République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Cours

Intitulé
Optimisation non linéaire en dimension finie sans contraintes

Niveau

Troisième année Licence de Mathématiques

Chargé de cours : BOURAINE M.

Année universitaire 2020/2021

Table des matières

Notations

On se palce sur le $\mathbb{R}-ev$ $\mathbb{R}^n$. On notra par

- $\{e_1,...,e_n\}$: La base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- $x=(x_1,...,x_n)$: Un vecteur de $\mathbb{R}^n$;
- $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: Le vecteur colonnes correspondant à x ;
- $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$: Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$;
- $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$: La norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$;
- $d(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$: La distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- $M_n(\mathbb{R})$: L'ensemble des matrices carrées $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$;
- A^t : La matrice transposé de la matrice A ;
- $S_n(\mathbb{R})$: Ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont symétriques ;
- D : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$: Une fonction à plusieurs variables ;

- $\nabla f(x)$: Le gradient de la fonction f en x ;

- $\nabla^2 f(x)$: La matrice hessienne de la fonction f en x ;

- $Df(x_0)$: La différentielle de f au point x_0 ;

- $B(x, r)$: La boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ de centre x et de rayon r ;

- $\overline{B}(x, r)$: La boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre x et de rayon r

Introduction

L'optimisation est un ensemble de méthodes qui permettent de trouver le minimum ou le maximum d'une fonction. Elle fait parti de la programmation mathématique qui est une branche particulièrement active des mathématiques appliquées. L'optimisation se scinde en deux types de problèmes : l'optimisation sans contraintes et l'optimisation avec contraintes. Dans les deux cas, le but consiste à trouver les valeurs qui maximisent ou minimisent une fonction. Toutefois, dans le cas avec contraintes, les solutions sont soumises à des restrictions.

Le terme " optimisation "vient de l'usage français du verbe " optimiser " qui est arrivé vers le milieu du XIXe siècle d'Angleterre, où to optimize signifiait " se comporter en optimiste " ; on peut donc dire que l'optimiseur est comme l'optimiste qui pense pouvoir toujours mieux faire.

On retrouve les problèmes d'optimisation dans tous les domaines de l'activité humaine : économique, scientifique, politique, sociale, etc. La résolution de ce type de problème ne peut pas se faire en prenant des décisions hâtives ou en se basant sur un résonnement instinctif ou des calculs naïfs. Une bonne résolution nécessite la connaissance de méthodes approuvées ainsi que la maitrise des outils mathématiques et informatiques développés à cet effet.

Euclide formulait déjà des problèmes d'optimisation au IIIe siècle avant J.C. Sir Isaac Newton (1642-1727) et G.W. Leibniz offrirent, à la fin du XVIIe siècle, les premiers outils de résolution de certains problèmes d'optimisation relatifs à la géométrie et à la physique. Pendant la seconde guerre mondiale, des équipes de chercheurs anglais, et plus tard américains, ont rencontré de nombreux problèmes liés au domaine militaire.

Peu après la guerre l'U.S. Air Force a réuni un groupe de savants, SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs) qui a fait une avancée remarquable dans le domaine de l'optimisation, en général, et de la programmation linéaire en particulier. Par la suite, les mathématiciens, motivés par les demandes issues des applications, ont été conduits à poser les fondations modernes de l'optimisation.

Ce cours comporte trois chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques rappels sur le calcul différentiel, les ensembles convexes et les fonctions convexes. Le deuxième chapitre s'intéresse aux conditions d'existence et d'unicité de la solution d'un problème d'optimisation, ainsi qu'aux conditions d'optimalité du premier et du second ordre. Différents algorithmes d'optimisation font l'objet du chapitre trois.

Chapitre 1

Quelques rappels de calcul différentiel, Convexité

Dans ce chapire, nous donnons quelques rappels sur le calcul différentiel, les ensembles convexes ainsi que les fonctions convexes.

1.1 Différentiabilité, gradient, matrice hessienne

1.1.1 Différentiabilité

Définition 1.1. **(Différentielle au sens de Fréchet)**

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.
On dit que f est différentiable en $x_0 \in D$ au sens de Fréchet s'il existe une application linéaire, notée $Df(x_0)$, définie de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$\lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot h|}{\|h\|} = 0$$

Dans ce cas, l'application linéaire $Df(x_0)$ est appelée la différentielle de f au point x_0.

Définition 1.2. **(Dérivée directionnelle)**

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.
Soit $x_0 \in D$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tels que pour $t > 0$ assez petit, on a $x_0 + tv \in D$.
On dit que f admet au point x_0 une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$

existe et linéaire par rapport à v.

Si $v = e_i$ est le $i^{ième}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i et on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. On a donc :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{f\left(x_0+tv\right)-f\left(x_0\right)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_0\right).$$

Définition 1.3. (Différentielle au sens de Gâteaux)

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en un point $x_0 \in D$ s'il existe $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une application linéaire continue telle que, dans chaque direction $v \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle existe et on a

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{f\left(x_0+tv\right)-f\left(x_0\right)}{t}=\left\langle \varphi\left(x_0\right), v\right\rangle.$$

L'application φ est appelée la différentielle de f au sens de Gâteaux au point x_0 (ou la G-différentielle de f au point x_0).

***Remarque* 1.1.** Si f est différentiable au sens de Fréchet alors elle est différentiable au sens de Gâteaux, de plus les dérivées coïncident. Mais la réciproque est fausse.

1.1.2 Gradient et matrice hessienne

Définition 1.4. (Gradient)

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ en $x_0 \in D$ existent alors le gradient de f au point x_0, noté $\nabla f\left(x_0\right)$, est défini par :

$$\nabla f\left(x_0\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0\right) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(x_0\right) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.1. *Soit $f(x,y)=2x^2+y^2+2xy$. Le gradient de f est donné par :*

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2y+2x \end{pmatrix}.$$

***Remarque* 1.2.** En tenant compte du théorème de représentation de Riez, on note alors

$$\left\langle \varphi\left(x_0\right), v\right\rangle=\left\langle \nabla f\left(x_0\right), v\right\rangle.$$

Où $\varphi\left(x_0\right)$ est la G-différentielle de f au point x_0.

Proposition 1.1. *Si f est différentiable en x_0 de D, alors toutes les dérivées partielles existent et on a :*

$$Df(x_0)\cdot h = \langle \nabla f(x_0), h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, h_i.$$

Preuve. Voir Berguouniou M. (2001) [1] □

Définition 1.5. **(Matrice hessienne)**

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est deux fois dérivables en $x_0 \in D$, alors la matrice hessienne de f au point x_0, noté $\nabla^2 f(x_0)$, est définie par :

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2. *Soit $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy$. La matrice hessienne de f est donnée par*

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

***Remarque* 1.3.** Si f est de classe $C^2(D)$ alors, d'après le théorème de Schwarz, $\nabla^2 f(x)$ est symétrique $\forall x \in D$.

1.2 Développement de Taylor

Théorème 1.1. ***(Formule de Taylor avec reste intégrale)***

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{n+1}(D)$, $x_0 \in D$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Si le segment $[x_0, x_0 + h] \subset D$, alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + th)\cdot h^{(n+1)} dt.$$

Preuve. Voir Berguouniou M. (2001) [1] □

Théorème 1.2. ***(Formule de Taylor avec reste de Lagrange)***

Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{n+1}(D)$, $x_0 \in D$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Si $[x_0, x_0 + h] \subset D$, alors :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Preuve. Voir Berguouniou M. (2001) [1] □

1.3 Ensembles et fonctions convexes

La notion de convexité est très importante dans les problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes. A cet effet, nous donnons dans ce qui suit les principaux résultats sur les ensembles et les fonctions convexes.

1.3.1 Ensembles convexes

Définition 1.6. (Ensemble convexe)
Un **ensemble** C non vide de $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si

$$\forall (x, y) \in C^2 \text{ et } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ on a } : \lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Autrement dit, un ensemble C est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux points x et y de C, le segment $[x, y]$ qui les joints est entièrement contenu dans C.

