Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-Механический институт

Высшая школа теоретической механики

Направление подготовки

«01.03.03 Механика и математическое моделирование»

Отчет по лабораторной работе №1

Тема «Решение алгебраических и трансцендентных уравнений»

Дисциплина «Численные методы»

Выполнил студент гр. 3050103/00002 Похожаева Е. М.

Преподаватель Козлов К. Н.

Санкт-Петербург, 2022 г.

1. Формулировка задачи.

Численным методом Эйткена отыскать корень уравнения $f(x) = 0$

Отыскать корни следующих уравнений:

- Алгебраическое - $x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$
- Трансцендентное - $2xsin(x) - \cos(x) = 0 \quad x \epsilon [0.4, 1]$

2. Алгоритм метода и условия его применимости.

Метод Эйткена является трёхшаговым методом. Необходимо задать начальное значение x_0, а также вычислить два последующих - $x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1)$. Отметим, что изначальное уравнение $f(x) = 0$ необходимо привести к виду, удобному для итераций $\phi(x) = 0$.

$x_0, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1)$

Пока (1)

Вычислить $\tilde{x}_2$ по формуле: $\tilde{x}^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k+1)}x^{(k-1)}}{2x^k - x^{k+1} - x^{k-1}}$,

$x_3 = \phi(\tilde{x}_2)$

Если $|x_3 - \tilde{x}_2| > \frac{1-q}{q}\epsilon$, где $q = \max|\phi'(x)|\,, x \in [a, b]$

$x_0 = \tilde{x}_2,\ \ x_1 = x_3,\ \ x_2 = \phi(x_1)$

Иначе

Закончить вычисления

Условия применимости:

- $f \in C([a, b])$
- $f(a)f(b) < 0$
- $|\phi'(x)| \le q < 1$

3. Предварительный анализ задачи.

3.1 Алгебраическое уравнение.

Рассмотрим алгебраическое уравнение:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$$

Приведём уравнение к виду удобному для итераций, используя общий подход. Выберем промежуток [-2,-1]. Пусть f' непрерывна и знакопостоянна на этом отрезке.

$$f(-2)f(-1) < 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ x = x - \alpha f(x), \text{где } \alpha \neq 0 \Rightarrow \ \phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha f'(x) < 1 \ \Leftrightarrow 0 < \alpha f'(x) < 2$$

$$\Rightarrow sign(\alpha) = sign(f'(x))$$

$$\Rightarrow |\alpha| < \frac{2}{M_1}, \text{где } M_1 = \max|f'(x)|, x \,\epsilon\, [-2, -1]$$

Найдём α:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

$$\max|f'(x)| = f'(-2) = 21 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{21} \sim 0.09523809523$$

Найдём q:

$$\phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$\phi'(x) = 1 - 0.09523809523(3x^2 - 6x - 3)$$

$$q = \max|\phi'(x)| = \max|\phi'(-1)| = 0.974$$

3.2 Трансцендентное уравнение.

Рассмотрим трансцендентное уравнение:

$$f(x) = 2xsin(x) - \cos(x)$$

Приведём уравнение к виду удобному для итераций, используя общий подход. Задан промежуток [0.4,1]. Пусть f' непрерывна и знакопостоянна на этом отрезке.

$$f(0.4)f(1) < 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ x = x - \alpha f(x), \text{где } \alpha \neq 0 \Rightarrow \ \phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha f'(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha f'(x) < 2$$

$$\Rightarrow sign(\alpha) = sign(f'(x))$$

$$\Rightarrow |\alpha| < \frac{2}{M_1}, \text{где } M_1 = \max|f'(x)|, x \in [0.4, 1]$$

Найдём α:

$$f'(x) = 2\sin(\mathrm{x}) + 2\mathrm{x}\cos(\mathrm{x}) + \sin(\mathrm{x})$$

$$\max|f'(x)| = f'(1) = 3.6 \Rightarrow \alpha < \frac{2}{3.6} \sim 0.55555555555$$

Найдём q:

$$\phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$\phi'(x) = 1 - 0.55555555555(3\sin(x) + 2x cos(x))$$

$$q = \max|\phi'(x)| = \max|\phi'(1)| = 0.947$$

4. Тестовый пример с детальными расчётами.

