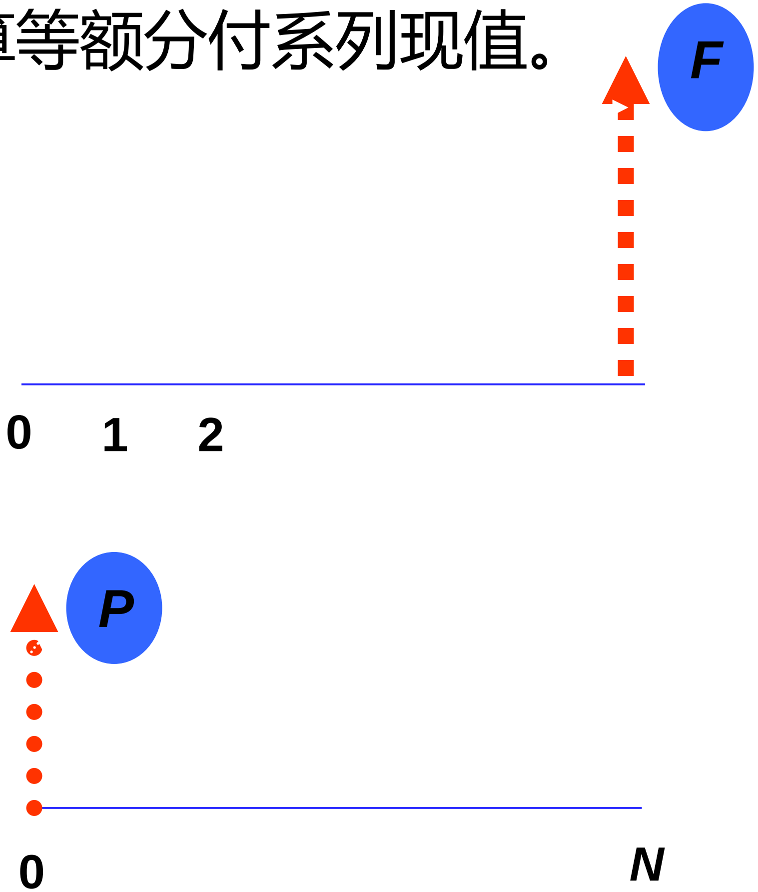
$$
\begin{aligned}
&P \\
&= 32882 + 33983(P/F, 6\%, 1) + 36143(P/F, 6\%, 2) + 37489(P/F, 6\%, 3) \\
&= 128585 \text{（美元）}
\end{aligned}
$$

  - 由于未来学费的等值现值要小于在2008-2009学年出必须提前支付的金额，所以你逐年缴纳学费更划算。

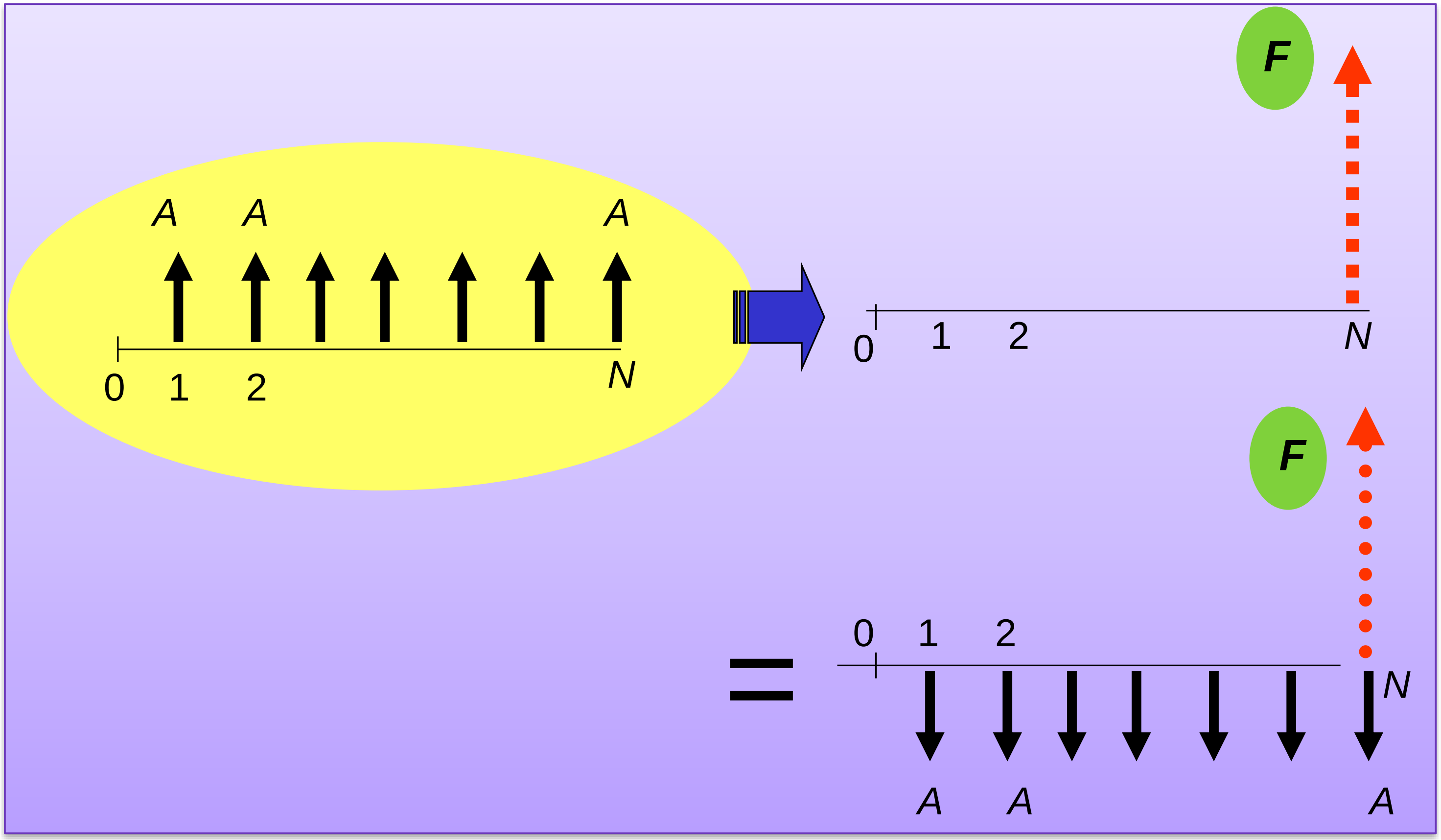
2.5 等额分付系列

- 现金流量呈现规律性变化，计算等额分付系列现值。





- 2.5.1 终值系数：已知A、i、 N，求F



F由每笔存款的终值相加

$$F = A(1+i)^{N-1} + A(1+i)^{N-2} + \ldots + A(1+i) + A$$

上式进行顺序变换

$$F = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots + A(1+i)^{N-1}$$

上式两边乘以$(1+i)$，有

$$(1+i)F = A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots + A(1+i)^N$$

以上两式相减

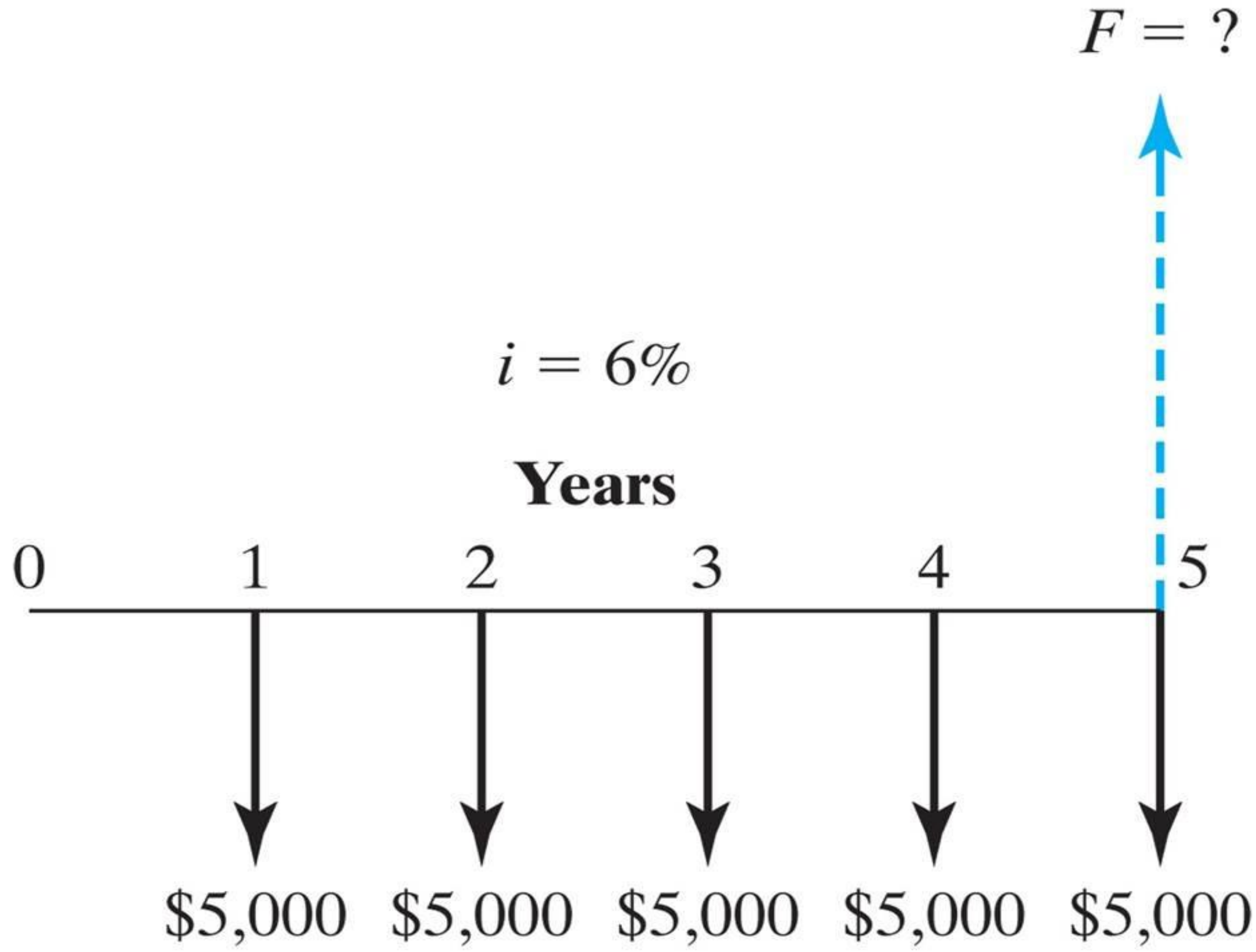
$$F = A\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i}\right] = A(F/A, i, N)$$

$(F/A, i, N)$称为**等额分付系列终值系数（equal payment series compound amount factor）**，也称为**等额系列终值系数（uniform series compound amount factor）**。

- **例 2.9 等额分付系列：已知i、A、N，求F**

  - 假设在5年中，你每年年末都往账户中存5000美元。如果年利率为6%，那么在第五年年末能取出多少钱?

  - 分析
    - 已知：A，N，i。
    - 求：F。



F = ?
i = 6%
Years
0
1
2
3
4
5
$5,000
$5,000
$5,000
$5,000
$5,000

- 求解
  - 使用等额分付系列终值系数，可以获得

$F = 5000(F/A, 6\%, 5) = 5000(5.6371) = 28185.46$(美元)

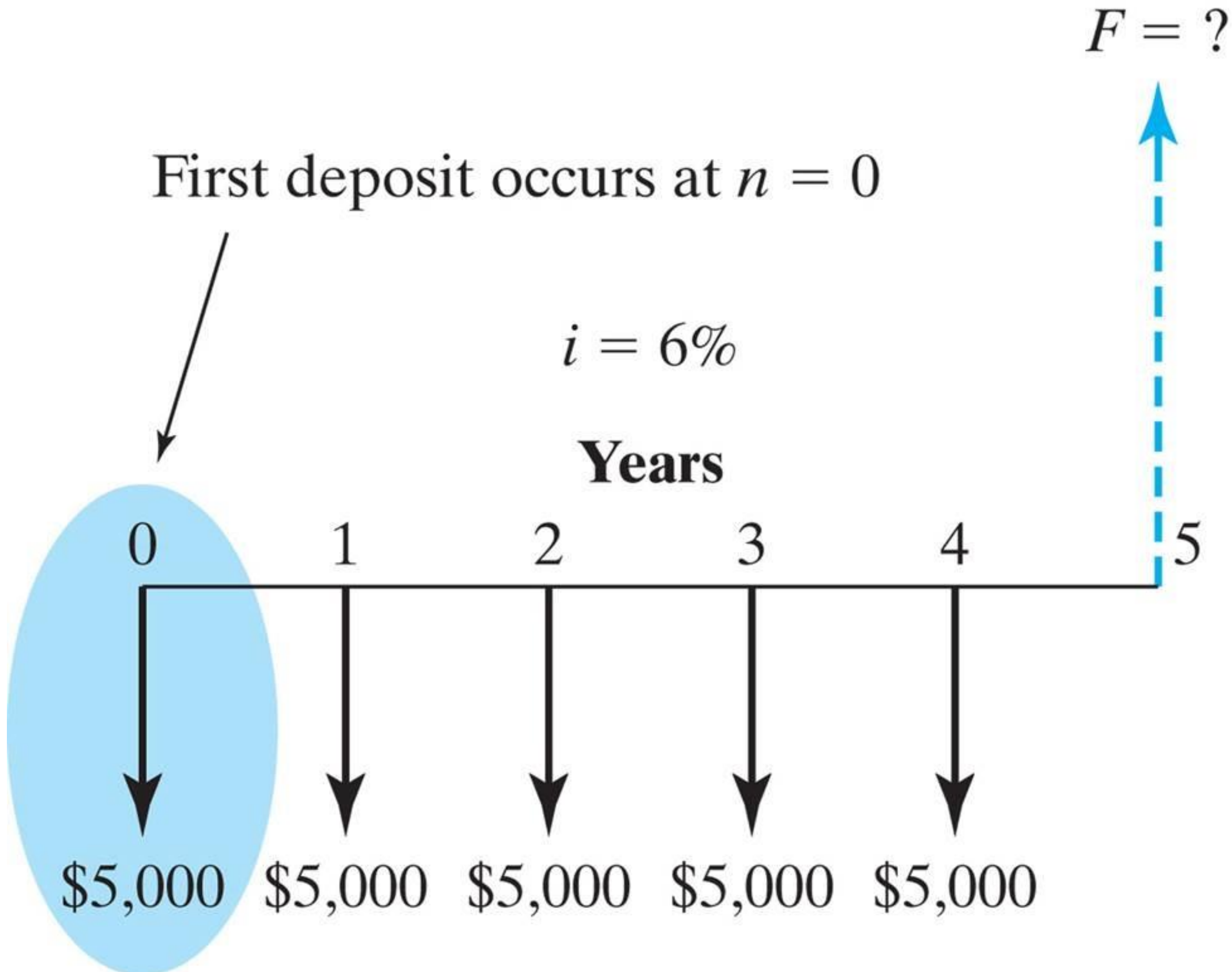
  - Excel计算出年金的终值，可以使用如下的财务函数

$$= FV(6\%, 5, -5000, 0)$$

- 可以明细存款账户中的每期余额是如何增长的。

年	1	2	3	4	5
年初余额（美元）	0	5000.00	10300.00	15918.00	21873.08
收益（6%）	0	300.00	618.00	955.08	1312.38
每年存款（美元）	5000.00	5000.00	5000.00	5000.00	5000.00
年末金额（美元）	5000.00	10300.00	15918.00	21873.08	28185.46

