

第一部分 资金及其管理

第3章 资金的管理

周光辉 教授

中国科学院大学经济与管理学院



如何管理你的信用卡

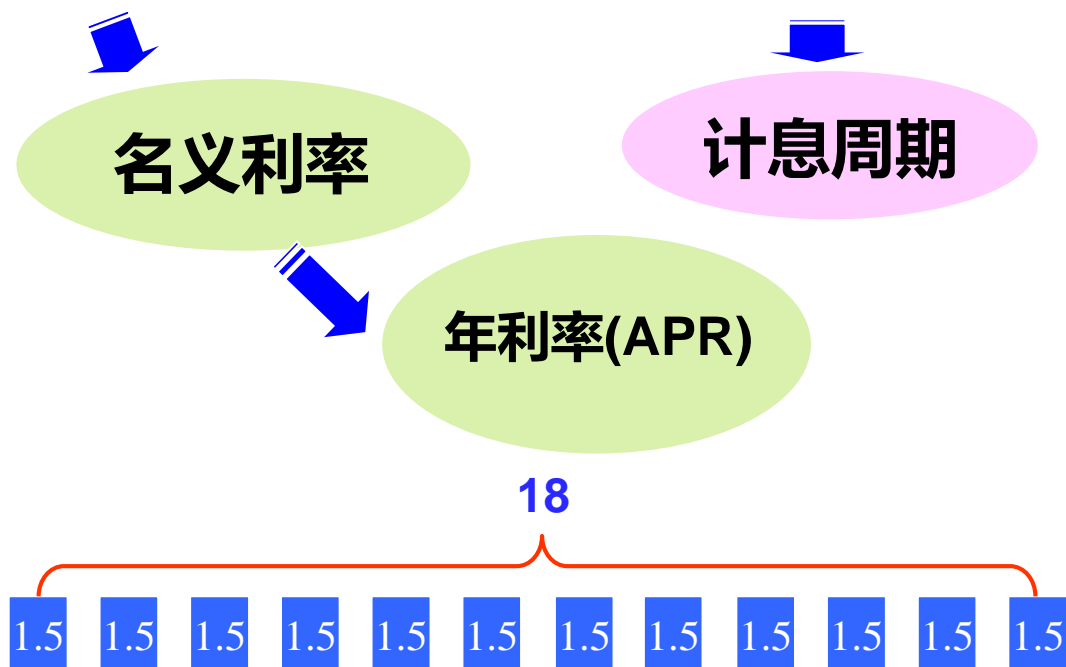
- 约翰和简各自的信用卡都有2000美元的债务，该信用卡规定每月至少需要偿还债务的3%，或者10美元：
 - 约翰每月支付最低的还款额，在长达15年的时间里合计支付了4240美元，支付的利息总计为2240美元，比最初的信用卡债务还高。
 - 简除了每月支付最低的还款额，还额外还款10美元，用了7年时间偿清，合计支付了3276美元，支付的利息总计1276美元。
- **本章将讨论资金管理的几个关键概念。**

3.1 市场利率

- 3.1.1 名义利率

- 一个在固定周期（通常为一年）的固定利率。

18%月复利计息



- 如：18%月复利计息。银行每个月将对尚未偿还的月收取1.5%的利息， $(12\text{月/年} \times 1.5\%/ \text{月} = 18\%/ \text{年})$ ，18%称为名义利率（nominal interest rate），或**年利率**（annual percentage rate, APR），按月复利计息（即每年12次）。
- 不足：
 - 尽管金融机构都普遍使用年利率，且被广大消费者所熟知，但是年利率无法准确解释这一年中产生的利息是多少。
 - 为了解释进行多次复利计息对一个年度内利息总量的真实影响，将介绍实际利率，通常称为实际年收益率，或者**年收益率**（annual percentage yield, APY）。

- 3.1.2 实际年收益率
- **实际年收益率 (annual effective yield) , 或者实际年利率 (annual effective interest rate)**, 是一种能够真实反映1年所获利息的比率。
 - 我们来进行一个逐年递增 (累计) 利率的计算——每月按1.5%的利率计息, 1年计息12次, 这个累计利率将给出债务人为尚未偿还的信用卡余款所支付的实际利息。
 - 如果信用卡债务为1000美元, 我们可以用终值公式来计算所支付的年度总利息。假设 $P = 1000$ 美元, $i = 1.5\%$, $M = 12$, 则:

$$F = P(1 + i)^M = 1000(1 + 0.015)^{12} = 1195.62 \text{ 美元}$$

- 事实上，银行的收益会高于你信用卡原始债务的18%，必须支付的利息是195.62美元，这就意味着要为1美元的债务支付的年度利息是19.56美分。就实际利率 i_a 而言，利率是指所支付的利息与本金的百分比：

$$i_a = 195.62/1000 = 0.19562 \text{ 或 } 19.562\%$$

- 也就是说，每月支付1.5%的利息，1年有12个月，就相当于每年一次支付19.56%的利息。

不同计息周期下的实际年利率

复利计息的频率					
名义利率%	每年%	每半年%	每季度%	每月%	每天%
4	4.00	4.04	4.06	4.07	4.08
5	5.00	5.06	5.09	5.12	5.13
6	6.00	6.09	6.14	6.17	6.18
7	7.00	7.12	7.19	7.23	7.25
8	8.00	8.16	8.24	8.30	8.33
9	9.00	9.20	9.31	9.38	9.42
10	10.00	10.25	10.38	10.47	10.52
11	11.00	11.30	11.46	11.57	11.62
12	12.00	12.36	12.55	12.68	12.74

