Considérons à présent le cas des fonctions à plusieurs variables indépendantes. Des exemples simples en sont fournis par des formules de mathématiques élémentaires. Ainsi, dans la formule de calcul du volume V d'un cylindre droit à base circulaire, $V = \pi r^2 h$, V est une fonction à deux variables indépendantes : r (rayon du cercle de base) et h (hauteur). De la même manière, dans la formule qui donne l'aire A d'un triangle quelconque, $A = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$, A est une fonction à trois variables indépendantes, x, y et α, qui traduisent respectivement la longeur de deux côtés du triangle et l'angle formé par ces deux côtés.

Pour les fonctions à deux variables, $z = f(x, y)$, le graphe est une surface dans l'espace à trois dimensions. Une telle fonction présente un maximum au point $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, si $f(x_0, y_0)$ atteint une valeur supérieure à toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$, comme indiqué sur la figure 3.4 (a). De même, $f(x, y)$ possède un minimum au point $P(x_0, y_0; f(x_0, y_0))$, si $f(x_0, y_0)$ atteint une valeur inférieure à toutes celles que prend $f(x, y)$ au voisinage de $x = x_0$ et $y = y_0$; ce cas est illustré par la figure 3.4 (b). Il en résulte qu'au point $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$, il existe un **plan tangent horizontal**. Ce plan tangent est engendré par deux tangentes, elles-mêmes déterminées par :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Ainsi, la condition nécessaire à l'existence d'un extremum est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

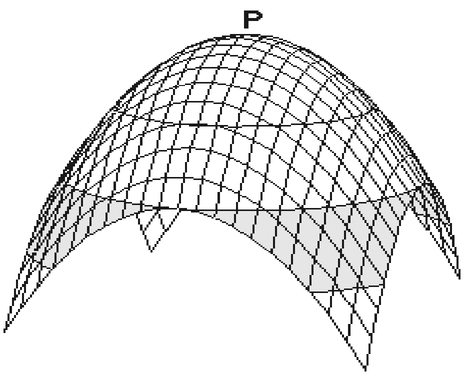

Figure 3.4 (a) : Maximum au point P

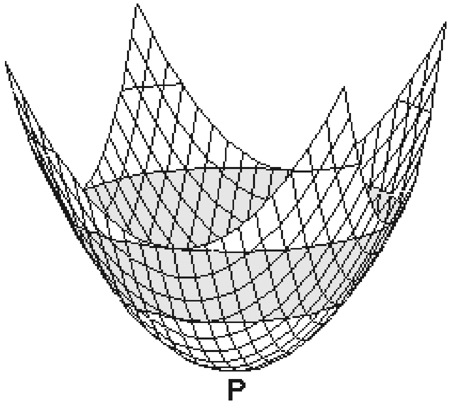

Figure 3.4 (b) : Minimum au point P

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante. En effet, il existe des fonctions pour lesquelles $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ sans qu'il existe un extremum en ce point. Dans ce cas, on parle de **point-selle**. Bien que les deux tangentes soient horizontales, il est toujours possible de trouver un point situé au-dessus du point-selle et un autre au-dessous, ceci quelque soit le voisinage du point-selle considéré. Notons encore, qu'en un point-selle la fonction présente un minimum pour l'une des variables et un maximum pour l'autre variable. La figure 3.5 illustre cette situation.

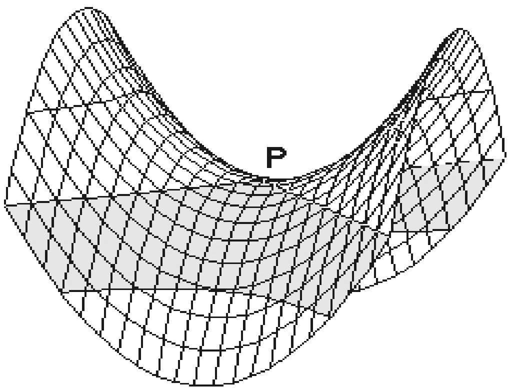

Figure 3.5 : Point-selle en P

Il faut donc remplir une condition suffisante qui est la suivante :

$$\alpha = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

où :

- $f_{xx} = \partial^2 f/\partial x^2$, c'est-à-dire que la fonction a été dérivée deux fois par rapport à x,
- $f_{yy} = \partial^2 f/\partial y^2$, ce qui signifie que la fonction a été dérivée deux fois par rapport à y,
- $f_{xy}^2 = (\partial^2 f/\partial x \partial y)^2$, c'est-à-dire que la première dérivée se fait par rapport à y et la deuxième par rapport à x ; cette expression est ensuite élevée au carré.

Le résultat 3.3 résume la situation pour les fonctions à deux variables.

