Տնային աշխատանք 2
Լուսինե Զիլֆիմյան, 2020.12.14

Ենթահաջորդականություն: Մասնակի Սահման

1 Ա բաժին

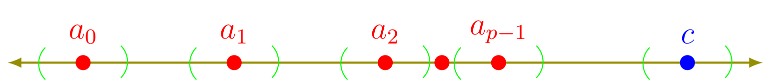
1.1 Խնդիր № 287.1 բ)

Դիցուք $p \in \mathbb{N}$ և $\lim\limits_{n\to\infty} x_{pn+k} = a_k,\ \ k = 0; 1; ...; p-1$: Ապացուցել, որ x_n հաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը $\{a_0; a_1; ...; a_{p-1}\}$-ն է:

Ապացույց. ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Առանց ընդհանրության խախտման դիցուք.

$$a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{p-1}$$

Դիցուք գոյություն ունի այնպիսի c թիվ, որը չի պատկանում վերոնշյալ բազմությանը, բայց նշված հաջորդականության համար հանդիսանում է մասնակի սահման: Դիտարկենք յուրաքանչյուր մասնակի սահմանի համար չհատվող շրջակայքեր (ընդամենը p հատ՝առանց c-ի շրջակայքի).



Դիտարկենք $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ շրջակայքը, այստեղ կան x_{pn}-ից անվերջ թվով անդամներ, իսկ շրջակայքից դուրս առավելագույնը վերջավոր թվով անդամներ: Նմանատիպ դատողություն կարելի է անել $a_1, ..., a_{p-1}$ մասնակի սահմանների շրջակայքերի մասին: Այս շրջակայքերի միավորումից դուրս գտվում են առավելագույնը վերջավոր հատ անդամներ նշված հաջորդականությունից, այդ թվում նաև c-ի շրջակայքում, համաձայն Թեորեմ 2-ի (կամ մասնակի սահմանի սահմանման) c կետը չի կարող լինել x_n հաջորդականության մասնակի սահման: $\square$

Գտնել $\inf x_n$-ը, $\sup x_n$-ը, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$-ը և $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ -ը (288; 290; 291; 295)

1.2 Խնդիր № 288

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

Հաջորդականությունը տրոհենք հետևյալ 2 ենթահաջորդականությունների.

$$x_{2k} = -\left(2 + \frac{3}{2k}\right),\ x_{2k-1} = 2 + \frac{3}{2k-1},$$

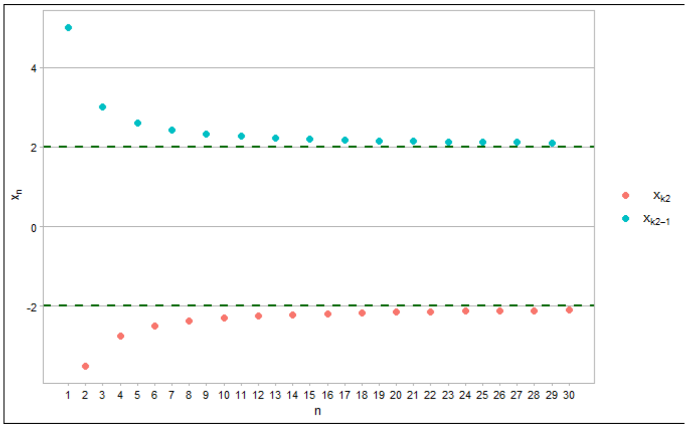
$$x_{2k} \nearrow -2;\ x_{2k-1} \searrow 2; (as\ \frac{3}{n} \searrow 0)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = -2;$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 2;$$

Քանի որ մոնոտոն աճել (նվազելով) է ձգտում սահմանին, ներքևից (վերևից) սահմանափակ է իր առաջին անդամով.

$$x_1 = \sup x_n = 5, \; x_2 = \inf x_n = -\frac{7}{2}.$$



1.3 Խնդիր № 290

$$x_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\frac{\pi n}{4};$$

Դիտարկենք հետևյալ ենթահաջորդականությունները.

