



SDM283 Mini Project

A Vibrating Ride

SDIM Group8

Members:

苗子良 周晋徽

刘洪磊 林卓垠

Task1: Modeling

1. 变量名称解释与参数值测量:

Units: meter, second, kilogram

1. Vehicle Variables & Parameter Values

t % 小车运动的时刻

$v = 1.6\pi \text{ m/s}$ % 小车近似的平动速度, 将 Adams 中小车轮子的转速近似到水平方向

$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ % 重力加速度

$m = 1964.110288522$ % 小车总质量 (除去 Adams 中的 beam 及 beam holder)

Adams 中小车质心坐标 (除去 beam 及 beam holder) : (0, 0.4799051531, 0)

Adams 中左后轮轮毂中心坐标: (-1.1921446343, 0.4090892672, 0.8906648264)

Adams 中左前轮轮毂中心坐标: (-1.1948454679, 0.4073302891, -1.0928608775)

$J = 3263.8860842253 \text{ kg/m}^2$ % 小车绕质心的转动惯量(Adams Aggregate Mass 的 Ixx 项)

$L_b = 0.8906648264$ % 小车质心到后轮的距离 (z 坐标之差)

$L_f = 1.0928608775$ % 小车质心到前轮的距离 (z 坐标之差)

y_c % 小车质心在世界坐标系下的 y 坐标, y_c 原点的定义为小车初始受力平衡位置

\dot{y}_c % 小车质心在世界坐标系 y 方向的速度

\ddot{y}_c % 小车质心在世界坐标系 y 方向的加速度

θ % 小车车身相对水平方向逆时针旋转的角度

$\dot{\theta}$ % theta 的角速度

$\ddot{\theta}$ % theta 的角加速度

$\theta_0 = \text{atan}\left(\frac{0.879 - 0.4799051531}{0.5313848963}\right) - 0.04$ %初始状态下小车质心到 Beam 转轴的连线与水平方向的夹角

Adams 中 Beam 转轴中心坐标: (-0.18, 0.879, 0.5313848963)

$D = \sqrt{((0.879 - 0.4799051531)^2 + (0.5313848963)^2)}$ %小车质心到 Beam 转轴的直线长度

$D_x = 0.5313848963$ %小车质心到 Beam 转轴的水平长度

k_b % 小车两后轮阻尼器 k 值之和

c_b % 小车两后轮阻尼器 c 值之和

k_f % 小车两前轮阻尼器 k 值之和

c_f % 小车两前轮阻尼器 c 值之和

$$hb = 0.02 * \cos\left(\left(\frac{v}{0.1} * \left(t - \frac{L_b + L_f}{v}\right)\right) - 1\right) \% \text{ 小车后轮所在地面的高度}$$

$$hf = 0.02 * \left(\cos\left(\frac{v}{0.1} * t\right) - 1\right) \% \text{ 小车前轮所在地面的高度}$$

2. Rigid Beam Variables

$L_1 = 0.36$ % Beam 旋转轴距离第一个阻尼器放置点的距离

$L_2 = 0.48$ % Beam 旋转轴距离第二个阻尼器放置点的距离

$L_3 = 0.60$ % Beam 旋转轴距离第三个阻尼器放置点的距离

$L = L_1$ % Beam 阻尼器弹力与阻力的力臂 等于 $L_1/L_2/L_3$

$l_b = 0.74$ % Beam 旋转轴距离 Beam 末端(back)的长度

$l_f = 2.12$ % Beam 旋转轴距离 Beam 前段(front)的长度

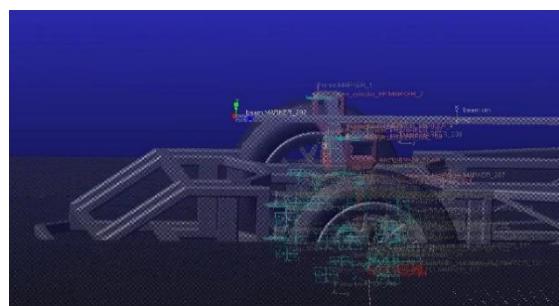
$\lambda = 15.602$ % 前段 Beam 的线密度, 计算方法为 Adams 中 beam 的质量除以长度, 后端 beam holder 线密度为 2.5λ

$m_b = \lambda * l_f + 2.5 * \lambda * l_b$ % Beam 的总质量

$J_b = \int_{-l_b}^0 2.5\lambda \cdot x^2 dx + \int_0^{l_f} \lambda \cdot x^2 dx$ kg/m² % Beam 绕旋转轴旋转的转动惯量

$l_{bc} = \frac{\left(\lambda \cdot l_f \frac{l_f}{2} + 2.5 \cdot \lambda \cdot l_b * \left(-\frac{l_b}{2}\right)\right)}{m_b}$ % Beam 旋转轴到质心的长度

$\Delta yr_0 = 0.3990948469$ % 初始状态下刚性 Beam 末端与质心的 y 坐标之差



Rigid Beam 末端初始坐标: (0.0, 0.879, -1.5886151037)

小车质心初始坐标: (0, 0.4799051531, 0)

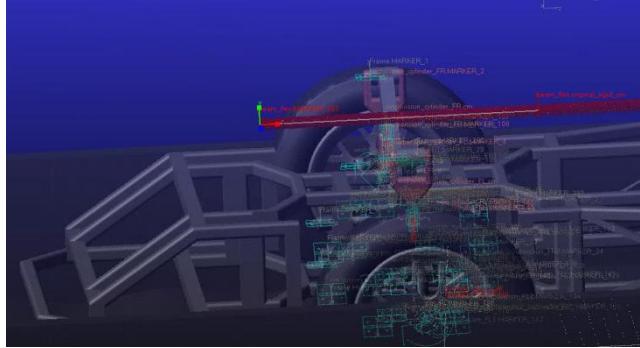
初始差值: 0.3990948469

3. Dynamic Beam Variables

$$E = 2.07 * 10^{11} \quad \% \text{ Beam 的弹性模量 Adams.steel}$$

$$I_z = 0.1 * \frac{0.02^3}{12} m^4 \quad \% \text{ Beam 的惯性二次矩, 由矩形截面惯性二次矩计算公式算得}$$

$\Delta y d_0 = 0.3981506469\%$ 初始状态下弹性 Beam 末端与质心的 y 坐标之差



Dynamic Beam 末端初始坐标: (0, 0.8780558, -1.5880903)

小车质心初始坐标: (0, 0.4799051531, 0)

初始差值: 0.3981506469

2. 近似问题:

1. 三角函数近似:

由于小车运动过程中相关角度(θ, ϕ)值均在 5° 内, 故将所有 $\sin \theta$ 近似为 θ , $\cos \theta$ 近似为 0

$$\Delta y_b = y_c - L_b \sin \theta - h_b \approx y_c - L_b \theta - h_b$$

$$\Delta y_f = y_c + L_f \sin \theta - h_f \approx y_c + L_f \theta - h_f$$

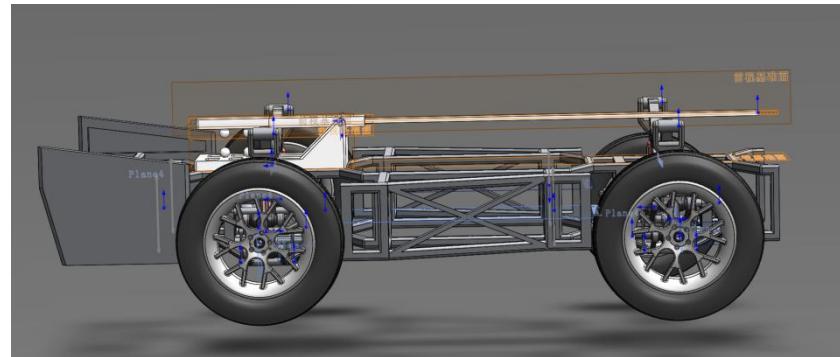
$$\Delta \dot{y}_b = \dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b$$

$$\Delta \dot{y}_f = \dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f$$

θ_0 参数处理: 计算过程中会出现 $D \cdot \sin(\theta_0 - \theta)$ 项, 由于整个计算过程不允许出现关于 θ 等变量的非线性项, θ_0 值又较大, $\sin(\theta_0 - \theta)$ 不能整体近似为 $(\theta_0 - \theta)$, 故用三角函数公式展开 $\sin \theta_0 \cdot \cos \theta - \cos \theta_0 \cdot \sin \theta$, 之后仅针对 θ 做近似, 得到:

$$\sin(\theta_0 - \theta) \approx \sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta$$

2. Beam 形状近似:



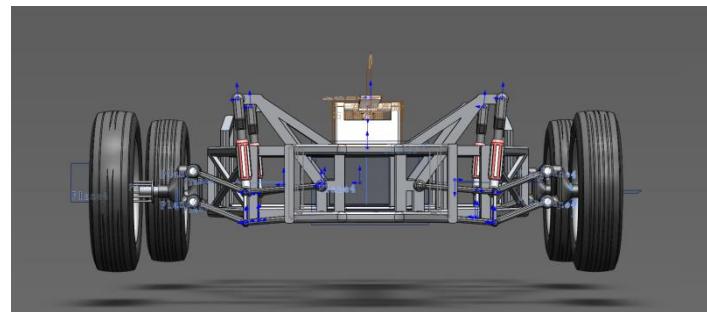
按照 beam 的真实情况, beam holder 部分会延伸到旋转轴之外 $0.12m$, beam 部分从 beam holder 开始向前延伸 $2m$ 。为了方便计算, 对此部分进行近似: 认为旋转轴左边全部为 beam holder, 总长度 $0.74m$, 认为旋转轴右边全部为 beam, 总长度 $2.12m$ 。

3. 能量近似:

将“不包含前后轮弹簧阻尼器和 beam & beam holder, 但包含 beam lift 以及 beam 弹簧阻尼器的小车”作为研究对象时, beam 弹簧阻尼器的弹性势能及阻力做功相对小车重力势能、动能而言太小, 可被忽略。这一部分近似在小车运动方程推导过程有详细描述。

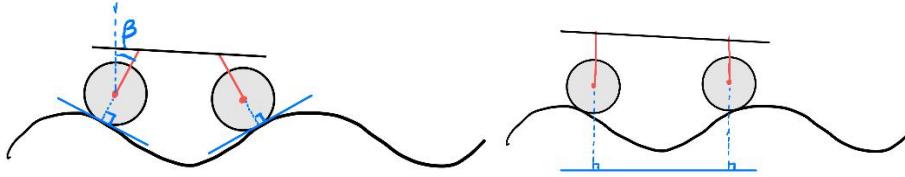
忽略小车车轮橡胶材质在压缩状态下所具有的弹性势能, 忽略弹簧阻尼器的质量。

4. 小车悬挂系统角度近似:



近似 1: 真实情况弹簧阻尼器与竖直方向成一定夹角 α , 真实压缩量为竖直方向压缩量 $\frac{\Delta y}{\cos \alpha}$, 由于角度 α 较小, 故将 $\cos \alpha$ 值近似为 1, 即认为弹簧阻尼器在此平面上为竖直状态。

近似 2: 真实情况弹簧阻尼器始终与轮子和地面接触点的切线保持垂直, 即弹簧阻尼器伸缩方向为地面接触点的法向。但按照真实模型求解会导致出现 $\cos \beta \sin \beta$ 等非线性项, 无法通过已学知识求解。故将弹簧阻尼器方向全部近似为竖直方向, 即重力方向。(如图所示)



5. 水平速度近似:

车轮转速为 $720^\circ/\text{s}$ ，车轮半径为 0.4m ，车轮周长为 $2\pi r = 0.8\pi$ ，如果假设车轮始终贴地行驶，且将地面近似为平整的水平地面，则小车水平方向速度近似为 $1.6\pi \text{ m/s}$ 。

如果不近似地面平整，则需对地面形状函数进行线积分，求得一个周期内地面的真实长度 S ， S 除以车轮速度 $1.6\pi \text{ m/s}$ ，得到小车在真实地面行驶一个周期所需的时间 T 。再用这个周期的水平长度除以 T ，得到小车的近似水平方向速度。

6. 小车贴地近似:

假设小车轮子每时每刻都紧贴地面，不会发生轮子离开地面的情况。

3. 小车的运动方程推导

研究对象: 不包含前后轮弹簧阻尼器和 beam & beam holder，但包含 beam lift 以及 beam 弹簧阻尼器的小车。

广义坐标: 小车本身为两自由度系统。

y_c : 小车重心高度；

θ : 小车车身相对水平方向绕质心逆时针旋转的角度；

广义力 Q_{y_c} :

y_c 对应的广义力为前后轮弹簧阻尼器的弹力及阻力；

$$\begin{aligned} Q_{y_c} &= -k_f \Delta y_f - k_b \Delta y_b - c_f \Delta \dot{y}_f - c_b \Delta \dot{y}_b \\ &= -k_f(y_c + L_f \theta - h_f) - k_b(y_c - L_b \theta - h_b) - c_f(\dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f) - c_b(\dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b) \end{aligned}$$

广义力矩 Q_θ :

θ 对应的广义力矩为弹力和阻力相对于小车质心转轴产生的力矩；

$$\begin{aligned} Q_\theta &= k_b(y_c - L_b \theta - h_b)L_b + c_b(\dot{y}_c - L_b \dot{\theta} - \dot{h}_b)L_b - k_f(y_c + L_f \theta - h_f)L_f \\ &\quad - c_f(\dot{y}_c + L_f \dot{\theta} - \dot{h}_f)L_f \end{aligned}$$

动能 T_c :

$$T_c = \frac{1}{2}m \cdot \dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

势能 V_c :

$$V_c = mgy_c + \frac{1}{2}k(L(\psi - \theta))^2$$

其中后一项为 beam 弹簧阻尼器的弹性势能，但是由于小车质量近 $1964kg$ ，而 beam 质量只有 $68kg$ ，故此处 beam 弹簧阻尼器的弹性势能相对于小车自身重力势能而言太小，故进行忽略计算。即：

$$V_c = mgy_c$$

拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L_c &= T_c - V_c \\ &= \left[\frac{1}{2}m\dot{y}_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \right] - [mgy_c] \end{aligned}$$

Beam 弹簧阻尼器阻力做功:

$$E_D = \frac{1}{2}c \cdot (\dot{L}(\dot{\psi} - \dot{\theta}))^2$$

(1) y_c 对应的欧拉-拉格朗日方程 / Euler-Lagrange Equation of y_c :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_c} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{y}_c} &= Q_{y_c} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_c} &= Q_{y_c} \end{aligned}$$

y_c 小车的运动方程 :

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c - mg &= -k_f(y_c + L_f\theta - h_f) - k_b(y_c - L_b\theta - h_b) - c_f(\dot{y}_c + L_f\dot{\theta} - \dot{h}_f) \\ &\quad - c_b(\dot{y}_c - L_b\dot{\theta} - \dot{h}_b) \end{aligned}$$

(2) θ 对应的欧拉-拉格朗日方程 / Euler-Lagrange Equation of θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = Q_\theta$$

与近似忽略 beam 弹簧阻尼器弹性势能同理，此处 E_D 代表的非保守力做功能量相对于小车其他能量而言太小，故也进行忽略计算。即拉格朗日方程近似为：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta$$

θ 小车的运动方程:

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta} &= k_b(y_c - L_b\theta - h_b)L_b + c_b(\dot{y}_c - L_b\dot{\theta} - \dot{h}_b)L_b - k_f(y_c + L_f\theta - h_f)L_f \\ &\quad - c_f(\dot{y}_c + L_f\dot{\theta} - \dot{h}_f)L_f \end{aligned}$$

(3) 矩阵形式表示小车运动方程 / Matrix Equation:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b c_b \dot{h}_b + L_f c_f \dot{h}_f - L_b k_b h_b + L_f k_f h_f \end{bmatrix}$$

4. Rigid Beam 运动方程推导

研究对象: 视作刚体的 beam 及 beam holder

Beam 转轴 y 坐标: $y_b = y_c + D \cdot \sin(\theta_0 - \theta) \approx y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)$

Beam 质心 y 坐标: $y_{bc} = y_b + l_{bc} \cdot \sin \psi \approx y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta) + l_{bc} \cdot \psi$

Beam 质心 y 速度: $\dot{y}_{bc} = \dot{y}_c - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta} + l_{bc} \cdot \dot{\psi}$

广义坐标: rigid beam 为单自由度

ψ : beam 绕旋转轴, 相对水平方向逆时针旋转的角度

广义力矩:

ψ 对应的广义力矩为 beam 弹簧阻尼器产生的弹力及阻力;

$$\tau_b = -[k L \sin(\psi - \theta) + c(\dot{\psi} - \dot{\theta})] L \cos(\psi - \theta) \approx -k L^2 (\psi - \theta) - c L (\dot{\psi} - \dot{\theta})$$

动能 T_{rb} :

$$\begin{aligned} T_{rb} &= \frac{1}{2} m_b \cdot \dot{y}_{bc}^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\psi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m_b (\dot{y}_c - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta} + l_{bc} \cdot \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\psi}^2 \end{aligned}$$

势能 V_{rb} :

$$V_{rb} = m_b \cdot g \cdot y_{bc} = m_b \cdot g \cdot (y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta) + l_{bc} \cdot \psi)$$

拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L_{rb} &= T_{rb} - V_{rb} \\ &= \frac{1}{2} m_b (\dot{y}_c - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta} + l_{bc} \cdot \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\psi}^2 \\ &\quad - m_b \cdot g \cdot (y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta) + l_{bc} \cdot \psi) \end{aligned}$$

