Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques
3ème année Licence de Mathématiques

2024/2025

Série de TD n° 1 d'Optimisation sans contraintes

Exercice 1. Soient S et C deux ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que:

1. $S + C$ est un ensemble convexe;
2. $\alpha \cdot C$ est un ensemble convexe.

Exercice 2. Considérons le sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ donné par:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r, a \in \mathbb{R}^n \text{ et } r \geq 0 \text{ fixés } \}.$$

Montrer que C est un ensemble convexe.

Exercice 3. Soient C un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle et $\alpha \in \mathbb{R}$. La section de f de niveau α est donnée par:

$$C_\alpha = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}.$$

Montrer que si f est une fonction convexe alors C_α est un ensemble convexe.

Exercice 4. Soit f une application linéaire définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que:

1. (A est un convexe de $\mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ ($f(A)$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$).
2. (B est un convexe de $\mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ ($f^{-1}(B)$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$).

Exercice 5. Les fonctions suivantes sont-elles convexes? Strictement convexes?

1. f_1 définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^5 + x^3;$$

2. f_2 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + e^{y^2};$$

3. f_2 définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_3(x,y) = e^{x^2+y^2}.$$

Exercice 6. Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est une fonction convexe.

Exercice 7. Soit f une fonction convexe définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si Φ, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est convexe croissante alors $\Phi \circ f$ est une fonction convexe.

Exercice 8. Soient $p, q > 0$, tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer, en utilisant la convexité de la fonction $x \longmapsto e^x$, que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[p]{a} \right) \left(\sqrt[q]{b} \right) \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

2. (a) Déduire, en utilisant l'inégalité précédente, que pour tous $a_1, a_2\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{a_1 b_1}{\left(\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \right) \left(\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q} \right)} \leq \frac{a_1^p}{p\left(a_1^p + a_2^p \right)} + \frac{b_1^q}{q\left(b_1^q + b_2^q \right)}.$$

   (b) Conclure que pour tous $a_1, a_2\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \left(\sqrt[p]{a_1^p + a_2^p} \right) \left(\sqrt[q]{b_1^q + b_2^q} \right).$$

   (c) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et tous $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} \right) \left(\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \right).$$

Exercice 9. Soit $f : C \to \mathbb{R}$, Gâteaux différentiable sur C, où C est un convexe de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est convexe si et seulement si ∇f est un opérateur monotone de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c.à.d:

$$(f \text{ est convexe}) \Longleftrightarrow (\forall (x, y) \in C \times C :< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y > \geq 0).$$

Exercice 10. On considère la fonction quadratique f définie, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >= \frac{1}{2} x^t A x - b^t x,$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

1. Déterminer le gradient et le hessien de f en tout point;

2. Montrer que si A est symétrique définie positive, alors il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui minimise f, et que ce x^* est l'unique solution du système $Ax = b$.