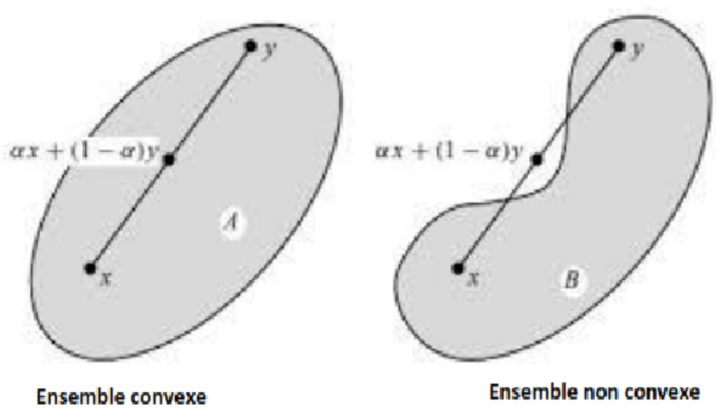

FIG. 1.1 – Ensemble convexe et ensemble non convexe

Exemple 1.3. .
(1) *Un intervalle* $[a, b]$ *est un ensemble convexe de* $\mathbb{R}$.
(2) *Une réunion disjointe d'intervalles de* $\mathbb{R}$ *n'est pas convexe.*
(3) *Tout disque, ainsi un cube plein, une boule sont convexes.*

Exemple 1.4. *Considérons l'ensemble C, définit ci-dessous, et montrons que c'est un convexe de $\mathbb{R}^2$*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x \leq 2 \ \ \text{et } x + y = 3\}.$$

Soient $\lambda \in [0,1]$, $X = (x_1, x_2) \in C \Leftrightarrow 1 \leq x_1 \leq 2$ *et* $x_1 + x_2 = 3$
et $Y = (y_1, y_2) \in C \Leftrightarrow 1 \leq y_1 \leq 2$ *et* $y_1 + y_2 = 3$.
Il faut montrer que $Z = (z_1, z_2) = \lambda X + (1-\lambda)Y \in C$.

$$\begin{aligned} Z = (z_1, z_2) = \lambda X + (1-\lambda)Y &= \lambda(x_1, x_2) + (1-\lambda)(y_1, y_2) \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \end{aligned}$$

Pour montrer que $Z \in C$, *il suffit de montrer que* $1 \leq z_1 = \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \leq 2$ *et* $z_1 + z_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) = 3$.
$1 \leq x_1 \leq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq x_1\lambda \leq 2\lambda$ *car* $\lambda \geq 0$ *puisque* $\lambda \in [0,1]$;
$1 \leq y_1 \leq 2 \Leftrightarrow (1-\lambda) \leq y_1(1-\lambda) \leq 2(1-\lambda)$ *car* $1-\lambda \geq 0$ *puisque* $\lambda \in [0,1]$.
Donc $\lambda + (1-\lambda) \leq z_1 \leq 2\lambda + 2(1-\lambda) \Leftrightarrow 1 \leq z_1 \leq 2$.
$z_1 + z_2 = \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) = 3\lambda + 3(1-\lambda) = 3$.
Donc $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y \in C$. *Par conséquent,* C *est un ensemble convexe.*

***Remarque* 1.4.** Un **ensemble** $C \subset \mathbb{R}^n$ est dit **strictement convexe** si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \ \forall \lambda \in]0,1[\ : \ \lambda x + (1-\lambda) y \in int(C).$$

Propriétés des ensembles convexes

Proposition 1.2. .
(1) *Si* (C_i), $i = \overline{1,m}$, *est une famille d'ensembles convexes de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $S = \bigcap_{i=1}^{m} C_i$ *est un ensemble convexe.*
(2) *La somme de deux ensembles convexes est un ensemble convexe.*
(3) *Le produit d'un ensemble convexe avec un scalaire est un ensemble convexe.*

Preuve. En exercice. □

Définition 1.7. **(Combinaison convexe)**

Soient $x_1, \ldots, x_m$, m éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison convexe** des points x_i, $i = \overline{1,m}$, tout élément y de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit sous la forme :

$$y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \ \ \text{avec} \ \ \lambda_i \geq 0 \ \ \text{et} \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Définition 1.8. **(Enveloppe convexe)**

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, **l'enveloppe convexe** de S est le plus petit convexe contenant l'ensemble S, on le note par **conv**(S), tel que :

$$\mathbf{conv}\,(S) = \cap \{C,\ C \text{ est un ensemble convexe contenant } S\}$$

et

$$y \in \mathbf{conv}\,(S) \Longleftrightarrow \exists\ x_1, ..., x_m \in S \text{ et } \lambda_i \geq 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 :\ y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

1.3.2 Fonctions convexes

Définition 1.9. **(Fonction convexe)**

Soient C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On dit que la **fonction** f est **convexe** sur C ssi

$$\forall\,(x, y) \in C^2 \ \ et\ \ \forall \lambda \in [0, 1] \ \ :\ f\,(\lambda x + (1 - \lambda)\,y) \leq \lambda f\,(x) + (1 - \lambda)\,f\,(y)\,.$$

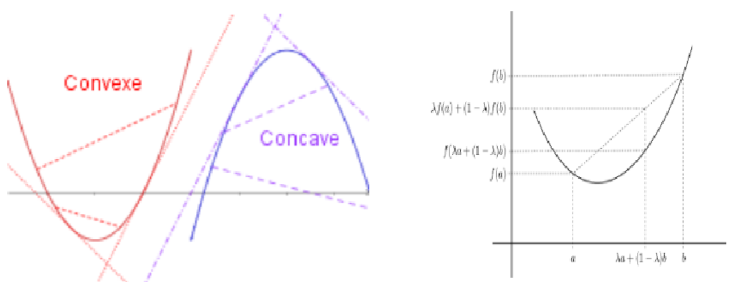

FIG. 1.2 – Fonction convexe et fonction concave

Définition 1.10. **(Fonction strictement convexe)**

Une **fonction** f est **strictement convexe** sur C ssi

$$\forall\,(x, y) \in C^2\ (x \neq y) \ \text{ et } \forall \lambda \in]0, 1[\ :\ f\,(\lambda x + (1 - \lambda)\,y) < \lambda f\,(x) + (1 - \lambda)\,f\,(y)\,.$$

***Remarque* 1.5.** .

(1) Une **fonction** f est **concave** sur C ssi

$$\forall\,(x, y) \in C^2 \ \ et\ \ \forall \lambda \in [0, 1] \ \ :\ f\,(\lambda x + (1 - \lambda)\,y) \geq \lambda f\,(x) + (1 - \lambda)\,f\,(y)\,.$$

(2) Si f est convexe alors $(-f)$ est concave.

Exemple 1.5. *La fonction* $f : x \longmapsto |x|$ *est convexe d'après l'inégalité triangulaire.*

Proposition 1.3. *Toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est une fonction convexe.*

Preuve. En TD □

Domaine d'une fonction

Définition 1.11. **(Domaine d'une fonction, fonction propre)**

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Le **Domaine** de f, noté $dom\,(f)$, est l'ensemble donné par :

$$dom\,(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f\,(x) < +\infty\}\,.$$

Si $dom\,(f) \neq \varnothing$, alors f est dite **propre**.

Proposition 1.4. *Le domaine d'une fonction convexe est un ensemble convexe.*

Preuve. En TD □

Définition 1.12. **(Section d'un niveau donné)**

Soient C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble C_α défini par :

$$C_\alpha = \{x \in C : f\,(x) \leq \alpha\}$$

est appelé **section** de f de niveau α.

Proposition 1.5. *Si f est une fonction convexe alors la section de f de niveau α, C_α, est un ensemble convexe.*

Preuve. Supposons que f est convexe.
Soient $(x, y) \in C_\alpha^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)\,y \in C_\alpha$.
Comme f est convexe, alors

$$f\,(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leq \lambda f\,(x) + (1-\lambda)\,f\,(y)$$

On a

$$(x, y) \in C_\alpha^2 \implies f\,(x) \leq \alpha \text{ et } f\,(y) \leq \alpha$$

Donc

$$\lambda f\,(x) + (1-\lambda)\,f\,(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\,\alpha = \alpha$$

Par conséquent,

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \alpha \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C_\alpha.$$

D'où C_α est un ensemble convexe. □

Epigraphe d'une fonction convexe

Définition 1.13. **(Epigraphe d'une fonction)**

Soient D un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. On appelle **épigraphe** de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$, noté *épi* (f), défini par :

$$epi(f) = \{(\mu, x) \in \mathbb{R} \times D : f(x) \leq \mu\}.$$

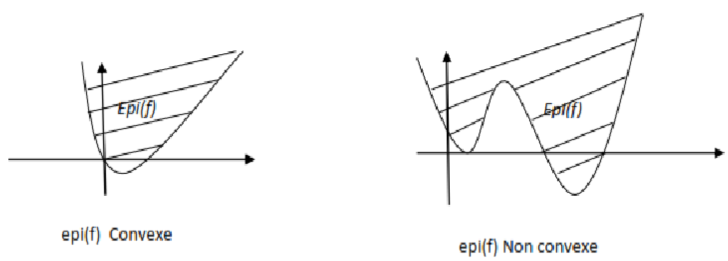

Fig. 1.3 – Epigraphe d'une fonction

Théorème 1.3. *Si C est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction alors*

$$f \text{ est une fonction convexe} \iff epi(f) \text{ est un ensemble convexe.}$$

Preuve. .