- **例 2.10 处理等额分付中的时间移动问题**
  - 在上例中，5次存款都发生在每期的期末——第一次存款发生在第1年的期末。假设所有的存款都发生在每期的期初（通常称为期初应付年金），如何计算第五年年末的余额?
  - 分析
    - 已知：现金流量图如图所示，$i = 6\%$。
    - 求：F。


F = ?
First deposit occurs at n = 0
i = 6%
Years
0
1
2
3
4
5
$5,000
$5,000
$5,000
$5,000
$5,000

- 求解
  - 计算出资金余额为

$$F = 28185.46(1.06) = 29876.59(\text{美元})$$

  - Excel计算出应付年金，可以使用如下的财务函数

$$= FV(6\%, 5, -5000,1)$$

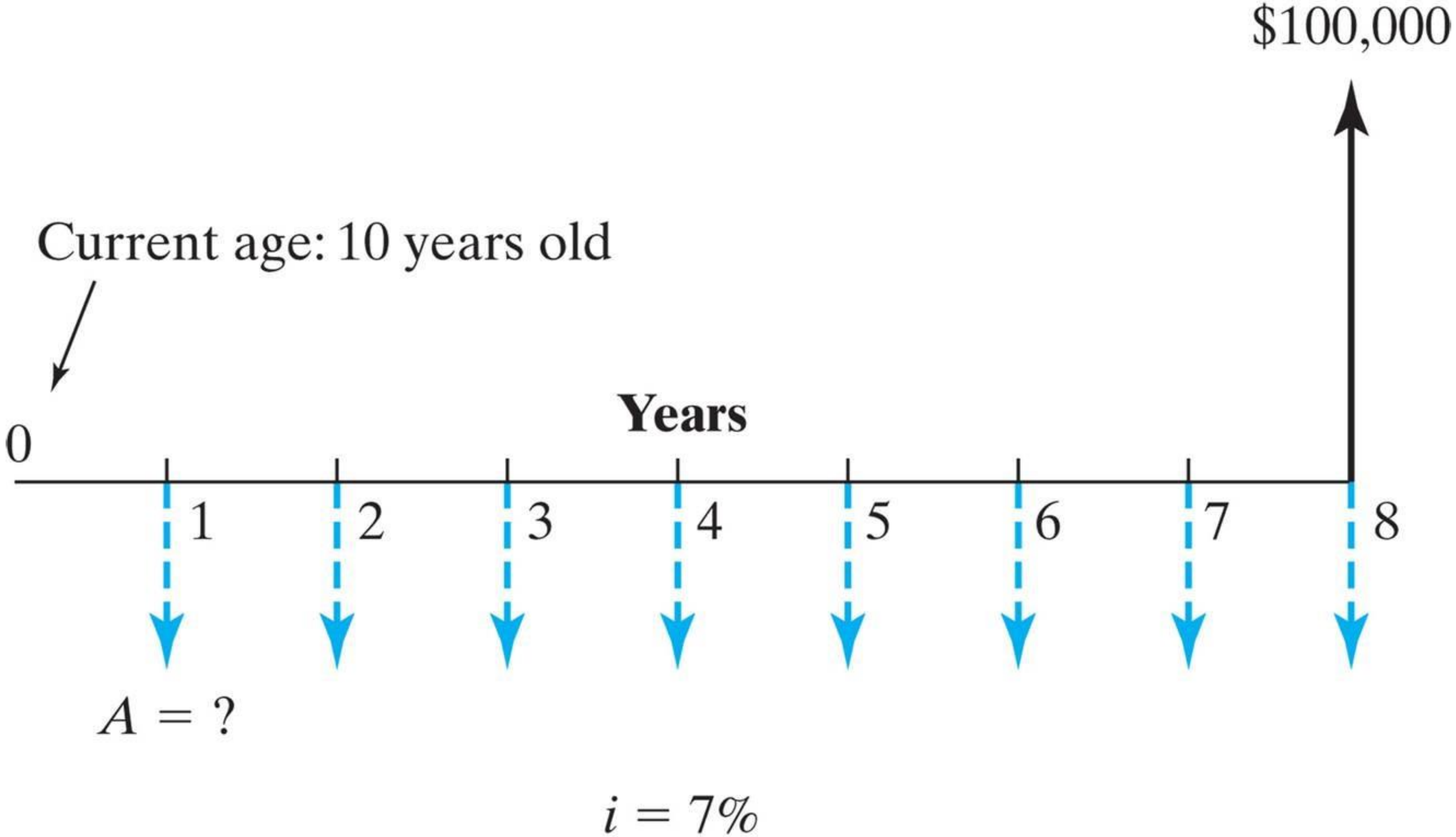
- 2.5.2 偿债基金系数：已知F、i、N，求A

$$\mathrm{A} = F\left[\frac{i}{(1+i)^N - 1}\right] = F(A/F, i, N)$$

$(A/F, i, N)$被称作**等额偿债基金系数（equal payment series sinking fund factor）**，或者称为**偿债基金系数（sinking fund factor）**。偿债基金是在固定的周期内往银行账户中存入固定的金额，偿债基金常用在更新固定资产的情况下。

- **例 2.11 大学教育储蓄计划**
  - 你希望为你的女儿建立一个大学储蓄计划。目前她才10岁，预计在18岁上大学。在她开始上大学的时候，银行账户中的存款金额至少要有100000美元。在7%年利率下，每年要存多少钱才能获得足够的资金？假设存款时长8年。

  - 分析
    - 已知：现金流量如图所示，年利率$i = 7\%$，$N = 8$年。
    - 求：A。


$100,000
Current age: 10 years old
Years
0
1
2
3
4
5
6
7
8
A = ?
i = 7%

- 求解
  - 使用偿债基金系数能够得到

    $A = 100000(A/F, 7\%, 8) = 9746.78$(美元)
  - Excel计算出应付年金，可以使用如下的财务函数

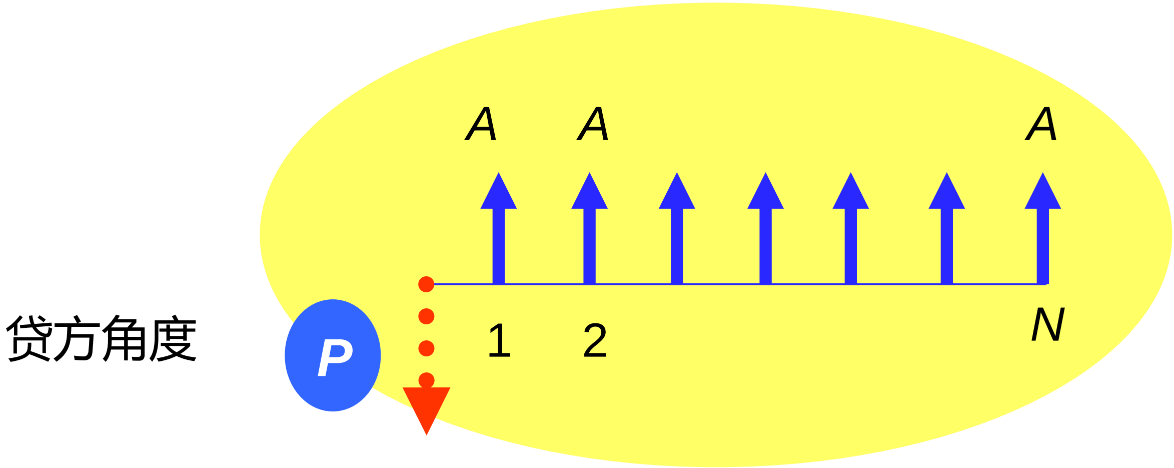
    $= PMT(7\%, 8,0,100000) = -9746.78$(美元)

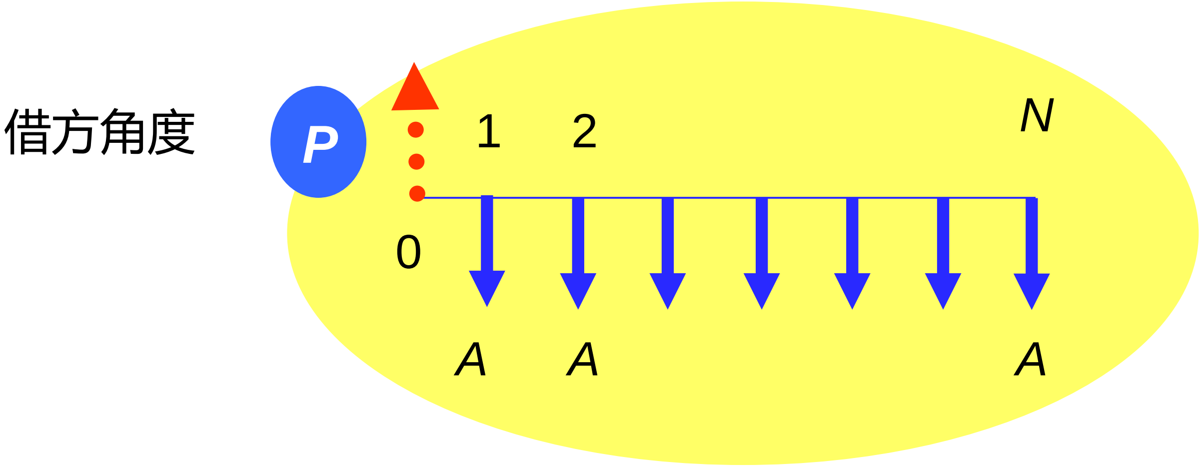
- 2.5.3 资本回收系数(年金系数)：已知 P、i、N，求A

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}\right] = P(A/P, i, N)$$

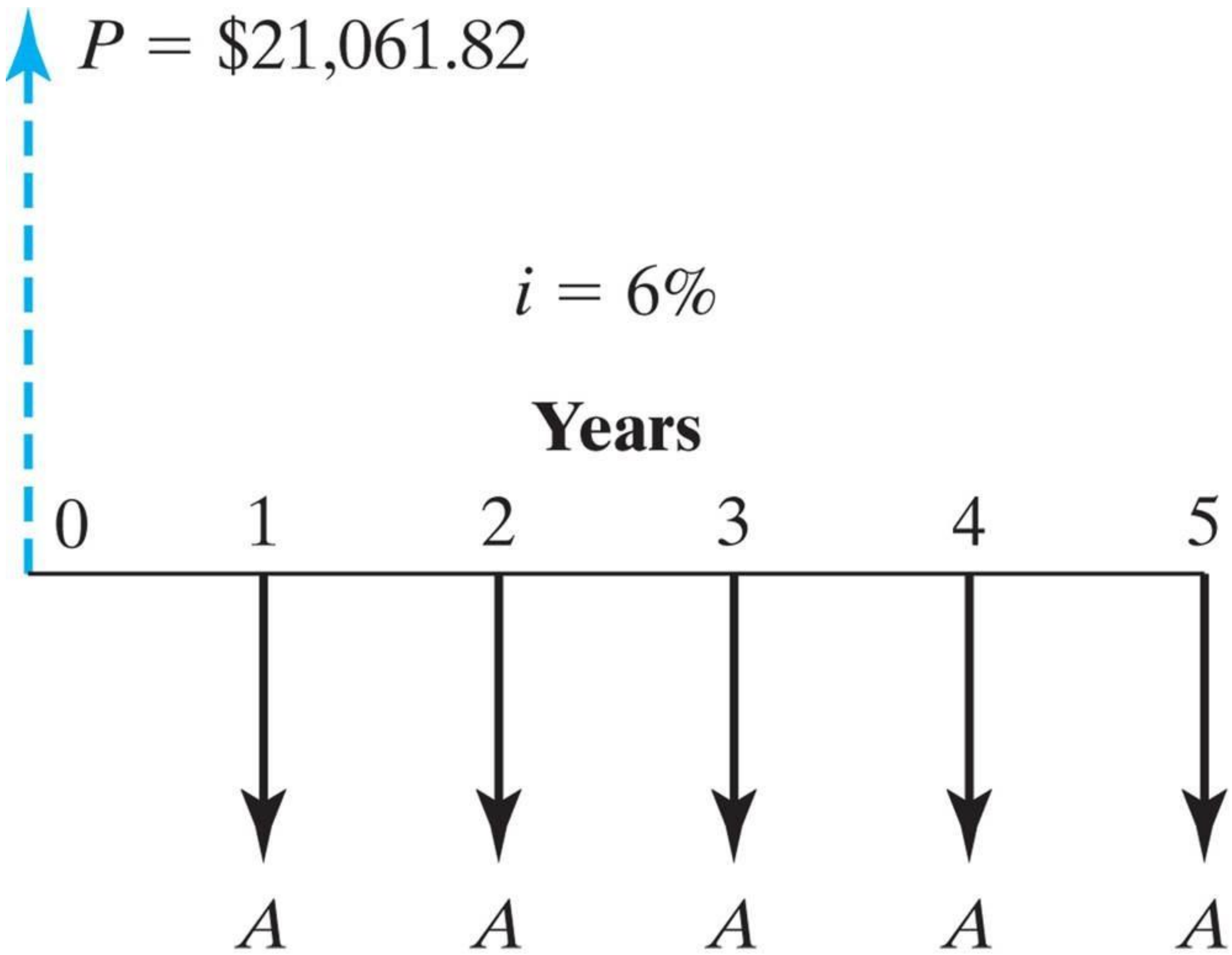
$(A/P, i, N)$叫做**资本回收系数（capital recovery factor）**，A/P系数被称为**年金系数（annuity factor）**。年金系数用于计算在特定周期下，一系列不变且连续的付款金额A。

