

Série de TD n° 2 d'Optimisation sans contraintes

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles coercives?

1. f_1 définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_1(x, y) = x^4 - 2x^2 - 3y + y^3;$$

2. f_2 définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_2(x, y) = x^3 + xy^2 - 15x - 12y.$$

3. f_3 définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y) = x^2 + e^{y^2}.$$

Exercice 2. Considérons les fonctions suivantes:

1. f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y;$$

2. g définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = x^2y^2 - 2xy^2 - 2yx^2 + 4xy;$$

3. h définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y.$$

Déterminer les points critiques de f_1 et f_2 et leurs natures.

Exercice 3. Déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel a , les points critiques de f_a et leurs natures, où f_a est la fonction définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$f_a(x, y) = x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

Exercice 4. La condition nécessaire d'optimalité du 1^{er} ordre est-elle vérifiée pour chacune des fonctions suivantes? Si c'est le cas, les points stationnaires obtenus sont-ils des minima?

1. f définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par:

$$f(x, y) = x^3 + 3x + y^2.$$

2. g définie de \mathbb{R}^2 dans par:

$$g(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

3. h définie de \mathbb{R}^2 dans par:

$$h(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + xy.$$

4. d définie de \mathbb{R}^2 dans par:

$$d(x, y) = x^4 - x^2 + y^2.$$

Exercice 5. Considérons la fonction f définie de \mathbb{R}^2 dans par:

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy - x - y.$$

1. Montrer l'existence et l'unicité du minimum de f .
2. Déterminer l'unique minimum de f .

Exercice 6. On se propose d'approcher un nuage de points donnés par les couples de réels (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ par une parabole d'équation $y(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels à déterminer. Autrement dit, on fait une régression "parabolique".

1. Exprimer le problème ci-dessus sous forme de problème de minimisation au sens des moindres carrés. On précisera en particulier la fonction à minimiser, les inconnues et l'ensemble des contraintes;
2. Ce problème de minimisation a-t-il une solution? pourquoi? Est-elle unique?
3. Ecrire le système d'optimalité permettant de trouver le minimum.

On notera S_k la quantité $S_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$.