Рассмотрим алгебраическое уравнение:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 11 = 0$$

Приведём уравнение к виду удобному для итераций, используя общий подход. Выберем промежуток [-2,-1]. Пусть f' непрерывна и знакопостоянна на этом отрезке.

$$f(-2)f(-1) < 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow\ x = x - \alpha f(x), \text{где } \alpha \neq 0 \Rightarrow\ \phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$|\phi'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha f'(x) < 1\ \Leftrightarrow 0 < \alpha f'(x) < 2$$

$$\Rightarrow sign(\alpha) = sign(f'(x))$$

$$\Rightarrow |\alpha| < \frac{2}{M_1}, \text{где } M_1 = \max|f'(x)|, x \epsilon\ [-2,-1]$$

Найдём α:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

$$\max|f'(x)| = f'(-2) = 21\ \Rightarrow \alpha < \frac{2}{21} \sim 0.09523809523$$

Найдём q:

$$\phi(x) = x - \alpha f(x)$$

$$\phi'(x) = 1 - 0.09523809523(3x^2 - 6x - 3)$$

$$q = \max|\phi'(x)| = \max|\phi'(-1)| = 0.974$$

$$x_0 = a, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1)$$

1-я итерация:

$$x_0 = -2, x_1 = -1.71429, x_2 = -1.93225$$

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k+1)}x^{(k-1)}}{2x^k - x^{k+1} - x^{k-1}} = \frac{-2 * 1.93225 + 1.71429^2}{-2 * 1.71429 + 1.93225 + 2} = -1.83793$$

$$x_3 = -1.85425$$

Условия остановки итерационного процесса не достигаются, делаем вторую итерацию:

$$|-1.837929 + 1.85425| = 0.0163216 < \frac{1 - 0.974}{0.974} * 0.1 = 0.0026694$$

2-я итерация:

$x_0 = -1.837927232, x_1 = -1.85424886473, x_2 = -1.8421231074$

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - x^{(k+1)}x^{(k-1)}}{2x^k - x^{k+1} - x^{k-1}} = -1.84729173602453$$

$x_3 = -1.847344472143425$

Условия остановки итерационного процесса:

$$|-1.84729173 + 1.847344| = 5.298e - 05 > \frac{1 - 0.974}{0.974} * 0.1 = 0.0026694$$

Нашли приблизительное решение уравнения $\tilde{x} = -1.847344472143425$ с точностью $\mathrm{E} = 0.1$ за одну итерацию.

5. **Подготовка контрольных тестов**.

Для исследования метода проведем следующие тесты:

1) Зависимость фактической погрешности от заданной точности. Будем задавать точность ϵ и сравнивать полученный корень с точным значением корня x^*: для алгебраической функции $x^* = 1 - 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}$, для трансцендентной $x^* = 0.653271187094403$.
2) Зависимость фактической погрешности от номера итерации.
3) Зависимость числа итераций от заданной точности.
4) Зависимость относительной погрешности от возмущения в коэффициенте уравнений.

6. Модульная структура программы

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <iomanip>
#include <fstream>
using namespace std;

const double q = 0.947; // 0.974 - для полинома, 0.947 - трансцендентное уравнение
const double solve = 0.653271187094403;//1 - pow(2,1.0/3)-pow(2,2.0/3) - для полинома, 0.653271187094403 - трансцендентное уравнение
ofstream file, fefile, refile;


// полином
inline double f(double x)
{
}

// трансцендентное уравнение
inline double f2(double x)
{
}

//фактическая погрешность
inline double facterror(double x)
{
    return fabs(solve - x);
}

//относительная погрешность
inline double relativeerror(double x)
{
    return fabs(facterror(x) / solve);
}