ψ 对应的欧拉-拉格朗日方程 / Euler-Lagrange Equation of y_c :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \tau_b$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= m_b l_{bc} (\ddot{y}_c - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \dot{\theta} + l_{bc} \cdot \dot{\psi}) + J_b \dot{\psi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= m_b l_{bc} (\ddot{y}_c - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \ddot{\theta} + l_{bc} \cdot \ddot{\psi}) + J_b \ddot{\psi} \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -m_b g l_{bc}\end{aligned}$$

ψ小车的运动方程:

$$m_b l_{bc} (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta} + l_{bc} \cdot \ddot{\psi}) + J_b \ddot{\psi} + m_b g l_{bc} = -k L^2 (\psi - \theta) - c L (\dot{\psi} - \dot{\theta})$$

$$\text{Collect } m_b l_{bc} \ddot{y}_c - m_b l_{bc} D \cos \theta_0 \ddot{\theta} + (m_b l_{bc}^2 + J_b) \ddot{\psi} - c L \dot{\theta} + c L \dot{\psi} - k L^2 \theta + k L^2 \psi = -m_b g l_{bc}$$

小车+Rigid Beam 系统运动方程 / Matrix Equation:

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ m_b l_{bc} & -m_b l_{bc} D \cos \theta_0 & m_b l_{bc}^2 + J_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 \\ 0 & -c L^2 & c L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 \\ 0 & -k L^2 & k L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ -m_b g l_{bc} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

5. Dynamic Beam 运动方程推导

研究对象: 视作弹性体的 beam 及视作刚体的 beam holder

Beam 转轴 y 坐标: $y_b = y_c + D \cdot \sin(\theta_0 - \theta) \approx y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)$

Beam 转轴 y 速度: $\dot{y}_b = \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta}$

广义坐标: Elastic beam + rigid beam holder 为两自由度系统

ψ: beam 绕旋转轴, 相对水平方向逆时针旋转的角度

q: beam 末端相对于刚体情况的向下偏移量 $y(x, t) = \phi(x) \cdot q(t)$

广义力 Q_q :

认为 beam 旋转轴之前的部分为悬臂梁情况, 故 $Q_q = 0$

广义力矩:

ψ 对应的广义力矩为 beam 弹簧阻尼器产生的弹力及阻力;

$$\tau_b = -[k L \sin(\psi - \theta) + c(\dot{\psi} - \dot{\theta})] L \cos(\psi - \theta) \approx -k L^2 (\psi - \theta) - c L (\dot{\psi} - \dot{\theta})$$

动能 T_{db} :

$$T_{db} = \frac{1}{2} \int_{-l_b}^0 \frac{5}{2} \rho A (\dot{\psi} x + \dot{y}_b)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \rho A (\dot{\psi} x + \dot{y}_b - \phi \dot{q})^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-l_b}^0 \frac{5}{2} \rho A (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \rho A (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta} - \phi \dot{q})^2 dx$$

势能:

$$\begin{aligned} V_{db} &= \left(\frac{5}{2} \lambda l_b \right) g \left[y_b - \frac{1}{2} l_b \sin \psi \right] + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \lambda g (y_b + x \sin \psi - y(x, t)) dx + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \\ &= \frac{5}{2} \lambda l_b g \left[(y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)) - \frac{1}{2} l_b \psi \right] \\ &\quad + \int_0^{l_f} \lambda g \left((y_c + D(\theta_0 - \theta)) + x \psi - \phi(x) q \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \cdot I_z dx \\ &= \frac{5}{2} \lambda l_b g \left[(y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)) - \frac{1}{2} l_b \psi \right] + \int_0^{l_f} \lambda g (y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)) dx \\ &\quad + \int_0^{l_f} \lambda g \psi \cdot x dx + \int_0^{l_f} \lambda g q \cdot (-\phi(x)) dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \cdot I_z dx \end{aligned}$$

Strain Energy:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x$$

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} = \frac{Ey}{\rho}$$

$$\text{对 z 轴的惯性二次矩: } I_z = \int_A y^2 dA$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$y = y(x, t) = \phi(x) \cdot q(t)$$

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \int_A \sigma_x \epsilon_x dA \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \int_A \frac{\sigma_x^2}{E} dA \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \int_A \frac{E^2 y^2}{E \rho^2} dA \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \frac{E}{\rho^2} \left(\int_A y^2 dA \right) \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \frac{E}{\rho^2} I_z \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} EI_z \cdot \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{l_f} EI_z \cdot q^2(t) \cdot \left(\phi''(x) \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \cdot I_z dx \end{aligned}$$

拉格朗日函数 L_{db} :

$$L_{db} = T_{db} - V_{db}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-l_b}^0 \frac{5}{2} \lambda (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta})^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{l_f} \lambda (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta} - \phi \dot{q})^2 dx \\
&\quad - \frac{5}{2} \lambda l_b g \left[(y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)) - \frac{1}{2} l_b \psi \right] \\
&\quad - \int_0^{l_f} \lambda g (y_c + D(\sin \theta_0 - \cos \theta_0 \cdot \theta)) dx - \int_0^{l_f} \lambda g \psi \cdot x dx \\
&\quad - \int_0^{l_f} \lambda g q \cdot (-\phi(x)) dx - \frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot q^2(t) \cdot \left(\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} \right) \cdot I_z dx
\end{aligned}$$

ψ 对应的欧拉-拉格朗日方程 / Euler-Lagrange Equation of ψ :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \tau_b \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{5}{2} \lambda \int_{-l_b}^0 x (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta}) dx + \lambda \int_0^{l_f} x (\dot{\psi}x + \dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta} - \phi(x) \dot{q}) dx \\
&= \frac{5}{2} \lambda \dot{\psi} \int_{-l_b}^0 x^2 dx + \frac{5}{2} \lambda \dot{y}_c \int_{-l_b}^0 x dx - \frac{5}{2} \lambda D \cos \theta_0 \dot{\theta} \int_{-l_b}^0 x dx + \lambda \dot{\psi} \int_0^{l_f} x^2 dx \\
&\quad + \lambda (\dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta}) \int_0^{l_f} x dx - \lambda \dot{q} \int_0^{l_f} x \phi(x) dx \\
&= \frac{5}{2} \lambda \dot{\psi} \cdot \frac{1}{3} l_b^3 + \frac{5}{2} \lambda \dot{y}_c \cdot \left(-\frac{1}{2} l_b^2 \right) - \frac{5}{2} \lambda D \cos \theta_0 \dot{\theta} \cdot \left(-\frac{1}{2} l_b^2 \right) + \lambda \dot{\psi} \cdot \frac{1}{3} l_f^3 + \lambda (\dot{y}_c - D \cos \theta_0 \dot{\theta}) \cdot \frac{1}{2} l_f^2 \\
&\quad - \lambda \dot{q} \cdot \frac{11}{40} l_f^2 \\
&= \ddot{y}_c \left(\frac{1}{2} \lambda l_f^2 - \frac{5}{4} \lambda l_b^2 \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{5}{4} \lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda D \cos \theta_0 l_f^2 \right) + \ddot{\psi} \left(\frac{5}{6} \lambda l_b^3 + \frac{1}{3} \lambda l_f^3 \right) - \ddot{q} \left(\frac{11}{40} \lambda l_f^2 \right) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) &= \ddot{y}_c \left(\frac{1}{2} \lambda l_f^2 - \frac{5}{4} \lambda l_b^2 \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{5}{4} \lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda D \cos \theta_0 l_f^2 \right) + \ddot{\psi} \left(\frac{5}{6} \lambda l_b^3 + \frac{1}{3} \lambda l_f^3 \right) \\
&\quad - \ddot{q} \left(\frac{11}{40} \lambda l_f^2 \right) \\
\frac{\partial L}{\partial \psi} &= \frac{5}{4} \lambda l_b^2 g - \lambda g \cdot \int_0^{l_f} x dx = \frac{5}{4} \lambda g l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda g l_f^2
\end{aligned}$$

弹性梁的运动方程 (ψ):

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_c \left(\frac{1}{2} \lambda l_f^2 - \frac{5}{4} \lambda l_b^2 \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{5}{4} \lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda D \cos \theta_0 l_f^2 \right) + \ddot{\psi} \left(\frac{5}{6} \lambda l_b^3 + \frac{1}{3} \lambda l_f^3 \right) - \ddot{q} \left(\frac{11}{40} \lambda l_f^2 \right) \\
&\quad - \frac{5}{4} \lambda g l_b^2 + \frac{1}{2} \lambda g l_f^2 = -k L^2 (\psi - \theta) - c L (\dot{\psi} - \dot{\theta}) \\
&\ddot{y}_c \left(\frac{1}{2} \lambda l_f^2 - \frac{5}{4} \lambda l_b^2 \right) + \ddot{\theta} \left(\frac{5}{4} \lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda D \cos \theta_0 l_f^2 \right) + \ddot{\psi} \left(\frac{5}{6} \lambda l_b^3 + \frac{1}{3} \lambda l_f^3 \right) - \ddot{q} \left(\frac{11}{40} \lambda l_f^2 \right) - c L \dot{\theta} \\
&\quad + c L \dot{\psi} - k L^2 \theta + k L^2 \psi = \frac{5}{4} \lambda g l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda g l_f^2
\end{aligned}$$

q 对应的欧拉-拉格朗日方程 / Euler-Lagrange Equation of q :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \lambda \int_0^{l_f} (\ddot{\psi}x + \ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta} - \phi \ddot{q}) \cdot (-\phi) dx \\ &= -\lambda \ddot{\psi} \int_0^{l_f} x \phi(x) dx - \lambda (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta}) \int_0^{l_f} \phi(x) dx + \lambda \ddot{q} \int_0^{l_f} \phi(x)^2 dx \\ &= -\lambda \ddot{\psi} \cdot \frac{11}{40} l_f^2 - \lambda (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta}) \cdot \frac{3}{8} l_f + \lambda \ddot{q} \cdot \frac{33}{140} l_f \\ \frac{\partial L}{\partial q} &= \lambda g \int_0^{l_f} \phi(x) dx - E \cdot q \cdot I_z \int_0^{l_f} (\phi''(x))^2 dx \\ &= \frac{3}{8} \lambda g \cdot l_f - E \cdot q \cdot I_z \cdot \frac{3}{l_f^3} \end{aligned}$$

弹性梁的运动方程 (q):

$$\begin{aligned} -\frac{11}{40} \lambda \ddot{\psi} \cdot l_f^2 - \frac{3}{8} \lambda (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta}) \cdot l_f + \frac{33}{140} \lambda \ddot{q} \cdot l_f - \frac{3}{8} \lambda g \cdot l_f + E \cdot q \cdot I_z \cdot \frac{3}{l_f^3} &= 0 \\ -\frac{3}{8} \lambda l_f \ddot{y}_c + \frac{3}{8} \lambda D \cos \theta_0 l_f \ddot{\theta} - \frac{11}{40} \lambda l_f^2 \ddot{\psi} + \frac{33}{140} \lambda l_f \ddot{q} + E \cdot I_z \cdot \frac{3}{l_f^3} q &= \frac{3}{8} \lambda g \cdot l_f \end{aligned}$$

形状函数与相关计算:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{3x^2 l_f - x^3}{2l_f^3} \\ \Phi'(x) &= \frac{3}{l_f^2} x - \frac{3}{2l_f^3} x^2 \\ \Phi''(x) &= \frac{3}{l_f^2} - \frac{3}{l_f^3} x \\ (\Phi'')^2 &= \frac{9}{l_f^4} \left(1 + \frac{1}{l_f^2} x^2 - \frac{2}{l_f} x \right) \\ \Phi^2(x) &= \frac{9}{4l_f^4} x^4 + \frac{1}{4l_f^6} x^6 - \frac{3}{2l_f^5} x^5 \\ \Phi(x) \cdot x &= \frac{3x^3 l_f}{2l_f^3} - \frac{x^4}{2l_f^3} \end{aligned}$$

对函数中积分的计算:

$$\begin{aligned} &\int_0^{l_f} \lambda (\ddot{\psi}x + \ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta} - \phi \ddot{q}) \cdot (-\phi) dx \\ &= -\lambda \ddot{\psi} \int_0^{l_f} \phi(x) dx - \lambda (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta}) \int_0^{l_f} \phi(x) dx + \lambda \ddot{q} \int_0^{l_f} \phi^2(x) dx \\ &= -\frac{11}{40} \lambda \ddot{\psi} l_f^2 - \frac{3}{8} l_f \lambda (\ddot{y}_c - D \cos \theta_0 \ddot{\theta}) + \lambda \ddot{q} \left(\frac{33}{140} l_f \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_f} \lambda g(-\phi) dx &= -\lambda g \int_0^{l_f} \phi(x) dx \\
&= -\lambda g \cdot \frac{3}{8} l_f \\
\frac{1}{2} \int_0^{l_f} E \cdot 2q \cdot (\phi''(x))^2 \cdot I_z dx &= EI_z q \int_0^{l_f} (\phi''(x))^2 dx \\
&= EI_z q \frac{9}{l_f^4} \left(l_f + \frac{1}{3} l_f - l_f \right) \\
&= EI_z q \frac{3}{l_f^3}
\end{aligned}$$

小车+Dynamic Beam 系统运动方程 / Matrix Equation:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \lambda l_f^2 - \frac{5}{4} \lambda l_b^2 & \frac{5}{4} \lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda D \cos \theta_0 l_f^2 & \frac{5}{6} \lambda l_b^3 + \frac{1}{3} \lambda l_f^3 & -\frac{11}{40} \lambda l_f^2 \\ -\frac{3}{8} \lambda l_f & \frac{3}{8} \lambda D \cos \theta_0 l_f & -\frac{11}{40} \lambda l_f^2 & \frac{33}{140} \lambda l_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 & 0 \\ 0 & -cL^2 & cL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 & 0 \\ 0 & -kL^2 & kL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l_f^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \\ \psi \\ q \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ \frac{5}{4} \lambda g l_b^2 - \frac{1}{2} \lambda g l_f^2 \\ \frac{3}{8} \lambda g l_f \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Task2: Solving

1. 矩阵定义

根据两个矩阵方程，定义 $M \ C \ K$ 矩阵。

Dynamic Beam:

$$M_D = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\lambda l_f^2 - \frac{5}{4}\lambda l_b^2 & \frac{5}{4}\lambda D \cos \theta_0 l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda D \cos \theta_0 l_f^2 & \frac{5}{6}\lambda l_b^3 + \frac{1}{3}\lambda l_f^3 & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 \\ -\frac{3}{8}\lambda l_f & \frac{3}{8}\lambda D \cos \theta_0 l_f & -\frac{11}{40}\lambda l_f^2 & \frac{33}{140}\lambda l_f \end{bmatrix}$$

$$C_D = \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 & 0 \\ 0 & -cL^2 & cL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 & 0 \\ 0 & -kL^2 & kL^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l_f^3} \end{bmatrix}$$

$$F_D = \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ \frac{5}{4}\lambda g l_b^2 - \frac{1}{2}\lambda g l_f^2 \\ \frac{3}{8}\lambda g l_f \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x}_D = \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \quad \dot{x}_D = \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad x_D = \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \\ \psi \\ q \end{bmatrix}$$

Rigid Beam:

$$M_R = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ m_b l_{bc} & -m_b l_{bc} D \cos \theta_0 & m_b l_{bc}^2 + J_b \end{bmatrix}$$

$$C_R = \begin{bmatrix} c_b + c_f & L_f c_f - L_b c_b & 0 \\ L_f c_f - L_b c_b & L_f^2 c_f + L_b^2 c_b & 0 \\ 0 & -cL^2 & cL^2 \end{bmatrix}$$

$$K_R = \begin{bmatrix} k_b + k_f & L_f k_f - L_b k_b & 0 \\ L_f k_f - L_b k_b & L_f^2 k_f + L_b^2 k_b & 0 \\ 0 & -kL^2 & kL^2 \end{bmatrix}$$

$$F_R = \begin{bmatrix} c_b \dot{h}_b + c_f \dot{h}_f + k_b h_b + k_f h_f + mg \\ -L_b \cdot c_b \dot{h}_b + L_f \cdot c_f \dot{h}_f - L_b \cdot k_b h_b + L_f \cdot k_f h_f \\ -m_b g l_{bc} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{x}_R = \begin{bmatrix} \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} \quad \dot{x}_R = \begin{bmatrix} \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad x_R = \begin{bmatrix} y_c \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$$

2. 矩阵方程求解 与 Task3&4 的 Simulink 验证

Rigid Beam: $M_R \ddot{x}_R + C_R \dot{x}_R + K_R x_R = F_R$

Dynamic Beam: $M_D \ddot{x}_D + C_D \dot{x}_D + K_D x_D = F_D$

1. 拉普拉斯变换求解:

对三阶矩阵方程做拉普拉斯变换:

$$M_R \cdot (s^2 X_R(s) - s x_R(0) - \dot{x}_R(0)) + C_R \cdot (s X_R(s) - \dot{x}_R(0)) + K_R \cdot X_R(s) = F_R(s)$$

其中 $x_R(0) = \begin{bmatrix} y_c(0) \\ \theta(0) \\ \psi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\text{其中 } F_R(s) = \begin{bmatrix} c_b H_b(s) + c_f H_f(s) + k_b H_b(s) + k_f H_f(s) + \frac{mg}{s} \\ -L_b \cdot c_b \cdot H_b(s) + L_f \cdot c_f \cdot H_f(s) - L_b \cdot k_b H_b(s) + L_f \cdot k_f H_f(s) \\ -\frac{m_b g l_{bc}}{s} \end{bmatrix}$$

$$M_R \cdot s^2 X_R(s) + C_R \cdot s X_R(s) + K_R \cdot X_R(s) = F_R(s)$$

$$X_R(s) \cdot (s^2 M_R + s C_R + K_R) = F_R(s)$$

$$X_R(s) = \begin{bmatrix} Y_c(s) \\ \Theta(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} = (s^2 M_R + s C_R + K_R)^{-1} \cdot F_R(s)$$