- P与A的关系现金流量





- **例 2.12 偿还教育贷款**
  - 如果你想要通过贷款来支付大四的学费，金额为21061.82美元，还款时间为5年，年利率为6%，并且要求在5年中，每年年末等额还款。假设你在大一那年年初借款，那么第一次还款时间就该在一年之后。求出每年分期还款的金额是多少。
  - 分析：
    - 已知：$P = 21061.82$美元，$i = 6\%$，$N = 5$年。
    - 求：A。



$P = \$21,061.82$
$i = 6\%$
Years
0
1
2
3
4
5
A
A
A
A
A

- 求解
  - 使用资本回收系数能够得到

$$A = 21061.82(A/P, 6\%, 5) = 21061.82(0.2374) = 5000(\text{美元})$$

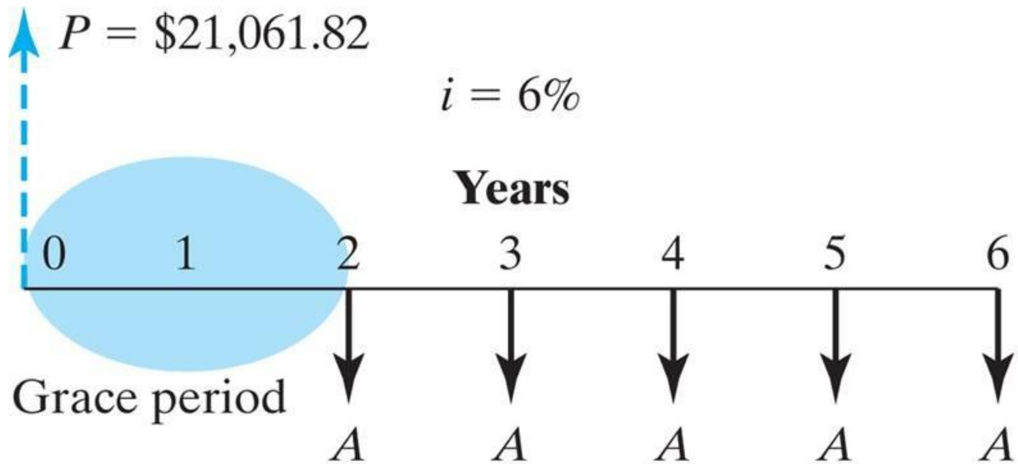
  - 通过Excel表中的年金函数

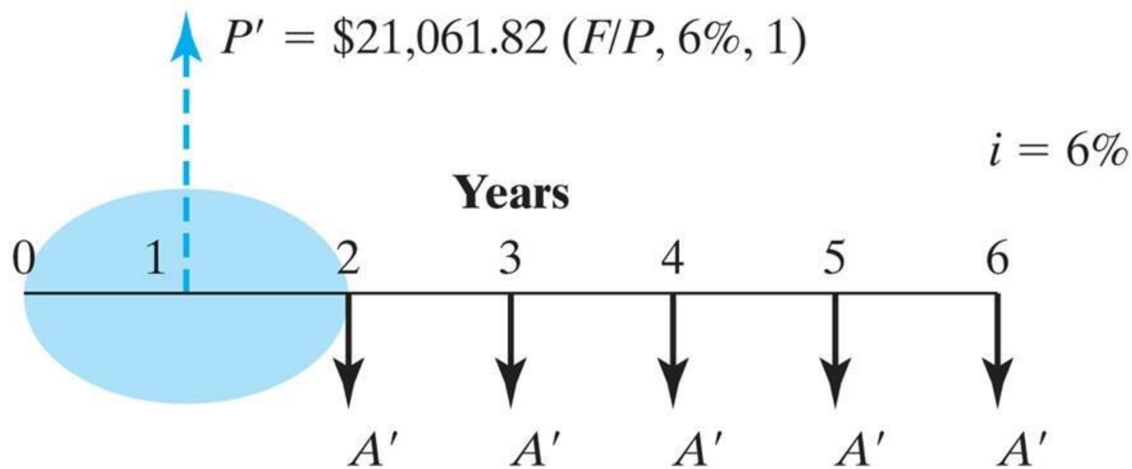
$$= PMT(6\%, 5, 21061.82) = -5000(\text{美元})$$

- 每期还款5000美元，最终还清贷款的过程

年	1	2	3	4	5
年初余额（美元）	21061.82	17325.53	13365.06	9166.96	4716.98
利息（6%）	1263.71	1039.53	801.90	550.02	283.02
每年付款（美元）	-5000	-5000	-5000	-5000	-5000
年末余额（美元）	17325.53	13365.06	9166.96	4716.98	0

- **例 2.13 延期偿还贷款**
  - 假设在上例中，你和银行商量首次还款时间延迟到第2年年末（但你仍希望以6%的年利率分5次偿还），如果银行要获得同样的利润，那新的分期还款金额应该是多少。
  - 分析：
    - 在推迟一年还款的情况下，银行肯定会把第1年应付的利息加到本金当中。也就是说，我们需要找到21061.82美元在第一年年末的等值金额。
    - 已知：$P = 21061.82$美元，$i = 6\%$，$N = 5$年，但是第一次分期还款的时间是在第2年年末。
    - 求：A。


$P = \$21,061.82$
$i = 6\%$
Years
0 1 2 3 4 5 6
Grace period
A A A A A


$P' = \$21,061.82\ (F/P, 6\%, 1)$
$i = 6\%$
Years
0 1 2 3 4 5 6
A′ A′ A′ A′ A′

- 求解

$$P' = 21061.82(F/P,6\%,1) = 22325.53(\text{美元})$$

相当于借了22325.53美元，为了能在5年内等额还清贷款，延期的每年等额分付金额为

$$A' = 22325.53(A/P,6\%,5) = 5300(\text{美元})$$

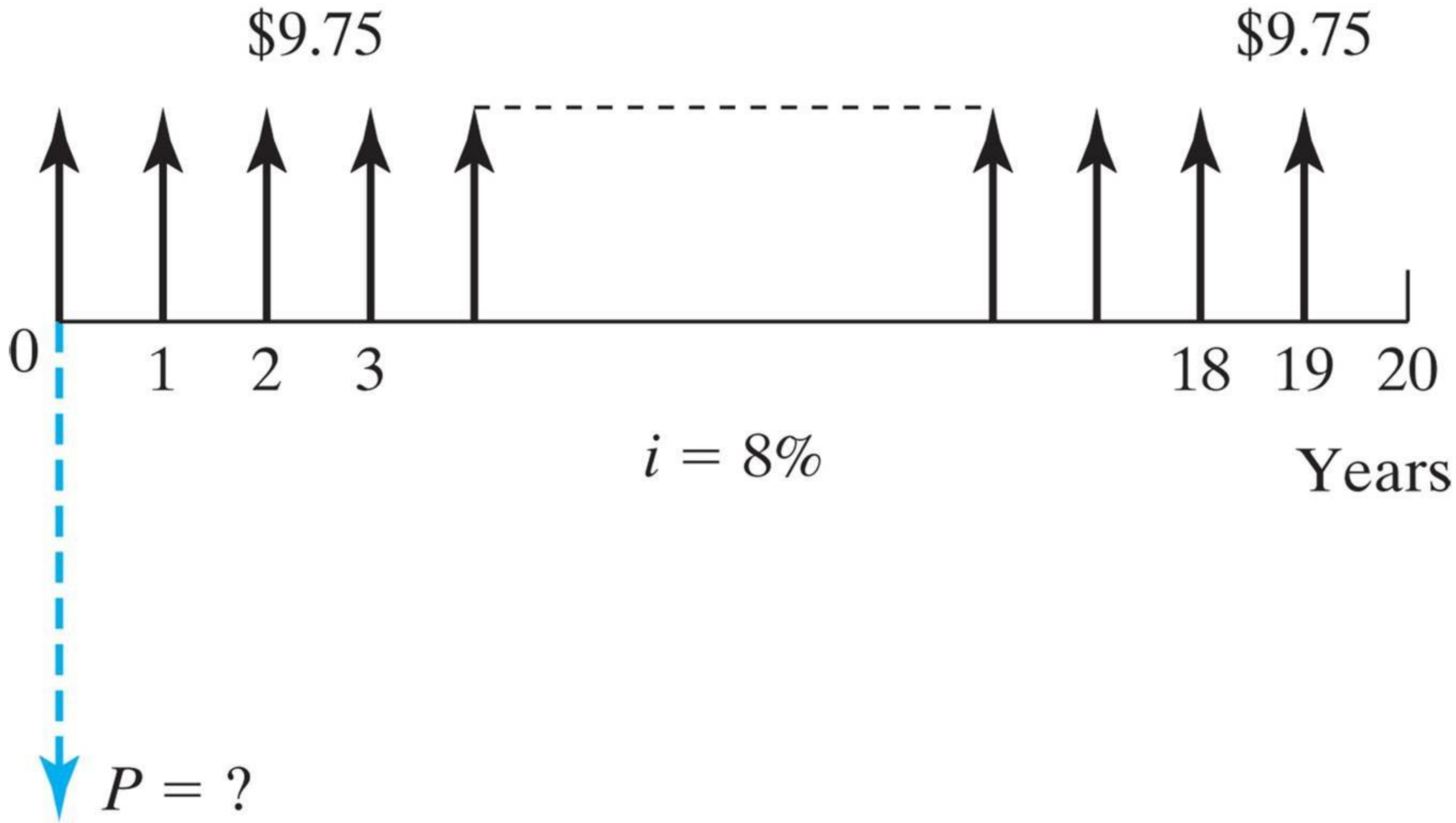
当把第一次分期还款的时间往后拖延一年，每次的分期还款需要多付300美元。

- 2.5.4 现值系数：已知A、i、N，求P

$$P = A\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i(1+i)^N}\right] = A(P/A,i,N)$$

$(P/A,i,N)$称为**等额分付现值系数（equal payment series present worth factor）**。

- **例 2.14 等额分付现值系列：已知A、i、N, 求P**
  - 某卡车司机中得彩票，他可以选择一次性领取11650万美元或者选择在20年内每年等额领取，其总金额为19500万美元（或每年获得975万美元，并且现在就能获得第一次支付）。最后该司机选择了一次性领取奖金。从严格的经济角度分析，他的做法真的获得了最大收益吗?
  - 分析:
    - 已知：$A=975$万美元，$i=8\%$，$N=19$年。
    - 求： P。


$9.75
$9.75
0
1
2
3
18
19
20
i = 8%
Years
P = ?