//сохранение в файлы
void saveinfile(int i, double x3)
{
}

int main()
{
    return 0;
}
```

7. Численный анализ решения задачи

Отыщем корень алгебраической функции с помощью подхода Эйткена. Будем задавать различную точность и вычислять фактическую погрешность как модуль разности точного корня и вычисленного. Выведем количество итераций, которое потребовалось для нахождения корня с заданной точностью. Результаты занесены в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты вычислений. Алгебраическая функция.

Заданная точность	Фактическая погрешность	Число итераций
10^{-1}	2.26195711745536e-05	2
10^{-2}	2.26195711745536e-05	2
10^{-3}	2.3576074426046e-10	3
10^{-4}	2.3576074426046e-10	3
10^{-5}	2.3576074426046e-10	3
10^{-6}	2.3576074426046e-10	3
10^{-7}	2.3576074426046e-10	3
10^{-8}	9.96727145263776e-11	15
10^{-9}	6.3851146592242e-12	73

Также зададим точность $\epsilon = 10^{-8}$ и для каждой итерации выведем фактическую погрешность. Результаты занесены в таблицу 2.

Таблица 2. Алгебраическая функция.

Номер итерации	Фактическая погрешность
1	0.00692676287079097
2	2.26195711745536e-05
3	2.3576074426046e-10
4	1.80905524116426e-07
5	3.4047809016613e-10
6	5.90901076957806e-08
7	6.10957284763458e-10
8	6.14041595348169e-08
9	8.67183658215254e-10
10	9.41253519570751e-10

11	3.20243165319312e-09
12	1.94958149624114e-08
13	9.49086143009481e-10
14	5.47567955422323e-08
15	9.96727145263776e-11

Аналогичные действия проведем для трансцендентной функции и занесем результаты в таблицу 3, 4.

Таблица 3. Результаты вычислений. Трансцендентная функция.

Заданная точность	Фактическая погрешность	Число итераций
10^{-1}	4.03691793456895e-05	2
10^{-2}	4.03691793456895e-05	2
10^{-3}	9.04794128508968e-10	3
10^{-4}	9.04794128508968e-10	3
10^{-5}	9.04794128508968e-10	3
10^{-6}	9.04794128508968e-10	3
10^{-7}	9.04794128508968e-10	3