同理, 对四阶矩阵方程做拉普拉斯变换, 可得:

$$X_D(s) = \begin{bmatrix} Y_c(s) \\ \Theta(s) \\ \Psi(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} = (s^2 M_D + s C_D + K_D)^{-1} \cdot F_D(s)$$

$$\text{其中 } F_D(s) = \begin{bmatrix} c_b H_b(s) + c_f H_f(s) + k_b H_b(s) + k_f H_f(s) + \frac{mg}{s} \\ -L_b \cdot c_b \cdot H_b(s) + L_f \cdot c_f \cdot H_f(s) - L_b \cdot k_b H_b(s) + L_f \cdot k_f H_f(s) \\ \frac{5}{4} \frac{\lambda g l_b^2}{s} - \frac{1}{2} \frac{\lambda g l_f^2}{s} \\ \frac{3}{8} \frac{\lambda g l_f}{s} \end{bmatrix}$$

在 MATLAB 中定义好相关参数，对 $h_f, h_b, \dot{h}_f, \dot{h}_b$ 四项做拉普拉斯变换，得到

$H_f(s), H_b(s), \dot{H}_f(s), \dot{H}_b(s)$ ，代码如下：

```
hfs = laplace(hf,t,s);
hbs = laplace(hb,t,s);
hf_dot_s = laplace(hf_dot,t,s);
hb_dot_s = laplace(hb_dot,t,s);
```

之后定义好相关矩阵、相关向量。即可根据 $X_R(s)$ 与 $X_D(s)$ 的表达式计算出变量的 s 域解。

Rigid Beam:

```
Lxr=(M_R*s^2+C_R*s+K_R)\F_Rs;
Yc_r = simplify(Lxr(1));
Theta_r = simplify(Lxr(2));
Psi_r = simplify(Lxr(3));
Delta_r = Yc_r + D*sin(theta0)/s - D*cos(theta0)*Theta_r + l_f*Psi_r - 0.3990948469/s;
```

定义出 Beam 末端的 y 坐标在 t 域的表达式 $\delta_R(t)$:

$$\delta_R(t) = y_c(t) + D \cdot \sin \theta_0 - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \theta(t) + l_f \cdot \psi(t) - \Delta y r_0$$

进行拉普拉斯变换，转为 s 域表达式 $\Delta_R(s)$:

$$\Delta_R(s) = Y_c(s) + D \cdot \frac{\sin \theta_0}{s} - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \theta(s) + l_f \cdot \psi(s) - \frac{\Delta y r_0}{s}$$

根据解得的 $Y_c(s), \theta(s), \psi(s)$ ，可以求得 s 域表达式 $\Delta_R(s)$ 。

在 MATLAB 中将 s 域表达式 $\Delta_R(s)$ 化简，之后通过 $[n, d] = numden()$ 命令提取分子分母的 s 域多项式，再通过 $sym2poly$ 命令提取多项式每阶的系数。最后使用 $simulink$ 的函数 $tf(n, d)$ 得到传递函数，再用命令 $impulse()$ ，即可绘制出 Beam 末端的 y 坐标在 t 域表达式 $\delta_R(t)$ 的图像。代码如下：

```

[nR,dR] = numden(Delta_r);
numR = sym2poly(nR);
denR = sym2poly(dR);
figure
impulse(tf(numR,denR))
xlim([0 7])
title("Rigid Beam Impulse Delta_r(t)")

```

再者，根据求得的 s 域表达式 $Y_c(s), \Theta(s), \Psi(s)$ ，进行反拉普拉斯变换，得到 t 域表达式 $y_c(t), \theta(t), \psi(t)$ ，使用命令 $vpa()$ ，取前 200 位有效数字，代入 $\delta_R(t)$ 表达式，即可通过 $fsurf(, [,])$ 命令绘制出 $\delta_R(t)$ 的时域图像。代码如下：

```

ILxr=ilaplace(Lxr,s,t);
ILxr=vpa(ILxr,200);
yc_r = ILxr(1,1);
theta_r = ILxr(2,1);
psi_r = ILxr(3,1);
delta_r = yc_r + D*(sin(theta0) - cos(theta0)*theta_r)+ lf*psi_r - 0.3990948469;
figure
fsurf(delta_r, [0, 7])
view(0, 0)

```

Dynamic Beam:

与 Rigid Beam 同理，只需改变弹性杆的末端 y 坐标表达式：

定义出 Beam 末端的 y 坐标在 t 域的表达式 $\delta_D(t)$ ：

$$\delta_D(t) = y_c(t) + D \cdot \sin \theta_0 - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \theta(t) + l_f \cdot \psi(t) - q(t) - \Delta y d_0$$

进行拉普拉斯变换，转为 s 域表达式 $\Delta_D(s)$ ：

$$\Delta_D(s) = Y_c(s) + D \cdot \frac{\sin \theta_0}{s} - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \Theta(s) + l_f \cdot \Psi(s) - Q(s) - \frac{\Delta y d_0}{s}$$

根据解得的 $Y_c(s), \Theta(s), \Psi(s), Q(s)$ ，可以求得 s 域表达式 $\Delta_D(s)$ 。其余步骤同理，可用两种方式绘制出 $\delta_D(t)$ 在时域的图像。代码如下：

```

Lx=(M_D*s^2+C_D*s+K_D)\F_Ds;
Yc = simplify(Lx(1));
Theta = simplify(Lx(2));
Psi = simplify(Lx(3));
Q = simplify(Lx(4));

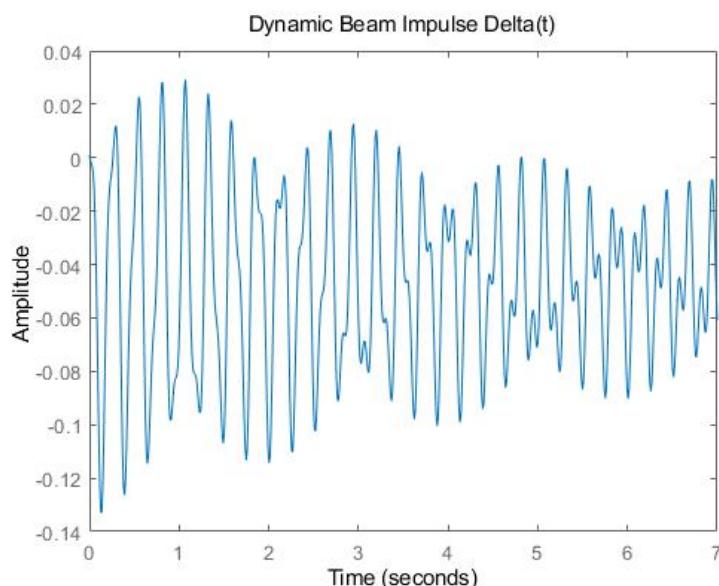
Delta = Yc + D*sin(theta0)/s - D*cos(theta0)*Theta + If*Psi - Q - 0.3981506469/s;
[nD,dD] = numden(Delta);
numD = sym2poly(nD);
denD = sym2poly(dD);
figure
impulse(tf(numD,denD))
xlim([0 7])
title("Dynamic Beam Impulse Delta(t)")

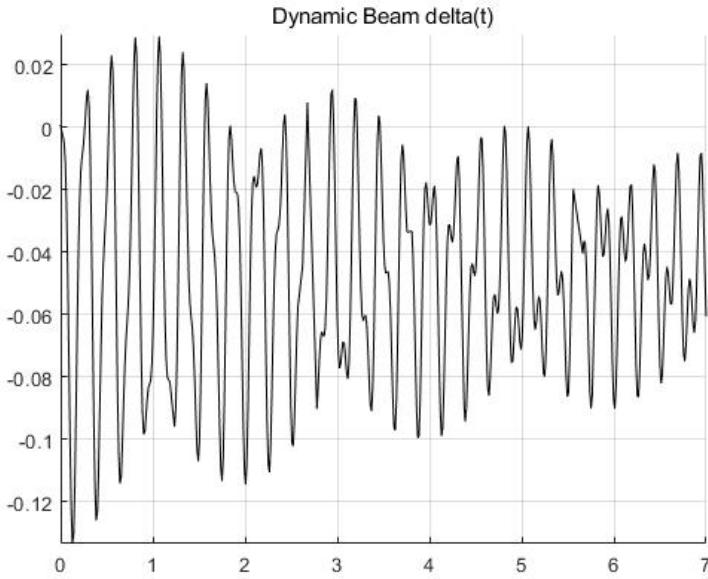
ILx=ilaplace(Lx,s,t);
ILx=vpa(ILx,200);

yc = ILx(1,1);
theta = ILx(2,1);
psi = ILx(3,1);
q = ILx(4,1);
delta = yc + D*(sin(theta0) - cos(theta0)*theta)+ If*psi- q - 0.3981506469;
figure
fsurf(delta, [0, 7])
title("Dynamic Beam delta(t)")
view(0, 0)

```

对比所绘制的图像，可知此两种方式得到的结果完全一致。





(*注：此部分使用 MATLAB 进行的求解均为数值求解，不涉及符号求解。)

2. Mathematica 符号求解：

在 mathematica 中将 $k_b c_b k_f c_f k c$ 全部定义为符号变量，尝试求解 $y_c(t), \theta(t), \psi(t), q(t)$ 带符号参数的表达式。求解方法为拉普拉斯变换，同之前 MATLAB 部分求解。但是 mathematica 无法计算出带 6 个符号参数的反拉普拉斯变换。之后将符号参数减少至两个、一个，mathematica 依然无法求解。故放弃求解变量的符号表达式。

```
InverseLaplaceTransform[ResultDynamic, s, t]
|拉普拉斯反变换
```

3. 待解决问题：对角化

根据三个矩阵同时对角化的判断条件：即 $CM^{-1}K = KM^{-1}C$ ，在 mathematica 中进行同时对角化条件判断。得到结果：相关 M C K 矩阵可进行同时对角化。但由于相关知识储备不足，未能真正实现同时对角化，将四个变量的方程进行解耦。以后可以继续探索学习。

```
A1 = Simplify[Dot[Dot[Ct, Inverse[Mt]], Kt]];
|化简 |点积 |逆
B1 = Simplify[Dot[Dot[Kt, Inverse[Mt]], Ct]];
|化简 |点积 |逆
A2 = Simplify[Dot[Dot[Cd, Inverse[Md]], Kd]];
|化简 |点积 |逆
B2 = Simplify[Dot[Dot[Kd, Inverse[Md]], Cd]];
|化简 |点积 |逆
```

4. 待解决问题：mathematica 与 MATLAB

在 mathematica 中，我用了与之前所述 MATLAB 完全一致的方法进行求解，进行拉普拉斯反变换，画出图像。发现图像与 MATLAB 中绘制完全不同，且差距很大。多次进行矩阵、参数、代码排查，未发现错误。

初步怀疑为 mathematica 与 MATLAB 中的拉普拉斯变换函数、反拉普拉斯变换函数不同导致的。之后对两个软件的拉氏变换、反变换结果进行多次比较，发现结果并不一致。尝试将拉氏变换的结果化简至单个分式，复制进 MATLAB 提取分子分母系数，使用 simulink 进行图像绘制，也与之前所绘制的图像不同。

两者间具体差别与出现此问题的原因，还需要进一步探索学习。代码见下页。

```

v = 4.9298; (*小车近似的平动速度 拿Adams中轮子每秒2圈，配上模型中轮子周长算出来的*)
g = 9.80665; (*重力加速度*)
m = 1964.110288522; (*小车总质量（除去Beam）*)
J = 3263.8860842253; (*小车绕质心的转动惯量 单位是kg/平方米*)
Lb = 0.8906648264; (*小车质心到后轮的距离*)
Lf = 1.0928608775; (*小车质心到前轮的距离*)
theta0 = ArcTan[(0.879 - 0.4799051531) / 0.5313848963] -
    [反正切
    (ArcTan[(0.879 - 0.4799051531) / 0.5313848963] - Sin[ArcTan[(0.879 - 0.4799051531) / 0.5313848963]]]);
    [正弦] [反正切
(*初始状态下小车质心到Beam转轴的连线与水平方向的夹角 弧度制*)

Dl = Sqrt[(0.879 - 0.4799051531)^2 + (0.5313848963)^2]; (*小车质心到Beam转轴的直线长度*)
    [平方根
Dx = 0.5313848963; (*小车质心到Beam转轴的水平长度*)
Amp = 0.02; (*地面振幅的高度*)
w = 10 * v; (*地面输入频率*)
lb = 0.74; (*Beam旋转轴距离Beam末端(back)的长度*)
lf = 2.12; (*Beam旋转轴距离Beam前段(front)的长度*)
mb = lambda * lf + 2.5 * lambda * lb; (*Beam的总质量*)
lbc = (lambda * lf * lf / 2 + 2.5 * lambda * lb * (-lb / 2)) / mb;
Jb = Integrate[2.5 * lambda * x^2, {x, -lb, 0}] + Integrate[lambda * x^2, {x, 0, lf}];
    [积分] [积分
(*Beam绕旋转轴旋转的转动惯量 单位是kg/平方米*)

Eb = 2.07 * 10^11; (*Beam的弹性模量 合金钢*)
Iz = 0.1 * 0.02^3 / 12; (*Beam的惯性二次矩 单位m的四次方*)
lambda = 15.602; (*悬臂梁的线密度*)
L1 = 0.36; (*Beam旋转轴距离第一个阻尼器放置点的距离*)
L2 = 0.48; (*Beam旋转轴距离第二个阻尼器放置点的距离*)
L3 = 0.60; (*Beam旋转轴距离第三个阻尼器放置点的距离*)
L = L1;
kb = 5000 * 1000 * 2;
cb = 500 * 1000 * 2;
kf = 5000 * 1000 * 2;
cf = 500 * 1000 * 2;
k = 5000 * 1000;
c = 500 * 1000;

hf[t_] = Amp * (Cos[w*t] - 1);
    [余弦
hb[t_] = Amp * (Cos[w*(t - (Lf + Lb) / v)] - 1);
    [余弦
hf[s_] = FullSimplify[LaplaceTransform[hf[t], t, s]];
    [完全简化] [拉普拉斯变换
hb[s_] = FullSimplify[LaplaceTransform[hb[t], t, s]];
    [完全简化] [拉普拉斯变换
hfd[t_] = -w * Amp * (Sin[w*t]);
    [正弦
hbd[t_] = -w * Amp * (Sin[w*(t - (Lf + Lb) / v)]);
    [正弦
hfd[s_] = FullSimplify[LaplaceTransform[hfd[t], t, s]];
    [完全简化] [拉普拉斯变换
hbd[s_] = FullSimplify[LaplaceTransform[hbd[t], t, s]];
    [完全简化] [拉普拉斯变换

```

$$Mt = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ mb * lbc - mb * lbc * Dl & mb * lbc^2 + Jb \end{pmatrix};$$

$$Ct = \begin{pmatrix} (cb + cf) & (Lf * cf - Lb * cb) & 0 \\ (Lf * cf - Lb * cb) & (Lf^2 * cf + Lb^2 * cb) & 0 \\ 0 & -(c * L^2) & (c * L^2) \end{pmatrix};$$

$$Kt = \begin{pmatrix} (kb + kf) & (Lf * kf - Lb * kb) & 0 \\ (Lf * kf - Lb * kb) & (Lf^2 * kf + Lb^2 * kb) & 0 \\ 0 & -(k * L^2) & (k * L^2) \end{pmatrix};$$

$$Fs = \begin{pmatrix} cb * hbd[s] + cf * hfd[s] + kb * hb[s] + kf * hf[s] + (m * g) / s \\ -Lb * cb * hbd[s] + Lf * kf * hfd[s] - Lb * kb * hb[s] + Lf * cf * hf[s] \\ -(mb * g * lbc) / s \end{pmatrix};$$

$$Md = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 1/2 * lambda * lf^2 - 5/4 * lambda * lb^2 & 5/4 * lambda * Dl * lb^2 - 1/2 * lambda * Dl * lf^2 & 5/6 * lambda * lb^3 + 1/3 * lambda * lf^3 & -11 * (lambda * lf^2) / 40 \\ -(3 * lambda * lf) / 8 & (3 * lambda * lf * Dl) / 8 & -(11 * lambda * lf^2 / 40) & (33 * lambda * lf / 140) \end{pmatrix};$$

$$Cd = \begin{pmatrix} (cb + cf) & (Lf * cf - Lb * cb) & 0 & 0 \\ (Lf * cf - Lb * cb) & (Lf^2 * cf + Lb^2 * cb) & 0 & 0 \\ 0 & -(c * L^2) & (c * L^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Kd = \begin{pmatrix} (kb + kf) & (Lf * kf - Lb * kb) & 0 & 0 \\ (Lf * kf - Lb * kb) & (Lf^2 * kf + Lb^2 * kb) & 0 & 0 \\ 0 & -(k * L^2) & (k * L^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 * Eb * Iz / (lf^3) \end{pmatrix};$$

$$Fds = \begin{pmatrix} cb * hbd[s] + cf * hfd[s] + kb * hb[s] + kf * hf[s] + m * g / s \\ -Lb * cb * hbd[s] + Lf * kf * hfd[s] - Lb * kb * hb[s] + Lf * cf * hf[s] \\ -lambda * g (1/2 * lf^2 - 5/4 * lb^2) / s \\ (3 * lambda * g * lf) / (8 * s) \end{pmatrix};$$

```

A1 = Simplify[Dot[Dot[Ct, Inverse[Mt]], Kt]];
B1 = Simplify[Dot[Dot[Kt, Inverse[Mt]], Ct]];
A2 = Simplify[Dot[Dot[Cd, Inverse[Md]], Kd]];
B2 = Simplify[Dot[Dot[Kd, Inverse[Md]], Cd]];

Mat = Inverse[s^2 * Mt + s * Ct + Kt];
Mad = Inverse[s^2 * Md + s * Cd + Kd];
Mat = Simplify[Mat];
Mad = Simplify[Mad];
ResultRigid = Dot[Mat, Fs]; (*X(s)解*)
ResultDynamic = Dot[Mad, Fds]; (*X(s)解*)
ResultRigid = Simplify[ResultRigid];
ResultDynamic = Simplify[ResultDynamic];
ResultRigid = ExpandDenominator[ExpandNumerator[FullSimplify[Collect[Together[ResultRigid], s]]];
ResultDynamic = ExpandDenominator[ExpandNumerator[FullSimplify[Collect[Together[ResultDynamic], s]]]];
A = Re[Simplify[InverseLaplaceTransform[ResultDynamic, s, t]]];
yc[t_] = A[[1, 1]];
theta[t_] = A[[2, 1]];
psi[t_] = A[[3, 1]];
q[t_] = A[[4, 1]];
Plot[yc[t], {t, 0, 7}]
Plot[theta[t], {t, 0, 7}]
Plot[psi[t], {t, 0, 7}]
Plot[q[t], {t, 0, 7}]