- 在同样的名义利率下，复利计息越频繁，在一年内支付的利息就越多。假设名义利率是 r ，并且 M 为一年内复利计息的次数，那么实际年利率 i_a 可以按照如下公式计算求得。

$$i_a = \left(1 + \frac{r}{M}\right)^M - 1$$

- 如果 $M = 1$ ，该公式可简化为 $i_a = r$ 。也就是说如果一年只进行一次复利计息，那么实际利息等于名义利息。

思考

- 某银行信用卡：“日利率5‰，月复利计息”。
- 实际年利率是多少？
 - 按月复利，月利率： $5‰ * 30 = 1.5\%$
 - 实际年利率： $(1 + 1.5\%)^{12} - 1 = 19.562\%$



- **例 3.1 计算复利计息期数**

- 某地报纸的银行广告：“开户一个自由银行存单，并且当最低存款为500美元时，就能保证获得收益。这是一个按月管理资金的明智方法。”这里没有提出具体的复利计息频率，请计算每个存单的复利计息期数。

存款类型	年利率 (%)	年实际利率 (%)	开通账户的最低金额 \$
1年期存款	2.25	2.25	500
2年期存款	3.06	3.10	500
3年期存款	3.35	3.40	500
4年期存款	3.45	3.50	500
5-10年期存款	4.41	4.50	500

■ 分析

⊙ 已知：年利率 $r = 4.41\%$, $i_a = 4.50\%$ 。

⊙ 求： M 。

■ 求解

⊙ 试错法

$$0.0450 = \left(1 + \frac{0.0441}{M}\right)^M - 1$$
$$M=12$$

采用试错法得到 $M = 12$ ，按照月复利计息，5-10年的存单可以获得4.5%的利息。

⊙使用Excel表

3.2 基于支付周期的实际利率计算

• 3.2.1 间断复利

- 若现金流量是按季度产生的，而复利计息却是按月进行，此时一般会希望按季度计算实际利率。
- 每个支付周期的实际利率：

$$i = (1 + r/M)^C - 1 = (1 + r/CK)^C - 1$$

式中， M 为每年复利计息期数； C 为每个支付周期的复利计息期数； K 为每年的支付期数，其中 $M = CK$ 。

- **例 3.2 每个支付周期的实际利率**

- 假设你每个季度都会往一个储蓄账户中存钱，其按8%月复利计息。请计算每个季度的实际利率。

- **分析**

- ⊙ 已知：年利率 $r = 8\%$ ，每季度的复利计息期数 $C = 3$ ，每年的支付期数 $K = 4$ ，每年的复利计息期数 $M = 12$ 。
- ⊙ 求： i 。

■ 求解

- ⊙ 方法一：计算支付周期的实际利率

计算出每个季度的实际利率

$$i = (1 + 0.08/12)^3 - 1 = 2.0134\%$$

- ⊙ 方法二：使用Excel表来计算每个支付周期的实际利率

8% 按季度复利计息

支付周期= 按季度

计息周期= 按季度

1st 季度



1 个计息周期

$$K = 4$$

$$C = 1$$

$$M = 4$$

$$\begin{aligned} i &= [1 + r / CK]^C - 1 \\ &= [1 + 0.08 / (1)(4)]^1 - 1 \\ &= 2.000\% \text{ per quarter} \end{aligned}$$

8% 按月复利计息

支付周期= 按季

计息周期= 按月



$$K = 4$$

$$C = 3$$

$$M = 12$$

$$\begin{aligned} i &= [1 + r / CK]^C - 1 \\ &= [1 + 0.08 / (3)(4)]^3 - 1 \\ &= 2.013\% \text{ per quarter} \end{aligned}$$