• **Condition nécessaire**

Supposons que f est une fonction convexe et montrons que *epi* (f) est un ensemble convexe. Soient $(\mu_1, x_1), (\mu_2, x_2) \in epi(f)$ et $\lambda \in [0,1]$. Il suffit de montrer que

$$(\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 \, , \; \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \in epi(f).$$

Comme f est convexe, alors

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

On a

$$(\mu_1, x_1), (\mu_2, x_2) \in epi\,(f) \implies f\,(x_1) \leq \mu_1 \; et \; f\,(x_2) \leq \mu_2$$

Alors

$$\lambda f\,(x_1) + (1-\lambda)\, f\,(x_2) \leq \lambda \mu_1 + (1-\lambda)\,\mu_2$$

Donc

$$f\,(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda \mu_1 + (1-\lambda)\,\mu_2$$

Par conséquent,

$$(\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\,\mu_2 \;,\; \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \in epi\,(f)\,.$$

D'où $epi\,(f)$ est un ensemble convexe

• Condition suffisante

Supposons que $epi\,(f)$ est un ensemble convexe et montrons que f est une fonction convexe.
Soient x_1, $x_2 \in C$ et $\lambda \in [0,1]$. Il suffit de montrer que
$f\,(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda f\,(x_1) + (1-\lambda)\, f\,(x_2)\,.$
On a

$$(f\,(x_1), x_1) \in epi\,(f) \quad \text{et} \quad (f\,(x_2), x_2) \in epi\,(f)$$

Comme $epi\,(f)$ est un ensemble convexe, alors

$$\lambda\,(f\,(x_1), x_1) + (1-\lambda)\,(f\,(x_2), x_2) \in epi\,(f)$$

Donc

$$(\lambda f\,(x_1) + (1-\lambda)\, f\,(x_2) \;,\; \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \in epi\,(f)$$

Par définition de $epi\,(f)$, on aura :

$$f\,(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda f\,(x_1) + (1-\lambda)\, f\,(x_2)\,.$$

D'où f est une fonction convexe. □

La notion d'épigraphe d'une fonction nous permet d'avoir une démonstration simple de l'inégalité de Jensen.

Inégalité de Jensen

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Jensen)***

Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur C.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in]0,1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et tous $x_1, ..., x_n \in C$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

Preuve. On a $\forall k = \overline{1,n}$: $(f(x_k), x_k) \in epi(f)$.
Comme $epi(f)$ est un ensemble convexe, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (f(x_k), x_k) \in epi(f).$$

D'où

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \ , \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \in epi(f).$$

D'après la définition de $epi(f)$, on aura :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

□

Caractérisation des fonctions convexes

Cas d'une fonction à plusieurs variables

Théorème 1.5. *Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de C dans $\mathbb{R}$.*
• *Si f est une fonction continûment différentiable, alors les conditions (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes ;*
• *Si f est une fonction deux fois différentiable, alors les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous sont équivalentes.*

(a) f est convexe ;
(b) $\forall x \in C$, $\forall y \in C$: $f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y) \ , \ x - y \rangle$;
(c) $\forall x \in C$, le hessien $\nabla^2 f(x)$ est une matrice semi-définie positive.

Preuve. .
Il suffit de montrer que $(a) \Leftrightarrow (b)$ et $(b) \Leftrightarrow (c)$.
La preuve de $(a) \Leftrightarrow (b)$ se fait de la même façon que pour le théorème ci-dessous.
La preuve de $(b) \Leftrightarrow (c)$ se fera en exercice. □

Théorème 1.6. *Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux différentiable sur C. Alors*

$$f \text{ est convexe ssi } \forall (x, y) \in C^2 \; : \; f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y) \; , \; x - y \rangle .$$

Preuve. .
• Condition nécessaire
Supposons que f est convexe. Montrons que :

$$\forall (x, y) \in C^2 \; : \; f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y) \; , \; x - y \rangle .$$

Soit $(x, y) \in C^2$, comme f est convexe alors :

$$\forall \lambda \in]0, 1[\; : \; f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

D'où

$$f(y + \lambda (x - y)) - f(y) \leq \lambda (f(x) - f(y))$$

En multipliant l'inégalité précédente par $\frac{1}{\lambda}$ ($\frac{1}{\lambda} > 0$), on aura

$$\frac{f(y + \lambda (x - y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y)$$

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente quand $t \longrightarrow 0^+$, on obtient :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{f(y + \lambda (x - y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y) .$$

Comme f est Gâteaux différentiable sur C, alors :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{f(y + \lambda (x - y)) - f(x)}{\lambda} = \langle \nabla f(y) , x - y \rangle .$$

D'où

$$\langle \nabla f(y) , x - y \rangle \leq f(x) - f(y) .$$

Par conséquent,

$$\forall (x, y) \in C^2 \; : \; f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y) \; , \; x - y \rangle .$$

• **Condition suffisante**

Supposons que

$$\forall (x,y) \in C^2 \ : \ f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y) \ , \ x-y \rangle \qquad (I)$$

Montrons que f est convexe :

Soient $(x,y) \in C^2$ et $\lambda [0,1]$, en appliquant la relation (I) à x et $y + \lambda(x-y)$, puis à y et $y + \lambda(x-y)$ on aura (respectivement)

$$f(x) \geq f(y + \lambda(x-y)) + (1-\lambda)\langle \nabla f(y + \lambda(x-y)) \ , \ x-y \rangle \qquad (II)$$

et

$$f(y) \geq f(y + \lambda(x-y)) - \lambda \langle \nabla f(y + \lambda(x-y)) \ , \ x-y \rangle \qquad (III)$$

En multipliant (II) par λ et (III) par $(1-\lambda)$, on aura

$$\lambda f(x) \geq \lambda f(y + \lambda(x-y)) + \lambda(1-\lambda)\langle \nabla f(y + \lambda(x-y)) \ , \ x-y \rangle \qquad (IV)$$

et

$$(1-\lambda) f(y) \geq (1-\lambda) f(y + \lambda(x-y)) - \lambda(1-\lambda)\langle \nabla f(y + \lambda(x-y)) \ , \ y-x \rangle \qquad (V)$$

De $(IV) + (V)$, on aura

$$f(y + \lambda(x-y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

D'où f est convexe sur C. □

Théorème 1.7. *Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux différentiable sur C. Alors*

f est convexe ssi ∇f est un opérateur monotone de C dans C c.à.d.

$$\forall (x,y) \in C^2 \ : \ \langle \nabla f(x) - \nabla f(y) \ , \ x-y \rangle \ \geq 0.$$

Preuve. En TD. □

***Remarque* 1.6.** Si l'inégalité précédente est stricte la fonction f est strictement convexe.

Cas d'une fonction à une variable

Proposition 1.6. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

$$f \text{ est convexe ssi } f^{\grave{\prime}} \text{ est une fonction croissante sur } I.$$

Corollaire 1.1. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable sur I. Alors*

- *f est convexe ssi $f^{"} \geq 0$ sur I ;*
- *f est concave ssi $f^{"} \leq 0$ sur I.*

Exemple 1.6. .
(1) *la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ car $f^{"}(x) = 2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.*
(2) *La fonction $g : x \longmapsto \ln(x)$ est une fonction strictement concave sur $]0, +\infty[$ car $g^{"}(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0, +\infty[$*

Chapitre 2

Minimisation sans contraintes

Introduction

Le problème que l'on étudie est celui de la recherche d'un minimum d'une fonction réelle f de n variables réelles $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ lorsqu'il n'y a pas de contraintes sur les variables. On effectue donc la minimisation de f sur tout l'espace $\mathbb{R}^n$.
On cherche donc à résoudre le problème

$$(P) \quad \begin{cases} min\ f(x), \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Il s'agit de déterminer un point x^* de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n :\ f(x^*) \leq f(x) \tag{2.2}$$

c.à.d. un minimum global de f sur $\mathbb{R}^n$.