```

5. 积分值验证

根据 project 要求，优化的目标函数为 $\int_0^d \delta_{tip}^2(t) ds$

Rigid Beam:

$$d = 33.91593 \quad v = 1.6\pi$$

$$\delta_R(t) = y_c(t) + D \cdot \sin \theta_0 - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \theta(t) + l_f \cdot \psi(t) - \Delta y r_0$$

$$\int_0^{\frac{d}{v}} \delta_R^2(t) v dx$$

Dynamic Beam:

$$\delta_D(t) = y_c(t) + D \cdot \sin \theta_0 - D \cdot \cos \theta_0 \cdot \theta(t) + l_f \cdot \psi(t) - q(t) - \Delta y d_0$$

$$\int_0^{\frac{d}{v}} \delta_D^2(t) v dx$$

两部分代码如下：

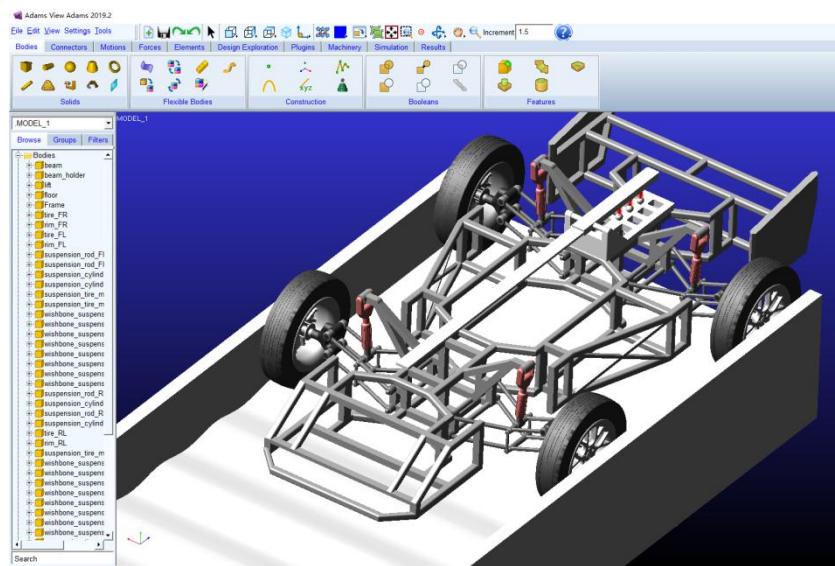
```
delta_r = yc_r + D*(sin(theta0) - cos(theta0)*theta_r) + lf*psi_r - 0.3990948469;
integrate_r = simplify(int(delta_r^2*v,t,0,33.91593/v))
sum_r = 0;
for i = 0 : 0.01 : 7
    sum_r = sum_r + ((subs(delta_r,t,i)+subs(delta_r,t,i+0.01))/2)^2 * v * 0.01;
end
sum_r
delta = yc + D*(sin(theta0) - cos(theta0)*theta) + lf*psi - q - 0.3981506469;
integrate_d = simplify(int(delta^2*v,t,0,33.91593/v))
sum_d = 0;
for i = 0 : 0.01 : 7
    sum_d = sum_d + ((subs(delta,t,i)+subs(delta,t,i+0.01))/2)^2 * v * 0.01;
end
sum_d
```

使用两种方法求解，第一种是按照理论计算方式，将对 s 进行的积分操作化为对 x 进行的积分操作，再根据 $dx = v \cdot dt$ 转化为对 t 的积分；第二种是将仿真时间 7s 以 0.01s 为间隔，计算每部分数值，进行叠加。两种方式计算的结果相差无几。

Task3: Adams & Matlab Simulation - Stiff

1. Simulation Process:

1.1 打开 vehicle_suspension 文件，首先对 Beam 和 Beam_Holder 物体进行固定。此 Beam 为刚体。



1.2 首先进行初次仿真，经观察 vehicle 跑动正常，通过指定通道时间约为 7s。

1.3 在 Beam 的 Free-end 端添加新的坐标系 Maker_283，此坐标系的 Y 方向 Transitional Displacement 将作为评估小车减震效果的重要指标。

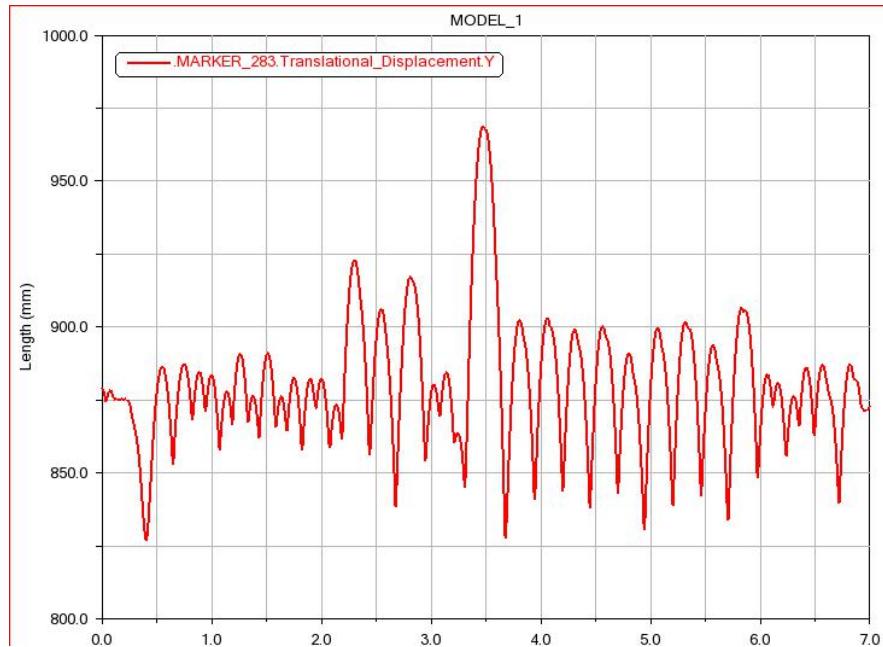
1.4 检查 Spring 参数设置，本次仿真改变的参数为 vehicle 的四轮减震阻尼器参数和 Beam 的 1 号减震阻尼器参数。

1.5 5 个减震阻尼器的参数均为 $K = 5000 \text{ N/mm}$, $C = 500 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{mm}$ 。

1.6 开始仿真，仿真结束后得到 Maker_283 坐标系在 Y 方向上的

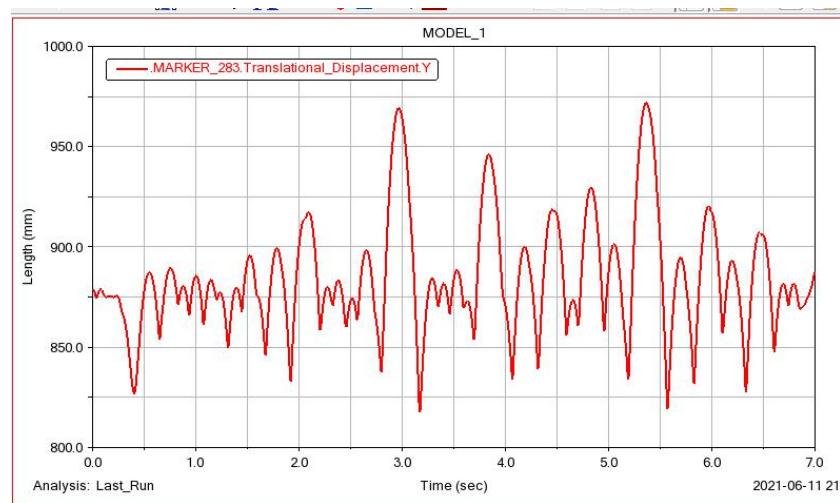
Transitional Displacement, 其图像如下图所示, 同时导出对应离散点坐标数据。

Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K5000/C500	K5000/C500
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500

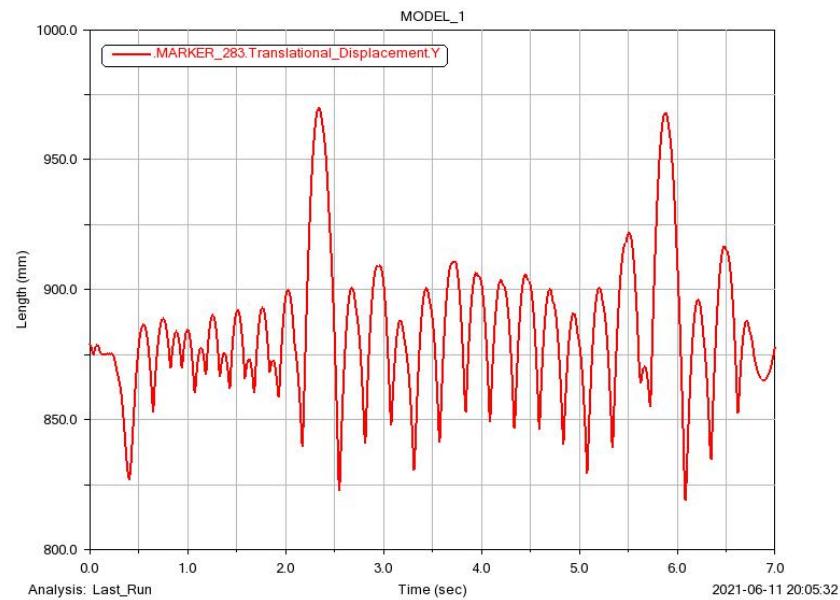


1.7 改变 5 个减震阻尼器的参数。本次试验, 令 5 个阻尼器参数同时变化, 经过上述步骤, 总共得到 6 组数据, 其余五组结果如下:

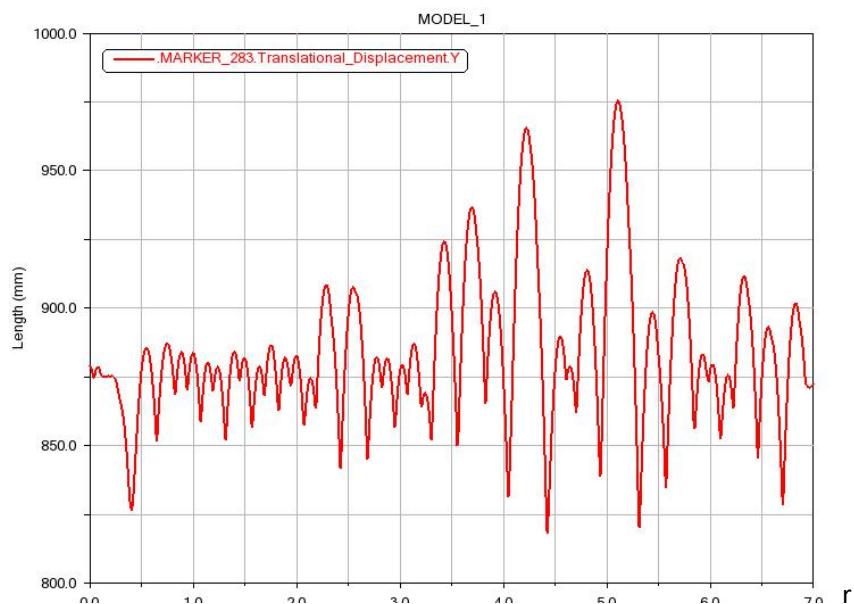
Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K5000/C400	K5000/C400
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400



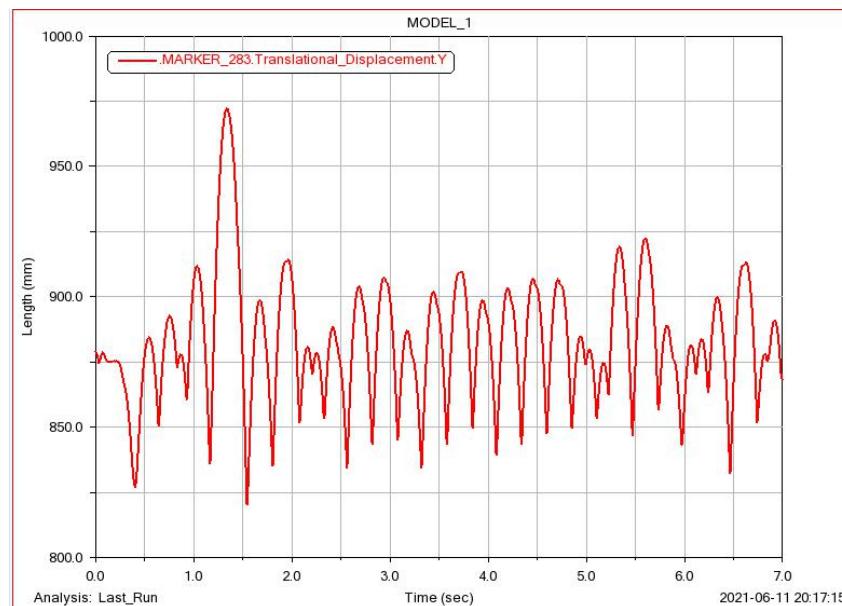
Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K5000/C600	K5000/C600
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600



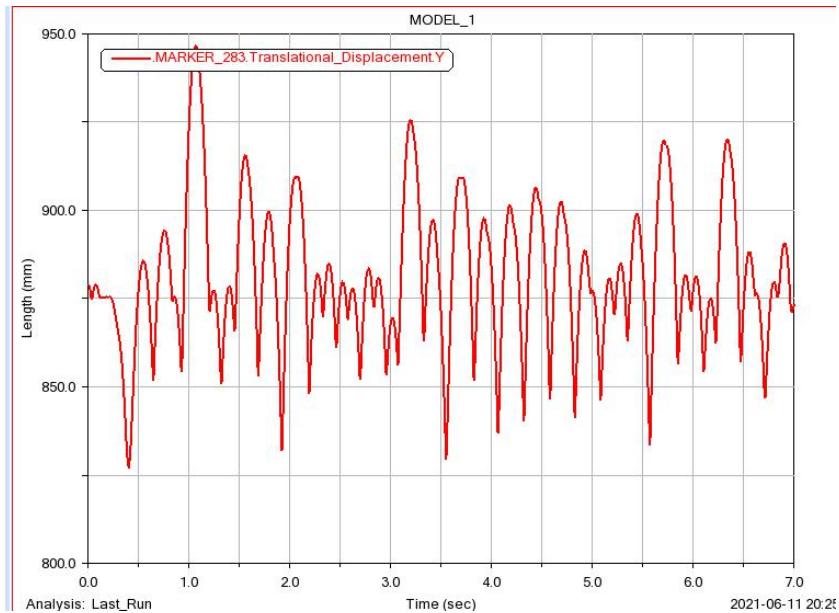
Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K6000/C400	K6000/C400
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400



Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K6000/C500	K6000/C500
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500



Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
刚体	K6000/C600	K6000/C600
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600



2. Data Processing:

2.1 在上述过程中已经得到了坐标系 Marker_283 的 Y 方向 Transitional Displacement，接下来将对这项数据做一系列处理。

2.2 为了更加合理的评估不同参数减震阻尼器的减震效果，应该对坐标系 Marker_283 的原点位移 Deflection 的平方对整个运动距离 Distance 进行积分，故目标函数为：

$$f(k_{fl}, c_{fl}, k_{fr}, c_{fr}, k_{rl}, c_{rl}, k_{rr}, c_{rr}, k_{beam}, c_{beam}) = \int_0^d \delta_{tip}^2(t) ds$$

$$\int_0^d \delta_{tip}^2(t) ds = \int_0^d \delta_{tip}^2(t) \frac{ds}{dt} dt = \int_0^d \delta_{tip}^2(t) v dt$$

2.3 v 近似为小车平动速度，当前小车车轮为 2r/s，小车车轮周长通过 SolidWorks 模型得出，此处计算近似取为 4.9298m/s

2.4 以减震阻尼器参数为 $K = 5000 \text{ N/mm}$, $C = 500 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 的样本为例，使用 Origin2017 程序。

