

## **Série de TD n° 2 d'Optimisation sans contraintes**

**Exercice 1.** Les fonctions suivantes sont-elles coercives?

1.  $f_1$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_1(x, y) = x^4 - 2x^2 - 3y + y^3;$$

2.  $f_2$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_2(x, y) = x^3 + xy^2 - 15x - 12y.$$

3.  $f_3$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y) = x^2 + e^{y^2}.$$

**Exercice 2.** Considérons les fonctions suivantes:

1.  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y;$$

2.  $g$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 2yx^2 + 4xy;$$

3.  $h$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y.$$

Déterminer les points critiques de  $f_1$  et  $f_2$  et leurs natures.

**Exercice 3.** Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel  $a$ , les points critiques de  $f_a$  et leurs natures, où  $f_a$  est la fonction définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

**Exercice 4.** La condition nécessaire d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre est-elle vérifiée pour chacune des fonctions suivantes? Si c'est le cas, les points stationnaires obtenus sont-ils des minima?

1.  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$f(x, y) = x^3 + 3x + y^2.$$

2.  $g$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$g(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

3.  $h$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$h(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + xy.$$

4.  $d$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$d(x, y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

**Exercice 5.** Considérons la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}^2$  dans par:

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy - x - y.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité du minimum de  $f$ .
2. Déterminer l'unique minimum de  $f$ .

**Exercice 6.** On se propose d'approcher un nuage de points donnés par les couples de réels  $(x_i, y_i)$ ,

$i = 1, \dots, n$  par une parabole d'équation  $y(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels à déterminer. Autrement dit, on fait une régression "parabolique".

1. Exprimer le problème ci-dessus sous forme de problème de minimisation au sens des moindres carrés. On précisera en particulier la fonction à minimiser, les inconnues et l'ensemble des contraintes;
2. Ce problème de minimisation a t-il une solution? pourquoi? Est-elle unique?
3. Ecrire le système d'optimalité permettant de trouver le minimum.

On notera  $S_k$  la quantité  $S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$ .