Néanmoins, pour beaucoup de problèmes d'optimisation sans contraintes, les principales méthodes de résolution connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global. On se contente donc d'optima locaux. Il faut alors voir comment ces points sont caractérisés.

Pour commencer ce chapitre nous introduisons les notions de minimum local et minimum global, ainsi que la notion de fonction coercive. Nous passons par la suite aux conditions d'existence et d'unicité d'une solution d'un problème d'optimisation sans contraintes. Nous abordons après les conditions d'optimalité et on termine ce chapitre avec quelques exemples d'application.

2.1 Minimum local, minimum global

Définition 2.1. **(Minimum, maximum local)**

Soient D un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de D dans $\mathbb{R}$. On dit que $x^* \in D$ réalise un **minimum local** de f sur D si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ de $\mathbb{R}^n$ de centre x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap D : f(x^*) \leq f(x). \tag{2.3}$$

On dit que $x^* \in D$ réalise un **maximum local** de f sur D si on peut trouver une boule ouverte $B(x^*)$ de $\mathbb{R}^n$ de centre x^* telle que :

$$\forall x \in B(x^*) \cap D : f(x^*) \geq f(x). \tag{2.4}$$

Définition 2.2. **(Minimum, maximum global)**

Soient D un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de D dans $\mathbb{R}$. On dit que $x^* \in D$ réalise un **minimum global** de f sur D si :

$$\forall x \in D : f(x^*) \leq f(x). \tag{2.5}$$

On dit que $x^* \in D$ réalise un **maximum global** de f sur D si :

$$\forall x \in D : f(x^*) \geq f(x). \tag{2.6}$$

***Remarque* 2.1.** Par abus de langage, on dit souvent que x^* est un minimum de la fonction f. Il faudrait dire que x^* réalise un minimum pour la fonction f ou bien $f(x^*)$ est une valeur minimale de la fonction f.

***Remarque* 2.2.** Si les inégalités dans les deux définitions précédentes sont strictes, alors on a un minimum ou un maximum strict qu'il soit local ou global.

On s'intéressera à la recherche des points réalisant des minima car la recherche des maxima peut se ramener à celle des minima comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soient D un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie de D dans $\mathbb{R}$. Si $x^* \in D$ réalise un minimum (global ou local) de f sur D alors x^* réalise un maximum (global ou local) de $-f$ sur D. Plus précisément :*

$$max\{f(x); x \in D\} = -min\{-f(x); x \in D\}. \tag{2.7}$$

Preuve. Cette preuve est donnée dans le cas d'un maximum global de f. Cette preuve est analogue à celle du cas d'un maximum local.
Soit x^* un maximum global de f alors

$$\forall x \in D : f(x^*) \geq f(x).$$

Donc

$$\forall x \in D : -f(x^*) \leq -f(x).$$

D'où

$$-f(x^*) = min\{-f(x); x \in D\},$$

ou encore

$$f(x^*) = -min\{-f(x); x \in D\}.$$

□

2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Avant d'aborder les résultats d'existence et d'unicité nous présentons d'abord la notion de fonction coercive vu que c'est une hypothèse importante dans les conditions d'existence de solutions d'un problème d'optimisation sans contraintes.

2.2.1 Fonction coercive

Définition 2.3. **(Fonction coercive)**
On dit qu'une fonction f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est coercive si

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty. \tag{2.8}$$

Exemple 2.1. .

1. *La fonction f_1 définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2$ est une fonction coercive.*
2. *La fonction f_2 définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = x^3$ n'est pas une fonction coercive car $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -\infty$.*
3. *La fonction f_3 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ n'est pas une fonction coercive.*
   En effet, en choisissant la suite $X_n = (0, n)$, on a $\lim_{n \to \infty} \|X_n\| = \infty$
   mais $\lim_{n \to \infty} f_3(X_n) = -\infty$.

Théorème 2.1. ***(Conditions d'existence)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre, continue et coercive. Alors le problème (P) admet au moins une solution.

Preuve. Soit $d = inf(P)$; $d < +\infty$ car f est propre.
Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, c.à.d. tel que $\lim\limits_{p\to\infty} f(x_p) = d$.
Montrons que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Si ce n'est pas le cas, on peut en extraire une sous-suite (encore notée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$) telle que $\lim\limits_{p\to\infty} f(x_p) = +\infty$, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{p\to\infty} f(x_p) = d < +\infty$.
Donc $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors on peut en extraire une sous-suite (encore notée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$) qui converge vers $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.
Par continuité de f, on a alors $d = \lim\limits_{p\to\infty} f(x_p) = f(\overline{x})$. En particulier, $d > -\infty$ et $\overline{x}$ est une solution de (P). $\square$

***Remarque* 2.3.** Sous les conditions du théorème précédent, le problème (P) admet au moins une solution. Toutefois, on n'a pas forcément l'unicité de la solution.

Théorème 2.2. ***(Conditions d'unicité)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Alors le problème (P) admet au plus une solution.

Preuve. Supposons que f admet au moins un minimum m et soient x_1 et x_2 $(x_1 \neq x_2)$ réalisant ce minimum, donc $f(x_1) = f(x_2) = m$.
f étant strictement convexe, alors :

$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) < \frac{1}{2}\ f(x_1) + \frac{1}{2}\ f(x_2) = \frac{1}{2}\ m + \frac{1}{2}\ m = m.$$

Ceci contredit le fait que m est le minimum de f. Donc $x_1 = x_2$.

$\square$

Théorème 2.3. ***(Conditions d'existence et d'unicité)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \alpha \|x - y\|^2 \tag{2.9}$$

Alors f est strictement convexe et coercive. En particulier le problème (P) admet une solution unique.

***Remarque* 2.4.** Une fonction vérifiant (2.9) est dite elliptique, α est la constante d'ellipticité.

Preuve. Le théorème 1.7 implique que ∇f est monotone et que f est convexe.
De plus comme l'inégalité est stricte, alors f est strictement convexe.
Enfin, f est coercive.
Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y-x))dt \\
&= f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)), y - x\rangle dt \\
&= f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), y - x\rangle dt \\
&\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x + t(y-x)) - \nabla f(x), t(y - x)\rangle dt \quad (2.10)
\end{aligned}$$

De (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned}
f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \int_0^1 t \cdot \alpha \cdot \|y - x\|^2 dt \\
&\geq f(x) - \|\nabla f(x)\| \cdot \|y - x\| + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2 dt
\end{aligned}$$

Fixons $x = 0$ par exemple, on déduit que f est coercive.
Donc f admet un unique minimum $x^* \in \mathbb{R}^n$. □

2.3 Conditions d'optimalité

2.3.1 Conditions d'optimalité du 1^{er} ordre

Théorème 2.4. ***(Condition nécessaire du** 1^{er} **ordre)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Si x^* réalise un minimum (global ou local) de f sur $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (2.11)$$

Preuve. Si x^* est un minimum de f sur $\mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x^*) \leq f(x)$, en particulier, $\forall x \in \mathcal{B}(x^*, \rho) : f(x^*) \leq f(x)$,
où $\mathcal{B}(x^*, \rho)$ est une boule centrée en x^* et de rayon $\rho > 0$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, on peut trouver $t_h = \dfrac{\rho}{\|h\|} > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, t_h[: \; f(x^*) \leq f(x^* + th)$$

or f est gâteaux différentiable en x^*, alors

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^* + th) - f(x^*)}{t} = \langle \nabla f(x^*), h \rangle.$$

Donc $\forall h \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x^*), h \rangle \geq 0$, alors $\nabla f(x^*) = 0$. □

Définition 2.4. **(Equation d'Euler - Point critique)**

- La relation $\nabla f(x^*) = 0$ est appelée **équation d'Euler**.
- Un point x^* vérifiant cette relation est appelé **point critique** ou **point stationnaire**.

Exemple 2.2. *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x, y) = 2x + y^2 - y.$$

Le calcul du gradient de f donne : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2y - 1 \end{pmatrix}$.
Le système d'équation $\nabla f(x, y) = 0$ n'admet pas de solution.
En effet $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2y - 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$ *(impossible).*
Donc la fonction f n'admet aucun point critique. D'où f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2.3. *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.*
On a $f'(x) = 3x^2$, donc $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc $x = 0$ est un point critique pour f, mais ce n'est pas un minimum.