2.4.1 录入两列数据， time & displacement

2.4.2 对 displacement 进行减去初始值并平方的操作

2.4.3 绘制此值对 time 的函数

2.4.4 对此图像进行积分，积分结果为 3147.95

2.4.5 结果乘以 4.9298 并换算单位

2.4.6 得到最终积分结果为 0.0155

长名称	A(X)	B(Y)	C(Y)	D(Y)	E(Y)
单位					Integrate
注释					D的积分 $x=(0, 7)$ 面积 = 3147.96
F(x) =		B-879		C^2	
1	0	879	0	0	0
2	0.01	878.3892	-0.6108	0.37308	0.00187
3	0.02	876.9191	-2.0809	4.33014	0.02538
4	0.0254	875.7109	-3.2891	10.81818	0.06628
5	0.0288	875.0054	-3.9946	15.95683	0.1118
6	0.03	874.8002	-4.1998	17.63832	0.13196
7	0.0332	874.6576	-4.3424	18.85644	0.19035
8	0.0372	874.8299	-4.1701	17.38973	0.26284
9	0.04	875.1168	-3.8832	15.07924	0.3083
10	0.0427	875.514	-3.486	12.1522	0.34506
11	0.0455	875.9839	-3.0161	9.09686	0.37481
12	0.0496	876.6447	-2.3553	5.54744	0.40483
13	0.05	876.7067	-2.2933	5.25922	0.40699
14	0.0528	877.1177	-1.8823	3.54305	0.41931
15	0.0558	877.4792	-1.5208	2.31283	0.4281
16	0.0589	877.7834	-1.2166	1.48012	0.43398
17	0.06	877.8762	-1.1238	1.26293	0.43549
18	0.063	878.1021	-0.8979	0.80622	0.43859
19	0.067	878.2855	-0.7145	0.51051	0.44122
20	0.0696	878.3517	-0.6483	0.42029	0.44243

2.5 在此参数条件下，积分结果为 0.0155 (单位 m^3)

2.6 重复上述步骤，得到以下结果：

	阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
--	---------------	-------------	-------------	-------------	-------------	------------------

1	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	0.0279
2	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0155
3	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	0.0149
4	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	0.0218
5	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	0.0104
6	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	0.0091

2.7 以上六组数据积分结果得到的结论为，当 5 个弹簧阻尼器参数均为 $K = 6000 \text{ N/mm}$, $C = 600 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 时，vehicle 减震效果最好。

3. More Data Test:

3.1 使用 Adams 仿真进行更多数据的获得，并重复数据处理步骤，得到更多的积分结果如下：（本次只改变阻尼器-Beam1 的参数值，轮连接的阻尼器均为初始值）

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3

K3000/C100	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0104
K3000/C200	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0104
K3000/C300	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0234
K3000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0091
K3000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0169
K3000/C600	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0196
K3000/C700	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0098
K3000/C800	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0258
K3000/C900	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0093

从以上数据可知：当轮连接阻尼器均为初始值，阻尼器 Beam1 参数 $K = 3000 \text{ N/mm}$, C 如上图所示变化时，阻尼器 Beam1 参数为 $K = 3000 \text{ N/mm}$, $C = 400 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 时，减震效果最好。

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3

K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0172
K5000/C600	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0105
K5000/C700	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0072
K5000/C800	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0149
K5000/C900	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0166

从以上数据可知：当轮连接阻尼器均为初始值，阻尼器 Beam1 参数 $K = 5000 \text{ N/mm}$, C 如上图所示变化时，阻尼器 Beam1 参数为 $K = 5000 \text{ N/mm}$, $C = 700 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 时，减震效果最好。

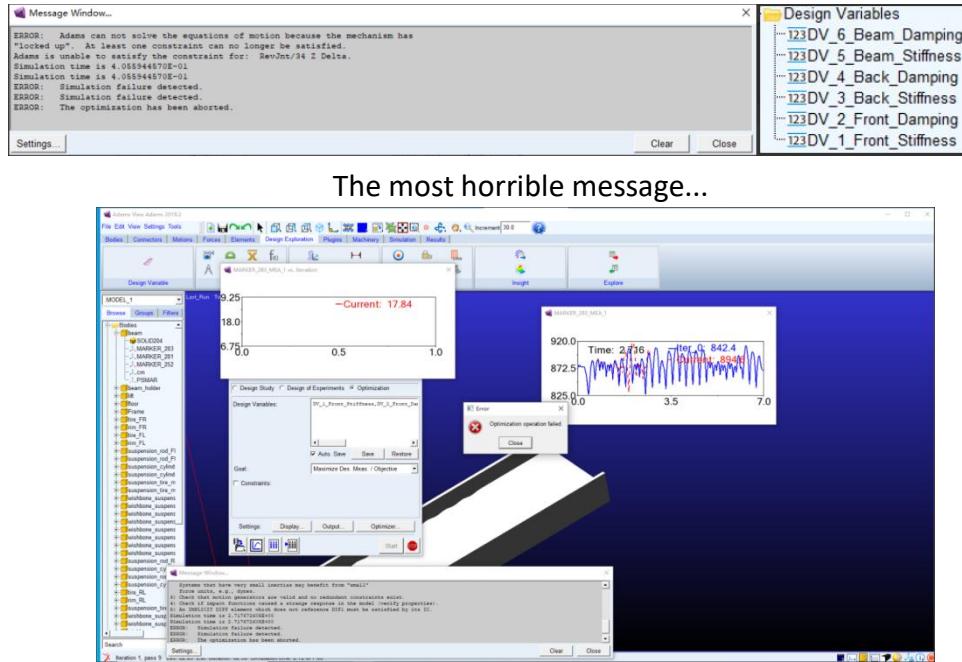
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K7000/C600	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0178
K7000/C700	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0104
K7000/C800	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0134
K7000/C900	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.0115

从以上数据可知：当轮连接阻尼器均为初始值，阻尼器 Beam1

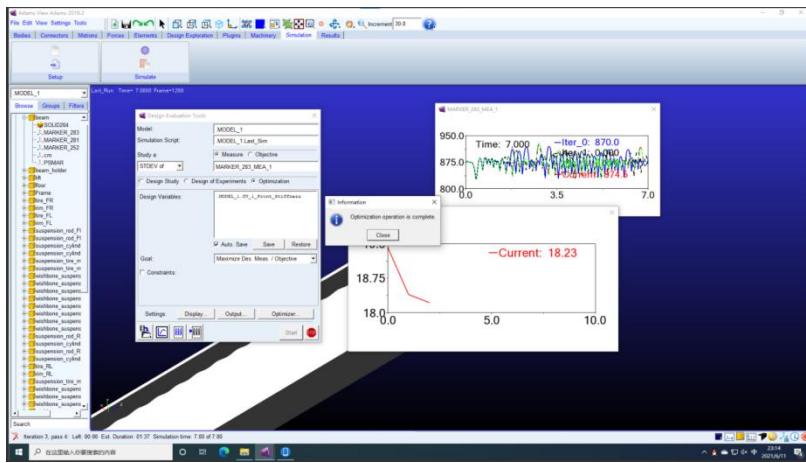
参数 $K = 7000 \text{ N/mm}$, C 如上图所示变化时, 阻尼器 Beam1 参数为 $K = 7000 \text{ N/mm}$, $C = 700 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 时, 减震效果最好。

4. Optimize by Adams:

熟悉了 Adams 优化流程后, 开始使用 Optimization 进行优化, 结果出现了不少问题。一开始将六个变量全部输入了优化器中, 要在一次计算中同时对这么多的设计变量进行优化, 往往会由于计算过程中各设计变量的取值产生矛盾, 而使计算失败 (其中的 Iteration 是迭代次数, Pass 是 Adams 为了减少每次仿真的误差而进行的同一数值的多次尝试)。因此, 对于这种设计变量较多的情况, 应先对部分设计变量进行优化, 得到一个优化结果, 再对其它设计变量进行优化, 换而言之, 实现局部最优;



赋予个不同的参数, 优化失败



仅赋予一个参数（前轮 Stiffness），优化成功

赋予当个变量进行优化时，又出现了新的问题。虽然其参数数值发生改变，并且目标函数数值得到下降，但是参数的变化范围不符合其最初设定的范围（例如下图两次优化，V1 的变化都在 1% 以内，但是参数设置的范围是 4000-6000，其中标准值为 5000）；

Optimization Summary				
Model Name : MODEL_1				
Date Run : 2021-06-11 22:53:29				
Objectives				
O1) Minimum of MARKER_283_MEA_1				
Units	mm			
Initial Value:	19.4218			
Final Value :	18.2257 (-6.16%)			
Design Variables				
V1) DV_1_Front_Stiffness				
Units	newton/mm			
Initial Value:	5000			
Final Value :	4984.74 (-0.305%)			
Iter.	O1	V1		
0	19.422	5000.0		
1	18.398	4990.9		
2	18.226	4984.7		
3	18.226	4984.7		

Optimization Summary				
Model Name : MODEL_1				
Date Run : 2021-06-12 00:12:51				
Objectives				
O1) Minimum of MARKER_283_MEA_1				
Units	mm			
Initial Value:	28.9417			
Final Value :	19.2443 (-33.5%)			
Design Variables				
V1) DV_1_Front_Stiffness				
Units	newton/mm			
Initial Value:	5010.53			
Final Value :	4979.12 (-0.627%)			
Iter.	O1	V1		
0	28.942	5010.5		
1	19.244	4979.1		
2	19.244	4979.1		
3	19.244	4979.1		

无法解决这个奇怪的问题，最终转向 Design Study，使用单一参数进行广泛的数值尝试（毕竟 5000 可能还是偏硬一些），其中参数设置为 50%-5000-50%，参数设置使用百分比 Design Study Fail 的概率相对来说更加小一些；

```

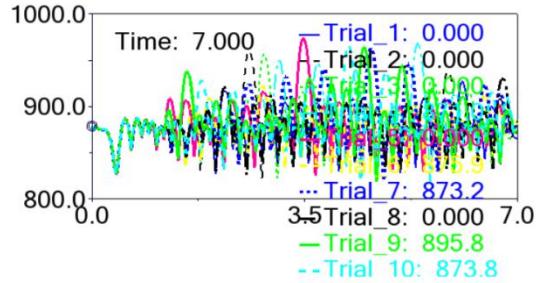
Design Study Summary
Model Name : MODEL_1
Date Run : 2021-06-12 00:44:55

Objectives
O1) Minimum of MARKER_283_MEA_1
    Units      : mm
    Maximum Value: 24.9505 (trial 4)
    Minimum Value: 16.4673 (trial 3)

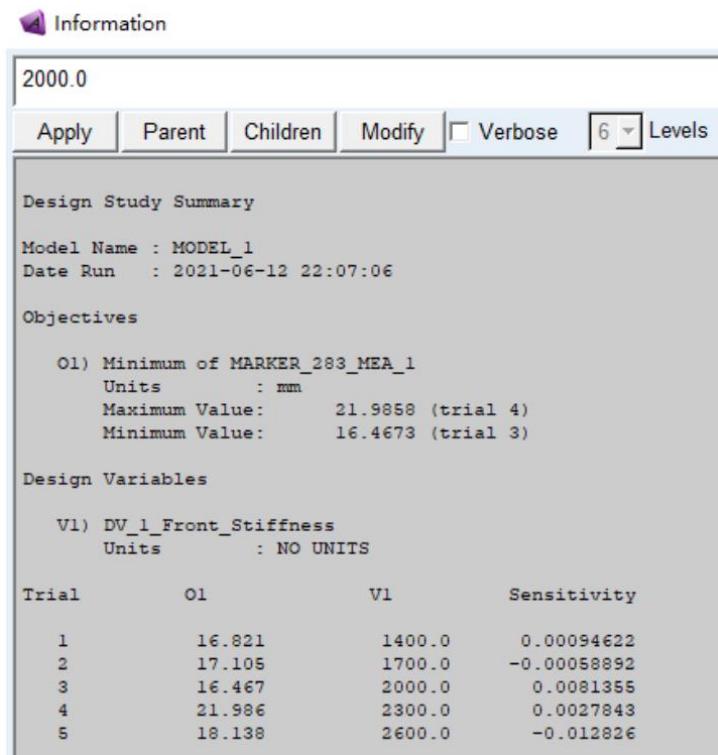
Design Variables
V1) DV_1_Front_Stiffness
    Units   : NO UNITS

Trial      O1          V1           Sensitivity
1          16.4673     1400.0       0.00094622
2          17.105      1700.0       -0.00058892
3          16.467      2000.0       0.0081355
4          21.986      2300.0       0.0027843
5          18.138      2600.0       -0.012826

```



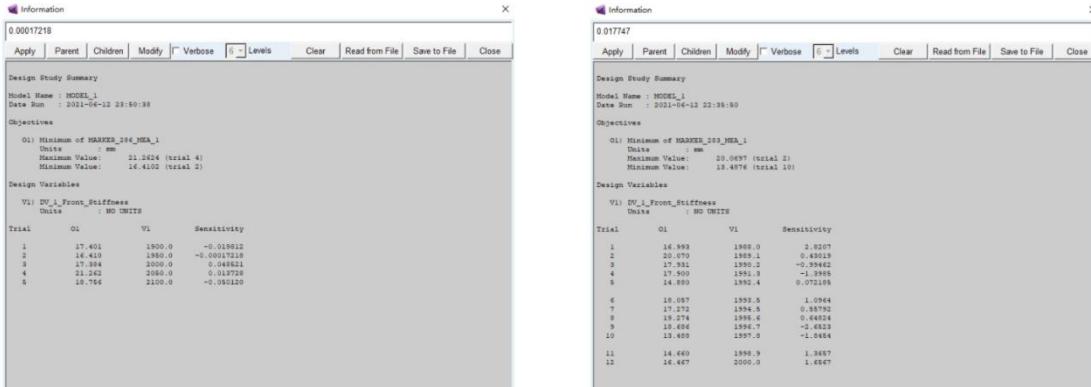
从上述结果来看，虽然最优的值还是出现在 5200 左右，但是 2000 多的数值同样表现出了很大的潜力，需要重新寻找一下优化的区间；



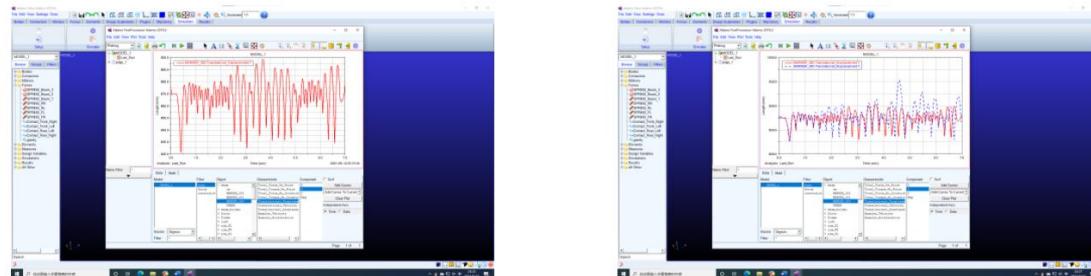
虽然不存在线性的关系，但是相对来说可以把区间进一步收敛，收敛至 1700 至 2000 之间。这时候 Troy 又提供了一个新的思路，也就是将 K 和 C 之间的比例先固定，然后 Beam1 的弹簧仍然保持一定的硬度（5000/500），于是我在这个基础上进行进一步的优化，此时四个轮子的 Stiffness 和 Damping ratio 均用一个参数来表示，进行 Design Study；

C_2 - front axle bellows stiffness	300000 (N/m)
b_2 - front axle shock absorbers damping	20000 (Ns/m)
m_3 - unsprung front axle mass	500 (kg)

参考其中一篇论文中对巴士Shock absorber的比例参数设定：设定比例为10

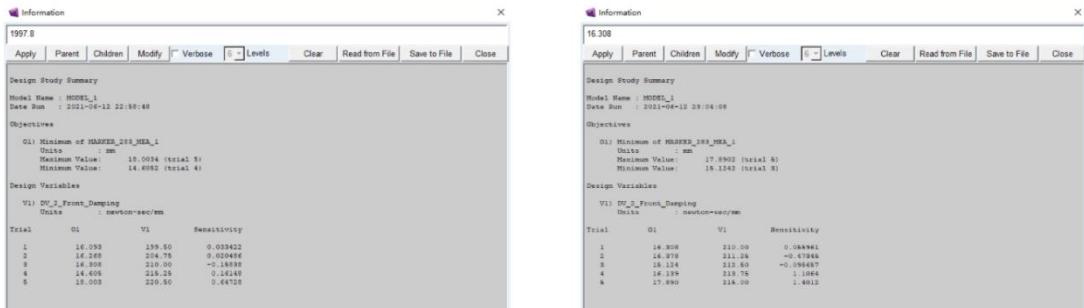


最终在这个阶段，选择了 1997.8 作为小车四个悬架的 Stiffness，其 Damping Ratio 为 Stiffness 数值上的十分之一，在这个数值的基础上，我进行了一次仿真；