- 3.2.2 连续复利计息

- 为了在金融市场具有竞争力，或为了吸引潜在的客户，有些金融机构采用更加频繁的复利计息方式。随着复利计息期数（ M ）的增大，每个复利计息周期的利率（ r/M ）就会减小。当 M 趋近于无穷大及 r/M 趋近于零时，我们就可以大致认为是连续复利的情况。
- 通过对 $CK \rightarrow \infty$ 求极限，得到每个支付周期的实际利率为：
$$i = \lim_{CK \rightarrow \infty} [(1 + r/CK)^C - 1] = \lim_{CK \rightarrow \infty} (1 + r/CK)^C - 1$$
$$= (e)^{r/K} - 1$$
- 为了计算连续复利计息的年实际利率，令 $K = 1$ ，则：

$$i_a = (e)^r - 1$$

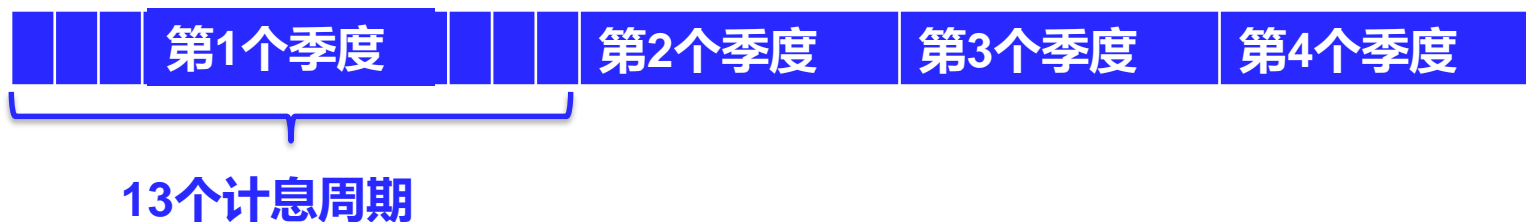
- **例 3.2 计算实际年利率**
 - 已知名义利率为8%，求按（a）每周；（b）每天；（c）连续进行复利计息的每季度实际利率。
 - 分析
 - ⊙ 已知：年利率 $r = 8$ ，每年支付期数 $K = 4$ 。
 - ⊙ 求：每个季度的实际利率 i 。

- 求解：改变计息周期长度，计算实际利率。

- ⊙ (a) 按周复利计息

根据 $r = 8\%$, $M = 52$, 每个季度的复利计息次数 $C = 52/4 = 13$, 可以得到

$$i = (1 + 0.08/52)^{13} - 1 = 2.0186\%(\text{每季度})$$



⊙ (b) 按日复利计息

根据 $r = 8\%$, $M = 365$, 每个季度的复利计息次数 $C = 365/4 = 91.25$, 可以得到

$$i = (1 + 0.08/365)^{91.25} - 1 = 2.0199\%(\text{每季度})$$

⊙ (c) 连续复利计息

根据 $r = 8\%$, $M \rightarrow \infty$, $K = 4$, 可以得到

$$i = e^{0.08/4} - 1 = 2.0201\%(\text{每季度})$$

8% 按周复利计息

计息周期= 按季度

利息周期= 按周



13 个计息周期

$$K = 4$$

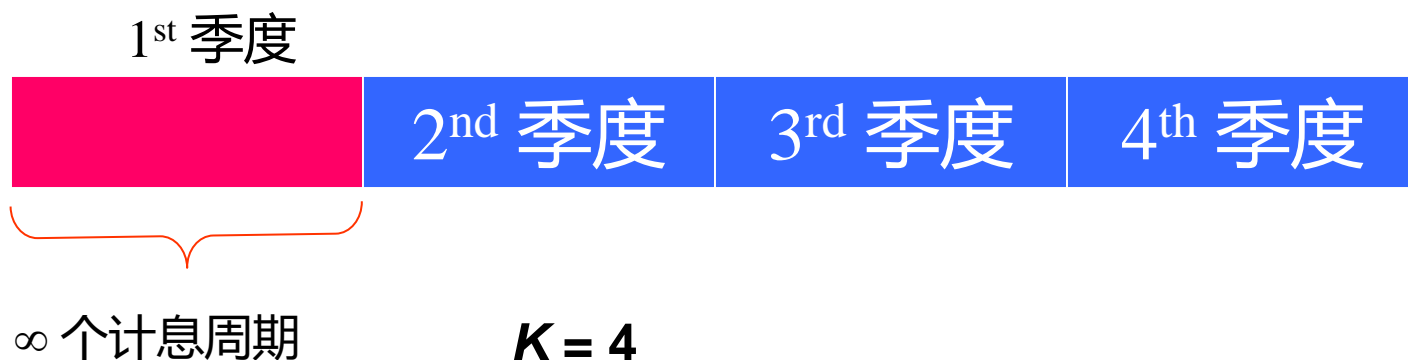
$$C = 13$$

$$M = 52$$

$$\begin{aligned} i &= [1 + r / CK]^C - 1 \\ &= [1 + 0.08 / (13)(4)]^{13} - 1 \\ &= 2.0186\% \text{ per quarter} \end{aligned}$$

8% 连续复利计息

支付周期= 按季度
计息周期=无限



$$\begin{aligned} i &= e^{r/K} - 1 \\ &= e^{0.02} - 1 \\ &= 2.0201\% \text{ per quarter} \end{aligned}$$