Théorème 2.5. ***(C.N.S. du 1^{er} ordre dans le cas convexe)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Gâteaux différentiable et convexe sur $\mathbb{R}^n$.

$$\text{Un point } x^* \text{ réalise un minimum global de } f \text{ sur } \mathbb{R}^n \iff \nabla f(x^*) = 0.$$

Preuve. La condition nécessaire est déjà montrée dans le théorème 2.4. Montrons qu'elle est suffisante.
Soit $x^* \in \mathbb{R}^n : \; \nabla f(x^*) = 0$. f étant convexe, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; f(x) \geq f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = f(x^*).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^n : \; f(x^*) \leq f(x)$.
Alors x^* réalise un minimum de f sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

***Remarque* 2.5.** On peut énoncer le résultat précédent en ne supposant que la local convexité de f au voisinage de x^* (c.à.d. en supposant f convexe sur une boule centrée en x^*). Dans ce cas, nous pouvons affirmer que x^* est un minimum local de f.

Exemple 2.4. *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

• *f admet-elle un minimum ? Est-il unique ?*
f est propre, continue et coercive, alors elle admet au moins un minimum.
Le calcul du gradient de f donne : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.
Le ∇f est un opérateur strictement monotone. En effet, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *avec $X \neq Y$, on a :*

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(X) - \nabla f(Y), X - Y \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1, & x_2 - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(x_1 - y_1) \\ 2(x_2 - y_2) \end{pmatrix} \\ &= 2(x_1 - y_1)^2 + 2(x_2 - y_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Alors f est strictement convexe. Donc f admet au plus un minimum.
Par conséquent, f admet un unique minimum.
• *Points critiques ?*

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

Donc $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est le seul point critique. Donc c'est l'unique minimum de f puisque la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du premier ordre est satisfaite.*

2.3.2 Conditions d'optimalité du 2^{nd} ordre

Théorème 2.6. ***(Condition nécessaire du 2^{nd} ordre)***

On suppose que x^* est un minimum (local) de f et que f est deux fois Gâteaux différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

(a) $\nabla f(x^*) = 0$ *et*

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \langle \nabla^2 f(x^*)x, x\rangle \geq 0$

c.à.d. que le hessien de f *est une matrice semi-définie positive.*

Preuve. (a) Déjà démontrée dans le théorème 2.4.

(b) Le développement de Taylor de f au voisinage de x^* donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^*) + \langle \nabla f(x^*), x - x^*\rangle + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x^*)(x - x^*), x - x^*\rangle \\ &+ \|x - x^*\|^2 \circ (x - x^*), \text{ avec } \circ (x - x^*) \to 0 \text{ quand } x \to x^*. \end{aligned}$$

Si le hessien de f, $\nabla^2 f(x^*)$, n'est pas une matrice semi-définie positive, c'est qu'il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n, \ d \neq 0 : \ \langle \nabla^2 f(x^*)d, d\rangle < 0$.

En choisissant alors $x = x^* + \rho d$, pour $\rho > 0$ suffisamment petit,

on aurait $f(x) < f(x^*)$. Ce qui contredit l'optimalité locale de x^*.

□

Exemple 2.5. *On considère la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^3 - 8xy \\ -4x^2 + 2y \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 12x^3 - 8xy = 0 \\ -4x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est le seul point critique de* f*. Est-il un minimum ?*

Calculons la matrice hessienne de f *au point* X^**.*

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 f(X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ (matrice semi-définie positive).}$$

Cette condition n'est pas suffisante pour conclure que X^* *est un minimum pour* f*.*
Néanmoins, on peut vérifier que que ce point critique n'est ni un minimum, ni un maximum en remarquant que $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -0.0625 < f(0, 0) = 0 < f(0, 1) = 1$.

Théorème 2.7. ***(Condition suffisante du*** 2^{nd} ***ordre)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois Gâteaux différentiable. Une condition suffisante pour que* x^* *soit un minimum local de* f *sur* $\mathbb{R}^n$ *est :*

(a) $\nabla f(x^*) = 0$ *(stationnarité)*

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, \ \langle \nabla^2 f(x^*)x, x\rangle > 0$

c.à.d. que le hessien de f *est une matrice définie positive.*

Preuve. Soit x^* un point vérifiant (a) et (b).
Le développement de Taylor de f au voisinage de x^* s'écrit :

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}\langle \nabla^2 f(x^*)(x - x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\|^2 \circ (x - x^*)$$

car $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = 0$ avec $\circ(x - x^*) \to 0$ quand $x \to x^*$. Pour toute direction de déplacement $d \in \mathbb{R}^n$ ($\|d\| = 1$) on a

$$f(x^* + \theta d) = f(x^*) + \frac{\theta^2}{2}\langle \nabla^2 f(x^*)d, d \rangle + \theta^2 \circ (\theta)$$

où $\circ(\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$.
Comme $\langle \nabla^2 f(x^*)d, d \rangle > 0$, alors pour θ suffisamment petit on aura $f(x^* + \theta d) > f(x^*)$.
Donc x^* est un minimum local de f. □

Exemple 2.6. *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par*

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4.$$

Le point $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un point critique pour$f$. En effet,

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ -4x + 4y^3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Passons maintenant à la condition du second ordre.

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 f(X^*) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Vérifions que c'est une matrice définie positive par la méthode des mineurs par exemple. $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = |\nabla^2 f(X^*)| = 12^2 - (-4)^2 > 0$. *Donc la matrice hessienne de f au point X^* est définie positive. Par conséquent, $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un minimum pour f.*

2.4 Problèmes d'optimisation et régression linéaire

Considérons un nuage de n points de $\mathbb{R}^2$

$$N = \{(x_i, y_i) : x_i \in \mathbb{R} \text{ et } y_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\ \}.$$

Ces données sont souvent le résultat de mesures. On cherche souvent à décrire le compor-

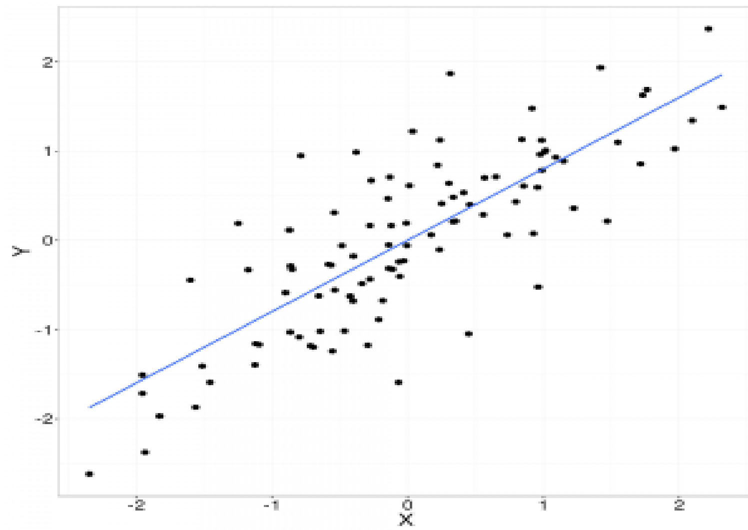

FIG. 2.1 – Nuage de points

tement global de ce nuage de points. En général ces points ne sont pas alignés, mais dans le cas particulier où la tendance est linéaire, on cherche la droite qui approche au mieux ce nuage de points.

On cherche donc la droite de régression d'équation $y = ax + b$, ce qui conduit à la recherche d'un couple de réels (a, b) qui minimise, par la méthode des moindres carrés, $\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$. Le problème est alors

$$(P_{rl}) \quad \begin{cases} min\ f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2, \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2.12}$$

$\star$ Le problème de régression linéaire (P_{rl}) admet-il une solution ? est-elle unique ?

Calculons d'abord ∇f et $\nabla^2 f$ en tout point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Posons $S_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$; $S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i$; $S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ et $S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Alors

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} 2S_{x^2}\ a + 2S_x\ b - 2S_{xy} \\ 2S_x\ a + 2n\ b - 2S_y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(a,b) = 2\begin{pmatrix} S_{x^2} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

– f est continue (fonction polynômiale),
– f est strictement convexe et coercive. En effet, le premier mineur principal de la matrice hessienne $\nabla^2 f(a,b)$, $\Delta_1 = 2S_{x^2} > 0$, et le deuxième mineur principal $\Delta_2 = 4(nS_{x^2} - S_x^2) > 0$ (en réalité $\Delta_2 \geq 0$, mais le cas $\Delta_2 = 0$ est trivial, il correspond au cas où toutes les observations sont égales). Donc la matrice hessienne est définie positive, d'où f est coercive et strictement convexe.