优化后进行仿真得到的曲线与初始数值的对比

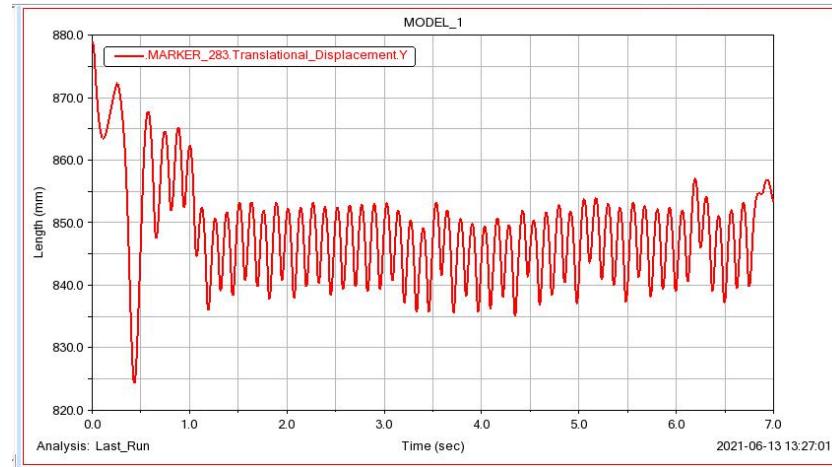
将比例固定得出较好的缓震效果后，接下来尝试固定四个悬挂的 Stiffness，对其 Damping Ratio 进行数值优化，但是最终效果并没有想象的那么理想，故在这一阶段确定的最优值是 Stiffness 1997.8，Damping Ratio 199.78；



重复上述步骤，并咨询他人改变优化范围范围，最终得到潜在最优参数为如下所示：

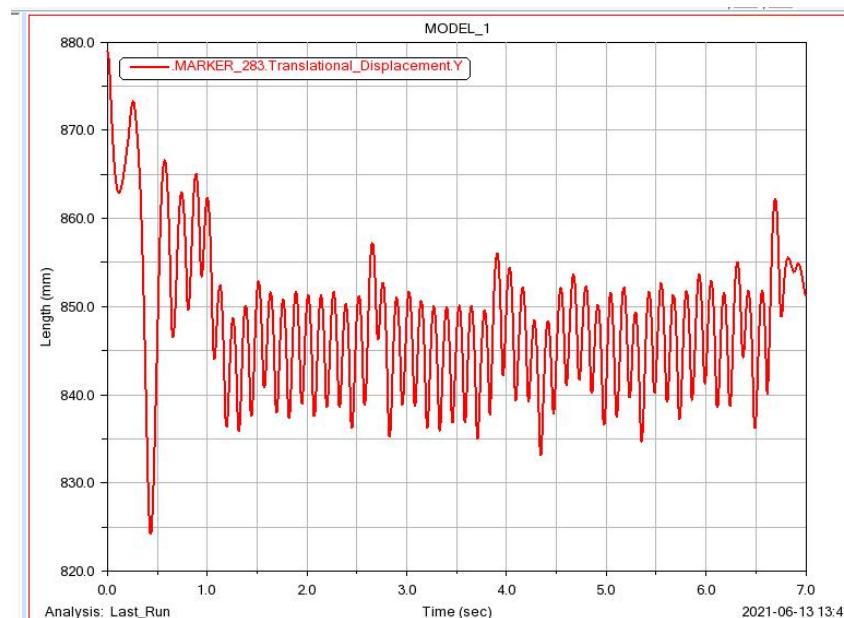
（由于 Adams 仿真问题，小车在开始的 1s 内出现下沉，故数据处理时减去前面不稳定部分）

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K5000/C500	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94	0.0025

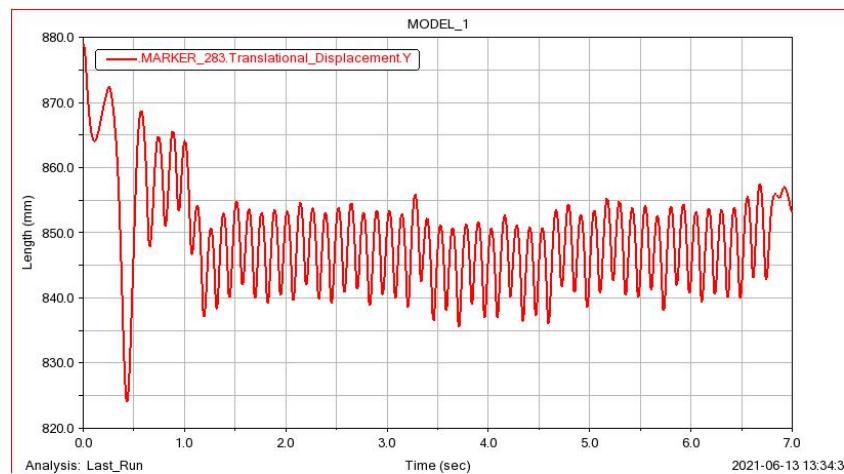


取该最优值附近值进行仿真，得到了以下结果：

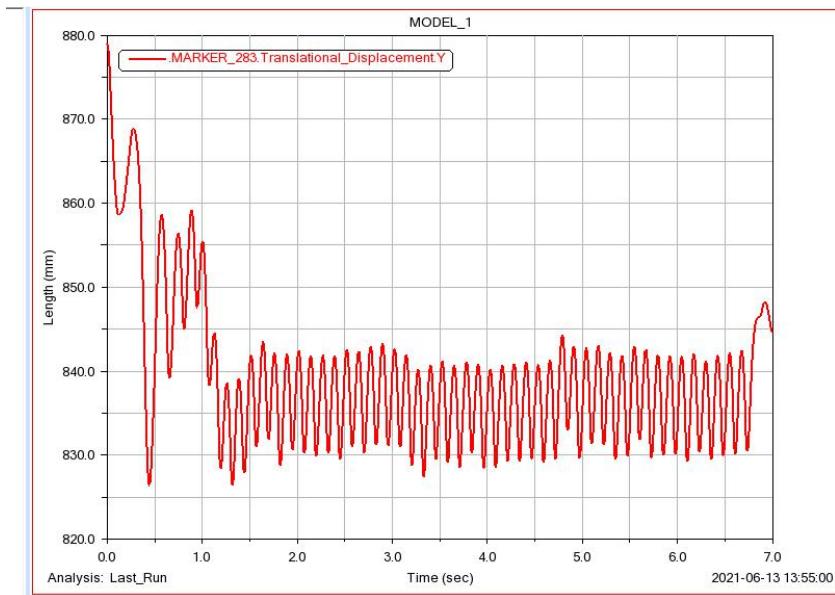
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K5000/C500	K260/C26	K260/C26	K260/C26	K260/C26	0.0025



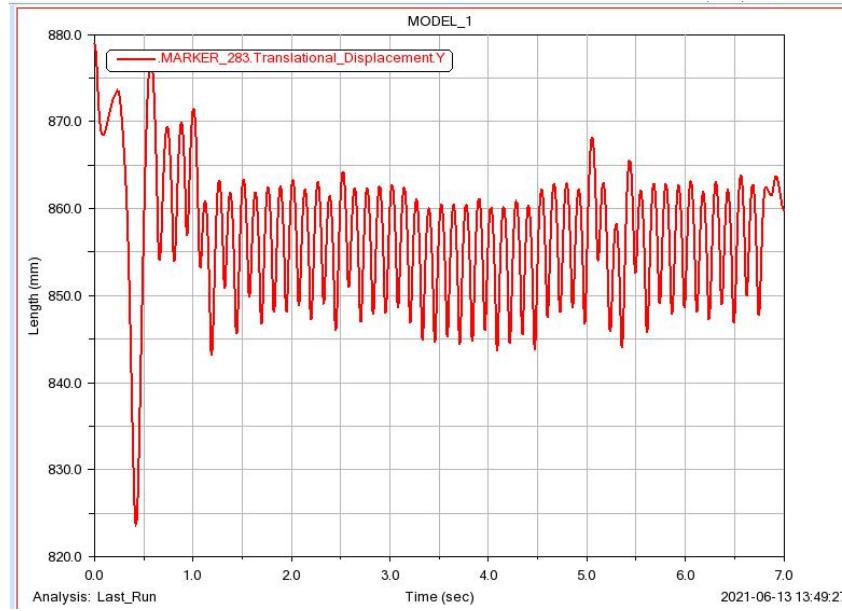
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K5000/C500	K280/C28	K280/C28	K280/C28	K280/C28	0.0027



阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20	0.0038



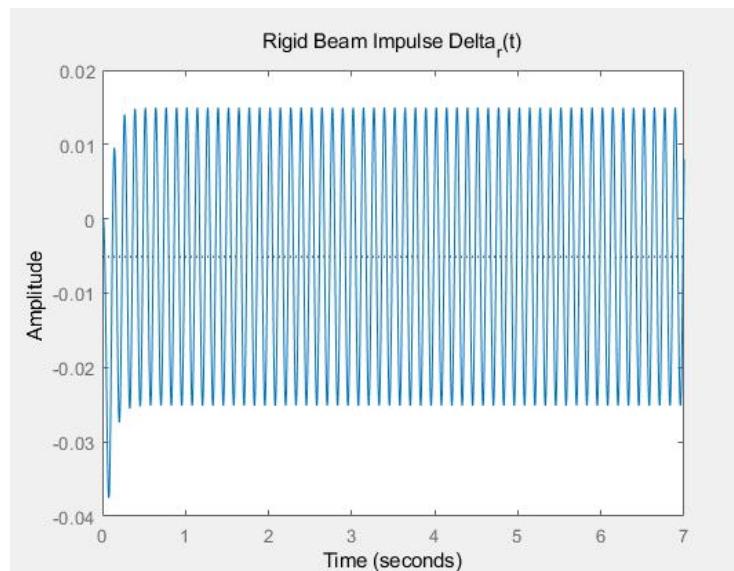
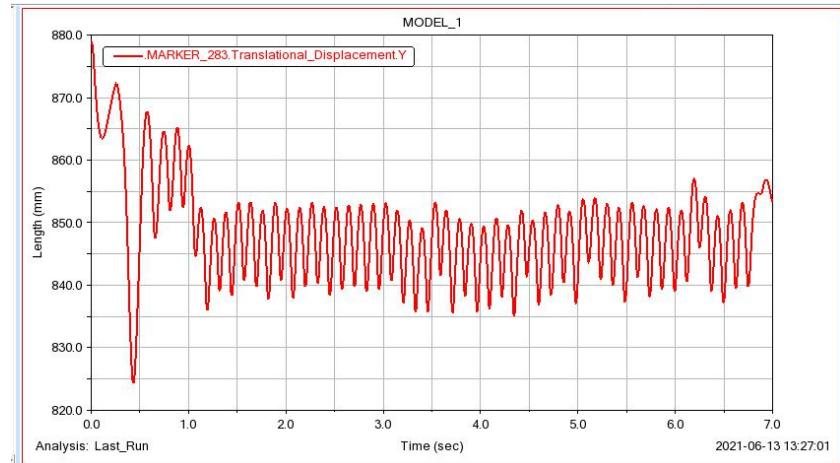
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K5000/C500	K400/C40	K400/C40	K400/C40	K400/C40	0.0069



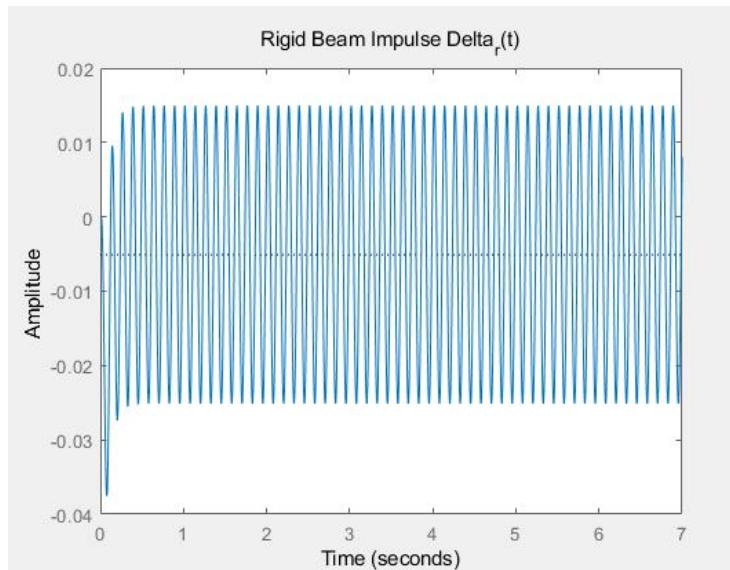
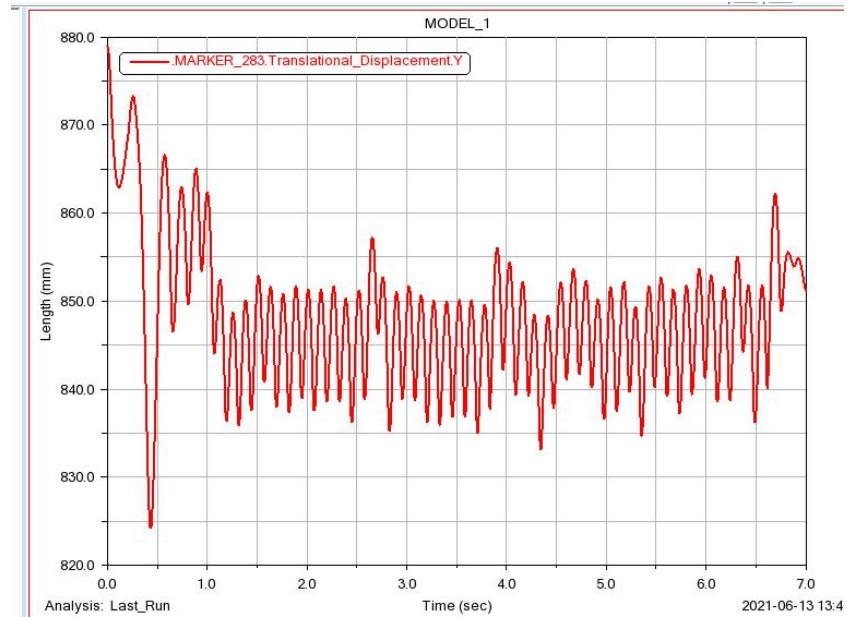
5. Matlab Simulation vs Adams Simulation:

在 Task2 中已经叙述了 Matlab 相关内容与操作，现将 Adams 与 Matlab 相同仿真内容进行比对。

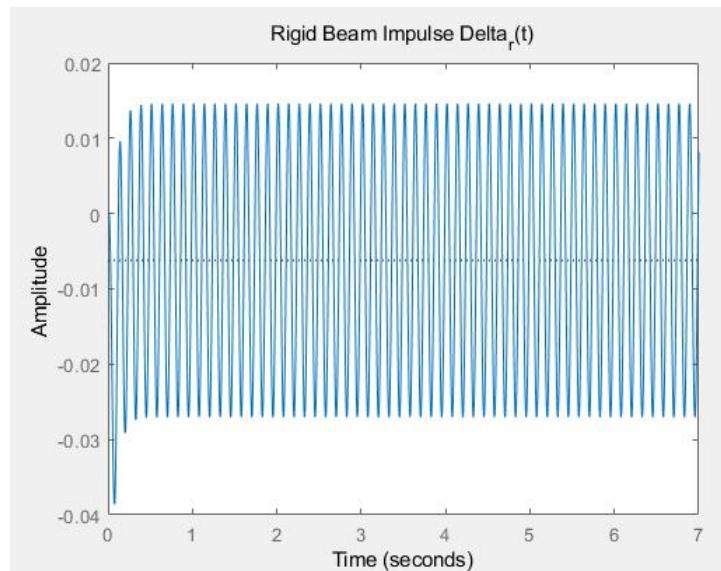
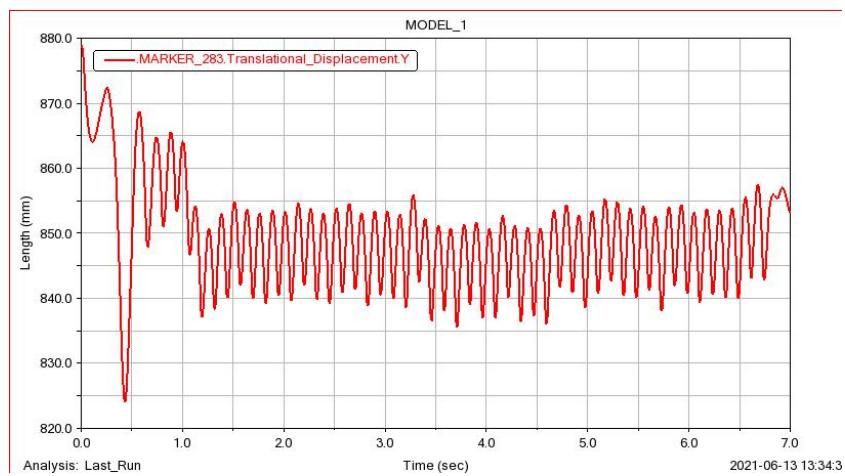
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94	K269.44/C26.94
Adams 数据处理结果		0.0025		
Matlab 数据处理结果		0.0084		