- 每个支付周期的实际利率

利率	8%按季度复利计息	8%按月复利计息	8%按周复利计息	8%按日复利计息	8%连续复利计息
支付周期	每季度支付	每季度支付	每季度支付	每季度支付	每季度支付
每个支付周期的实际利率	每季度 2.000%	每季度 2.013%	每季度 2.0186%	每季度 2.0199%	每季度 2.0201%

3.3 实际利率的等值计算

- 在等值计算时，我们需要识别出计息周期和支付周期。**如果复利计息的时间间隔不同于现金交易（或者支付）的时间间隔，就需要我们去求出整个支付周期的实际利率。**

- 3.3.1 复利计息周期等于支付周期
- 上一章中所有的案例都假设按年支付且按年复利计息。只要出现复利计息周期等于支付周期的情况 ($M=K$)，无论利息是按年复利计算还是按其他时间间隔计算，都可以采用如下的计算方法：

- 识别出每年复利计息（或支付）的周期数（ $M=K$ ）

- 计算每个支付周期的实际利率：

$$i = (1 + r/M)^C - 1 = r/M, \text{ 其中 } C=1$$

- 确定支付周期数

$$N = M * (\text{年数})$$

- 将 i 和 N 带入相应计算公式

- **例 3.4 车贷还款计算**

- 假设你打算买一辆汽车，你已经浏览了一些销售商刊登在报纸上的广告，下图广告引起了你的注意。

- ⊙ 85%的年利率！所有现货野马汽车都支持48或60个月的贷款。
- ⊙ 只做好交付汽车的所有准备！价格已低至21599美元起。
- ⊙ 您只需加上销售税金和1%的销售商运费，我们来支付汽车牌照，机动车等登记证书和行车证的费用。
- ⊙ 加4%的销售税=863.96美元
- ⊙ 加1%的销售商运费=215.99美元
- ⊙ 总售价=22678.95美元



- 你现在有能力首付2678.95美元，但你还需为此筹措20000美元的净资金。
 - ⊙ (a) 月供是多少
 - ⊙ (b) 如果在支付25次后，你希望一次性还清剩余的贷款，还需还多少钱？

■ 分析

- ⊙ 这个问题没有详细说明复利计息周期，而在汽车融资领域，利息计算以及支付周期基本上都是按月进行的。
- ⊙ (a) 已知： $P = 20000$ 美元，年利率 $r = 8.5\%$ ，年支付期数 $K = 12$ ， $N = 48$ ， $C = 1$ ，并且 $M = 12$ 。
- ⊙ 求： A 。
- ⊙ (b) 已知： $A = 492.97$ 美元， $i = 0.7083\%$ ， $N = 23$ 月。
- ⊙ 求： 经过25个月后的未偿清余额 (B_{25})。