- 求解：
  - 方法一：使用复利系数

$$P=9.75+9.75(P/A,8\%,19)=9.75+93.64=10339(\text{美元})$$

  - 方法二：使用Excel表

$$=PV(8\%,20,9.75,1)=-10339(\text{万美元})$$

- 显然，在$i=8\%$的年利率下，应该放弃在20年内每年领取975万美元，而选择一次性领取11650美元。如果选择一次性领取11650万美元，可以求出i。

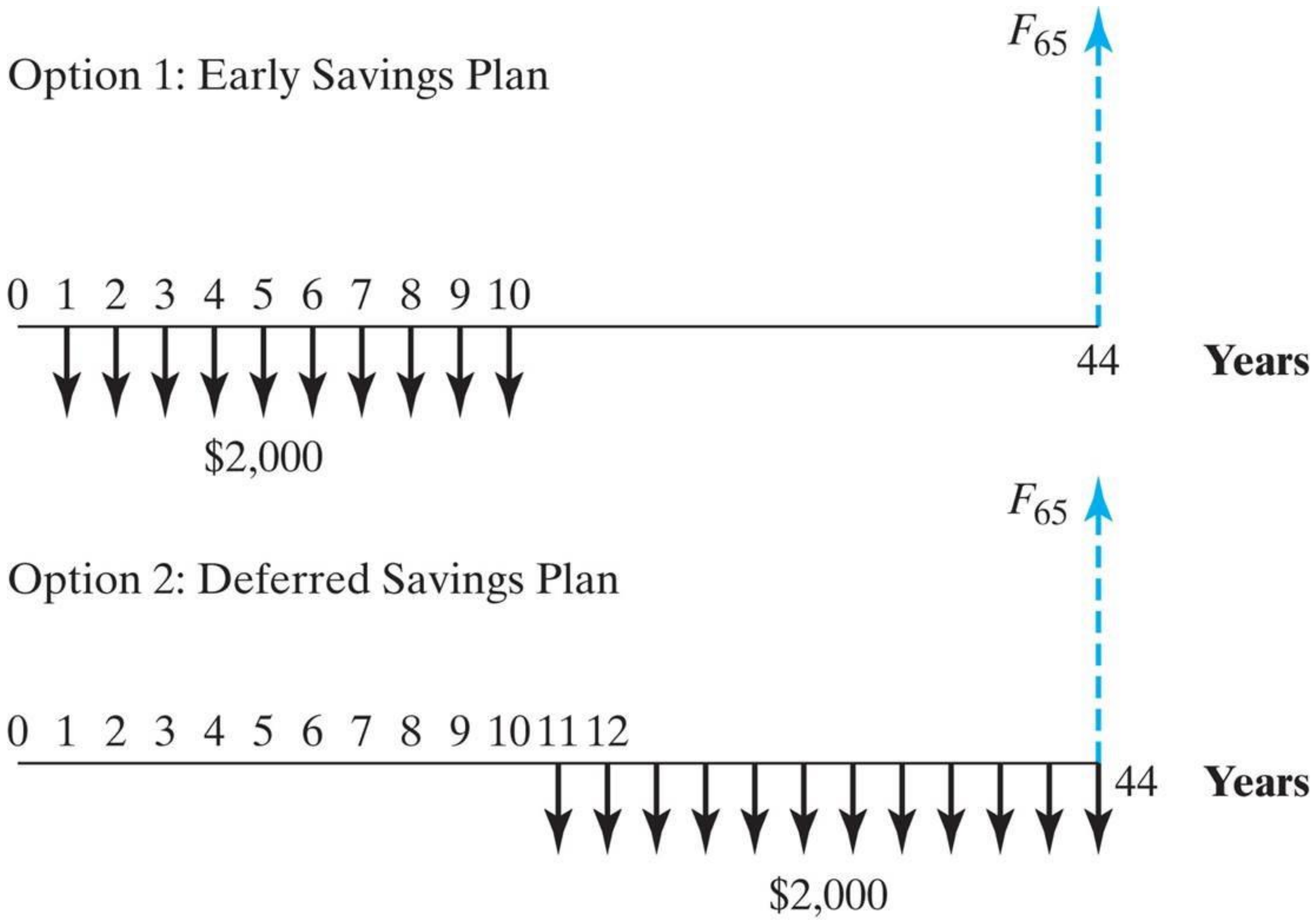
$$116.5=9.75+9.75(P/A,i,19)$$

$$(P/A, i, 19) = \frac{116.5 - 9.75}{9.75} = 10.9487$$

- 通过计算器，复利系数表，或者Excel表，可以求得$i = 6.2436\%$。

- 因此，只有当彩票获奖者能够得到投资收益率高于6.2436%的投资项目，他选择一次性领取全部奖金是个很好的决策。

- **例 2.15** 尽早开始储蓄：$(F/P,i,N)$ 和$(F/A,i,N)$ 系数的复合系列
  - 你在21周岁时，考虑如下两种储蓄计划
    - 方案一：每年存款2000美元，一共存10年。从第10年年末之后不再存钱，而是将之前的累计余额进行投资，一直到你65岁为止。（假设第一次存款发生在你22岁）
    - 方案二：前10年不进行任何投资，从第11年开始，直到你65岁为止，每年存款2000美元。（假设第一次存款发生在32岁）
  - 假设在计划期间资金的投资收益率为8%，那么在你65岁的时候，哪种方式能够获得更多的收益?



Option 1: Early Savings Plan
F_{65}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
44
Years
$2,000
Option 2: Deferred Savings Plan
F_{65}
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
44
Years
$2,000

- 分析：
  - 已知：$i = 8\%$，存款详情如图。
  - 求：65岁时的终值F为多少？
- 求解：
  - 方法一：提前储蓄计划（分两步来计算最终余额）

首先，计算出在第10年年末的累积余额（即在你31岁的时候），用F_{31}来表示。

$$F_{31} = 2000(F/A, 8\%, 10) = 28973\text{（美元）}$$

然而，将F_{31}进行再次投资，投资时间为34年，将此终值记为F_{65}。

$$F_{65}=28973(F/P,8\%,34)=396646\text{（美元）}$$

- 方法二：延期储蓄计划

由于投资的时间只有34年，最后余额为

$$F_{65}=2000(F/A,8\%,34)=317253\text{（美元）}$$

因此，在提前储蓄计划中，你能够多存79393美元。

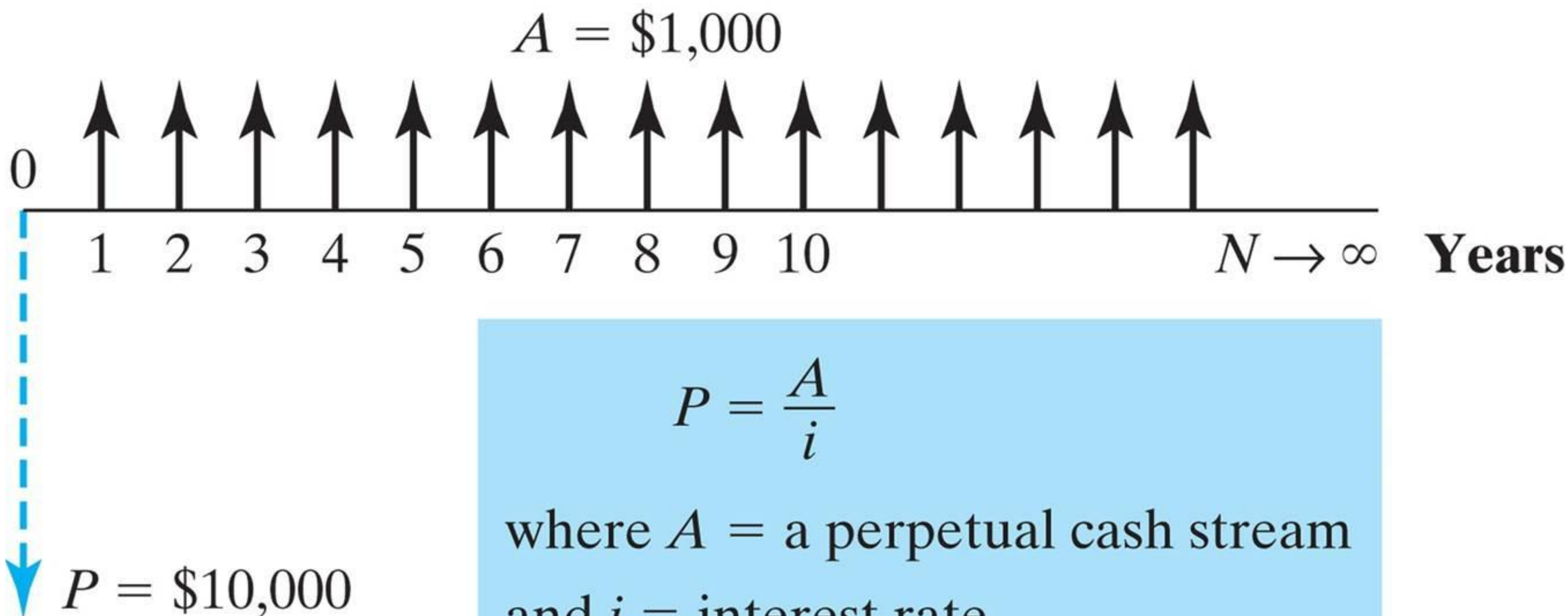
- 2.5.5 永续年金的现值

- 永续年金是能够持续到永久的现金流量。因为现金流量是永久的，所以永续年金的显著特征就是不能计算出它的终值。

$$P = \frac{A}{i}$$

- **例 2.16 永续年金的现值：已知$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{N}$，求$\boldsymbol{P}$**
  - 如果想要获得1000美元的永续年金，当年利率为10%时，那么此永续年金的现值为多少?
  - 分析：
    - 已知：$i=10\%$，$A=1000$美元，$N=\infty$。
    - 求：P。
  - 求解：

$$P=\frac{A}{i}=\frac{1000}{0.1}=10000\text{（美元）}$$



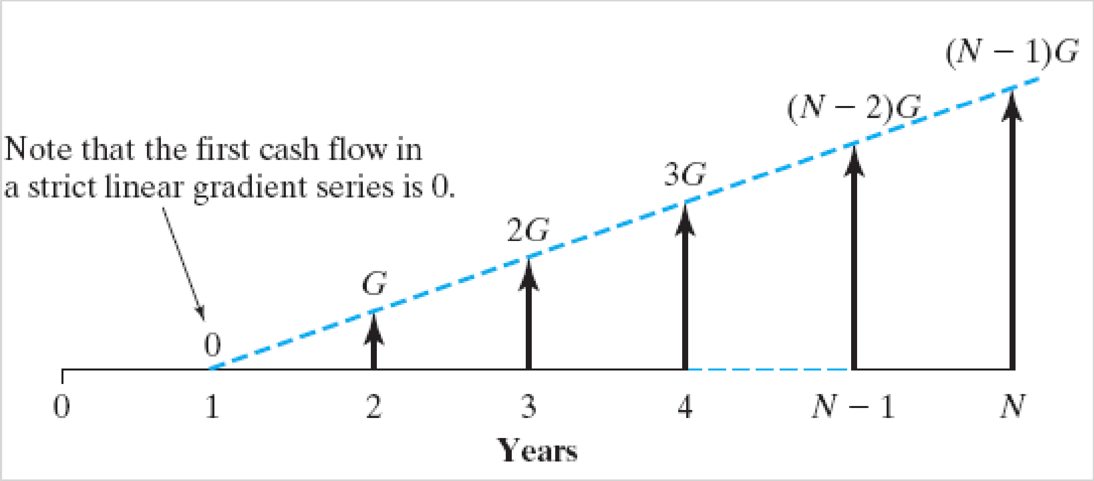
$$P = \frac{A}{i}$$

where A = a perpetual cash stream

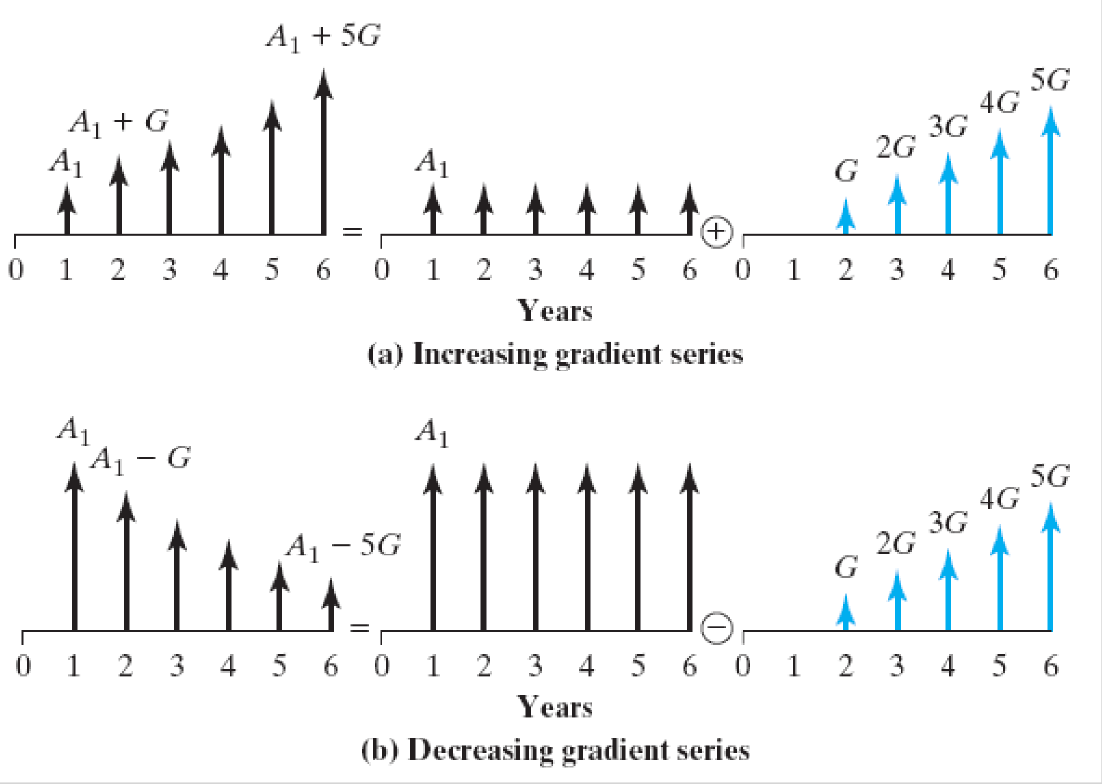
and i = interest rate

2.6 梯度支付系列

- 2.6.1 线性梯度支付系列
- 有时，现金流量会按照固定的金额增加或减少，该类型通常被称为严格梯度系列。
  - 如果，G > 0，称为**递增梯度系列**；
  - 如果，G < 0，称为**递减梯度系列**。



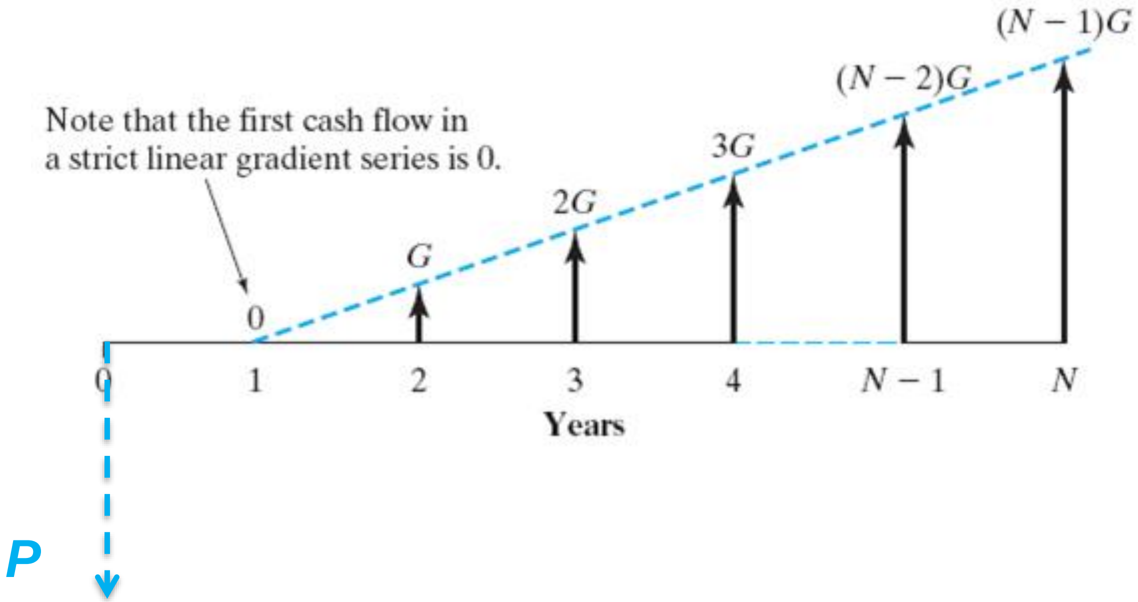
- 线性梯度复合系列
  - 将包含现行梯度系列的现金流量视为由两个系列复合而成。