10^{-8}	8.22940604550126e-11	4
10^{-9}	9.33453314644339e-12	37

Таблица 4. Трансцендентная функция.

Номер итерации	Фактическая погрешность
1	0.0084046411642793
2	0.653311556273749
3	9.04794128508968e-10

Также получим данные для зависимости процента относительной погрешности от процента возмущения для полинома и трансцендентного уравнения.

Таблица 5. Зависимость процента относительной погрешности от процента возмущения

Процент возмущения в коэффициенте уравнения, %	Процент относительной погрешности для полинома, %	Процент относительной погрешности для трансцендентного уравнения, %
1	0.1793266439747	0.101665738779583
2	0.310399383389916	0.203380955449391
3	0.535178384987082	0.0221073071528647

Построим графики по таблицам. Сравним их.

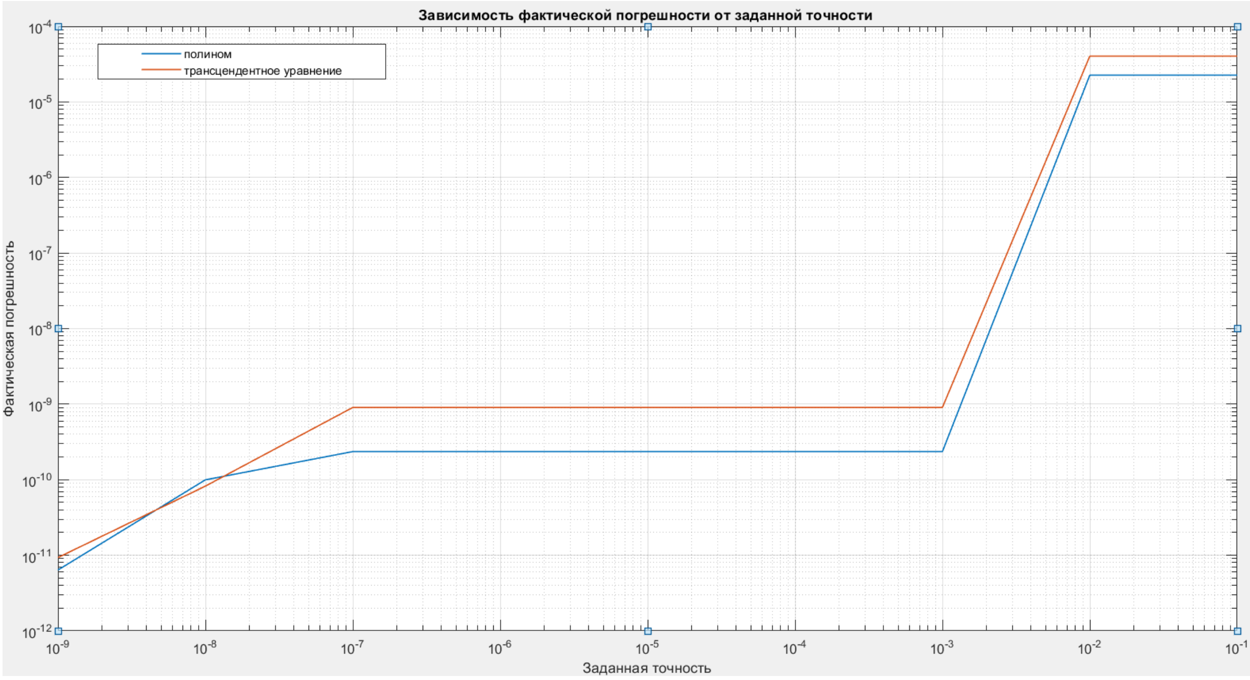

Рисунок 1. Зависимость фактической погрешности от заданной точности.

Анализируя график выше, мы приходим к выводу, что заданная точность всегда достигается, метод Эйткена реализован верно.