Le problème admet donc une solution unique si $|\nabla^2 f(a,b)| = 4(nS_{x^2} - S_x^2) \neq 0$.

$*$ Quels sont les points critiques ?

Un couple (a,b) est un point critique si $\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{cases} 2S_{x^2}\ a + 2S_x\ b - 2S_{xy} = 0 \\ 2S_x\ a + 2n\ b - 2S_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} S_{x^2}\ a + S_x\ b = S_{xy} \\ S_x\ a + n\ b = S_y \end{cases} \tag{2.14}$$

On obtient si $nS_{x^2} - S_x^2 \neq 0$:

$$a = \frac{S_x S_x - nS_{xy}}{(S_x)^2 - nS_{x^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{S_x S_{xy} - S_y S_{x^2}}{(S_x)^2 - nS_{x^2}}, \tag{2.15}$$

$*$ Nature du point critique obtenu ?

Comme la matrice hessienne est définie positive, alors le point critique obtenu est l'unique minimum de f.

La droite

$$y = ax + b = \frac{S_x S_x - nS_{xy}}{(S_x)^2 - nS_{x^2}} \cdot x + \frac{S_x S_{xy} - S_y S_{x^2}}{(S_x)^2 - nS_{x^2}} \tag{2.16}$$

est appelée droite de régression de y en x.

Exemple 2.7. *On considère le nuage de points $N = \{M_i = (x_i, y_i), i = 1, \ldots, 10\}$ donné dans le tableau ci-dessous. Le problème consiste à ajuster ce nuage de points par le modèle*

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	2	4	3	5	5	6	9	8	12

linéaire $y = ax + b$. L'objectif est de déterminer la droite de régression de Y en X.

$*$ Modélisation du problème sous forme d'un problème d'optimisation sans contraintes ?

Le problème, consiste donc, à la recherche d'un couple de réels (a,b), par la méthode des moindres carrés, solution de :

$$(P_{rl}) \begin{cases} min\ f(a,b) = \sum_{i=1}^{10} (y_i - ax_i - b)^2, \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$*$ *Nature du point critique obtenu ?*

Un couple (a, b) *est un point critique s'il est solution de l'équation d'Euler. Donc du système linéaire*

$$\begin{cases} S_{x^2}\ a + S_x\ b = S_{xy} \\ S_x\ a + 10\ b = S_y \end{cases} \iff \begin{cases} 385\ a + 55\ b = 391 \\ 55\ a + 10\ b = 56 \end{cases}$$

avec $S_{x^2} = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 385$ *;* $S_x = \sum_{i=1}^{10} x_i = 55$ *;* $S_y = \sum_{i=1}^{10} y_i = 56$ *et* $S_{xy} = \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 391$.

Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	$S_{x^2} = 385$
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$S_x = 55$
y_i	2	2	4	3	5	5	6	9	8	12	$S_y = 56$
$x_i\ y_i$	2	4	12	12	25	30	42	72	72	120	$S_{xy} = 391$

On obtient alors : $a = 1.006$ *et* $b = 0.67$. $*$ *Nature du point critique obtenu ?*

Pour cela, nous devons calculer le hessien en $(a, b) = (1.006, 0.67)$.

$$\nabla^2 f(a, b) = 2 \begin{pmatrix} S_{x^2} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 f(a, b) = 2 \begin{pmatrix} 385 & 55 \\ 55 & 10 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice définie positive car $\Delta_1 = 2S_{x^2} = 2 \cdot 3850 > 0$, *et le deuxième mineur principal* $\Delta_2 = 4(nS_{x^2} - S_x^2) = 4(10 \cdot 3850 - 55^2) = 3300 > 0$.

Par conséquent, $(a, b) = (1.006, 0.67)$ *est le minimum de* f.

La droite de régression de Y *en* X *est alors :* $y = 1.006x + 0.67$.

***Remarque* 2.6.** En statistique, après avoir trouvé la droite de régression, il faut d'autres étapes supplémentaires en vu de valider ce modèle.

Chapitre 3

Algorithmes

Introduction

La plupart des algorithmes d'optimisation exploitent les conditions d'optimalité dont on a vu qu'elles permettaient (aux mieux) de déterminer des minima locaux.
Les algorithmes exposés dans ce chapitre sont de nature itérative, c.à.d. qu'à partir d'un point initial donné x^0, ils engendrent une suite minimisante potentiellement infinie de points $x^0, x^1, \dots, x^k, \dots$ dont on espère qu'elle converge vers l'optimum cherché.

3.1 Méthode de relaxation

Cette méthode permet de ramener un problème de minimisation dans $\mathbb{R}^n$ à la résolution successive de n problèmes de minimisation dans $\mathbb{R}$ (à chaque itération).

3.1.1 Principe de la méthode

On cherche à minimiser $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$.
Etant donnée un itéré $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^t$, on fixe toutes les coordonnées sauf la première et on minimise sur la première coordonnée :

$$\begin{cases} min\ f(x, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On obtient ainsi la première coordonnée de l'itéré suivant x^{k+1} que l'on note x_1^{k+1} ; on peut effectuer cette minimisation dans $\mathbb{R}$. On recommence ensuite en fixant la première coordonnée à x_1^{k+1} et les $n-2$ dernières comme précédemment. On minimise alors sur la deuxième coordonnée et ainsi de suite.

3.1.2 Algorithme de la méthode

La méthode de relaxation est résumée dans l'algorithme suivant :

Algorithme : Méthode de relaxation

1. **Initialisation** ($\mathbf{k = 0}$)

   Choix de x^0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$.

2. **Itération k**

   Pour i variant de 1 à n, on calcule la solution x_i^{k+1} de
   $\begin{cases} min\ f(x_1^{k+1}, \cdots, x_{i-1}^{k+1}, x, x_{i+1}^k, \cdots, x_n^k) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

3. **Critère d'arrêt**

   - Si $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$, stop et fin ;

   - Sinon $k = k + 1$ et retourner à l'étape (2).

***Remarque* 3.1.** On peut utiliser aussi pour cet algorithme, ainsi que pour tous les algorithmes présentés dans ce chapitre, $\nabla f(x^k) = 0$ comme critère d'arrêt.

Exemple 3.1. *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2.$$

On applique à f la méthode de relaxation en partant de $X^0 = (0, 0)^t$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-5}$.

- *$k = 0$, choix de X^0 et ε : $X^0 = (0, 0)^t$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.*
- *$k = 1$, on calcule $X^1 = (x_1^1, x_2^1)^t$ en deux étapes car il contient deux composantes.*
  - *Pour $i = 1$, on pose $\widetilde{X^1} = f(x, 0)^t$ (on fait varier la première composante de X^1 et la deuxième composante est égale à la deuxième composante de X^0). On résout alors le problème suivant :*
  $$\begin{cases} min\ \varphi(x) = f(x, 0) \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
  $\varphi(x) = f(x, 0) = x^2 - 2x + 2$; $\varphi'(x) = 2x - 2$.
  $\varphi'(x) = 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$.
  $\varphi''(x) = 2 \Longrightarrow \varphi''(1) = 2 > 0$, alors φ atteint son minimum pour $x = x_1^1 = 1$.
  - *Pour $i = 2$, on pose $\overline{X^1} = \psi(y) = f(1, y)^t$ (on fixe la première composante de X^1 à $x_1^1 = 1$ et on fait varier la deuxième composante). On résout alors le problème suivant :*
  $$\begin{cases} min\ \psi(y) = f(1, y) \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$\psi(y) = f(1, y) = 1^2 + y^2 - 2 - 2y + 2 = y^2 - 2y + 1$; $\psi^{'}(y) = 2y - 2$.

$\psi^{'}(y) = 2y - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2y = 2 \Longrightarrow y = 1$.

$\psi^{''}(y) = 2 \Longrightarrow \psi^{''}(1) = 2 > 0$, *alors* ψ *atteint son minimum pour* $y = x_2^1 = 1$.

On obtient donc $X^1 = (1, 1)^t$.

• *Critère d'arrêt.*

$\|X^1 - X^0\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 10^{-5}$. *Donc on continue,* $k = k + 1 = 2$.