$$x_{4k-3} = \frac{4k-3}{4k-2}\sin^2\frac{-3\pi}{4} = \frac{4k-3}{4k-2}\cdot\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{2}$$

$$x_{4k-2} = \frac{4k-2}{4k-1}\sin^2\frac{\pi}{2} = \frac{4k-2}{4k-1}\cdot 1 \nearrow 1$$

$$x_{4k-1} = \frac{4k-1}{4k}\sin^2\frac{-\pi}{4} = \frac{4k-1}{4k}\cdot\frac{1}{2} \nearrow \frac{1}{2}$$

$$x_{4k} = \frac{4k}{4k+1}\sin^2\frac{4k\pi}{4} = \frac{4k}{4k+1}\cdot 0 \to 0$$

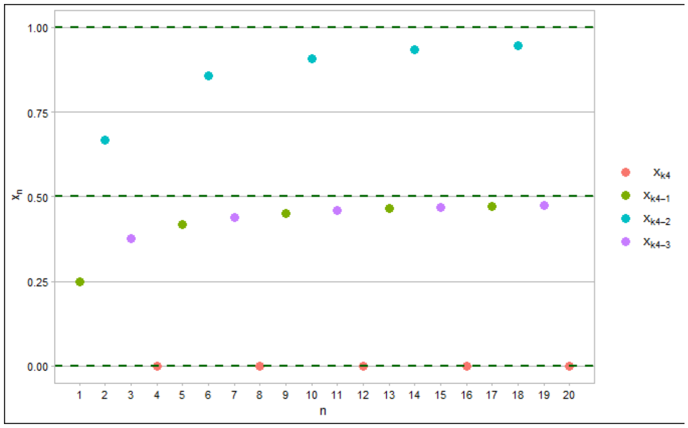
Հետևաբար.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k} = 0;$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k-2} = 1;$$

Եվ $0 = x_{4k} < x_{4k-1} < x_{4k-3} < x_{xk-2} \leq 1;$

$$\sup x_n = 1, \; \inf x_n = 0.$$



1.4 Խնդիր № 291

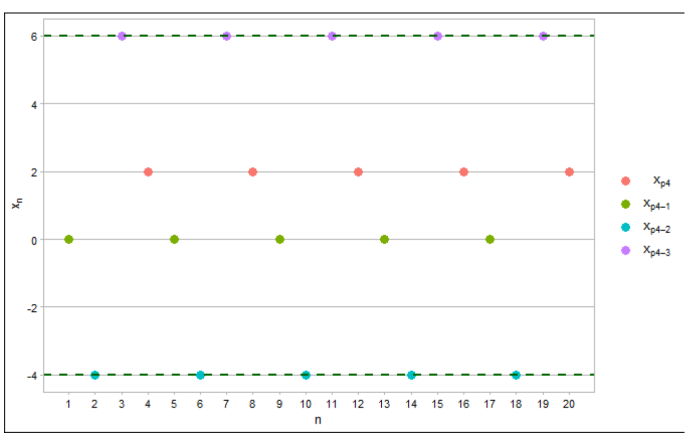
$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Դիտարկենք հետևյալ ենթահաջորդականությունները.

$$x_{2k} = x_{2(2p)} = x_{4p} = 1 - 2 + 3 = 2$$
$$x_{2k} = x_{2(2p-1)} = x_{4p-2} = 1 - 2 - 3 = -4$$
$$x_{2k-1} = x_{2(2p)-1} = x_{4p-1} = 1 + 2 - 3 = 0$$
$$x_{2k-1} = x_{2(2p-1)-1} = x_{4p-3} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4p-2} = -4;$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k-3} = 6;$$

$$\sup x_n = \sup\{x_n\} = \sup\{2, -4, 0, 6\} = 6;$$
$$\inf x_n = \inf\{x_n\} = \inf\{2, -4, 0, 6\} = -4.$$



1.5 Խնդիր № 295

$$x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$$

Դիտարկենք հետևյալ ենթահաջորդականությունները.

$$x_{2k-1} = \sqrt[2k-1]{1 + 2^{-(2k-1)}} \to 1$$

$$x_{2k} = \sqrt[2k]{1 + 2^{2k}} = e^{\ln \sqrt[2k]{1+2^{2k}}} = e^{\frac{\ln(1+2^{2k})}{2k}}$$

$2k$-ն մոնոտոն աճող հաջորդականություն է, կիրառենք Շտոլցի թեորմը.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+2^{2k})}{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \frac{1+2^{2k}}{1+2^{2k-2}}}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln \frac{1/2^{2k-1}+4}{1/2^{2k-2}+1}}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 2$$

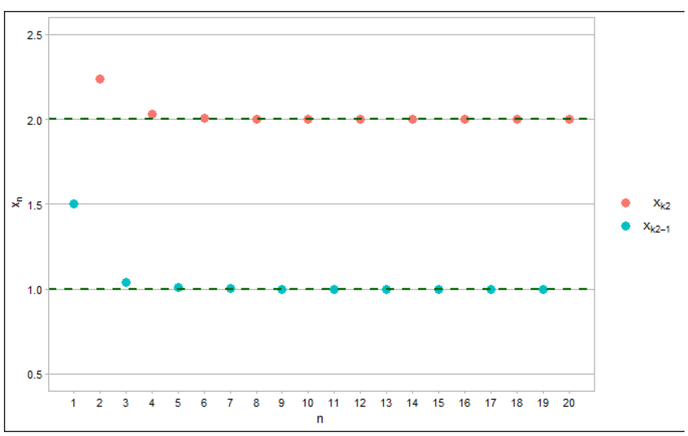
$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1;$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 2;$$

