Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
3$^{\text{ème}}$ année Licence de Mathématiques

2024/2025

Série de TD n° 1 d'Optimisation Avec Contraintes

Exercice 1. (Problème de production)

Un ébéniste fabrique des armoires et des tables avec trois sortes de bois: chêne, pin et noyer. Dans le tableau suivant, on donne le nombre de mètres carrés nécessaires à la fabrication de chaque type de meubles et le nombre de mètres carrés disponibles.

	Armoire	Table	Disponible
Chêne	4	5	210
Pin	5	2.5	180
Noyer	6	5	240

L'ébéniste gagne 30 000 DA par armoire et 20 000 DA par table.
Combien d'armoires et de tables cet artisan doit-il fabriquer pour rendre son gain maximum?

Exercice 2. (Problème de mélange)

Une diététicienne doit préparer un repas composé de deux aliments **A** et **B** qui contienne au moins 300 g de protéines et 400 g d'hydrates de carbone. Chaque unité de l'aliment **A** contient 10 g de protéines et 16 g d'hydrates de carbone et coûte 8 DA. Chaque unité de l'aliment **B** contient 12.5 g de protéines et 10 g d'hydrates de carbone et coûte 12 DA.
Déterminer le mélange qui coûte le moins cher et qui apporte la quantité requise de protéines et d'hydrates de carbone.

Exercice 3. (Problème de transport)

Soient 3 centres de production (ou dépôts) d'un bien donné possédant des stocks disponibles en quantités respectives 46, 27 et 35. Dans 4 centres de consommation, la demande de ce bien est respectivement 22, 36, 16 et 25. Il est clair que le problème n'aura pas de solution si la quantité totale disponible est inférieure à la demande totale.
Les frais (ou coûts) de transport d'une unité de bien du centre i à la $j^{\text{ième}}$ destination est C_{ij}. La matrice des coûts de transport entre les dépôts et les centres de consommation est donnée par:

i j	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	9	18	15	28
i=2	15	11	24	10
i=3	10	21	16	8

Le problème consiste à déterminer comment approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport.

1. Représenter cette situation à l'aide d'un graphe.
2. Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 4.

Considérons le problème $(P1)$ suivant:

$$(P1) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = x^2 + y^2, \\ \quad g_1(x,y) = x - y \leq 0, \\ \quad g_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \leq 0, \\ \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. Le vecteur $d_0 = (-1,0)^t$ est-il une direction de descente pour f au point $X^0 = (1,1)^t$?
2. Posons $X^1_\rho = X^0 + \rho d_0$. Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles X^1_ρ est réalisable.
3. Déterminer, ρ_{min}, la valeur de ρ qui minimise f le long de la direction d_0.
   Notons $X^1 = X^0 + \rho_{min} d_0$.
4. Le vecteur $d_1 = (0,-1)^t$ est-il une direction de descente pour f au point X^1?
5. Posons $X^2_\rho = X^1 + \rho d_1$. Déterminer les valeurs de ρ pour lesquelles X^2_ρ est réalisable.
6. Déterminer, ρ_{min}, la valeur de ρ qui minimise f le long de la direction d_1.
   Notons $X^2 = X^1 + \rho_{min} d_1$. Conclure.
7. Déterminer toutes les directions de descente au point X^2;
8. Déterminer toutes les directions admissibles au point X^2;
9. Y'a t-il des directions admissibles et de descente à la fois au points X^2?. Conclure.

Exercice 5.

Soit le sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \ \text{ et } x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0\}.$$

1. Le point $X = (0,0)^t$ est-il régulier? Déterminer l'ensemble des directions admissibles en $X = (0,0)^t$.
2. Mêmes questions si on suppose maintenant que Ω est défini par:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \ \text{ et } x^2 + (y-1)^2 - 1 \leq 0\}.$$

Exercice 6.

Considérons le problème $(P2)$ suivant:

$$(P2) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 10x - 10y, \\ g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 5 \leq 0, \\ g_2(x,y) = 3x + y - 6 \leq 0, \end{cases}$$

Considérons l'élément $X^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$.

1. Quelles sont les contraintes actives en X^0?
2. X^0 est-il un point régulier?
3. X^0 vérifie-t-il les conditions de Karush-Kuhn-Tucker ? Conclure.

Exercice 7.

Considérons le problème de maximisation suivant:

$$(P3) \quad \begin{cases} max\ f(x,y,z) = -(x-2)^2 - (y+1)^2 - z, \\ \text{s.c.} \quad h(x,y,z) = -x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

1. Résoudre le problème $(P3)$ en écrivant z en fonction de x et y, puis remplacer sa valeur dans l'expression de la fonction objectif et enfin résoudre le problème (obtenu) sans contraintes à deux variables;
2. Résoudre le problème $(P3)$ en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

Exercice 8.

Résoudre le problème $(P4)$ en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker.

$$(P4) \quad \begin{cases} min\ f(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + xz, \\ h_1(x,y,z) = x - y - 1 = 0, \\ h_2(x,y,z) = y - z + 1 = 0, \end{cases}$$

Exercice 9.

Résoudre, en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, le problème $(P5)$ suivant:

$$(P5) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = (x-1)^2 + y - 2, \\ h(x,y) = -x + y - 1 = 0 \\ g(x,y) = x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 10.

Résoudre, en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, le problème $(P6)$ suivant:

$$(P6) \quad \begin{cases} min\ f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2, \\ h(x,y) = x + y - 1 = 0 \\ g(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$