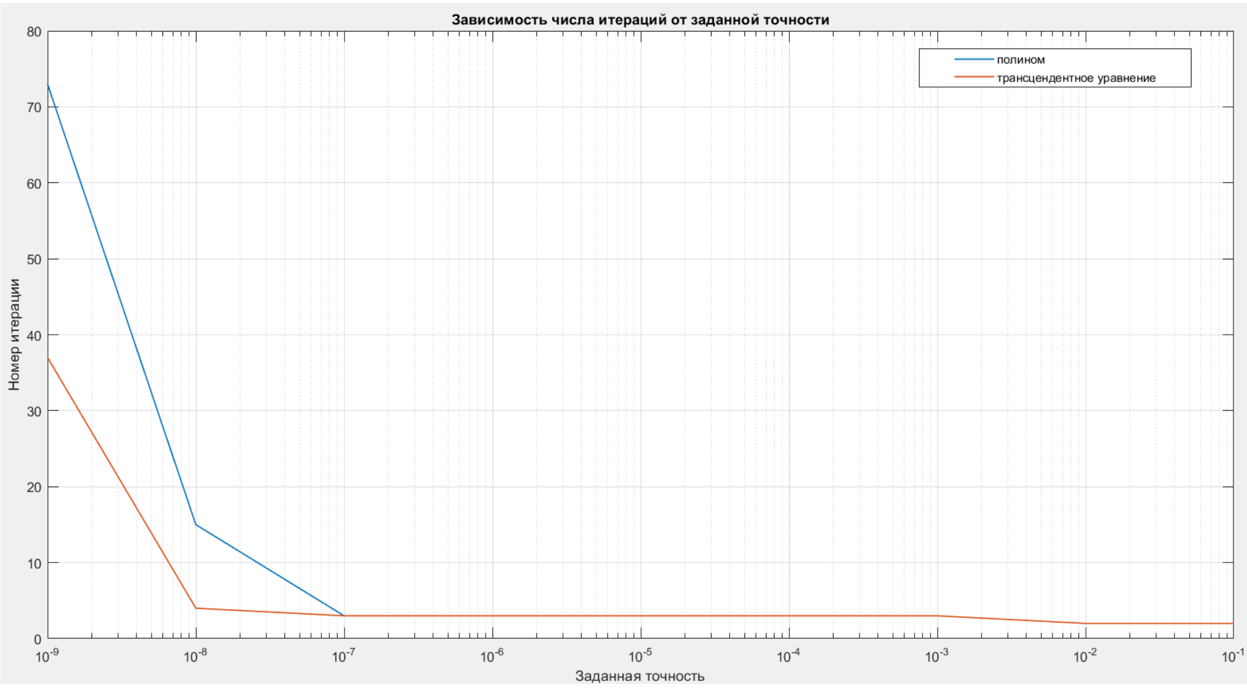

Рисунок 2. Зависимость числа итераций от заданной точности.

Выше приведен график зависимости количества итераций от заданной точности. Видим, что для небольшой точности требуется небольшое количество итераций – корень находится уже на третьей итерации. Для нахождения корня с точностью $10^{-8}, 10^{-9}$ для полинома потребовалось больше итераций.

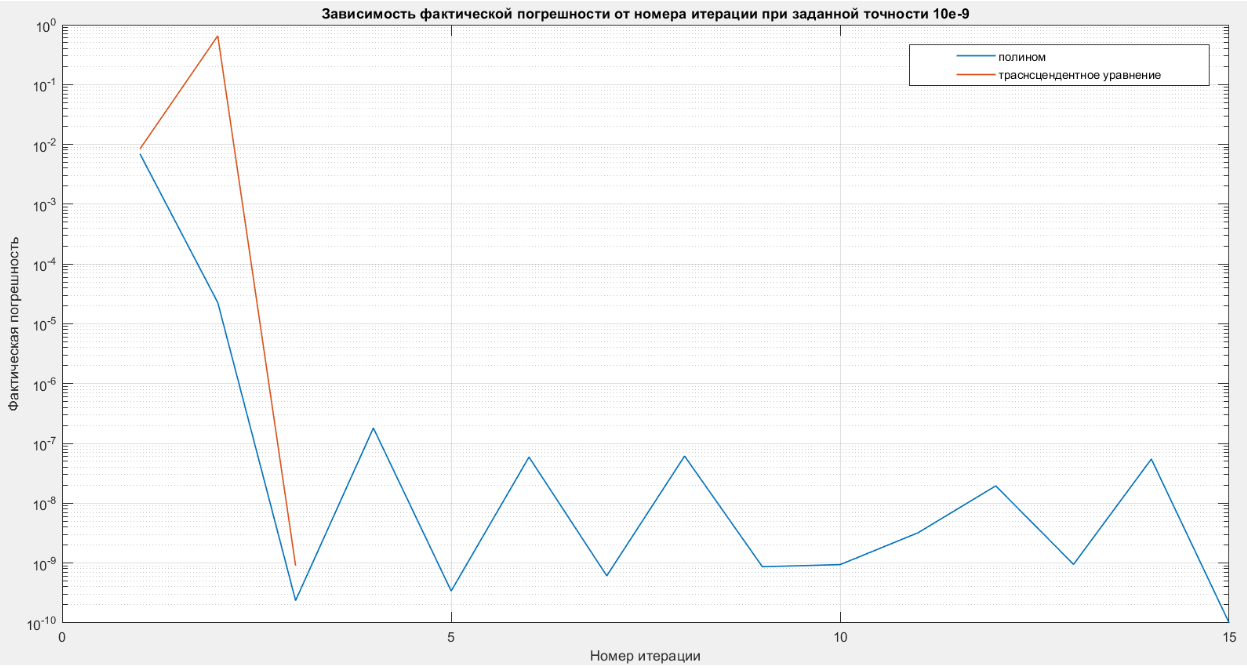

Рисунок 3. Зависимость фактической погрешности от номера итерации про заданной точности 10^{-8}.

Из графика выше видим, что с увеличением номера итерации фактическая погрешность стремится к 0. В данном тесте была зафиксирована точность 10^{-8}. Видим, что для полинома потребовалось больше итераций, а график зависимости погрешности от номера итерации имеет скачкообразный характер. Вывод: характер такой зависимости несет немонотонный характер для подхода Эйткена, вычисленный корень на k+1-й итерации может быть вычислен с большей погрешностью, чем корень на k-ой.