$$x_n: \ \frac{3}{2} = 1.5, \ \sqrt{5} \approx 2.24, \ \sqrt[3]{\frac{9}{8}} \approx 1.04, \ \sqrt[4]{17} \approx 2.03, \ldots$$

$$x_{2k} \searrow 2; \ x_{2k-1} \searrow 1;$$

$$x_2 = \sup x_n = \sqrt{5}; \ \varliminf_{n\to\infty} x_n = \inf x_n = 1.$$



1.6 Խնդիր № 297 գ) $\ddot{\frown}$

Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$: Ապացուցել, որ եթե x_n և y_n հաջորդականությունները դրական են, ապա կամ այդ հաջորդականություններից գոնե մեկը ձգտում է զրոյի, կամ $\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} y_n = 0$:

Գտնել հաջորդականության մասնակի սահմանները:

1.7 Խնդիր № 300

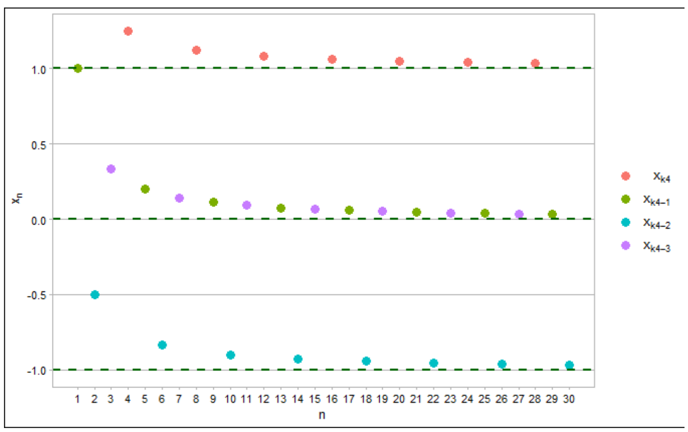
$$x_n = \cos\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}$$

Դիտարկենք հետևյալ ենթահաջորդականությունները.

$$x_{4k-3} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k-3} \to 0$$
$$x_{4k-2} = \cos\left(-\frac{2\pi n}{2}\right) + \frac{1}{4k-2} \to -1$$
$$x_{4k-1} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4k-1} \to 0$$
$$x_{4k} = \cos 2k\pi + \frac{1}{4k} \to 1$$

Համաձայն վարժություն 287.1 գ-ի՝ մասնակի սահմանների բազմությունը հետևյալն է.

$$\{-1, 0, 1\}$$



2 Բ բաժին

2.1 Խնդիր № 357

Ապացուցել, որ

$$\inf x_n \overset{1)}{\leq} \varliminf_{n\to\infty} x_n \overset{2)}{\leq} \varlimsup_{n\to\infty} x_n \overset{3)}{\leq} \sup x_n :$$

Բերել օրինակներ, որ անհավասարության պարբեր (?) մասերում լինի ա) հավասարություն, բ) խիստ անհավասարություն:

Դեպք 1)

x_n -ը սահմանափակ չէ ո՛չ վերևից, ո՛չ ներքևից, այդ դեպքում

$$\inf x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup x_n = +\infty :$$

Անհավասարությունները տեղի ունեն:

Դեպք 2)

x_n -ը սահամանփակ է. $\inf x_n \le x_n \le \sup x_n$, $\inf x_n, \sup x_n$ վերջավոր են:
Կատարենք հետյալ նշանակումները.

$$y_n \triangleq \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}(\searrow);\ z_n \triangleq \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}(\nearrow);$$

Ըստ y_n-ի z_n-ի սահմանման.

$$z_n \le x_n \le y_n$$

Ըստ մոնոտոն հաջորդականության զուգամիտության մասին թեորեմի՝ z_n և y_n զուգամետ են:
1) և 3)

$$\inf x_n = \inf\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...\} \le \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\} = z_n$$

$$\sup x_n = \sup\{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...\} \ge \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\} = y_n$$

Ընտ զուգամետ հաջորդականությունների 2-րդ հատկության.

$$\lim_{n\to\infty} z_n \ge inf x_n$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n \le sup x_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n \ge inf x_n$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \le sup x_n$$

2) Ըստ անհավարարություններում սահմանային անցման 1-ին թեորեմի՝

$$\lim_{n\to\infty} z_n \le \lim_{n\to\infty} y_n \iff$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n \le \lim_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \iff$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n.\square$$

ա) Բոլոր տեղերում հավասարության համար կարելի է դիտարկել հաստատուն հաջորդականություն:
Տարբեր մասերում. $x_n = (-1)^n$.

$$-1 = -1 < 1 = 1$$

Կամ տես վարժ 295.
բ) Տես վարժ 288.

