Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
$3^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques 2024/2025

Série de TD n° 3 d'Optimisation sans contraintes

Exercice 1. Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

1. Calculer le gradient de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. Pour les vecteurs x^0 et d_0 suivants:
   (i) $x^0 = (2,2)^t$ et $d_0 = (-4,-4)^t$;
   (ii) $x^0 = (2,2)^t$ et $d_0 = (4,2)^t$;

   (a) Au point x^0, d_0 est-elle une direction de descente pour f? Si ce n'est pas le cas, trouver une direction de descente pour f en x^0;
   (b) Si une direction de descente a été trouvée au point précédent, trouver le pas α_{min} qui minimise f dans cette direction.

Exercice 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$\forall\ (x,y)\ \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$$

1. Calculer analytiquement le minimum global de f;
2. Appliquer à f tois itérations de l'algorithme de relaxation en partant de $X^0 = (x_0, y_0) = (1,1)^t$. En déduire la forme générale de X^k. Conclure.
3. Pour quelle valeur de k, $\|\nabla f(X^k)\| < 10^{-6}$.

Exercice 3. On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y.$$

1. Vérifier que $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le minimum de f.
2. Appliquer à f la méthode du gradient en partant de $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le pas $\rho = 1$.
3. Appliquer à f trois itérations de la méthode du gradient en partant de $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le pas $\rho = \frac{1}{2}$. En déduite la forme générale de X^k. Conclure.
4. Conclure.

Exercice 4. Considérons la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

1. Déterminer les points critiques de f et leurs natures;
2. Montrer qu'il est possible d'appliquer la méthode de newton à f aux points $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$ et $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t$;
3. Appliquer la méthode de Newton à f en partant du point $X^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^t$;
4. Appliquer la méthode de Newton à f en partant du point $Y^0 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^t$;
5. Conclure.

   N.B: Pour le critère d'arrêt, prendre $\varepsilon = 10^{-5}$.