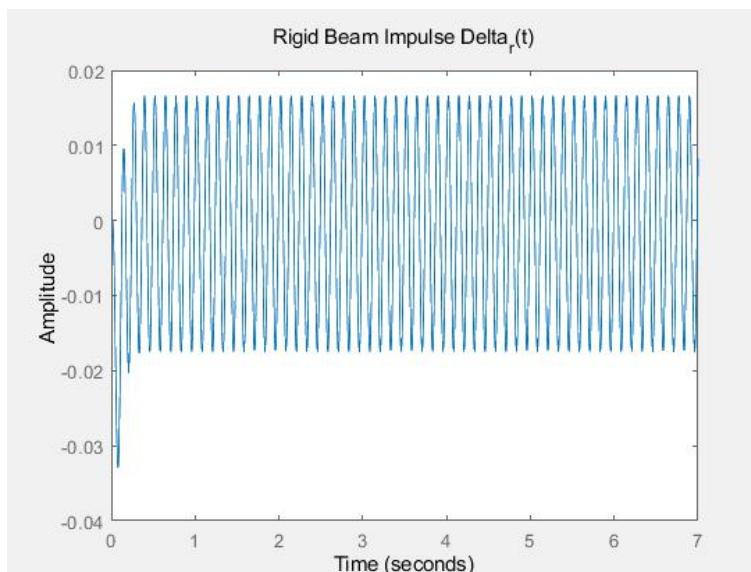
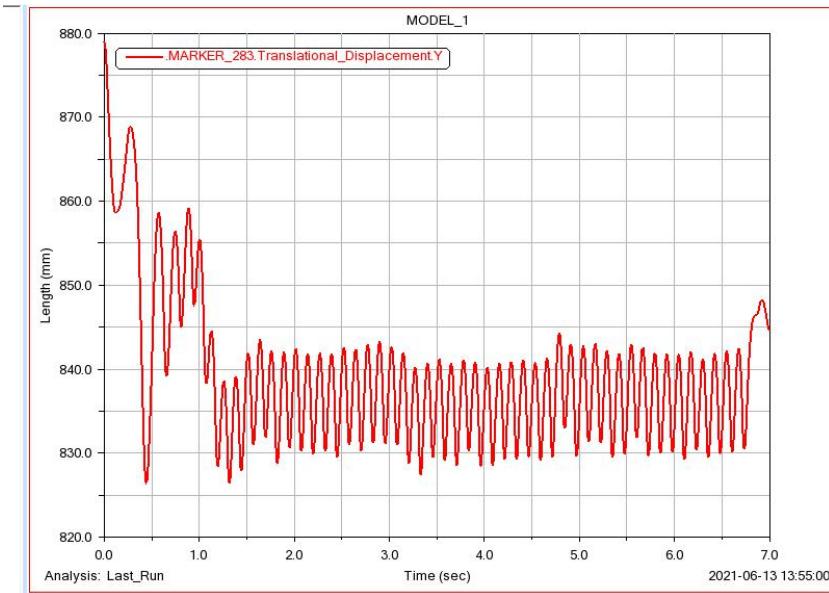
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K260/C26	K260/C26	K260/C26	K260/C26
Adams 数据处理结果		0.0025		
Matlab 数据处理结果		0.0080		



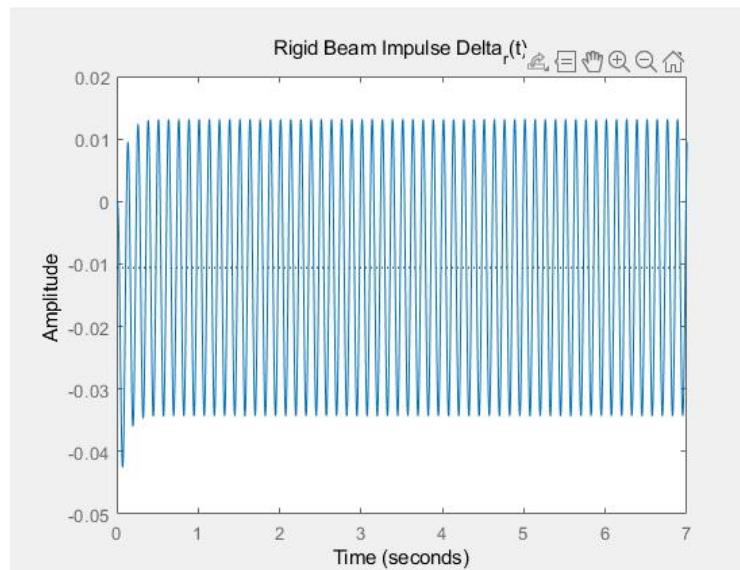
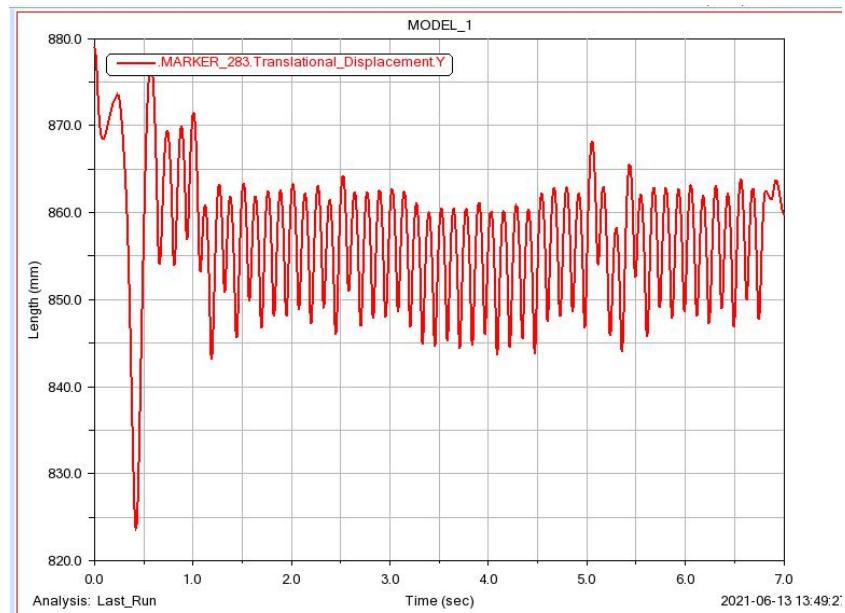
阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K280/C28	K280/C28	K280/C28	K280/C28
Adams 数据处理结果		0.0027		
Matlab 数据处理结果		0.0089		



阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20
Adams 数据处理结果		0.0038		
Matlab 数据处理结果		0.0051		



阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K400/C40	K400/C40	K400/C40	K400/C40
Adams 数据处理结果		0.0069		
Matlab 数据处理结果		0.0135		



Task4: Adams & Matlab Simulation - Flex

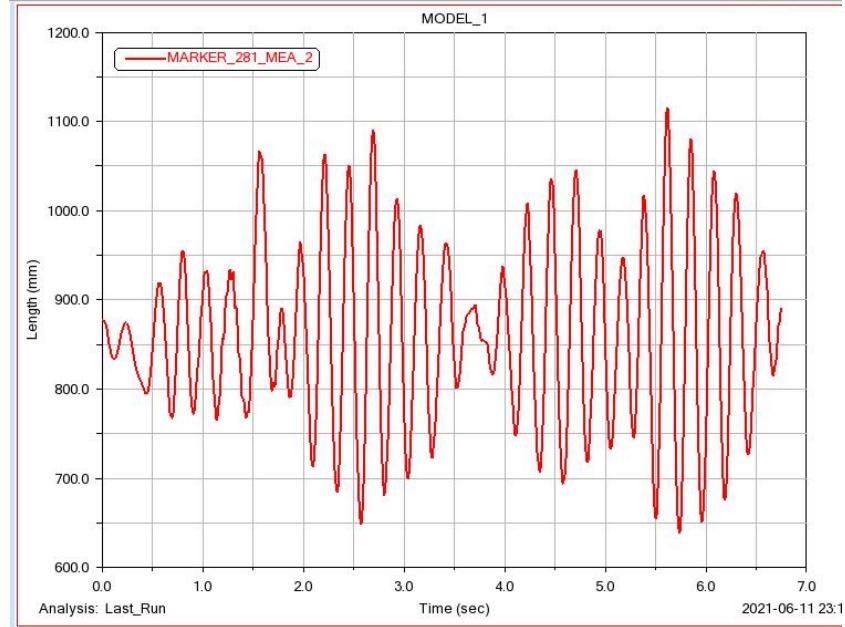
1. Simulation Process:

1.1 将文件中的 Beam 更换为 Beam_flex

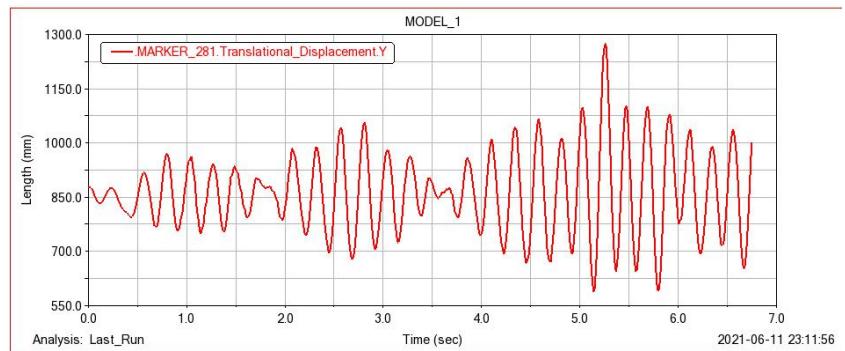
1.2 重复 Task3 中的操作并得到了如下数据图像

Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
---------	-----------	---------

柔性	K5000/C400	K5000/C400
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400

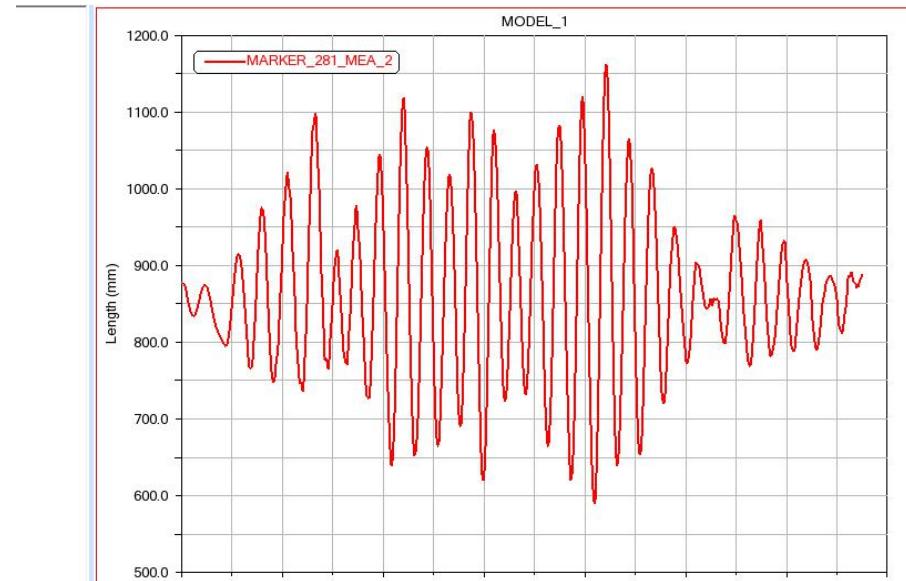


Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
柔性	K5000/C500	K5000/C500
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500

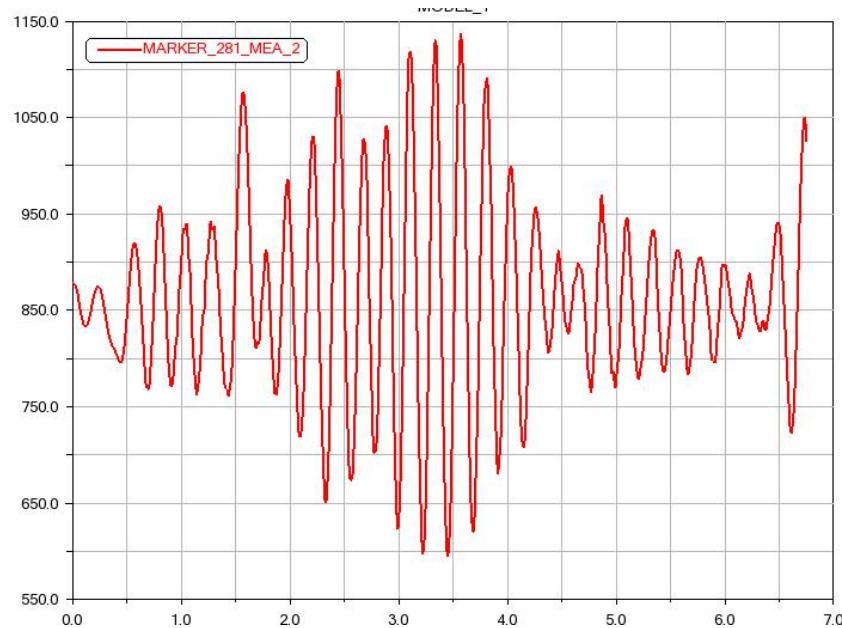


Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
柔性	K5000/C600	K5000/C600
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮

K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600
------------	------------	------------

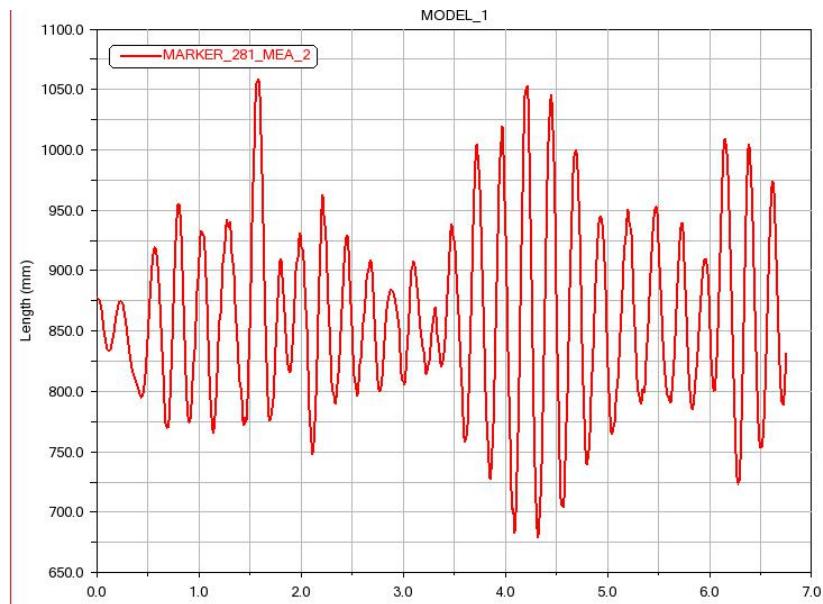


Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
柔性	K6000/C400	K6000/C400
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400

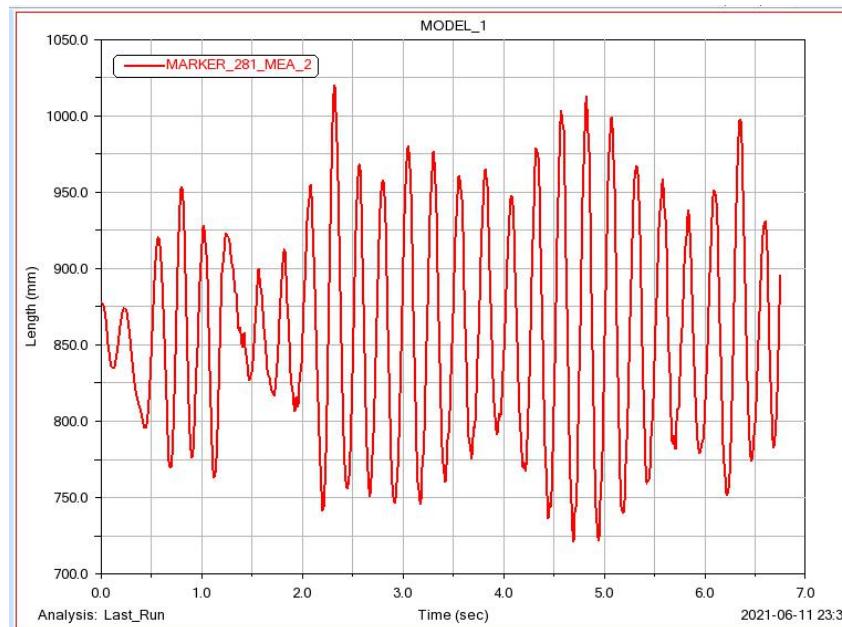


Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
柔性	K6000/C500	K6000/C500

阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500



Beam 属性	阻尼器-Beam1	阻尼器-前左轮
柔性	K6000/C600	K6000/C600
阻尼器-前右轮	阻尼器-后左轮	阻尼器-后右轮
K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600



2. Data Processing:

2.1 重复 Task3 中的操作并得到以下结果

	阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
1	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	K5000/C400	0.3403
2	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.4184
3	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	K5000/C600	0.4075
4	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	K6000/C400	0.3470
5	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	K6000/C500	0.1890
6	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	K6000/C600	0.1745

2.2 以上六组数据积分结果得到的结论为，当 5 个弹簧阻尼器参数均为 $K = 6000 \text{ N/mm}$, $C = 600 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 时，vehicle 减震效果最好。

3. More Data Test:

3.1 使用 Adams 仿真进行更多数据的获得，并重复数据处理步

骤，得到更多的积分结果如下：（本次只改变阻尼器-Beam1 的参数值，轮连接的阻尼器均为初始值）

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位 m^3
K3000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2372
K3000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.3026
K4000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.3405
K4000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2639
K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.1849
K6000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2851
K6000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2816
K7000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2056
K7000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2303
K8000/C400	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2158

K8000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	K5000/C500	0.2985
------------	------------	------------	------------	------------	--------