Résultat 3.3 *Soit $P(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ le point en lequel :*

$$\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$$

Alors si en ce point :

1. $f_{xx} > 0$ *et* $\alpha > 0$*,* f *possède un minimum au point* P*.*
2. $f_{xx} < 0$ *et* $\alpha > 0$*,* f *possède un maximum au point* P*.*
3. $\alpha < 0$*,* f *ne possède ni minimum ni maximum au point* P*, mais un point-selle.*
4. $\alpha = 0$*, on ne peut pas conclure.*

Notons que la condition suffisante évoquée ci-dessus provient d'un résultat plus général concernant les fonctions à n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Avant d'énoncer ce résultat général, introduisons la matrice des secondes dérivées partielles. Celle-ci joue un rôle clé dans la détermination des extrema d'une fonction à plusieurs variables. Cette matrice est appelée **matrice hessienne** et se présente sous la forme :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} fx_1^2 & fx_1x_2 & \dots & fx_1x_n \\ fx_2x_1 & fx_2^2 & \dots & fx_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ fx_{n-1}x_1 & fx_{n-1}x_2 & \dots & fx_{n-1}x_n \\ fx_nx_1 & fx_nx_2 & \dots & fx_n^2 \end{pmatrix}$$

où $f_{x_1^2} = \partial^2 f/\partial x_1^2$, $f_{x_1x_2} = \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2$, ..., et $fx_n^2 = \partial^2 f/\partial x_n^2$

On appelle mineurs principaux de la matrice $\boldsymbol{H}$, notés $\triangle_i$, les déterminants des sous-matrices de $\boldsymbol{H}$ obtenues en lui retirant ses $n-i$ dernières lignes et colonnes $(i = 1, \dots, n)$.

Dans le cas général, la recherche des extrema d'une fonction à plusieurs variables est basée sur le résultat 3.4.

Résultat 3.4 *Soit P le point en lequel :*

$$\partial f/\partial x_1 = \partial f/\partial x_2 = \dots = \partial f/\partial x_n = 0.$$

Alors:

1. *si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point P sont tous strictement positifs, il s'agit d'un minimum.*

2. *si les mineurs principaux de la matrice hessienne au point P sont de signes alternés, le premier étant strictement négatif, il s'agit d'un maximum.*

3. *si les mineurs principaux ne vérifient pas l'une des conditions ci-dessus prises au sens large (c'est-à-dire respectivement "positif ou nul" et "négatif ou nul"), il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum, mais d'un point-selle.*

4. *si les conditions (1) et (2) se vérifient au sens large, alors on ne peut pas conclure.*

Dans le cas de fonctions à deux variables, on retrouve le résultat 3.3. En effet, dans ce cas, tout comme $f_{xy} = f_{yx}$, on a :

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= f_{xx} \\ \triangle_2 &= f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \triangle_1 > 0 \text{ et } \triangle_2 > 0 \Longrightarrow \text{minimum.} \\ \triangle_1 < 0 \text{ et } \triangle_2 > 0 \Longrightarrow \text{maximum.} \\ \triangle_1 \text{ quelconque et } \triangle_2 < 0 \Longrightarrow \text{point-selle.} \\ \triangle_1 \text{ quelconque et } \triangle_2 = 0 \Longrightarrow \text{on ne peut pas conclure.} \end{cases}$$

Exemple 3.3 *Soit la fonction* $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Les candidats aux extrema s'obtiennent en résolvant le système d'équations : $\partial f/\partial x = 0$ et $\partial f/\partial y = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Il existe donc un point candidat en $x_0 = y_0 = z_0 = 0$; ce point est forcément un minimum puisque $f(x, y) = x^2 + y^2 > 0, \forall x \neq 0, \forall y \neq 0$, comme la figure 3.6 en témoigne. En effet, en appliquant le résultat 3.4, on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

La matrice hessienne est donc définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ici, $\triangle_1 = 2$ et $\triangle_2 = 4$. Par conséquent, f possède un minimum en $(0; 0; 0)$.

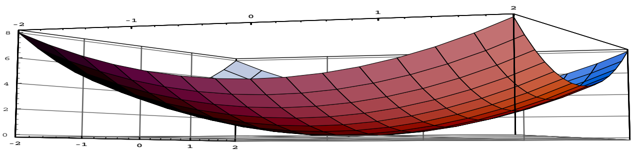

Figure 3.6 : Graphe de $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

Exemple 3.4 *Soit* $f(x,y) = 4x^2 - xy + y^2 - x^3$.

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y - 3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

Les points candidats s'obtiennent en résolvant les deux équations :

$$8x - y - 3x^2 = 0 \tag{3.1}$$
$$-x + 2y = 0 \tag{3.2}$$

Après substitution de $x = 2y$ (tiré de (3.2)) dans (3.1), on trouve :

$$-12y^2 + 15y = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = \dfrac{5}{4} \end{array}$$

Comme $x = 2y$, on trouve $x_1 = 0$ et $x_2 = \dfrac{5}{2}$

Il existe donc deux points candidats : $P_1(0;0;0)$ et $P_2(\frac{5}{2};\frac{5}{4};\frac{125}{16})$.