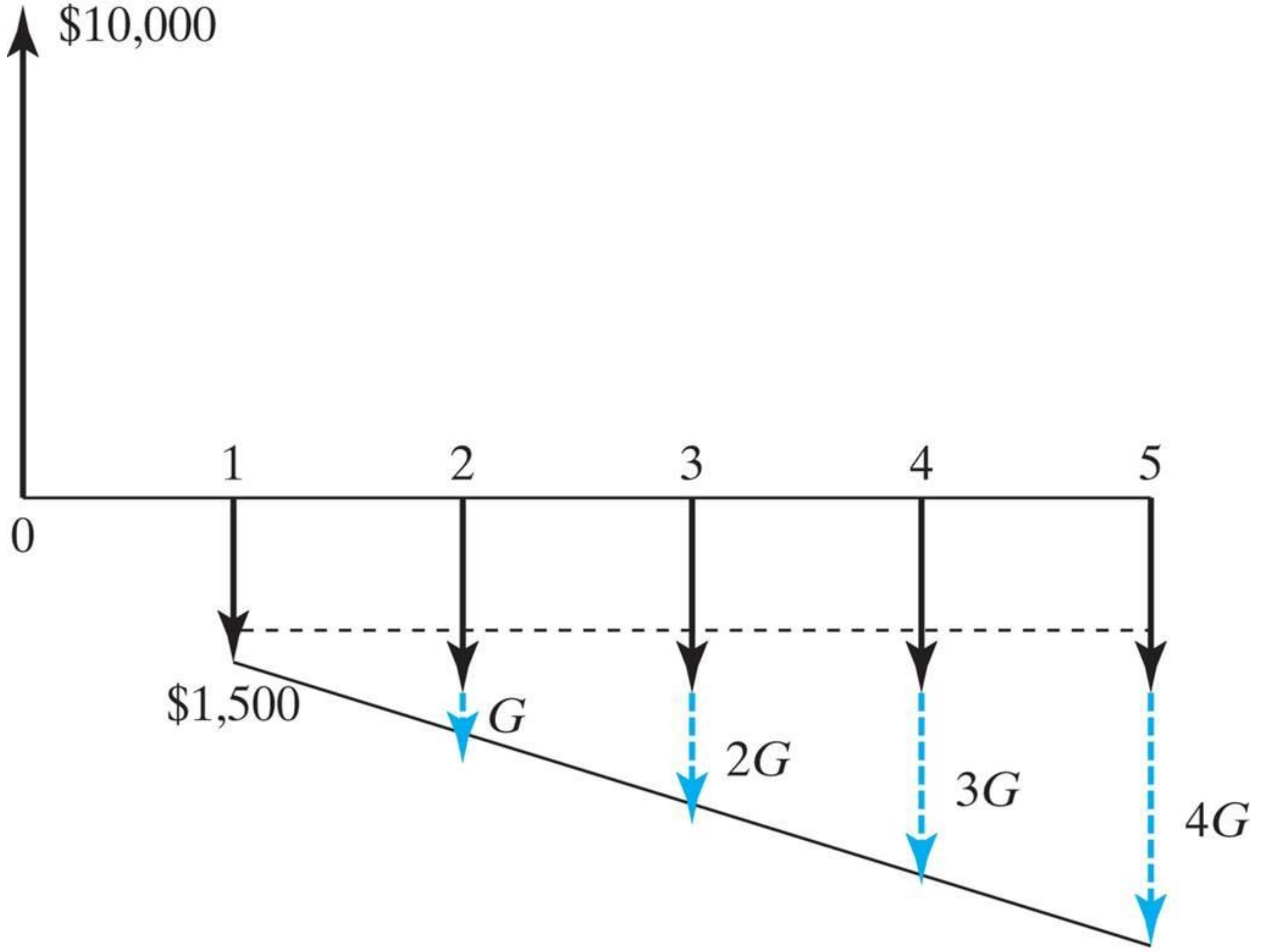
- 现值系数：线性梯度：已知G、N、 i，求P

$$P = G\left[\frac{(1+i)^N - iN - 1}{i^2(1+i)^N}\right] = G(P/G, i, N)$$

其中，$(P/G, i, N)$为**等差序列现值系数。**



- **例 2.17** 基于线性梯度系列的教育贷款偿还计划
  - 假设你从当地银行贷款10000美元，按规定你必须要按教育贷款偿还计划来还贷。如果初始还款金额为1500美元，在10%的利率下，求在5年内该如何偿还余额。
  - 分析
    - 已知：$P = 10000$美元，$A_1 = 1500$美元，$N = 5$年，年利率$i = 10\%$。
    - 求：G。


$10,000
0
1
2
3
4
5
$1,500
G
2G
3G
4G

- 求解

  - 方法一：计算现值

    由于贷款支付系列是由两个部分组成：1500美元的等额分付系列；严格梯度系列。

    计算出每个系列的现值并使其等于10000美元。

    $$10000=1500(P/A,10\%,5)+G(P/G,10\%,5)$$

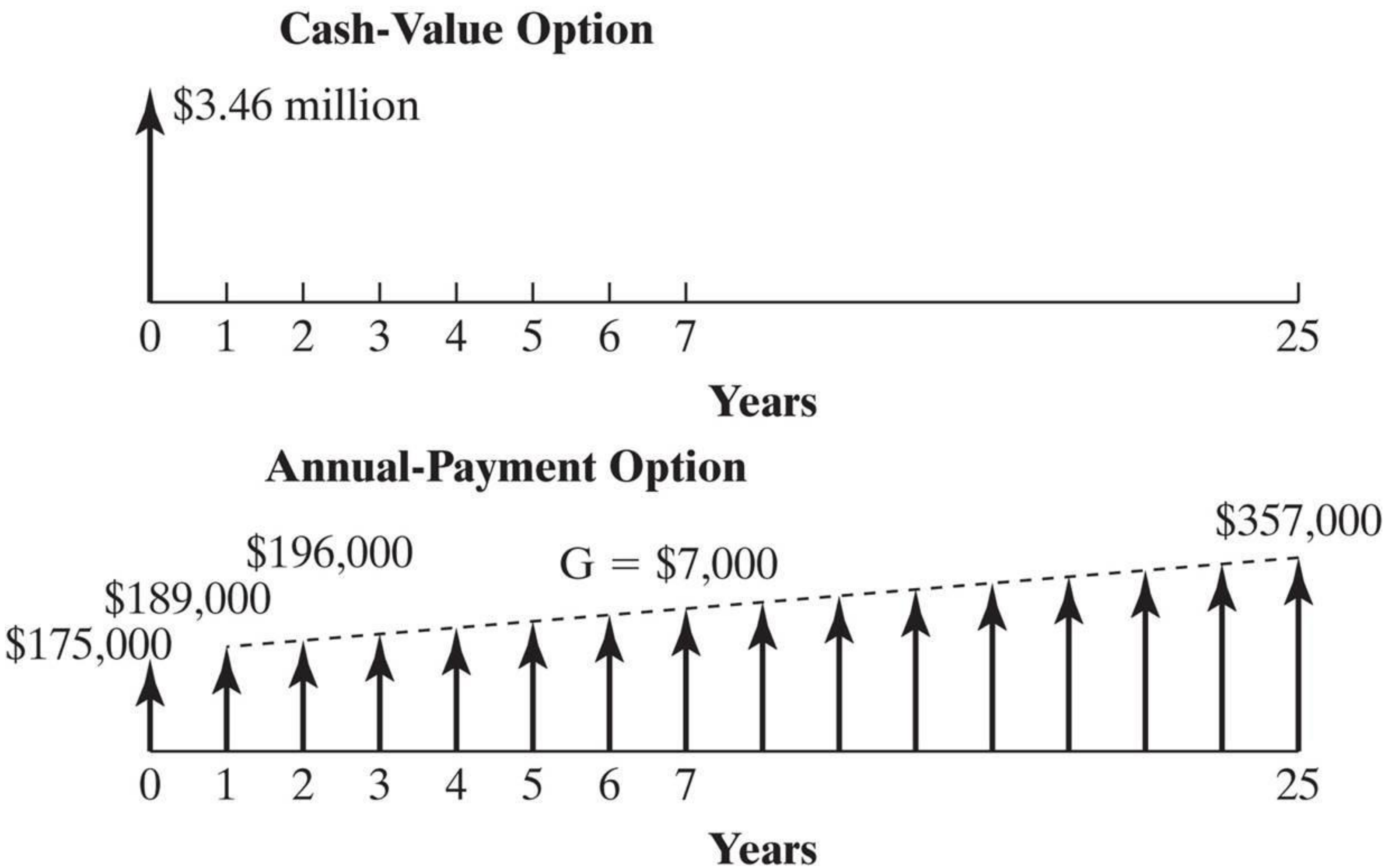
    $$=5686.18+6.8618G=4313.82$$

    $$G=628.67(\text{美元})$$

  - 方法二：通过Excel表格

- **例 2.18 等值现金价值**
  - 领取超级大乐透彩票700万美元特等奖的方式，主要有以下两种。
    - 选择一次性领取现金。在此情况下，获奖者一次性获得奖金的49.43%，即346万美元（扣除所得税）。现金价值的确定是基于市场的平均成本（美国财政部的零息债券5.3381%）。
    - 年度支付方案：获奖者分26次领取奖金，且每次领奖的金额会高于上年。获奖者还可以立即提取第一笔奖金175000美元（占总金额的25%）。第二年领取奖金189000美元。在接下来的25年中，领取的奖金会以每年7000美元的幅度增加，最后一次性领取的金额为357000美元。
  - 假设在你获奖的时候，美国财政部的零息债券的年利率降至4.5%（而不是5.388%），那么彩票的等值现值为多少？

- 分析：
  - 该问题相当于在4.5%利率下，年度支付系列的等值现值为多少?
  - 已知：$A_0 = 175000$美元，$A_1 = 189000$美元，$G = 7000$美元（从第2周期到第25周期），年利率$i = 4.5\%$，$N = 5$年。
  - 求：P。


Cash-Value Option
$3.46 million
0 1 2 3 4 5 6 7 25
Years
Annual-Payment Option
$175,000
$189,000
$196,000
G = $7,000
$357,000
0 1 2 3 4 5 6 7 25
Years

- 求解：
  - 方法一： 计算等值现值

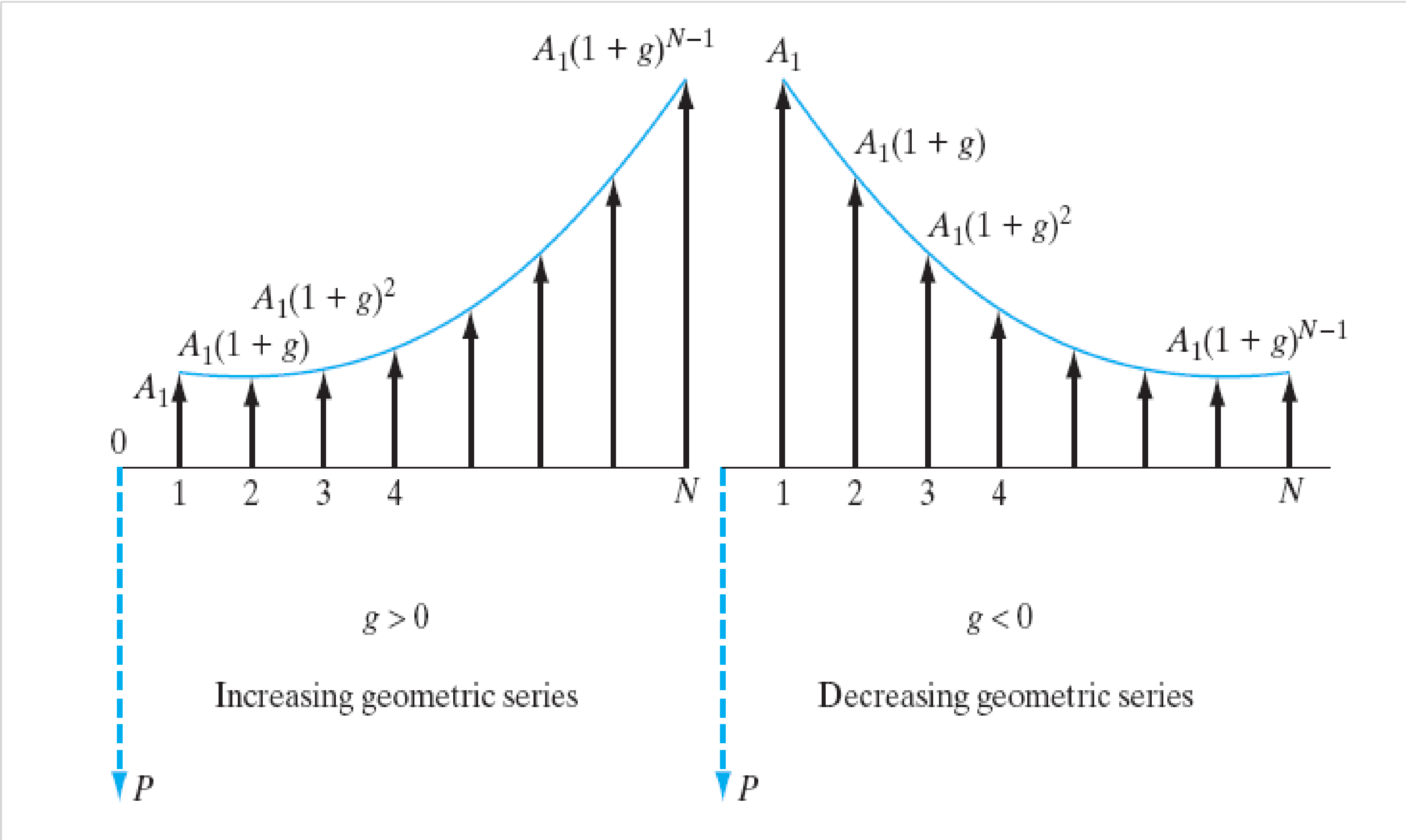
    $P = 175000 + 189000(P/A, 4.5\%, 25) + 7000(P/G, 4.5\%, 25) = 3990189$(美元)