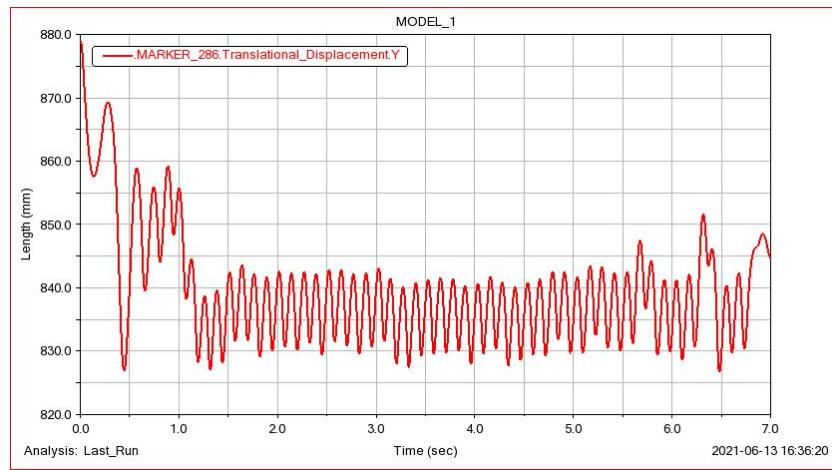
从以上数据可知：当轮连接阻尼器均为初始值，阻尼器 Beam1 参数 K、C 如上图所示变化时，阻尼器 Beam1 参数为 K = 5000 N/mm, C = 500 N·s/mm 时，减震效果最好。

4. Optimize by Adams:

<p>Design Study Summary</p> <p>Model Name : MODEL_1 Date Run : 2021-06-13 16:05:32</p> <p>Objectives</p> <p>O1) Minimum of MARKER_286_MEA_1 Units : mm Maximum Value: 29.0731 (trial 1) Minimum Value: 5.37331 (trial 3)</p> <p>Design Variables</p> <p>V1) DV_1_Front_Stiffness Units : NO UNITS</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Trial</th><th>O1</th><th>V1</th><th>Sensitivity</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>29.073</td><td>180.00</td><td>-0.22871</td></tr> <tr><td>2</td><td>26.786</td><td>190.00</td><td>-1.1850</td></tr> <tr><td>3</td><td>5.3733</td><td>200.00</td><td>-0.40251</td></tr> <tr><td>4</td><td>18.736</td><td>210.00</td><td>1.1320</td></tr> <tr><td>5</td><td>28.013</td><td>220.00</td><td>0.92767</td></tr> </tbody> </table>	Trial	O1	V1	Sensitivity	1	29.073	180.00	-0.22871	2	26.786	190.00	-1.1850	3	5.3733	200.00	-0.40251	4	18.736	210.00	1.1320	5	28.013	220.00	0.92767	<p>Design Study Summary</p> <p>Model Name : MODEL_1 Date Run : 2021-06-13 16:16:59</p> <p>Objectives</p> <p>O1) Minimum of MARKER_286_MEA_1 Units : mm Maximum Value: 24.139 (trial 2) Minimum Value: 5.37331 (trial 3)</p> <p>Design Variables</p> <p>V1) DV_1_Front_Stiffness Units : NO UNITS</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Trial</th><th>O1</th><th>V1</th><th>Sensitivity</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>14.712</td><td>196.00</td><td>4.7134</td></tr> <tr><td>2</td><td>24.139</td><td>198.00</td><td>-2.3347</td></tr> <tr><td>3</td><td>5.3733</td><td>200.00</td><td>-3.7384</td></tr> <tr><td>4</td><td>9.1854</td><td>202.00</td><td>2.2400</td></tr> <tr><td>5</td><td>14.333</td><td>204.00</td><td>2.5739</td></tr> </tbody> </table>	Trial	O1	V1	Sensitivity	1	14.712	196.00	4.7134	2	24.139	198.00	-2.3347	3	5.3733	200.00	-3.7384	4	9.1854	202.00	2.2400	5	14.333	204.00	2.5739
Trial	O1	V1	Sensitivity																																														
1	29.073	180.00	-0.22871																																														
2	26.786	190.00	-1.1850																																														
3	5.3733	200.00	-0.40251																																														
4	18.736	210.00	1.1320																																														
5	28.013	220.00	0.92767																																														
Trial	O1	V1	Sensitivity																																														
1	14.712	196.00	4.7134																																														
2	24.139	198.00	-2.3347																																														
3	5.3733	200.00	-3.7384																																														
4	9.1854	202.00	2.2400																																														
5	14.333	204.00	2.5739																																														

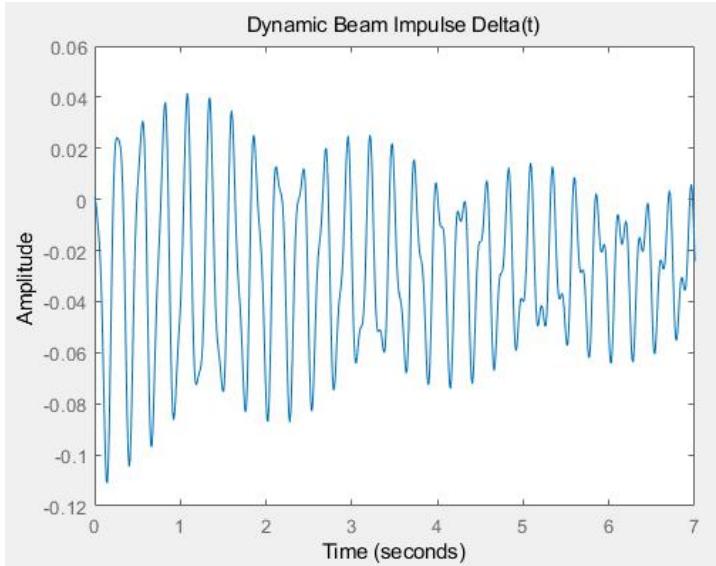
通过初步的筛选（从文献以及同学处得知），将 Stiffness 限制在了 200 的区间之内，在此区间内进行 10%的探索，发现最优值出现在 200 附近。随后以 200 为标准值进行 3%区间的探索，结果还是 200. 故最终得出阻尼器参数为 200/20 时为最优（以下是进行仿真后得出的数据）。

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮	积分结果 单位m ³
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20	0.0037



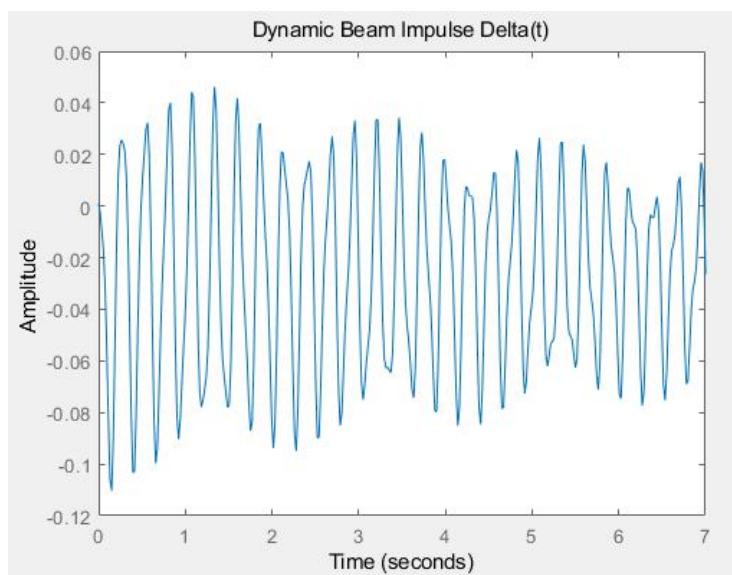
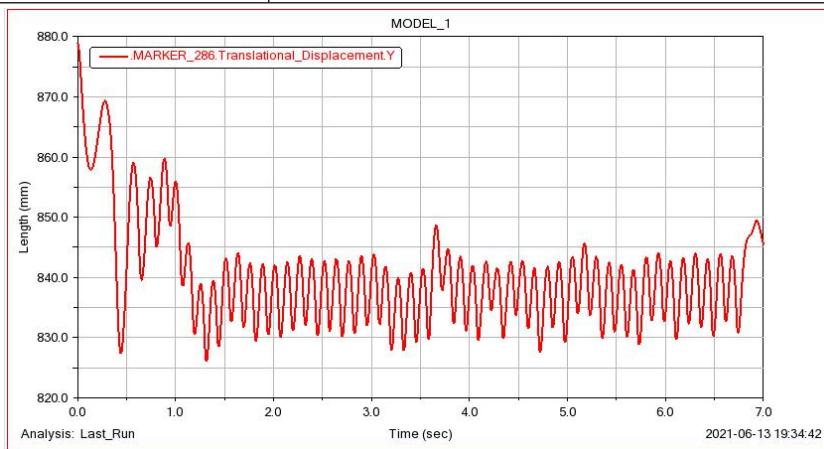
5. Matlab Simulation vs Adams Simulation:

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20
Adams 数据处理结果		0.0037		
Matlab 数据处理结果		0.0593		

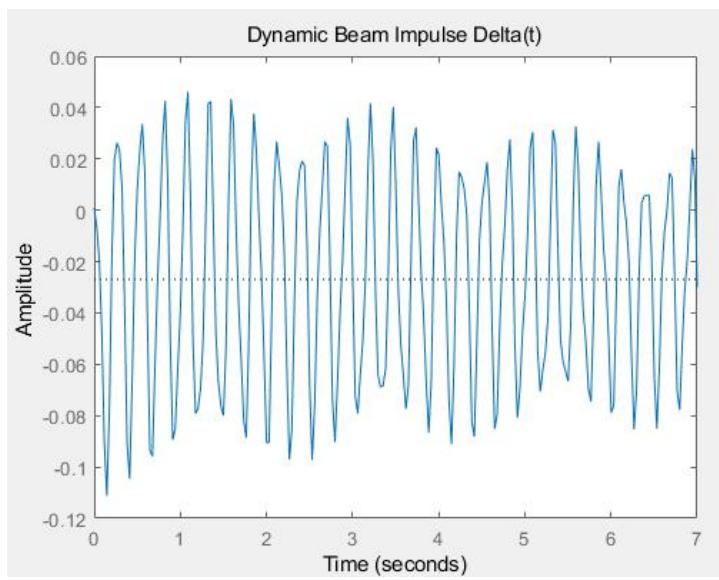
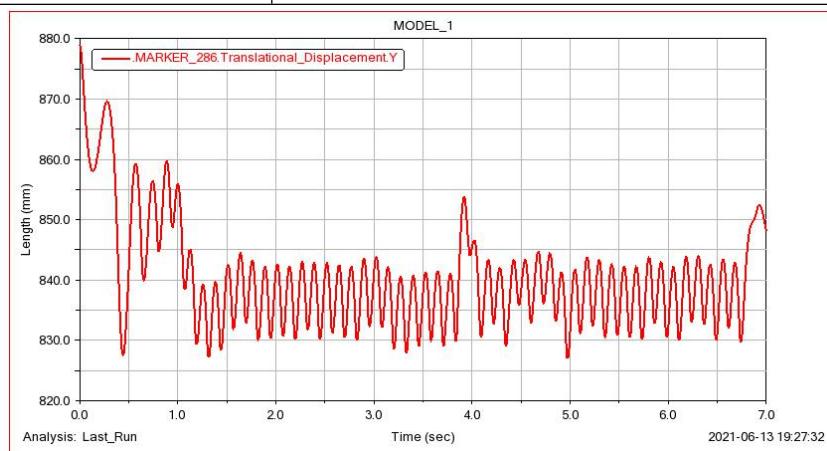


在之前的数据中，一直使用的是 Beam1 减震阻尼器，以下两组为尝试使用 Beam2 和 Beam3 减震阻尼器。

阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20
Adams 数据处理结果	0.0036			
Matlab 数据处理结果	0.0716			



阻尼器 -Beam1	阻尼器 -前左轮	阻尼器 -前右轮	阻尼器 -后左轮	阻尼器 -后右轮
K5000/C500	K200/C20	K200/C20	K200/C20	K200/C20
Adams 数据处理结果		0.0034		
Matlab 数据处理结果		0.0803		



从此三组数据对比来看，使用 Beam3 减震阻尼器效果更好。

Task5: Trajectory design and practicality

1. Trajectory design by Adams:

1.1 创建变量 DV_1，该变量的大小范围是 0-2000 degree

1.2 将车轮速度改为 $(DV_1) * time$

1.3 创建传感器，告知一次优化何时结束

1.4 使用 Adams Design Evaluation Tools 进行优化，优化目标设置为 Maker_283 的 Y 方向 Transitional Displacement 的方差大小

1.5 只进行五次优化得到如下结果：

1.6 以下结果结论为：当车轮速度分别为 0 degree/s, 500 degree/s, 1000 degree/s, 1500 degree/s, 2000 degree/s 时，优化结果越来越差。符合直观感受，即速度越快，小车通过时越抖。

Trial	O1	DV_1	Sensitivity
1	0.48999	0.0000	0.041482
2	21.231	500.00	1.5659
3	1566.4	1000.0	7.1630
4	7184.3	1500.0	9.0576
5	10624.	2000.0	6.8795

1.7 缩小范围至 720-1440 degree，即 2r/s - 4r/s，得到以下结果，结论与上述相同。

Trial	O1	DV_1	Sensitivity
1	21.458	720.00	0.15865
2	29.617	771.43	0.84687
3	108.56	822.86	3.3625
4	375.48	874.29	6.0945
5	735.43	925.71	7.6299
6	1160.3	977.14	10.268
7	1791.6	1028.6	12.275

Trial	O1	DV_3	Sensitivity
1	22.621	700.00	-0.063172
2	18.299	768.42	-0.025091
3	19.188	836.84	0.0098598
4	19.648	905.26	0.0053122
5	19.915	973.68	0.23510
6	51.820	1042.1	0.62729
7	105.75	1110.5	-0.018874
8	49.237	1178.9	0.39022
9	159.15	1247.4	1.6262
10	271.78	1315.8	1.6460

1.8 继续缩小范围，发现速度为 768.42 degree/s 时可能是最优的适合道路的速度。

2. Find Practical Variable

市面上的 Shock Absorber 相对来说比较难找，数量级很多都不一样，找了几篇论文，只作为参考。

可以得知，在 Task3 优化部分使用的，参数为 $K = 269.4 \text{ N/mm}$, $C = 26.94 \text{ N} \cdot \text{s/mm}$ 的减震阻尼器是存在的（但是可能需要进行一些单位换算）。

Identification variables	Speed (km/h)			Mean value	Parameter	Limits
	65	75	85			
K_{cfL} (N/m)	25,104	25,118	25,123	25,115	k_{inrt}	35000 N/m - 70000 N/m
K_{cfR} (N/m)	25,011	25,070	25,261	25,114	c_{inrt}	200 - 2000 N.s/m
K_{crL} (N/m)	25,603	25,619	25,621	25,614	b_{inrt}	100 kg - 400 kg
K_{crR} (N/m)	25,501	25,503	25,516	25,507		
C_{cfL} (N s/m)	1509	1541	1534	1528		
C_{cfR} (N s/m)	1527	1551	1548	1542		
C_{crL} (N s/m)	1516	1542	1570	1543		
C_{crR} (N s/m)	1521	1502	1578	1534		

Parameter	Value
k_{inrt}	35000N/m
c_{inrt}	2000N.s/m
b_{inrt}	400kg

Stiffness parameters	Front-left	Front-right	Rear-left	Rear-right
Tested (N/m)	23,812	23,126	23,897	23,112
Identified (N/m)	25,115	25,114	25,614	25,507
Absolute deviation (N/m)	1303	1988	1717	2395
Relative deviation (%)	5.47	8.60	7.19	10.40

Damping parameters	Front-left	Front-right	Rear-left	Rear-right
Tested (N s/m)	1401	1399	1392	1406
Identified (N s/m)	1528	1542	1543	1534
Absolute deviation (N s/m)	127	143	151	128
Relative deviation (%)	9.06	10.22	10.85	9.10

Shock Absorber	Excitation	RMS Disp., mm	RMS Force, N	Stiffness K, N/mm	Damping c, Ns/mm
Front	Rough Road	0.025	1.30	32.73	0.170
Front	Smooth Road	0.013	0.91	35.19	0.231
Rear	Rough Road	0.031	1.64	24.16	0.200
Rear	Smooth Road	0.019	1.15	25.42	0.231

m_s	Sprung mass	1200kg
m_t	Un-sprung mass	125kg
k	Suspension stiffness	60000 N/m
k_t	Tire stiffness	220000 N/m
c	Suspension damping	2500 Ns/m

关于汽车调教，其实是一门很深的学问。就像头文字 D 里藤原拓海的老爸，将一辆 AE86 的避震改了又改，最终才能得到一个理想的值。



参考文献

Zhao, L., Zhou, C., Yu, Y., & Yang, F. (2016). A method to evaluate stiffness and damping parameters of cabin suspension system for heavy truck. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(7), 1687814016654429.

Rao, M. D., & Gruenberg, S. (2002). Measurement of equivalent stiffness and damping of shock absorbers. *Experimental Techniques*, 26(2), 39-42.

Sun, S., Deng, H., Du, H., Li, W., Yang, J., Liu, G., ... & Yan, T. (2015). A compact variable stiffness and damping shock absorber for vehicle suspension. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 20(5), 2621-2629.

Rao, M. D., & Gruenberg, S. (2002). Measurement of equivalent stiffness and damping of shock absorbers. *Experimental Techniques*, 26(2), 39-42.

Cui, Y., Kurfess, T. R., & Messman, M. (2010, October). Testing and modeling of nonlinear properties of shock absorbers for vehicle dynamics studies. In *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science* (Vol. 2, pp. 20-22).

Work Distribution

Members	Task1	Task2	Task3	Task4	Task5
苗子良	55%	55%	10%	10%	10%
周晋徽	5%	5%	40%	40%	40%
刘洪磊	5%	5%	40%	40%	40%
林卓垠	35%	35%	10%	10%	10%