La matrice hessienne est définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 8-6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Évaluons la matrice hessienne pour le premier point candidat $x_1 = 0$, $y_1 = 0$:

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\triangle_1 = 8 > 0$ et $\triangle_2 = 15 > 0$, il s'agit d'un minimum.

Pour le second point candidat $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{5}{4}$, on obtient :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\triangle_1 = -7 < 0$ et $\triangle_2 = -15 < 0$, il ne s'agit ni d'un minimum ni d'un maximum, mais d'un point-selle de la fonction.

Exemple 3.5 *Soit* $f(x, y, z) = x^4 - 17x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 81.$

Annulons les premières dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 34x - 2y = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 2x - 2z = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2y = 0 \tag{3.5}$$

Par simplification, de (3.5) on tire :

$$y = z \tag{3.6}$$

Substituons (3.6) dans (3.4) :

$$\begin{aligned} 4y - 2x - 2y &= 0 \\ 2y - 2x &= 0 \\ x &= y \end{aligned} \tag{3.7}$$

En introduisant (3.6) et (3.7) dans (3.3), on trouve :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 34x - 2x &= 0 \\ 4x^3 - 36x &= 0 \\ 4x(x^2 - 9) &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière équation a trois solutions :

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = -3, \;\; x_3 = 3$$

Les valeurs correspondantes de y et de z sont :

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \quad y_2 = -3 \quad y_3 = 3 \\ z_1 &= 0 \quad z_2 = -3 \quad z_3 = 3 \end{aligned}$$

Les deuxièmes dérivées partielles sont :

$$\begin{array}{lll} \partial^2 f/\partial x^2 = 12x^2 - 34 & \partial^2 f/\partial x \partial y = -2 & \partial^2 f/\partial x \partial z = 0 \\ \partial^2 f/\partial y \partial x = -2 & \partial^2 f/\partial y^2 = 4 & \partial^2 f/\partial y \partial z = -2 \\ \partial^2 f/\partial z \partial x = 0 & \partial^2 f/\partial z \partial y = -2 & \partial^2 f/\partial z^2 = 2 \end{array}$$

Pour le point $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, la matrice hessienne est définie par :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} -34 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= -34 \\ \triangle_2 &= -140 \\ \triangle_3 &= -144 \end{aligned}$$

D'après le résultat 3.4, ces trois mineurs principaux ne vérifient ni la condition 1 ni la condition 2, prises au sens large.

La fonction présente donc un point-selle en $x_1 = y_1 = z_1 = 0$.

Pour les points $x_2 = y_2 = z_2 = -3$ et $x_3 = y_3 = z_3 = 3$, la matrice hessienne est la même :

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 74 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= \quad 74\\ \triangle_2 &= \quad 292\\ \triangle_3 &= \quad 288\end{aligned}$$

Ainsi, pour chacun de ces deux points, la fonction présente un minimum.

Exemple 3.6 *Une firme aéronautique fabrique des avions qu'elle vend sur deux marchés étrangers. Soit q_1 le nombre d'avions vendus sur le premier marché et q_2 le nombre d'avions vendus sur le deuxième marché. Les fonctions de demande dans les deux marchés respectifs sont :*

$$\begin{aligned}p_1 &= 60 - 2q_1\\ p_2 &= 80 - 4q_2\end{aligned}$$

P_1 et p_2 sont les deux prix de vente. La fonction de coût total de la firme est :

$$C = 50 + 40q$$

où q est le nombre total d'avions produits. Il faut trouver le nombre d'avions que la firme doit vendre sur chaque marché pour maximiser son bénéfice.

Comme $q = q_1 + q_2$, la fonction de coût devient :

$$\begin{aligned}C &= 50 + 40q\\ &= 50 + 40(q_1 + q_2)\\ &= 50 + 40q_1 + 40q_2\end{aligned}$$

Le revenu total R s'obtient en multipliant le prix par la quantité sur chaque marché :

$$\begin{aligned}R &= p_1q_1 + p_2q_2\\ &= (60 - 2q_1)q_1 + (80 - 4q_2)q_2\\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2\end{aligned}$$

On obtient le bénéfice B en calculant la différence entre le revenu et le coût :

$$\begin{aligned}B &= R - C\\ &= 60q_1 - 2q_1^2 + 80q_2 - 4q_2^2 - (50 + 40q_1 + 40q_2)\\ &= 20q_1 - 2q_1^2 + 40q_2 - 4q_2^2 - 50\end{aligned}$$