    可以得到，一次性领取奖金金额从原来的346万美元增长到现在的399万美元。
  - 方法二： Excel表格

- 2.6.2 几何梯度支付系列
- 在计算梯度系列现金流量的时候，有一种情况是按照固定的比率变化，这个过程被称为复利增长过程。
- 将g记为从一个周期到另一个周期百分比的变化，第n期付款金额A_n与第一次付款金额A_1有如下关系：

$$A_n = A_1(1+g)^{n-1}，\ 1,2,\dots,N$$

式中可以g是正数也可以是负数，取决于现金流量的类型，如果$g>0$，此系列递增，如果$g<0$，此系列递减。


$A_1(1+g)^{N-1}$
A_1
$A_1(1+g)$
$A_1(1+g)^2$
0
1 2 3 4 N
$g > 0$
Increasing geometric series
P
$g < 0$
Decreasing geometric series

- 现值系数：已知A_1、 g、 i、 N，求P
  - 利率为i，任意现金流量A_n的现值P_n

$$P_\mathrm{n} = A_\mathrm{n}(1+g)^{-\mathrm{n}} = A_1(1+g)^{\mathrm{n}-1}(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}，1,2,\ldots,N$$

  - 为了求出整个系列现值P的表达式，对各系列的P_n都使用整付现值系数（single payment present worth factor）：

$$P = \sum_{n=1}^{N} A_1(1+g)^{n-1}(1+i)^{-n}$$

$$P=\begin{cases} A_1\left[\dfrac{1-(1+g)^N(1+i)^{-N}}{i-g}\right], i\neq g \\ A_1\left(\dfrac{N}{1+i}\right), i=g \end{cases}$$

其中$P=(\mathrm{P}/A_1, g，i，N)$，$(\mathrm{P}/A_1, g，i，N)$称为**几何梯度现值系数。**

还有一种方法推算几何梯度现值系数，将常数项$\frac{A_1}{(1+g)}$代入现值P_n的表示式得到

$$P=\frac{A_1}{(1+g)}\sum_{n=1}^{N}[\frac{1+g}{1+i}]^n=\frac{A_1}{(1+g)}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{[1+\frac{i-g}{1+g}]^n}$$

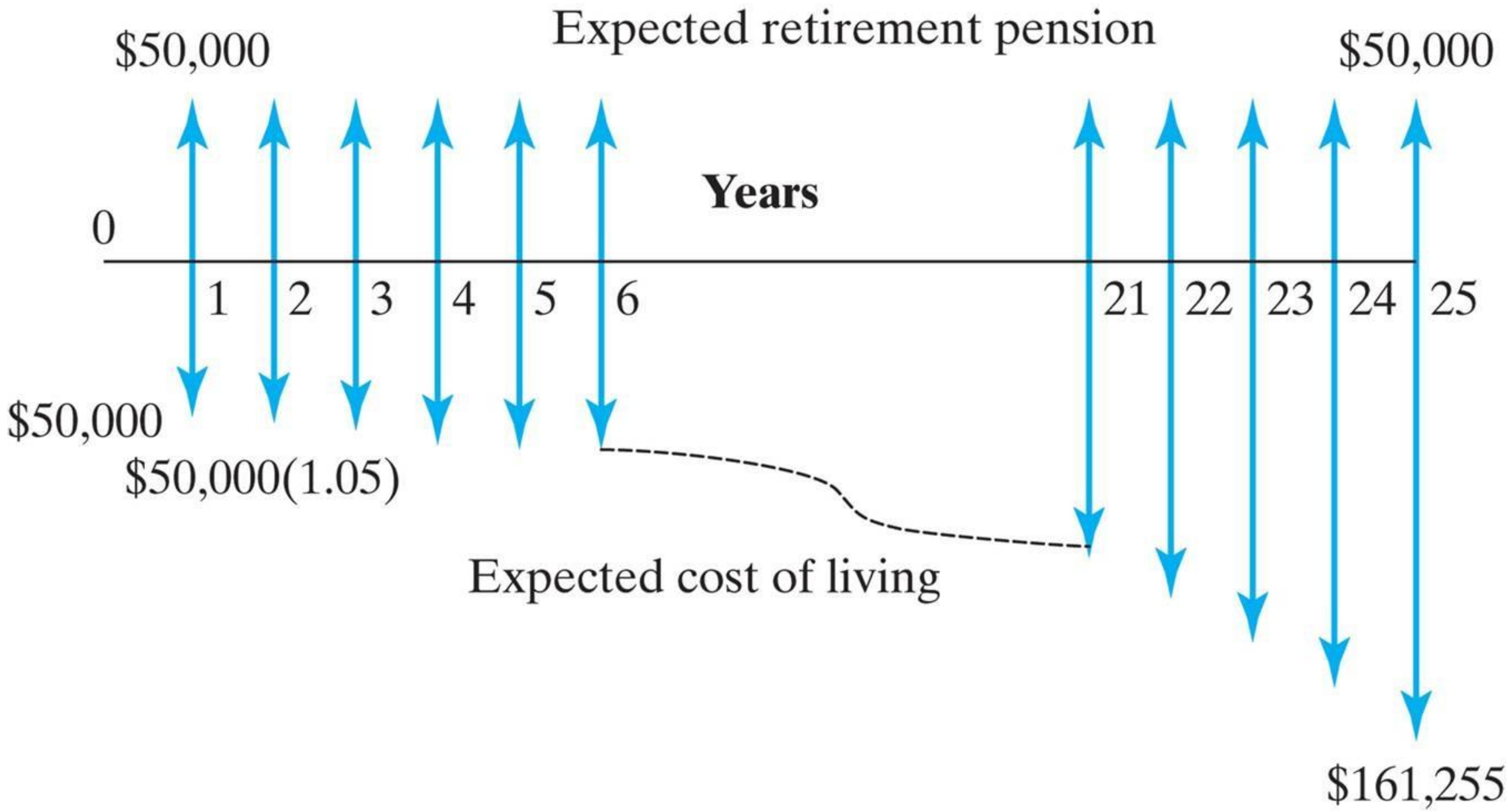
定义：$g'=\frac{i-g}{1+g}$

可以得到:

$$P=\frac{A_1}{(1+g)}\sum_{n=1}^{N}(1+g')^n=\frac{A_1}{(1+g)}(P/A,g',N)$$

估算出系数$(P/A,g',N)$，就不需要另外的几何梯度现值系数表。

- **例 2.19** 必需生活成本调整计算
  - 假设退休第1年的退休金为50000美元。这笔资金仅能够支付你在第1年的生活费用。由于通货膨胀，你的生活成本每年以5%上涨。如果不希望降低生活水平，那么你未来的一部分生活成本必须由退休金以外的资金支撑。假设你的储蓄账户能够获得7%的利润，那么你的存款金额为多少时才能在25年后抵消生活成本的增加?
  - 分析：
    - 如图所示，$A_1 = 50000$美元，$g = 5\%$，年利率$i = 7\%$，$N = 25$年。
    - 求：P。


Expected retirement pension
$50,000
$50,000
Years
0
1
2
3
4
5
6
21
22
23
24
25
$50,000
$50,000(1.05)
Expected cost of living
$161,255

- 求解：
  - 方法一：计算现值

求出25年内全部退休金的等值现值

$$P = 50000(P/A, 7\%, 25) = 582679(\text{美元})$$

求出通货膨胀下的等值现值全部生活成本。生活成本的等值现值为

$$P = 50000(\mathrm{P}/A_1, 5\%, 7\%, 25)$$

$$= 50000\left[\frac{1-(1+0.05)^{25}(1+0.07)^{-25}}{0.07-0.05}\right] = 50000(18.8033)$$