■ 求解

- ⊙ (a) 在这种情况下，我们很容易用公式算出每月的还款额。
年利率8.5%意味着按每月8.5%月复利计息来计算。

$$i = (1 + \frac{0.085}{12})^{12} - 1 = 0.7083\%(\text{每月})$$

并且

$$N = 12 * 4 = 48(\text{月})$$

于是，可以得到

$$A = 20000(A/P, 0.7083\%, 48) = 492.97(\text{美元})$$

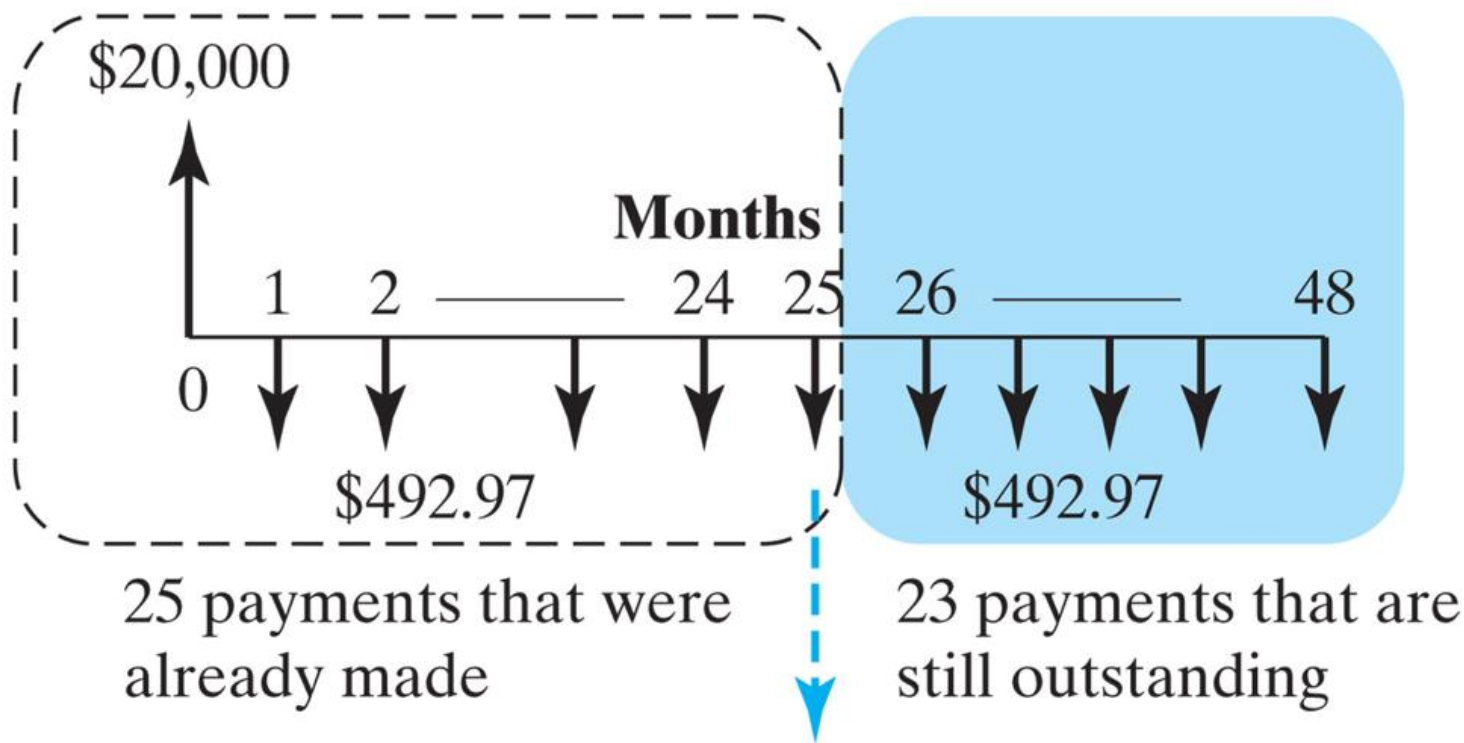


- ⊙ (b) 将时间标度平移25个月，在第25个月末对剩余的23次还款进行等值计算，我们就可以计算出你完成第25次还款后的欠款余额。

$$B_{25} = 492.97(P/A, 0.7083\%, 23) = 10428.96(\text{美元})$$

所以，如果你打算在第25次还款之后一次性付清欠款余额，你除了要支付每月的492.97美元之外，还必须还款10428.96美元。

假设你在第25次支付之后，想要一次性还清贷款余额。请问这笔贷款余额是多少？

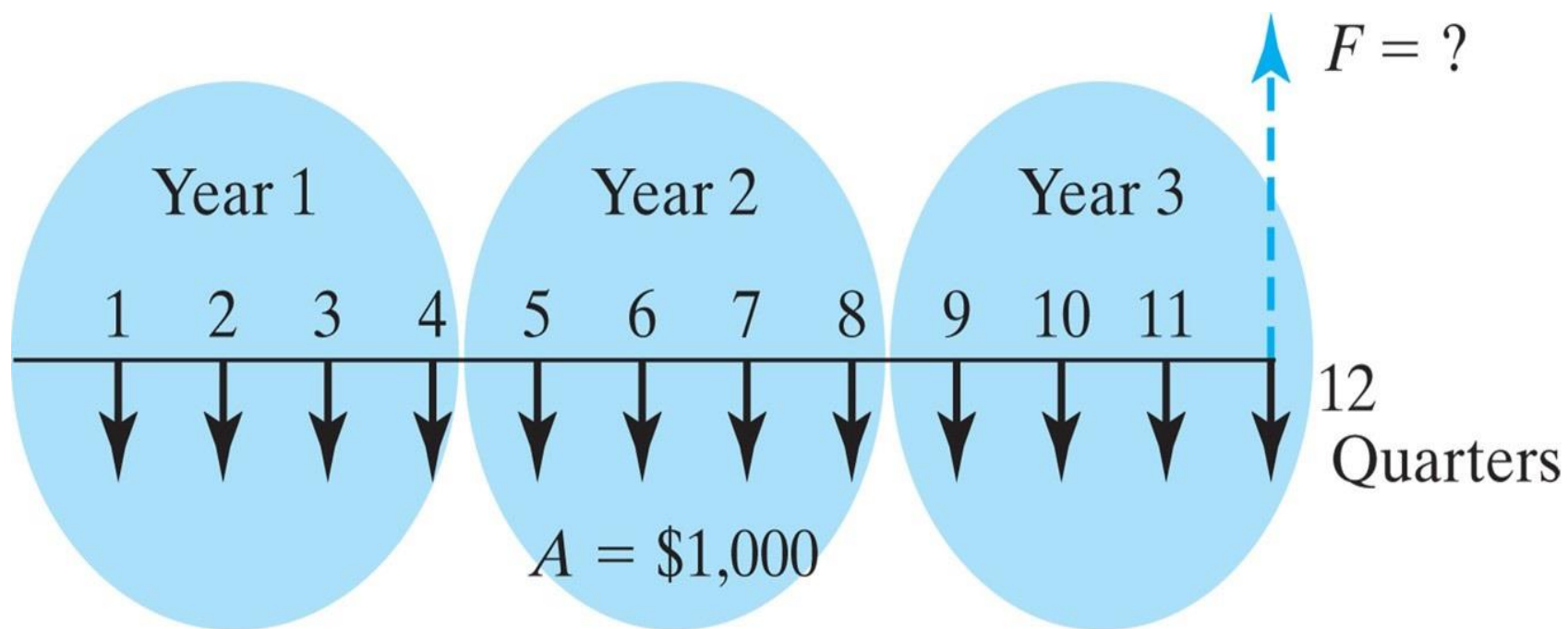


$$\begin{aligned} P &= \$492.97 (P/A, 0.7083\%, 23) \\ &= \$10,428.96. \end{aligned}$$