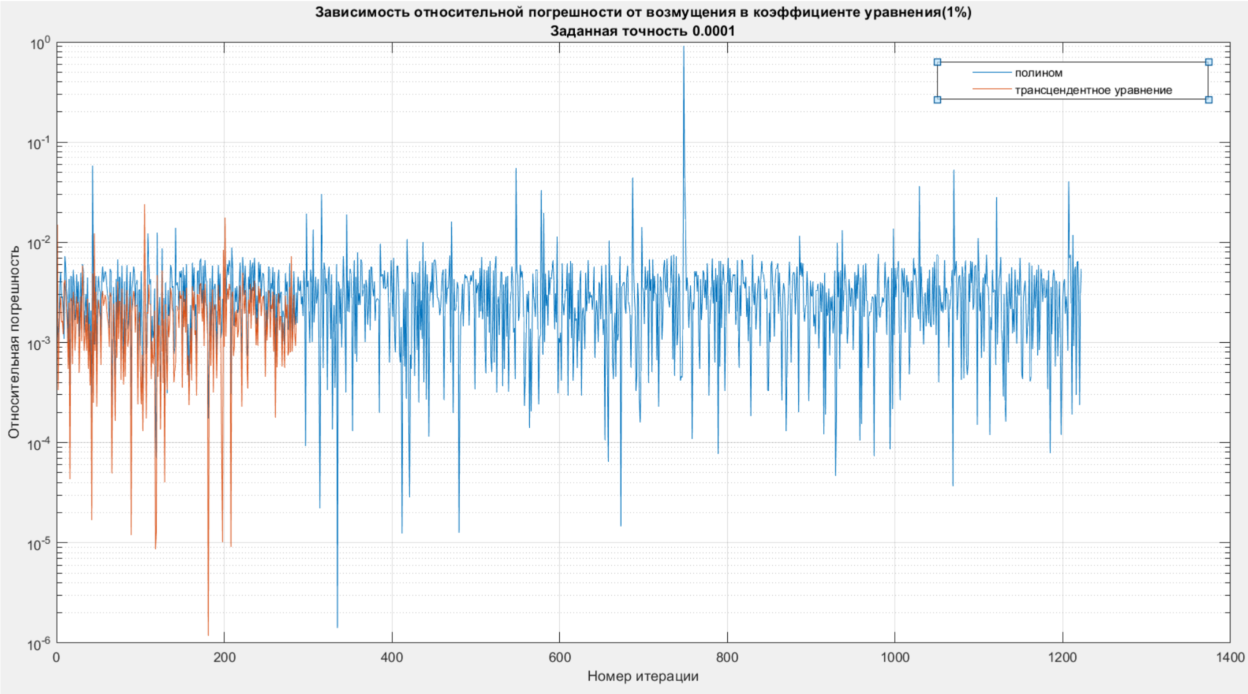

Рисунок 4. Зависимость относительной погрешности от возмущения в коэффициенте уравнения (1%). Заданная точность 10^{-4}.

Количество итераций при возмущении для алгебраической функции – 1223, и 287 для трансцендентной.

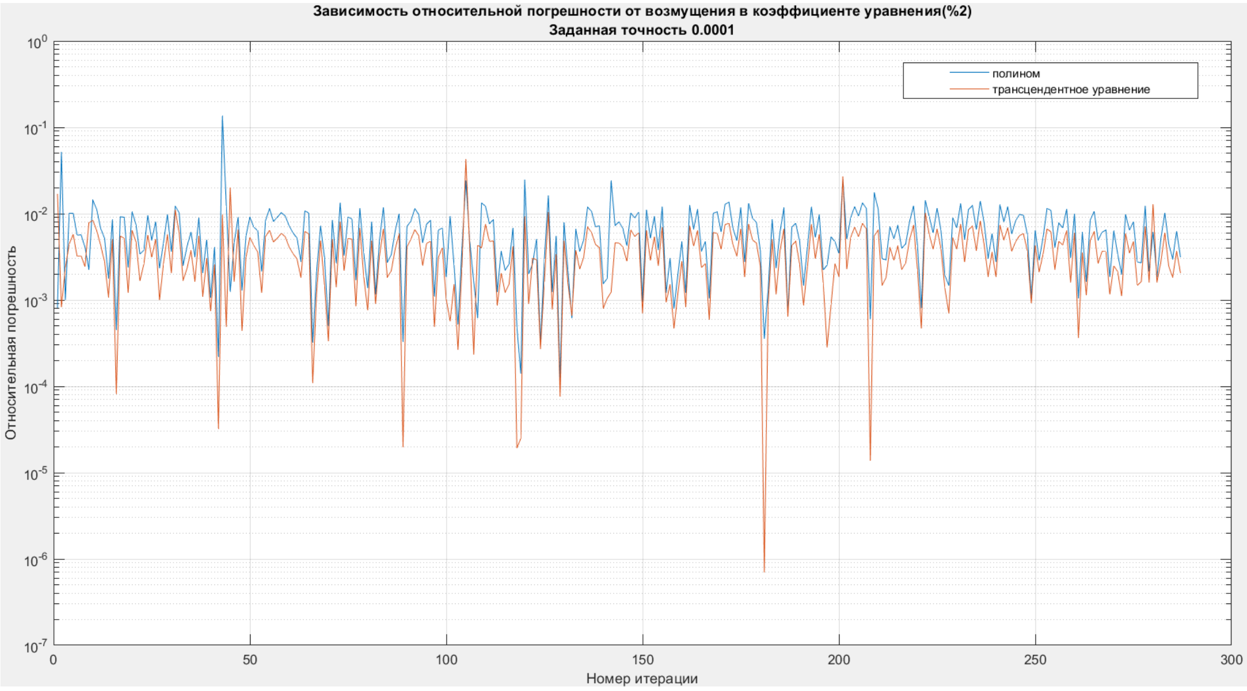

Рисунок 5. Зависимость относительной погрешности от возмущения в коэффициенте уравнения (2%). Заданная точность 10^{-4}.

Количество итераций: 287; 287.

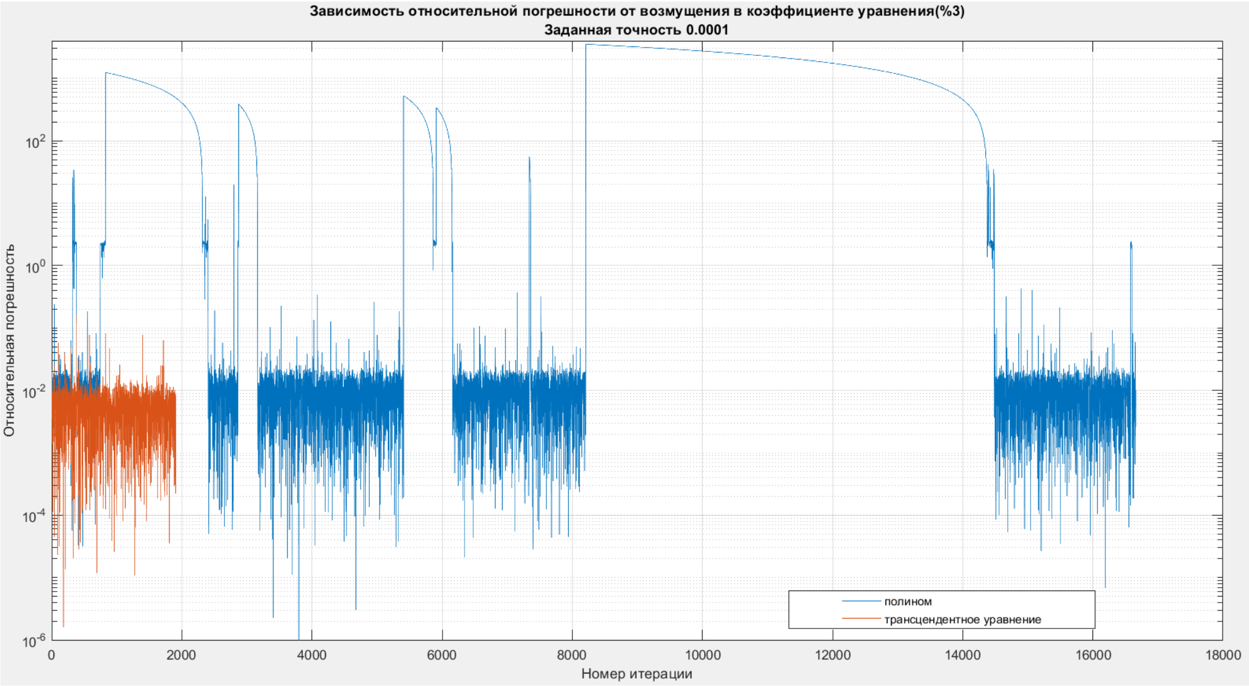

Рисунок 6. Зависимость относительной погрешности от возмущения в коэффициенте уравнения (3%). Заданная точность 10^{-4}.

Количество итераций – 16659; 1906.

Вывод: возмущения приводят к очень долгому процессу. Например, при возмущении 3% программе пришлось провести 16659 итерации для нахождения корня полинома.