$$= 940167.22\ (\text{美元})$$

另外一种推算，需要求出

$$g' = \frac{0.07 - 0.05}{1 + 0.05} = 0.019048$$

求出

$$P = \frac{50000}{1+0.05}(P/A, 1.9048\%, 25) = 940167(\text{美元})$$

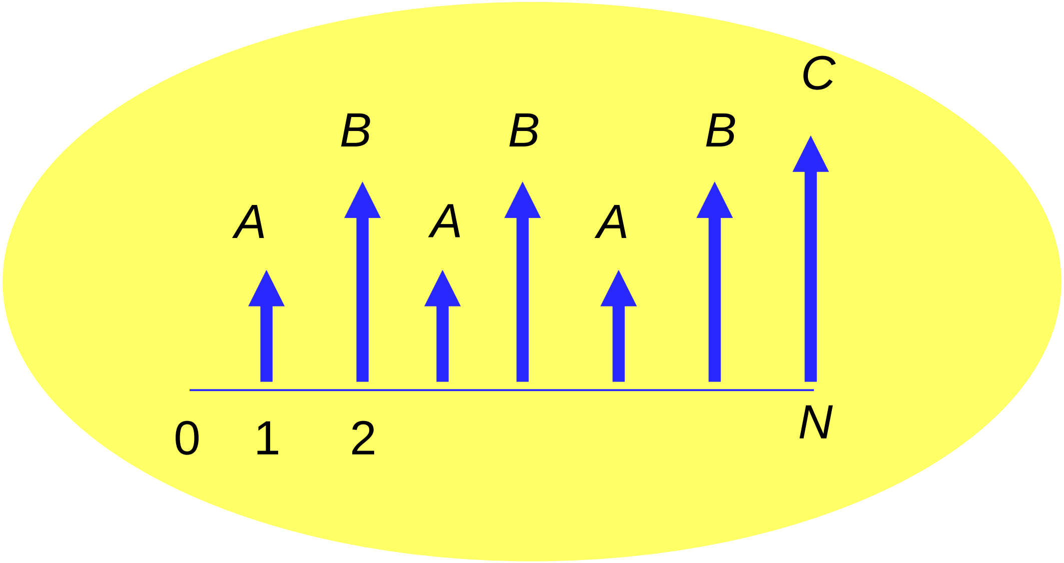
- 方法二：Excel表格

$$\Delta P = 940167 - 582679 = 357488 \text{（美元）}$$

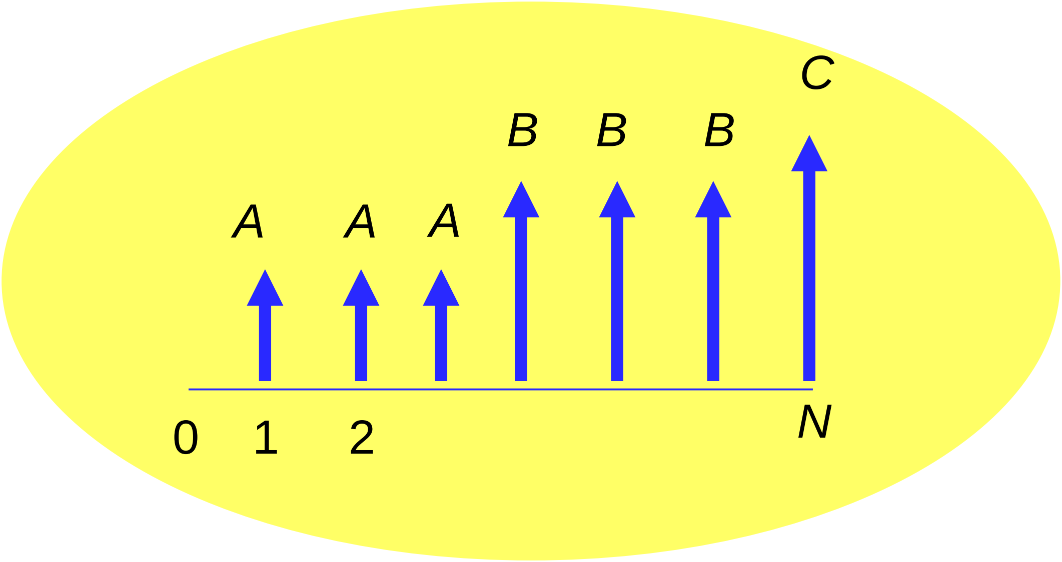
2.7 其他等值计算

- 许多金融交易中含有很多种类的现金流量，它们并不是全部以标准型出现，由必要去处理这些混合现金流量的情况。

- 方法一：用每次支付乘以对应的系数$(P/F,i,n)$，将这些结果求和，即获得现金流量现值。

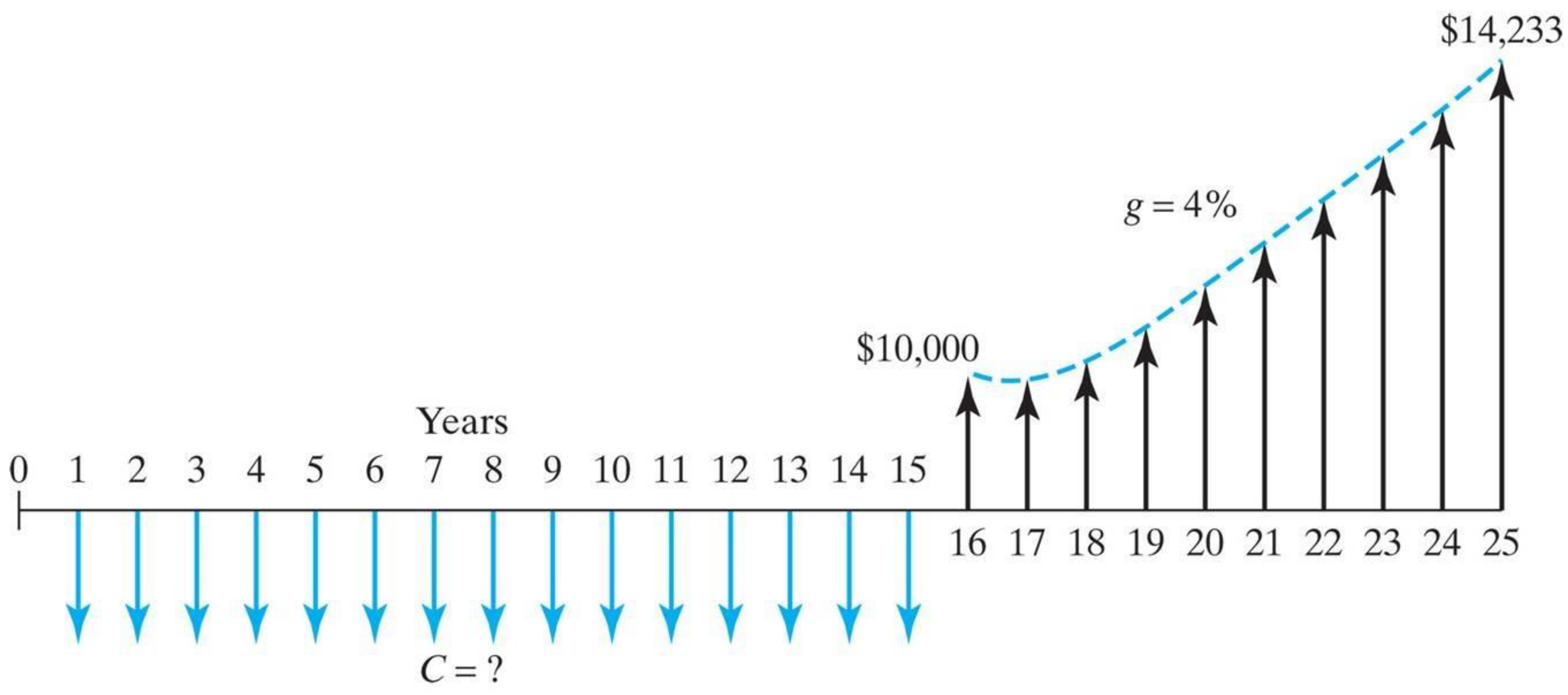


- 方法二：依据与现金流量相匹配的模型，将现金流量进行分组。



- 方法三：通过Excel表格。
  - 在计算整个系列的现值时，计算每个现金流量的等值现值，并将它们相加求和。

- **例 2.20 退休计划：多重利息系数的复合系列**
  - 你想在个人养老金账户中存些钱以增加退休后的收入。你还有15年退休，从今以后的15年中，你每年都将一定的等额资金存进该账号，一直到你退休为止。第一次存款时间是第1年年末。你需要存入足够多的钱，这样你才能从第16年年末到第26年年初，每年都可取出一定的金额。假设第一次取款金额为10000美元，并且由于生活成本的上升，以后每次取款的金额都会在前一年你取款金额的基础上增加4%。你最后一次取款在第25年年末。那么前15年等额年存款额是多少？已知在你退休前后，每年的复利利率为8%。
  - 分析
    - 已知：年利率$i = 8\%$，存取款金额所示。
    - 求：A。


$14,233
g = 4%
$10,000
Years
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
C = ?

- 求解

  - 方法一：在期初建立等值等式

首先，计算出$n = 0$时总存款系列的等值现值

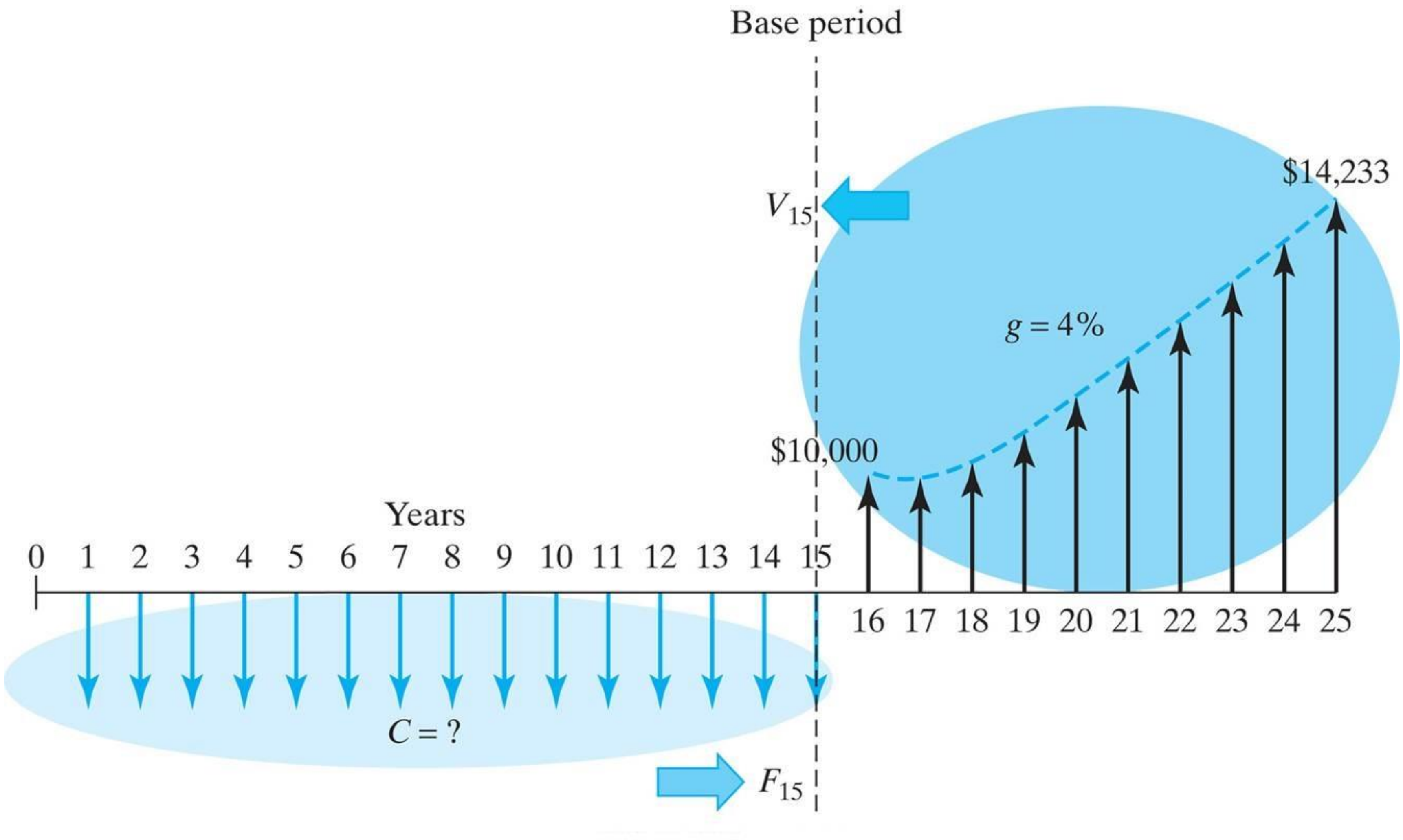
$$P_{存款} = C(P/A, 8\%, 15) = 8.5595C(美元)$$

通过分两步来计算整付现值：首先计算n=15时的等值，然后再计算$n = 0$时的现值中，这样就可以求出等价的单独一次总取款金额

$$P_{取款} = \overbrace{10000\underbrace{(P/A_1, 4\%, 8\%, 15)}_{7.8590}}^{V_{15}}\overbrace{\underbrace{(P/F, 8\%, 15)}_{0.3152}}^{折现率}$$

$$8.5595C=24771.60$$

$$C = 2894（美元）$$


Base period
V_{15}
$14,233
g = 4%
$10,000
Years
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
C = ?
F_{15}

- 方法二：在$n = 15$时，建立等值等式。

首先，计算第15年年末的累积存在金额，记为F_{15}

$$F_{15} = C(F/A,8\%,15) = 27.1521C(\text{美元})$$

然后计算出在退休时的一次性提取全款的等价现值，记为V_{15}

$$V_{15} = 10000(P/A_1,4\%,8\%,10) = 78590(\text{美元})$$

由于这两笔金额必须相等，即$F_{15} = V_{15}$，可以得到

$$27.1521C = 78590$$

$$C = 2894\text{（美元）}$$

复利计息公式总结

现金流量类型	系数符号	公式	Excel指令
整付系列	整付终值系数 $(F/P, i, N)$	$F = P(1+i)^N$	$= FV(i, N, 0, P)$
	整付现值系数 $(P/F, i, N)$	$P = F(1+i)^{-N}$	$= PV(i, N, 0, F)$
等额分付系列	等额分付终值系数 $(F/A, i, N)$	$\mathrm{F} = A\left[\frac{(1+i)^N - 1}{i}\right]$	$= FV(i, N, A)$
	等额分付偿债基金系数 $(A/F, i, N)$	$\mathrm{A} = F\left[\frac{i}{(1+i)^N - 1}\right]$	$= PMT(i, N, 0, F)$

现金流量类型	系数符号	公式	Excel指令
等额分付系列	等额分付现值系数 $(P/A,i,N)$	$P=A\left[\frac{(1+i)^N-1}{i(1+i)^N}\right]$	$=PV(i,N,A)$
	等额分付资本回收系数 $(A/P,i,N)$	$A=P\left[\frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N-1}\right]$	$=PMT(i,N,P)$
梯度支付系列	等差系列现值系数 $(P/G,i,N)$	$P=G\left[\frac{(1+i)^N-iN-1}{i^2(1+i)^N}\right]$	
	等差系列年值系数 $(A/G,i,N)$	$A=G\left[\frac{(1+i)^N-iN-1}{i(1+i)^N-i}\right]$	
	几何梯度现值系数 $(P/A_1,g,i,N)$	$P=\begin{cases}A_1\left[\frac{1-(1+g)^N(1+i)^{-N}}{i-g}\right], i\neq g\\ A_1\left(\frac{N}{1+i}\right), i=g\end{cases}$	

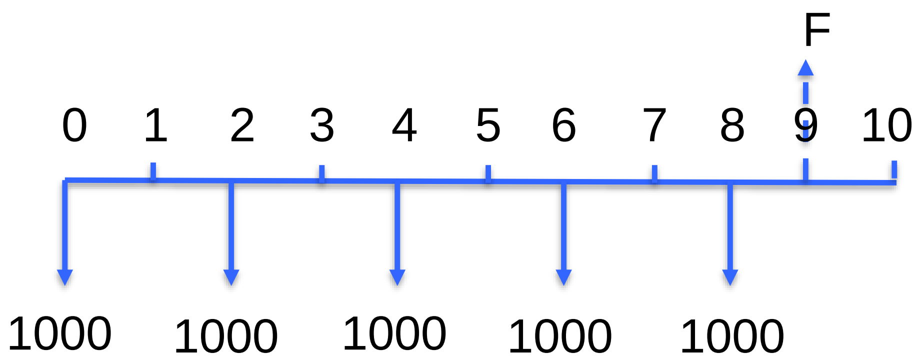
研讨

- 举例说明资金的时间价值理论。

课内作业

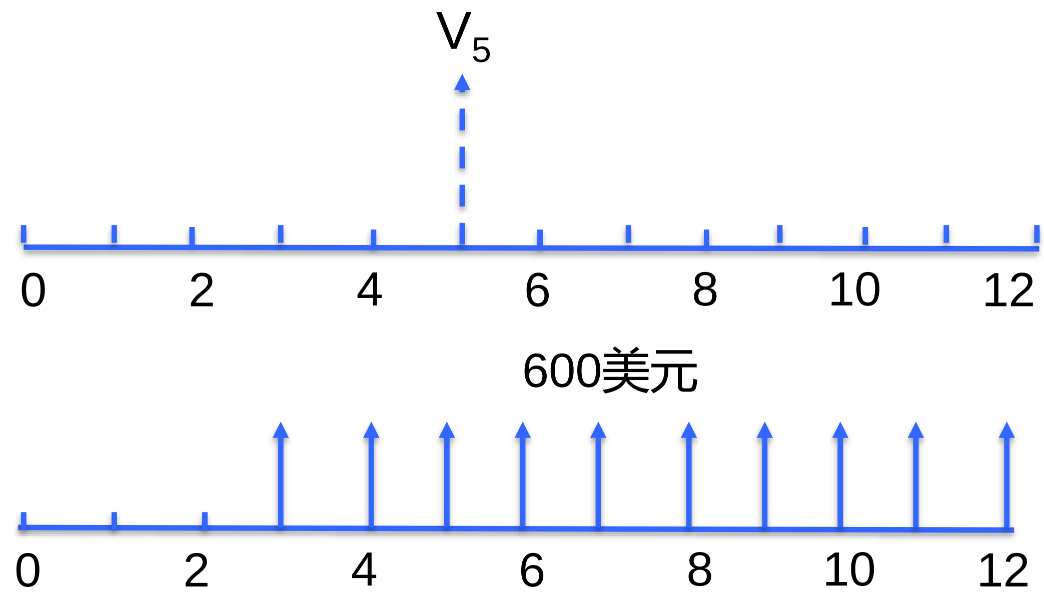
- 1. 如果你希望在8年后能从账户中取出20,000美元。那么在12%的复利下，你现在要存多少钱进这个账户才能达到预计目标。
  - （a）8490美元
  - （b）8871美元
  - （c）7632美元
  - （d）8078美元