- 3.3.2 用不同于支付利率的利率进行复利计息
- 复利计息周期和支付周期不相同，复利计息的计算步骤如下：
 - 确定每年的复利计息期数 (M) ,每年的支付期数 (K) , 每个支付周期的复利计息期数 (C)
 - 计算每个支付周期的实际利率
 - ⊙ 对于离散复利计息, 计算 $i = (1 + r/M)^C - 1$
 - ⊙ 对于连续复利计息, 计算 $i = e^{r/K} - 1$
 - 求总的支付周期数: $N = K * (\text{年数})$
 - 将 i 和 N 带入到相应计算公式

例 3.5 复利计息次数高于支付次数

- 假设你每季度向一个基金等额存入1000美元，该基金以年利率12%进行月复利计息。求第3年年末的账户余额。
- 分析
 - ⊙ 已知：每季度 $A = 1000$ 美元，年利率 $r = 12\%$ ，每年复利计息期数 $M = 12$ ，3年的总季度数 $N = 12$ ，现金流量图如下图。
 - ⊙ 求： F 。



■ 求解

- ⊙ 方法 1：复利计息周期和支付周期不同，我们遵循前面所述的复利计息周期和支付周期不相同时的计算步骤来分析。

确定参数 M ， K ， C 的值，其中

- 每年的复利计息期数 $M = 12$
- 每年的支付期数 $K = 4$
- 每个支付周期的复利计息期数 $C = 3$

运用公式计算每个季度的实际利率

$$i = (1 + 0.12/12)^3 - 1 = 3.030\%$$

计算总的支付周期数 N ，其中

$$N = K * (\text{年数}) = 4 * 3 = 12 \text{ (季度)}$$

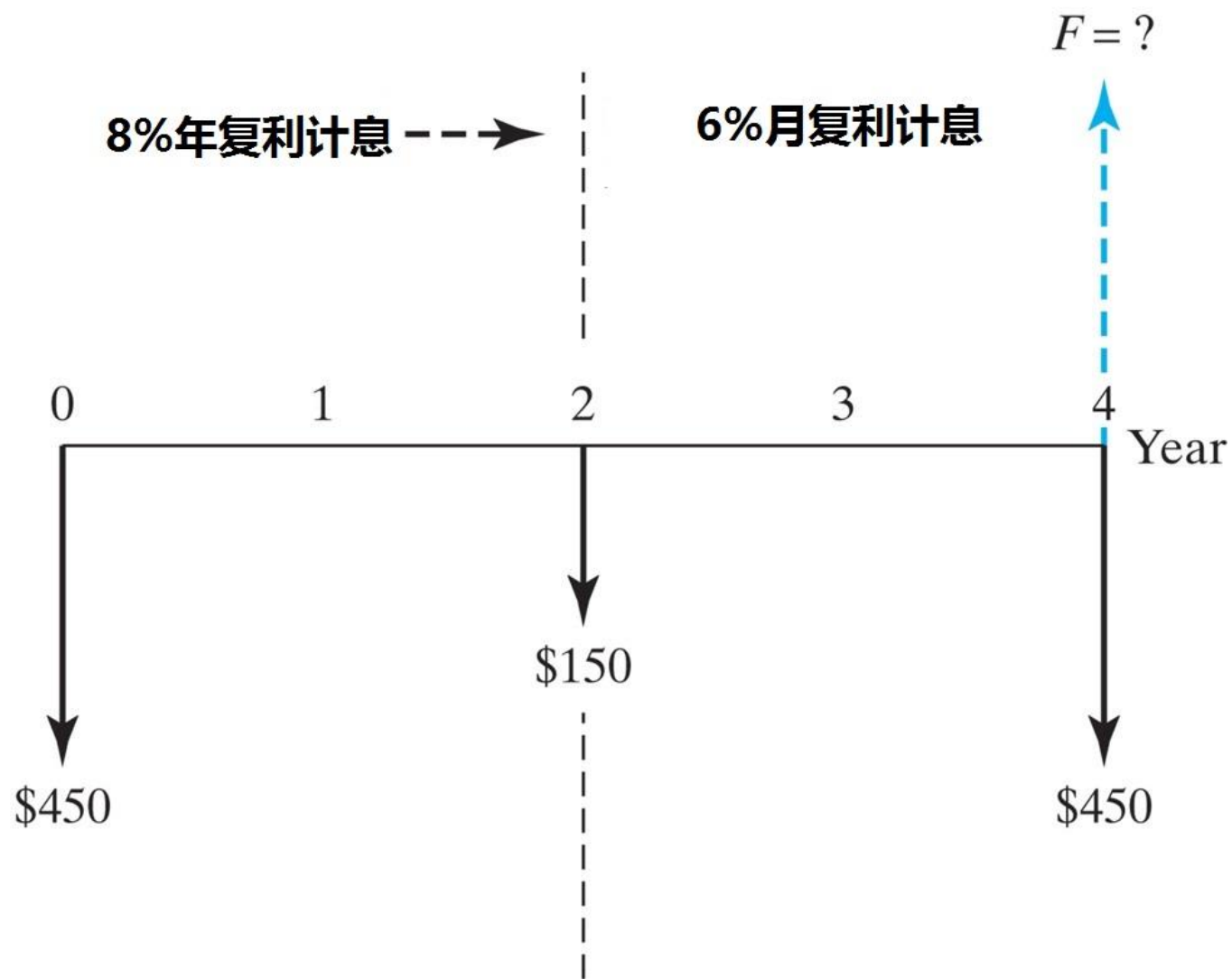
将 i 和 N 带入到对应的等值计算公式

$$F = 1000(F/A, 3.030\%, 12) = 14216.24 \text{ (美元)}$$

⊙方法 2：使用Excel表格。

例 3.6 变利率等值计算

- 如图所示，具有不同利率的现金流量终值（ F ），在这4年中，现金流量都发生在每年年末。
- 分析
 - ⊙ 已知： $r_1 = 8\%$ ，年复利计息； $r_2 = 6\%$ ，月复利计息。 $N = 4$ 年，支付周期为1年。
 - ⊙ 求： F 。



■ 求解

⊙ 根据不同的名义利率计算支付周期的实际利率。然后计算每个存款周期期末的资金余额。

⊙ (a) 0~2年:

由 $r_1 = 8\%$, $M = 1$, $C = 1$, 我们可以得到:

$$i = i_a = (1 + 0.08/1)^1 - 1 = 8\%(\text{每年})$$

第2年年末的资金余额是:

$$B_2 = 450(F/P, 8\%, 2) + 150 = 674.88(\text{美元})$$

⊙ (b) 2~4年:

由 $r_2 = 6\%$, $M = 12$, $C = 12$, B_2 , 我们可以得到:

$$i = i_a = (1 + 0.06/12)^{12} - 1 = 6.168\%(\text{每年})$$

第4年年末的资金余额是:

$$F = B_4 = 674.88(F/P, 6.168\%, 2) + 450 = 1210.70(\text{美元})$$

研讨

- 举例说明对资金的管理。

课内作业

1. 你每月往一个基金账户中存1000美元，按6%月复利计息。在第10年年末，账户中的余额是多少？

- (a) 163 879美元
- (b) 158 169美元
- (c) 127 200美元
- (d) 159 423美元

- 2. 有两个银行对存款提供如下的利率： 银行A按8%季度复利计息； 银行B按7.9%连续复利计息。

下面哪一个表述是不正确的？

- (a) 银行A的年利率（APY）是8.24%
- (b) 银行B的实际年利率是8.22%
- (c) 银行B提供的待遇更好
- (d) 银行B的年利率（APY）是7.9%

- 3. 你每半年往一个基金存款，按8%连续复利计息。
下面哪个选项是实际半年利率？
 - (a) 4.000%
 - (b) 4.081%
 - (c) 4.164%
 - (d) 4.175%

- 4. 在20年中每年向存款账户中存入4000美元，按8%月复利计息。假设所有存款都发生在每年的年初，那么终值是多少？
 - (a) 196 010美元
 - (b) 188 196美元
 - (c) 190162美元
 - (d) 199 279美元

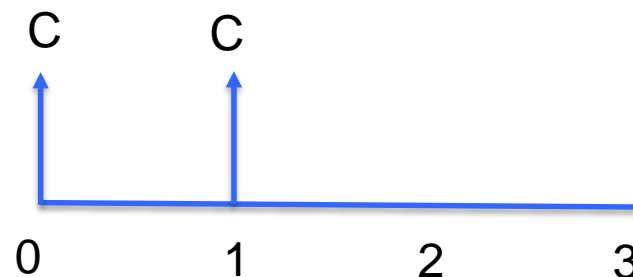
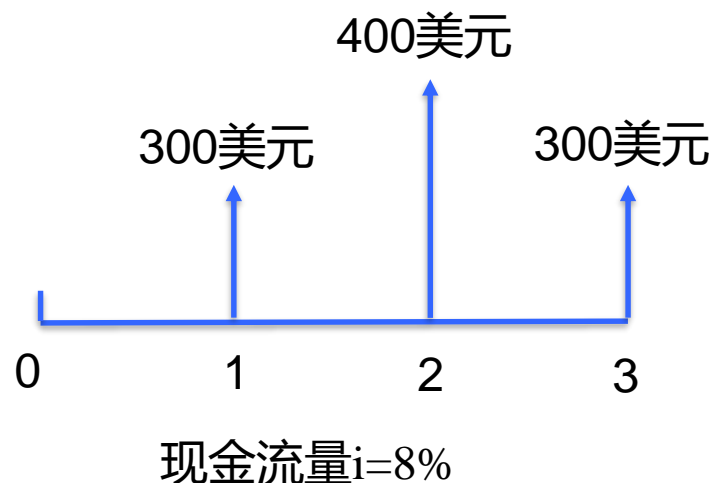
- 5. 你向银行贷款15000美元，按15%月复利计息，在3年中，每月分期偿还。求在15次还款额中的利息是多少？
 - (a) 150美元
 - (b) 188.34美元
 - (c) 180美元
 - (d) 124.34美元

