Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
$3^{\text{ème}}$ Licence de Mathématiques 2024/2025

Série de TD n° 2 d'Optimisation Avec Contraintes

Exercice 1. Le but est de déterminer la distance du point $X^0 = (1, 1, 0)^t$ au domaine C donné par:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 6\}.$$

1. Modéliser ce problème sous forme d'un problème d'optimisation avec contraintes;
2. Résoudre le problème obtenu;
3. Déduire la distance du point X^0 au domaine C.

Exercice 2. Déterminer la distance du point $X^0 = (1, 2)^t$ au domaine C donné par:

$$C = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ et } x^2 + (y - 1)^2 - 1 \leq 0\}.$$

Exercice 3. On cherche à calculer la distance d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ au plan défini par l'équation $Ax = b$, où $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(p, n)$, avec $Rang\ A = p$. Ce problème se pose sous la forme:

$$(P) \quad \begin{cases} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{min} \ \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2 \\ \\ Ax = b \end{cases}$$

1. Montrer que la solution x^* et le vecteur λ^* (multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes) de ce problème vérifient le système d'optimalité suivant:
$$\begin{cases} (x^* - x_0) + A^t\lambda^* = 0, \\ Ax = b, \end{cases}$$
2. Ecrire λ^* en fonction de A, A^t, x_0 et b;
3. En déduire l'expression de x^*.

Exercice 4. On considère le nuage de points $N = \{M_i = (x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$. Le problème consiste à ajuster ce nuage de points par le modèle linéaire $y = ax + b$ sous la condition $a \geq 1$.

1. En utilisant la méthode des moindres carrés, modéliser ce problème sous forme d'un problème de minimisation.
2. Déterminer les valeurs de a et b qui réalisent le minimum.
3. Application numérique:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0	2	2	4	3	5	5	6	9	8	12