Также приведём график зависимости процента относительной погрешности от процента возмущения в коэффициенте уравнения.

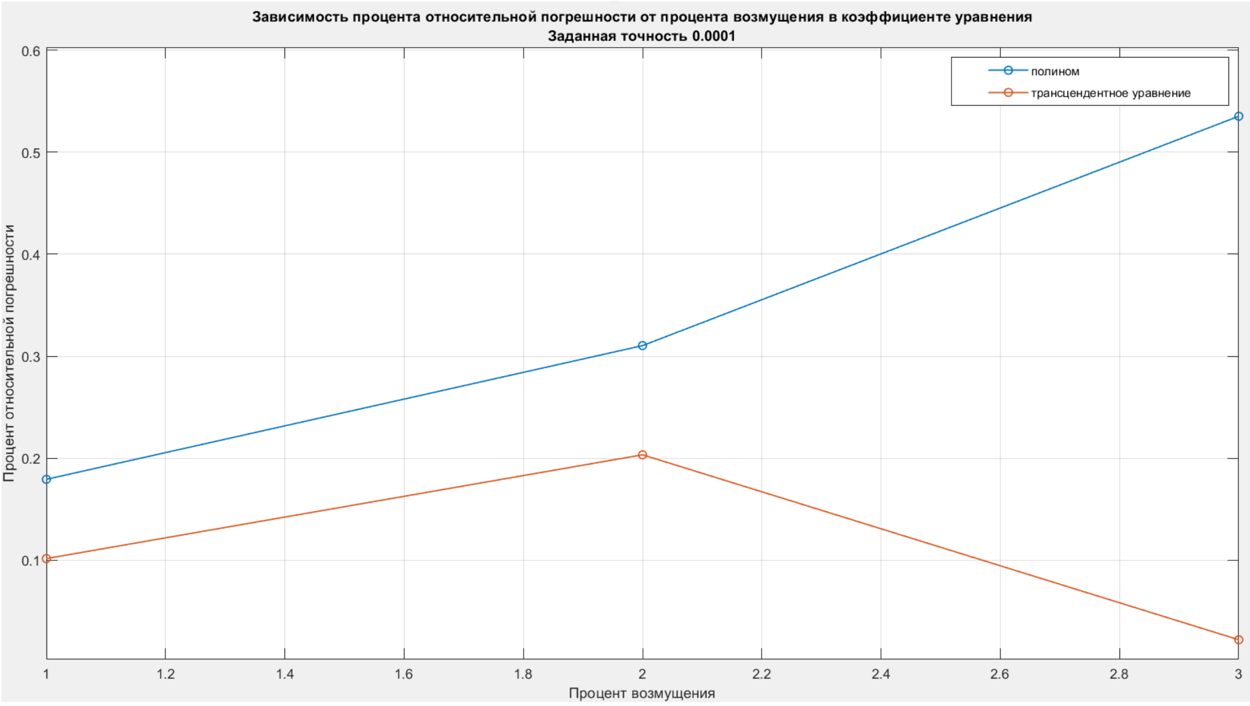

Рисунок 7. Зависимость процента относительной погрешности от процента возмущения

На графике мы видим, что при 1% возмущения процент относительной погрешности составил 0.17% и 0.1% для полинома и трансцендентного уравнения соответственно, при 2 – 0.31% и 0.2%, при 3% - 0.53% и 0.22%, что соответствует норме.

8. Выводы.

В процессе работы был реализован метод Эйткена нахождения корня. Для старта процесса необходимо знать x_0, от которого будет зависеть количество итераций. Точность всегда достигается. В результате всех исследований было отмечено, что для нахождения корня полинома требуется больше итераций. Также следует отметить, что были внесены возмущения в коэффициент уравнения, что привело к длительному процессу нахождению корня.