• $k = 2$, *on calcule* $X^2 = (x_1^2, x_2^2)^t$ *en deux étapes car il contient deux composantes.*

- *Pour* $i = 1$, *on pose* $\widetilde{X^2} = f(x, 1)^t$ *(on fait varier la première composante de* X^2 *et la deuxième composante est égale à la deuxième composante de* X^1*). On résout alors le problème suivant :*

$$\begin{cases} min\ \varphi(x) = f(x, 1) \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$\varphi(x) = f(x, 1) = x^2 + 1^2 - 2x - 2 + 2$; $\varphi^{'}(x) = 2x - 2$.

$\varphi^{'}(x) = 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$.

$\varphi^{''}(x) = 2 \Longrightarrow \varphi^{''}(1) = 2 > 0$, *alors* φ *atteint son minimum pour* $x = x_1^2 = 1$.

- *Pour* $i = 2$, *on pose* $\overline{X^1} = \psi(y) = f(1, y)^t$ *(on fixe la première composante de* X^2 *à* $x_1^2 = 1$ *et on fait varier la deuxième composante). On résout alors le problème suivant :*

$$\begin{cases} min\ \psi(y) = f(1, y) \\ y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$\psi(y) = f(1, y) = 1^2 + y^2 - 2 - 2y + 2 = y^2 - 2y + 1$; $\psi^{'}(y) = 2y - 2$.

$\psi^{'}(y) = 2y - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2y = 2 \Longrightarrow y = 1$.

$\psi^{''}(y) = 2 \Longrightarrow \psi^{''}(1) = 2 > 0$, *alors* ψ *atteint son minimum pour* $y = x_2^2 = 1$.

On obtient donc $X^2 = (1, 1)^t$. *On remarque que* $X^2 = X^1$. *On peut alors arrêter l'algorithme, on peut aussi utiliser le critère d'arrêt.*

• *Critère d'arrêt.*

$\|x^2 - x^1\| = 0 < 10^{-5}$, *stop et fin.*

En conclusion, $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est le minimum de* f *sur* $\mathbb{R}^2$ *avec* $f(X^*) = 0$.

3.2 Méthode du gradient

La méthode du gradient fait partie d'une classe plus grande de méthodes numériques appelées **méthodes de descente**.

3.2.1 Idée de la méthode

On veut minimiser une fonction f. Pour cela choisissons un point de départ arbitraire x^0. Pour avoir l'itéré suivant x^1 il faut penser qu'on veut se rapprocher du minimum de f ; on veut donc que $f(x^1) < f(x^0)$.
On cherche alors x^1 sous la forme $x^1 = x^0 + \rho_0 d_0$, où d_0 est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche donc ρ_0 et d_0 tel que : $f(x^0 + \rho_0 d_0) < f(x^0)$.
On ne peut pas toujours trouver d_0. Quand il existe, on dit que c'est une direction de descente et ρ_0 est le pas de descente.
ρ_0 et d_0 peuvent être fixés ou changent à chaque itération. Le schéma général d'une méthode de descente est le suivant :

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ x^{k+1} = x^k + \rho_k\ d_k, d_k \in \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ et } \rho_k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où ρ_k et d_k sont choisis de telle sorte que $f(x^k + \rho_k d_k) < f(x^k)$.
Une idée pour trouver une direction de descente est de faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction f entre deux itérés successifs x^k et $x^{k+1} = x^k + \rho_k\ d_k$.

$$f(x^k + \rho_k d_k) = f(x^k) + \rho_k \langle \nabla f(x^k), d_k \rangle + o(\rho_k d_k).$$

Comme on veut avoir $f(x^k + \rho_k d_k) < f(x^k)$, alors $\langle \nabla f(x^k), d_k \rangle < 0$. On peut choisir $d_k = -\nabla f(x^k)$. La méthode ainsi obtenue s'appelle algorithme du gradient. Le pas ρ_k peut être choisi constant ou variable.

3.2.2 Algorithme de la méthode

La méthode du gradient est résumée dans l'algorithme suivant :
Algorithme : Méthode du gradient

1. **Initialisation** $(\mathbf{k = 0})$
   Choix de x^0, $\rho_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$.

2. **Itération k**
   $x^{k+1} = x^k - \rho_k \, \nabla f(x^k)$.
3. **Critère d'arrêt**
   - Si $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$, stop et fin ;
   - Sinon $k = k + 1$ et retourner à l'étape (2).

***Remarque* 3.2.** Voici quelques remarques concernant la pas de cette méthode :

1. On utilise le plus souvent la méthode du gradient à pas constant ($\rho_k = \rho$ constant $\forall k$). On obtient alors la méthode du gradient à pas constant.
2. On peut faire varier le pas à chaque itération. On est alors dans le cas de la méthode du gradient à pas variable.
3. La méthode du gradient à pas optimal propose un choix du pas qui rend la fonction coût minimale le long de la direction de descente choisie. Donc l'étape 2 devient $2'$:
   $2'$. **Itération** k
   $x^{k+1} = x^k - \rho_k \, \nabla f(x^k)$.
   où ρ_k réalise le minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ϕ_k définie par
   $$\phi_k(\rho) = f(x^k - \rho \, \nabla f(x^k)).$$

Exemple 3.2. *On reprend la fonction f, définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de l'exemple précédent*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2.$$

On applique cette fois-ci à f la méthode du gradient à pas constant ($\rho_k = \rho = \frac{1}{2}, \forall k \geq 0$) en partant de $X^0 = (0, 0)^t$ avec $\varepsilon = 10^{-5}$.
Calculons d'abord le gradient de f, $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \end{pmatrix}$.
• *$k = 0$, choix de X^0, ρ et ε : $X^0 = (0, 0)^t$, $\rho_0 = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon = 10^{-5}$.*
• *$k = 1$, $X^1 = X^0 - \rho_0 \cdot \nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*
• *Critère d'arrêt.*
$\|X^1 - X^0\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} > 10^{-5}$. Donc on continue, $k = k + 1 = 2$.
• *$k = 2$, $X^2 = X^1 - \rho_1 \cdot \nabla f(X^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*
• *Critère d'arrêt.*
$\|X^2 - X^1\| = 0 < 10^{-5}$, stop et fin.
Le minimum de f est alors $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A faire en exercice : On prend maintenant le pas constant $\rho_k = \rho = \frac{1}{4}, \forall k \geq 0$.

- Appliquer à f quatre itérations de l'algorithme du gradient à pas constant en partant de X^0. En déduire la forme générale de X^k. Conclure.
- Pour quelle valeur de k, $\|\nabla f(X^k)\| < 10^{-5}$?

3.2.3 Résultats de convergence

Théorème 3.1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, coercive et strictement convexe. On suppose qu'il existe une constante M strictement positive tel que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \ \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \ \|x-y\| \tag{3.1}$$

Alors, si on choisit le pas ρ_k dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ tel que $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2}{M}$, la méthode du gradient converge vers le minimum de f.

Preuve. f étant strictement convexe, alors elle admet un unique minimum x^* caractérisé par $\nabla f(x^0) = 0$. Montrons que la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ engendré par l'algorithme du gradient converge vers x^*.
Appliquons à f la formule de Taylor avec reste intégral aux points $y = x^{k+1}$ et $x = x^k$.

$$f(x^{k+1}) = f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x^k + t(x^{k+1} - x^k)) - \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle \ dt$$

Comme $x^{k+1} = x^k - \rho_k \nabla f(x^k)$ alors $\nabla f(x^k) = -\dfrac{x^{k+1} - x^k}{\rho_k}$, donc

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) - f(x^k) &\leq -\frac{1}{\rho_k} \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \int_0^1 \|\nabla f(x^k + t(x^{k+1} - x^k)) - \nabla f(x^k)\| \cdot \|x^{k+1} - x^k\| \ dt \\ &\leq -\frac{1}{\rho_k} \ \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \frac{M}{2} \ \|x^{k+1} - x^k\|^2 = \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{\rho_k} \right) \ \|x^{k+1} - x^k\|^2. \end{aligned}$$

Si on choisit le pas ρ_k dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2$ tel que $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dfrac{2}{M}$, nous aurons :

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{\beta_2} \right) \ \|x^{k+1} - x^k\|^2.$$

La suite $(f(x^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante ; comme elle est minorée donc convergente.