2.2 Խնդիր № 359

Ապացուցել, որ եթե x_n և y_n հաջորդականություններից որևէ մեկը սահմանափակ է, ապա

ա)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \overset{1)}{\le} \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \overset{2)}{\le} \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n :$$

1)

$$z_n \triangleq \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}(\nearrow);\ t_n \triangleq \inf\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}(\nearrow);$$

$$\inf\{x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}, x_{n+2}+y_{n+2}, ...\} \ge z_n + t_n$$

Անցնենք սահմանի.

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n :$$

2) Վարժ. 39-ից գիտենք, որ բազմությունների համար ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը. $\sup A = -\inf(-A)$: Հետևաբար.

$$\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = -\inf\{-x_n, -x_{n+1}, -x_{n+2}, ...\} \iff$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = -\lim_{n\to\infty}\inf\{-x_n, -x_{n+1}, -x_{n+2}, ...\} = -\varliminf_{n\to\infty}(-x_n)$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \overset{1)\text{-ից}}{\le} \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n-y_n) = \varliminf_{n\to\infty} x_n \iff$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

բ)

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \overset{1)}{\le} \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \overset{2)}{\le} \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n :$$

1)

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) - \varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) + \varlimsup_{n\to\infty}(-x_n) \overset{\text{Տես } 2)}{\ge} \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n-x_n) = \varlimsup_{n\to\infty} y_n \iff$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \ge \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$$

2) Կապարենք հետյալ նշանակումները.

$$k_n \triangleq \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}(\searrow);\ l_n \triangleq \sup\{y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ...\}(\searrow);$$

$$\sup\{x_n+y_n, x_{n+1}+y_{n+1}, x_{n+2}+y_{n+2}, ...\} \le k_n + l_n$$

Անցնենք սահմանի.

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n :$$

Բերել հաջորդականությունների օրինակներ, որ անհավասարությունների բոլոր մասերում լինեն խիստ անհավասարություններ:

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2 \frac{n\pi}{2};$$
$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2 \frac{n\pi}{2};$$

$$x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -1; \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1; \varliminf_{n\to\infty} y_n = -1; \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 1$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -1; \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 1$$

3 Գ բաժին

3.1 Խնդիր № 408

Ապացուցել, որ

ա)

ցանկացած հաաջորդականության մասնակի սահմանների բազմությունը փակ է;

Ապացույց. a-ն x_n հաջորդականության մասնակի սահման է, եթե a-ի կամայական շրջակայքում կա x_n-ից անվերջ թվով անդամներ: Դիտարկենք x_n-ի բոլոր անդամները պարունակող բազմություն: Այդ բազմության համար a-ն հանդիսանում է կուտակման կետ: Ըստ նախորդ դասախոսություններից ապացուցված թեորեմի՝ կամայական բազմության համար նրա կուտակման կետերի բազմությունը փակ բազմություն է:□

բ)⁀̈

ցանկացած A փակ և սահմանափակ բազմության համար գոյություն ունի հաջորդականություն, որի մասնակի սահմանների բազմությունը A-ն է:

3.2 Խնդիր № 409

Կառուցել հաջորդականություն,

ա)

որը չունի վերջավոր մասնակի սահման;

1. $x_n = n$; Ունի մեկ մասնակի սահման՝ $+\infty$;
2. $x_n = n(-1)^n$; Ունի երկու մասնակի սահման՝ $+\infty$ և $-\infty$;

բ)

որը ունի միակ վերջավոր մասնակի սահմանը, բայց զուգամետ չէ;

1. $x_n = \begin{cases} n, & \text{եթե } n \text{ զույգ է,} \\ 2, & \text{եթե } n \text{ կենտ է;} \end{cases}$

2. $x_n = n^{(-1)^n};$ Ունի երկու մասնակի սահման՝ $+\infty$ և 0;

գ)

որը ունի անվերջ թվով մասնակի սահմաններ;

$x_n : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ...;$ Մասնակի սահմանների բազմությունն է $\{1, 2, 3, ...\}$

դ)

որի համար յուրաքանչյուր իրական թիվ հանդիսանում է մասնակի սահման:

Բոլոր ռացիոնալ թվերը պարունակող հաջորդականությունը.

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, ..., \pm\frac{1}{n}, \pm\frac{2}{n}, ..., \pm\frac{n-1}{n}, \pm\frac{n}{n-1}, ..., \pm\frac{n}{2}, \pm\frac{n}{1}, ...$$

.