Algorithm HW8

第一题：二元可满足性问题（2-SAT）是指：给定一个由若干子句组成的合取范式公式，其中**每个子句至多包含两个文字**（变量或其否定），判断是否存在一种对布尔变量的赋值，使整个公式为真。

将每个子句 $(a \vee b)$ 转换为蕴含形式：

$$(a \vee b) \equiv (\neg a \Rightarrow b) \ \wedge \ (\neg b \Rightarrow a)$$

由此可构造一个**蕴含图**：顶点是所有文字（$x, \neg x$）；边表示蕴含关系。

关键判定条件是：对任意变量 x，若在蕴含图中 x 与 $\neg x$ **处于同一个强连通分量**，则公式不可满足；否则可满足。

强连通分量可用 **Kosaraju 算法或 Tarjan 算法** 在线性时间内求出。

整个算法时间复杂度为：$O(|V| + |E|)$，即关于变量数和子句数的**多项式时间**。

最终结论：二元可满足性问题（2-SAT）可以在多项式时间内判定，因此 2-SAT 是 P 类问题。

第三题：给定一个候选解 $x \in 0, 1^n$，可以在多项式时间内计算 Ax，并检查是否满足 $Ax \leq b$。因此该问题属于 NP。

从 **SAT 问题** 出发构造归约。设有一个 CNF 公式：

$$\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$$

其中每个子句 C_i 是若干文字的“或”。对每个布尔变量 x_j，引入一个 0/1 变量：

$$x_j = 1 \Leftrightarrow \text{变量 } x_j \text{ 取真}$$

对每个子句 C_i，构造一行不等式：

- 若子句中出现正文字 x_j，则该项贡献 x_j
- 若出现负文字 $\neg x_j$，则贡献 $1 - x_j$

设子句 C_i 含有文字集合 L_i，则约束为：

$$\sum_{\ell \in L_i} \begin{cases} x_j, & \ell = x_j, \\ (1-x_j), & \ell = \neg x_j \end{cases} \geq 1$$

将其改写为标准形式 $Ax \leq b$（移项即可），于是得到一个 0/1 整数规划实例。

第五题：给定无向图 $G=(V,E)$ 和整数 $k \leq |V|$，判断是否存在顶点子集 $V' \subseteq V$，$|V'|=k$，使得 V' 中任意两点在 G 中不相邻（即 V' 是独立集）。

（1）独立集问题属于 NP

给定候选解 V'，可在多项式时间内检查：

- $|V'|=k$;
- 对任意 $u,v \in V'$，$(u,v) \notin E$。

  因此该问题属于 NP。

（2）NP-困难性（由团问题多项式归约）

团（Clique）问题：给定无向图 $G=(V,E)$ 和整数 k，判断是否存在大小为 k 的团。

构造 **补图** $\overline{G}=(V,\overline{E})$，其中

$$\overline{E} = (u,v) \mid u \neq v,\ (u,v) \notin E.$$

关键等价性：

- 若 V' 是 G 的一个大小为 k 的团，则任意两点在 G 中相邻，因而在 $\overline{G}$ 中不相邻，故 V' 是 $\overline{G}$ 的大小为 k 的独立集；
- 反之，若 V' 是 $\overline{G}$ 的大小为 k 的独立集，则在 G 中任意两点相邻，故 V' 是 G 的大小为 k 的团。

补图构造与验证均为多项式时间，故这是多项式时间归约。

第七题：给定物品集合，每个物品 i 有重量 w_i 与价值 v_i，背包容量为 W，选择 $x_i \in 0,1$ 使

$$\sum_i w_i x_i \leq W$$

且最大化

$$\sum_i v_i x_i.$$

为证明其 **NP 困难性**，从 **SUBSET SUM（子集和）问题** 进行多项式时间归约。

SUBSET SUM 问题：

给定正整数集合 $a_1, ..., a_n$ 和目标值 B，判断是否存在子集使

$$\sum_i a_i x_i = B, \quad x_i \in 0, 1.$$

构造 0/1 背包实例：

- 对每个元素 a_i，构造一个物品；
- 设重量 $w_i = a_i$，价值 $v_i = a_i$；
- 背包容量 $W = B$。

则有：

$$\sum_i w_i x_i \leq B \quad \text{且} \quad \sum_i v_i x_i \geq B$$

当且仅当

$$\sum_i a_i x_i = B.$$

因此：

- 若 SUBSET SUM 有解，则该背包实例的最优值至少为 B；
- 若背包实例最优值达到 B，则存在满足子集和为 B 的解。

该构造显然为多项式时间完成。由于 SUBSET SUM 是 NP 完全问题，其多项式归约到 0/1 背包问题，说明 0/1 背包问题至少与其一样难。