D'autre part, $f(x^{k+1}) - f(x^k) \longrightarrow 0$ et la suite $\big(f(x^k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée (par coercivité). On peut donc en extraire une sous-suite convergente vers $\overline{x}$. Comme

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{M}{2}\right)^{-1} \big(f(x^k) - f(x^{k+1})\big)$$

alors la suite $(x^{k+1} - x^k) \longrightarrow 0$. Donc $\nabla f(x^k) = -\dfrac{x^{k+1} - x^k}{\rho_k} \longrightarrow 0$.
Par continuité de ∇f, on obtient $\nabla f(\overline{x}) = 0$. D'où $\overline{x}$ est l'unique minimum de f.
Alors converge vers x^* $(x^* = \overline{x})$.

□

***Remarque* 3.3.** La relation (3.1) du théorème 3.1 signifie que ∇f est lipschitzienne.

Corollaire 3.1. *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, elliptique et dérivée lipschitzienne, c.à.d. vérifiant (2.9) et (3.1). Alors, si on choisit le pas ρ_k dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ tel que $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2}{M}$, la méthode du gradient converge vers le minimum de f.*

Preuve. Si f vérifie (**??**) et (3.1), alors f est coercive et strictement convexe. Du théorème 3.1 on aura la convergence de la méthode du gradient. □

***Remarque* 3.4.** Voici quelques remarques sur les conditions de convergence :

1. Les conditions de convergence sont des conditions suffisantes. L'algorithme converge si elles sont satisfaites, mais il peut éventuellement converger même si elles ne le sont pas.
2. Dans le cas d'une fonction quadratique on obtient des résultats particuliers.

A faire en exercice : Appliquer à f, donnée dans l'exemple précédent, l'algorithme du gradient à pas optimal en partant de $X^0 = (0, 0)^t$ avec $\varepsilon = 10^{-5}$.

3.3 Méthode de Newton

3.3.1 Introduction

La méthode de Newton n'est pas une méthode d'optimisation à proprement parler. C'est une méthode de résolution d'équations non linéaires de la forme $F(x) = 0$ où F est fonction définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
L'utilité de cette méthode dans la recherche du minimum d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de

classe $\mathcal{C}^2$ réside dans le fait qu'une condition nécessaire d'optimalité est $\nabla f(x^*) = 0$.
Ceci est système non linéaire d'équations. La solution de ce système ne donne que les points stationnaires de f. Il faudra, ensuite, vérifier que ce sont des minima.

3.3.2 Idée de la méthode

L'idée consiste à remplacer, au voisinage du point courant x^k, la fonction f par son approximation quadratique donnée par la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$q(x) = f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x^k) \cdot (x - x^k), x - x^k \rangle.$$

On prend alors comme x^{k+1} le minimum de $q(x)$ lorsqu'il existe. Ceci est vrai que si $\nabla^2 f(x^k)$ est une matrice définie positive.
La fonction q est alors strictement convexe et a un minimum unique x^{k+1} défini par

$$\nabla f(x^{k+1}) = 0.$$

Ce qui conduit au système linéaire

$$\nabla f(x^k) = -\langle \nabla^2 f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle.$$

D'où la formule itérative

$$x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k).$$

Cette formule n'est autre que la méthode de Newton appliquée à la résolution du système d'équations non linéaire

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = 0, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

3.3.3 Algorithme de la méthode

Algorithme : Méthode de Newton

1. **Initialisation** $(\mathbf{k = 0})$
   Choix de x^0 dans un voisinage de x^* et $\varepsilon > 0$.
2. **Itération k**
   $x^{k+1} = x^k - \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k).$

3. **Critère d'arrêt**
   - Si $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$, stop et fin ;
   - Sinon $k = k + 1$ et retourner à l'étape (2).

***Remarque* 3.5.** La méthode de Newton dans le cas où $\nabla^2 f(x^k)$ est inversible est une méthode de descente de la forme $x^{k+1} = x^k + \rho_k \cdot d_k$ avec $\rho_k = 1, \forall k \geq 0$ et $d_k = -\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$.

3.3.4 Résultats de convergence

Nous avons le résultat de convergence suivant :

Proposition 3.1. *Si x^0 est choisit suffisamment proche d'un minimum local x^* où le hessien de f est défini positif, alors la suite (x^k) a une convergence quadratique vers x^*.*

Preuve. On a

$$\nabla f(x^k + h) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)h + \circ(\|h\|^2)$$

où $\dfrac{\circ(\|h\|^2)}{\|h\|^2}$ est une fonction bornée de h. Pour $h = x^* - x^k$, on aura :

$$\nabla f(x^*) = 0 = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k) \cdot (x^* - x^k) + \circ(\|x^* - x^k\|^2).$$

Au voisinage de x^*, le hessien de f est inversible. On compose l'égalité ci-dessous par $\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1}$. On admet que $\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \circ(\|x^* - x^k\|^2 = \circ(\|x^* - x^k\|^2)$ (ce résultat découle de la continuité de $\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1}$). Ainsi

$$x^{k+1} - x^k = -\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

donc

$$x^k - x^* = \left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1} \cdot \nabla f(x^k) + \circ(\|x^* - x^k\|^2.$$

Alors, $x^{k+1} - x^* = \circ(\|x^* - x^k\|^2)$, d'où le résultat. □

***Remarque* 3.6.** Avantages et inconvénients de cette méthodes.

1. L'inconvénient de cette méthode est sa sensibilité au choix du point de départ : la convergence est locale. Si ce point est choisi loin de la solution la méthode peut soit diverger, soit converger vers une autre solution.
   En pratique, on essaie de s'approcher de x^* par une méthode de type gradient, puis utiliser la méthode de Newton.

2. Un autre inconvénient est le calcul de $\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1}$ à chaque itération. Des méthodes quasi-Newtoniennes ont été développées. Ces dernières gardent la rapidité de la méthode de Newton tout en évitant le calcul coûteux de $\left[\nabla^2 f(x^k)\right]^{-1}$.
3. L'avantage de cette méthode est sa grande rapidité, puisque la vitesse de convergence est quadratique.
4. Une propriété intéressante de cette méthode est qu'elle converge en une seule itération lorsqu'elle est appliquée à une fonction quadratique strictement convexe.

Exemple 3.3. *On reprend toujours la fonction f donnée par : $f(x, y) = x^2+y^2-2x-2y+2$. On applique à f la méthode de Newton en partant de $X^0 = (0, 0)^t$ avec $\varepsilon = 10^{-5}$. On a :*

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

• $k = 0$, *choix de* X^0 *et* ε : $X^0 = (0, 0)^t$ *et* $\varepsilon = 10^{-5}$.
• $k = 1$, $X^1 = X^0 - [\nabla^2 f(X^0)]^{-1} \cdot \nabla f(X^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X^*$.
Stop et fin de l'algorithme.
On a obtenu la convergence vers le minimum au bout d'une seule itération. Il faut remarquer que f est quadratique dont la matrice hessienne est définie positive. Donc f est coercive et strictement convexe.

Bibliographie

[1] M. Berguounioux, *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires - cours et exercices avec solutions*. Paris, Francis Lefebvre, 2001. **Cote : 519.6/02**.

[2] A. Berhail, *Optimisation sans contraintes*. Polycopie de Cours, Université 08 Mai 1945 Guelma, 2016.

[3] M. Bierlaire, *Introduction à l'optimisation différentielle*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006. **Cote : 519.3/14**.

[4] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, Paris, 1988. **Cote : 518/43**

[5] J.C. Culioli, *Introduction à l'optimisation*. Paris : Ellipses, 2012. **Cote : 519/7.6**.

[6] Y. Dodge, *Optimisation appliquée*. Berlin : Springer, 2004. **Cote : 519.6/37**

[7] J. Gauvin, *Leçons de programmation mathématique*. Ecole Polytechnique de Montreal, 1995. **Cote : 519.7/44**.

[8] J.B. Hiriart-Urruty, *Les mathématiques du mieux faire : Premiers pas en optimisation*. Volume 1, Paris : Ellipses, 2007. **Cote : 519.3/22**.

[9] J.B. Hiriart-Urruty, *Optimisation et analyse convexe - exercices et problèmes corrigés, avec rappels de cours*. EDP Sciences, 2009. **Cote : 519.6/53**.

[10] M. Minoux, *Programmation mathématiques : Théorie et algorithmes*. Tome 1, Editions Dunod, 1983. **Cote : 519.7/52**.

[11] H. Moulin et F. Fogelman-Soulié, *La convexité dans les mathématiques de la décision : Optimisation et théorie micro-économique*. Hermann, Paris, 1979.

[12] M. WILLEM, *Analyse convexe et optimisation*. CIACO, 1987.