- 6. 你向银行贷款25000美元，按12%月复利计息。该贷款将在4年内的48个月中，每月等额偿还。在你还清第20次款后，如果你想一次性偿清所欠余款，应偿还的金额接近于：
 - (a) 15723.65美元
 - (b) 15447美元
 - (c) 15239美元
 - (d) 16017.65美元

- 7. 你借了120000美元，并同意以9%的年利率，分12年等额偿还。计算出在第5次还款后所欠的余额为：
 - (a) 84373.21美元
 - (b) 68894美元
 - (c) 59503美元
 - (d) 49360.21美元

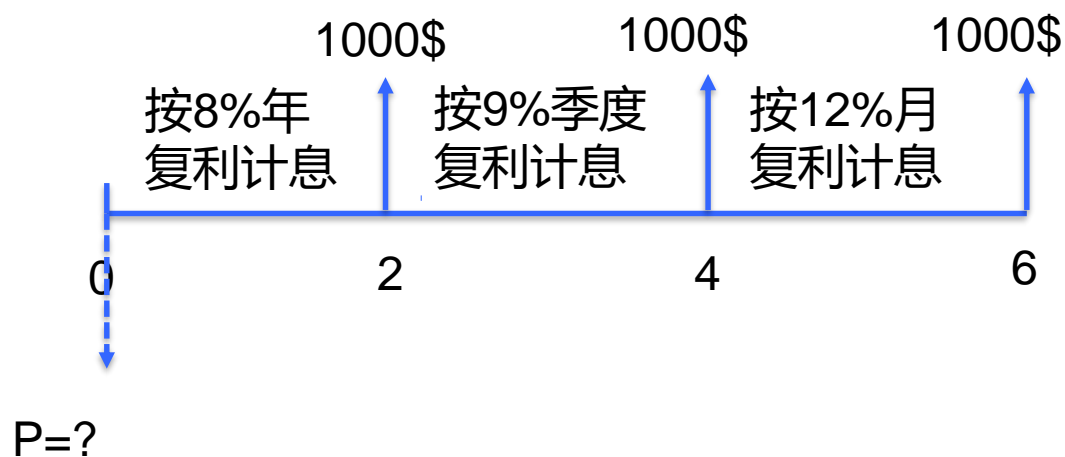
- 8. 思考下列两个现金流量交易。如果这两个交易在8%的年利率下等值，请计算C的值。

- (a) 325美元
- (b) 282美元
- (c) 455.94美元
- (d) 277.94美元



- 9. 计算在不同计息周期，不同利率下现金流量的现值。寿命期为6年，现金流量图如图：

- (a) 2140美元
- (b) 2154美元
- (c) 2234美元
- (d) 2249美元



- 10. 假如你购买了某公司的10年期债券，票面价值为1000美元，票面利率为9%（6个月利息为45美元），每半年支付一次利息。在购买该债券5年后，新债券利率降至6%（或6%的半年复利计息利率）。该债券的市场现值（P）是多少？（购买该债券的5年后）
 - (a) 890.94美元
 - (b) 1223美元
 - (c) 1090美元
 - (d) 1127.95美元

- 11. 你的公司借款180 000美元，承诺按8%月复利计息，在18个月内等额偿还借款。计算在第12次还款后剩余的未偿还借款余额。
 - (a) 81816美元
 - (b) 90751美元
 - (c) 96876美元
 - (d) 95928美元

- 12. 你正在考虑是购买还是租赁一辆汽车，搜集到如下数据：

	购买（美元）	租赁（美元）
汽车价格	22 000	22 000
期初首付	2 000	0
第3年末的汽车价值（未知）	S	
36个月的分期付款	608（每月末）	420（每月初）
文件处理费（一次性，不再发生且不退还）		400（租赁开始时支付）

- 如果按6%月复利计息，汽车的价值为多少时，在第3年年末（S）两个方案经济等值。
 - (a) 7711美元
 - (b) 8980美元
 - (c) 9228美元
 - (d) 9310美元