- 2. 假设今天存入1000美元，从现在起2年后再存入1000美元，4年后再存入1000美元，6年后再存入1000美元，8年后再存入1000美元。在每年8%的复利下，计算第9年年末的终值。

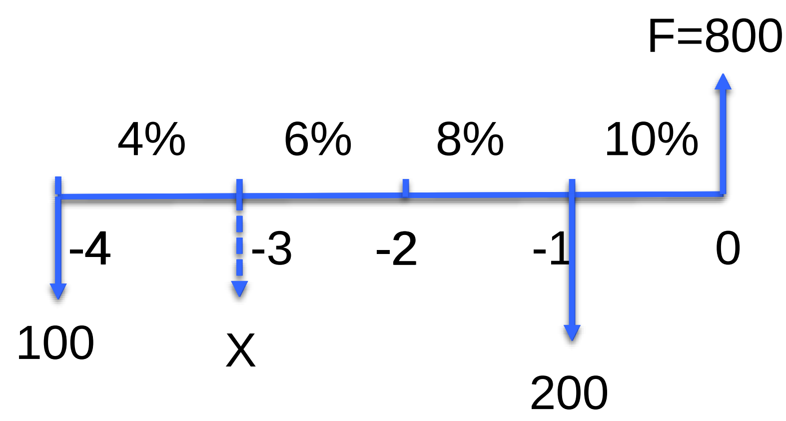


- （a）4174.6美元
- （b）7521.8美元
- （c）2058.3美元
- （d）1895.2美元

- 3. 设等额分付系列开始于第3年年末，结束于第12年年末，每年存款金额为600美元，年利率为10%。求在第5年年末需整存多少时，才能等值于等额分付系列。
  - (a）4907美元
  - (b）6260美元
  - (c）6762美元
  - (d）6883美元

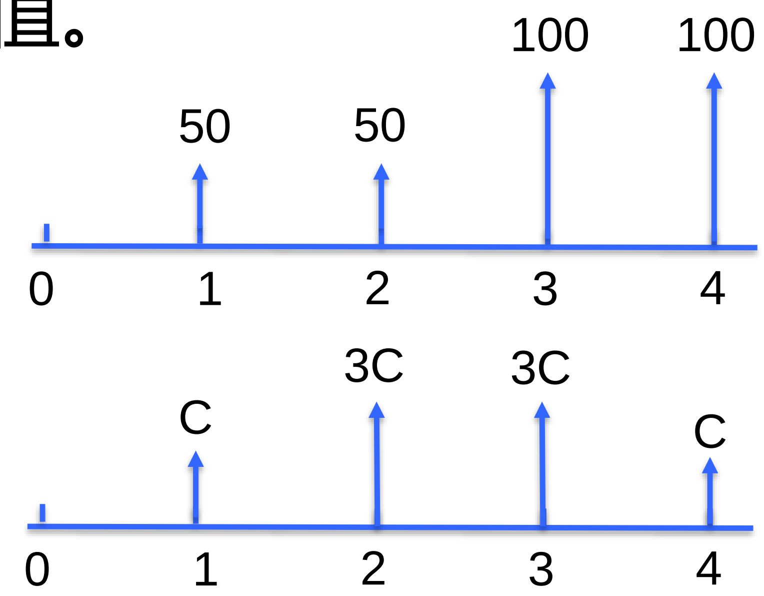


- 4. 假设4年前建立了一个共有基金并且存款三次：4年前存了100美元，3年前存了X美元，1年前存了200美元。所获收益随着利率的变化而变化，利率的变化情况如下图所示。如果到现在为止，你的账户余额为800美元。试计算3年前存款金额为多少（X美元）?具体情况如下图所示。
  - (a）115.3美元
  - (b）100.7美元
  - (c）103.2美元
  - (d）105.4美元



- 5. 在年利率12%下，现在需要存多少钱才可以在接下来5年每年取款，且每年取款金额为8000美元。
    - (a) 8052
    - (b) 9050
    - (c) 16761
    - (d) 28839.2

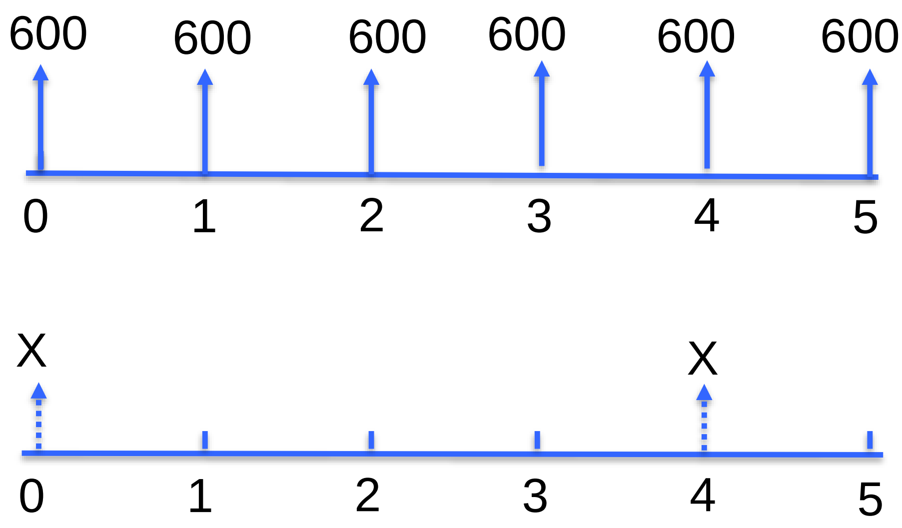
- 6. 在12%的年利率下，求出能使如下的两个现金流量交易等值的C值。
  - (a) 29.365
  - (b) 33.598
  - (c) 47.433
  - (d) 43.796



- 7. 在年利率8%下（每年按复利来计算），如果每年存入账户3000美元，共存20年，计算出终值为多少？假设存款都发生在每年年初。
  - （a）126 005.3
  - （b）111 529
  - （c）148 268.8
  - （d）192 037

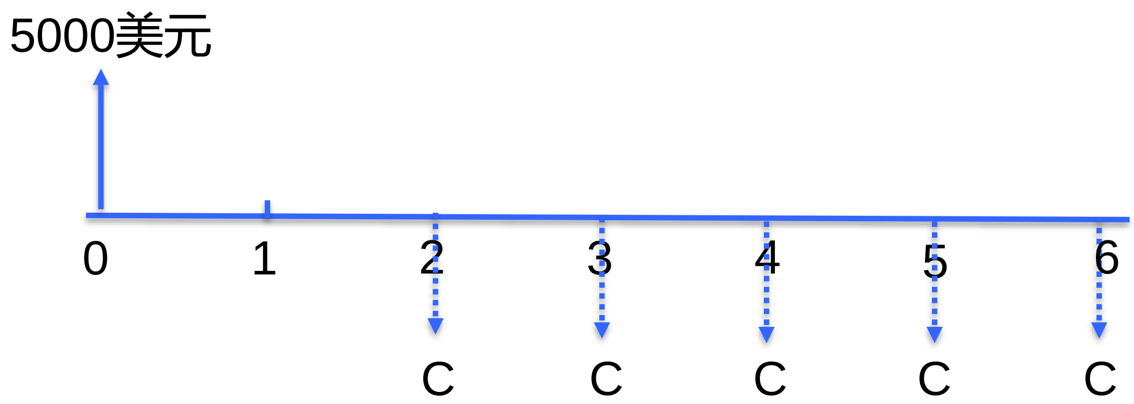
- 8. 假设你以每年12%利率借了28000美元。等值偿还需在4年内完成，并且每次还款都在年末，那么第2年支付的利息是多少?
  - （a）1800
  - （b）2251
  - （c）1089
  - （d）2657

- 9. 在8%的利率下，以下的两个现金流量等值。计算第二个现金流量系列中的X为多少。
  - (a) 1505
  - (b) 1726.56
  - (c) 1197
  - (d) 1192.24

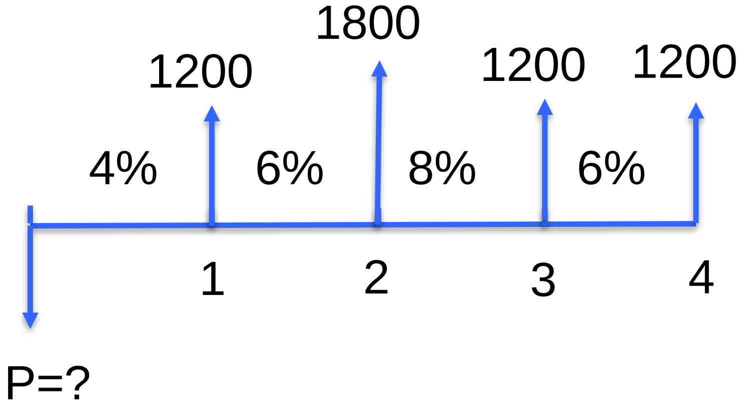


- 10. 如果年利率是7%，10年内分10次等额存款，希望在5年中分5次取款，其中第一次取款在第11年年末，金额为2000美元，随后的每年取款金额在上年基础上增加5%。那么每次的存款金额为多少?
  - （a）745
  - （b）652.6
  - （c）1000
  - （d）1563.7

- 11. 如果你在大三开学的时候借了5000美元学费，每年复利利率为10%。你需要在5年内分5次来等额偿还贷款，在你毕业时第一次偿还。计算每年支付额C为多少。
  - (a) 891.33
  - (b) 1082
  - (c) 1407.44
  - (d) 1222

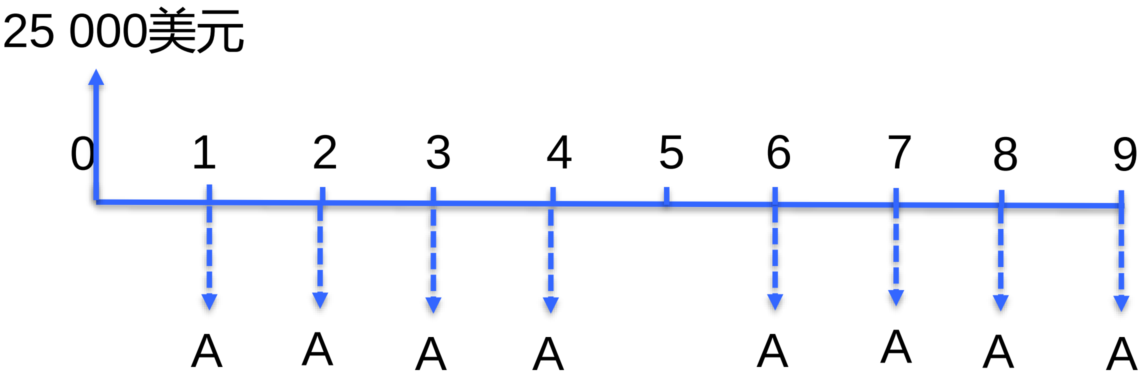


- 12. 计算在不同利率下相应现金流量系列现值为多少?
  - (a) 5068.248
  - (b) 4442
  - (c) 4745.136
  - (d) 3833



- 13. 年利率为多少时，现今投资的1200美元在12年后升值到2500美元?
  - （a）6.5%
  - （b）7.2%
  - （c）9.02%
  - （d）5.8%

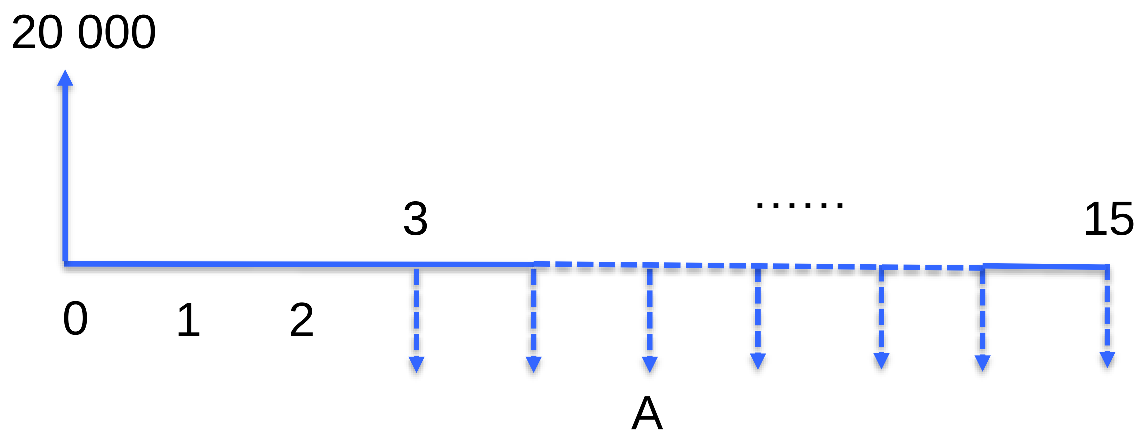
- 14. 如果你以每年6%的复利利率借了25 000美元，支付时间表如下图所示，那么A的值是多少?（注意第5年年末是没有还款的）
  - (a) 4129.22
  - (b) 4793
  - (c) 3193.33
  - (d) 3593



- 15. 假设你计划在15年内分15次进行存款，年利率为6%。如果你的第一次存款在第1年年末，且为1200美元，随后的每次存款都比上次增加400美元，那么在第15年年末的账户余额大概是多少?
  - （a）87 021.74
  - （b）92 242
  - （c）97 777
  - （d）83 104.63

- 16. 在每年6%的复利利率下，多长时间可以使投资翻三倍?
  - (a) 9.9年
  - (b) 12.23年
  - (c) 14.65年
  - (d) 18.85年

- 17. 如果你以每年8%的复利利率借了20 000美元，偿还时间表如下图所示，那么A为多少?
  - (a) 2951.49
  - (b) 3967
  - (c) 3101.79
  - (d) 2324



- 18. 在8%的年利率下，如果每年年初向储蓄账户内存入1500美元，存20年（总存款次数=20），那么20年末该账户的价值大概为多少?
  - （a）71 400.88
  - （b）74 936
  - （c）74 996
  - （d）74 144.44