计算流体力学大作业
Poisson 方程求解

廖紫默 (SA21005043)
近代力学系，中国科学技术大学
zimoliao@mail.ustc.edu.cn

2022 年 4 月 24 日

1 问题简述

求解 Poisson 方程：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=\sin x\cos y,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1 \tag{1}$$

边界条件为：

$$\phi=\begin{cases}0 & ,x=0\\ y-\frac{\sin 1\cos y}{2} & ,x=1\\ -\frac{\sin x}{2} & ,y=0\\ x-\frac{\sin x\cos 1}{2} & ,y=1\end{cases} \tag{2}$$

绘制等值线 $\phi=0.05,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$。要求采用方法（迭代误差取 10^{-6}）：

1. 线性方程组求解：Jacobi，G-S 选一；SOR，线 SOR，块 SOR 选一。
2. 加速方法：CG，MG 选一。

2 方程离散

采用有限差分方法离散式 1，空间二阶导项使用中心差分近似：

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i\approx\frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}-2\phi_i}{(\Delta x)^2} \tag{3}$$

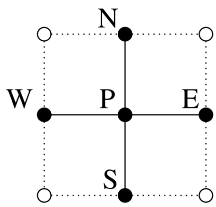

图 1: 五点计算单元（computational molecular）(Ferziger et al., 2020)

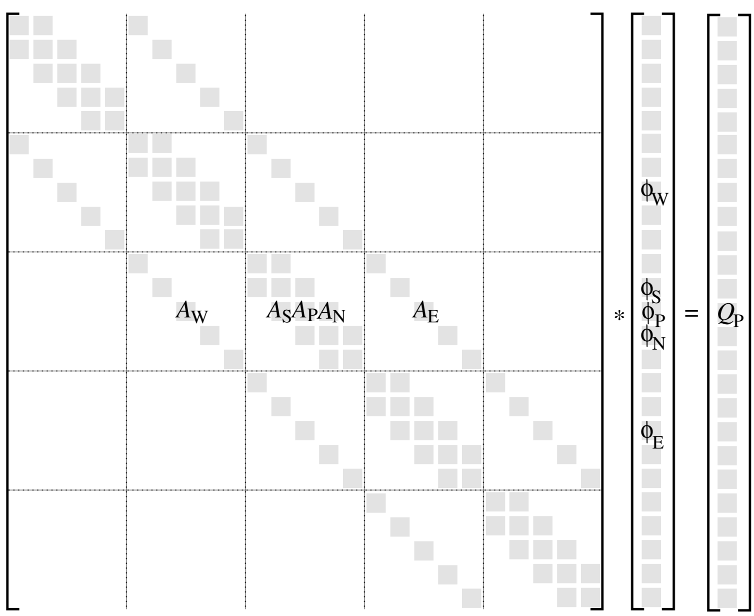

图 2: 代数方程组与带状系数矩阵形式 (Ferziger et al., 2020)

原 Poisson 方程转化为一代数方程组，记为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{Q}$，其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为一带状矩阵，由五点计算单元构成，见图 1、图 2。各节点（P）上求解：

$$A_W\phi_W+A_S\phi_S+A_P\phi_P+A_N\phi_N+A_E\phi_E=Q_P \tag{4}$$

采用二阶中心差分的 Poisson 方程系数为：

$$A_W=A_S=A_N=A_E=1,\quad A_P=-4 \tag{5}$$

此外，非齐次项由 $Q_P=h^2\sin(x_P)\cos(y_P)$ 确定，$h=\Delta x=\Delta y$ 为均匀网格间距。边界条件（式 2）采用直接转移法施加到代数方程组中。

3 代数方程组求解

3.1 迭代解法

线性代数方程组迭代方法的基本思路在于将原始方程：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{Q} \tag{6}$$

中系数矩阵拆分 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，进而构造迭代方程[1]：

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\phi}^{n}+\boldsymbol{Q} \tag{7}$$

当 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的谱半径小于 1 时，上述迭代式可以收敛到原方程的解。构造不同的 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 矩阵可以得到性能相异的迭代方法。

3.2 Jacobi 方法（J）

记 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U}$，分别表示下三角、对角、上三角部分，Jacobi 方法直接取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}$。迭代方程如下Sauer (2018)：

$$\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{Q}-(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,\boldsymbol{\phi}^{n}\right) \tag{8}$$

对于离散 Poisson 方程（具有带状系数矩阵），迭代式可写为：

$$\phi_P^{n+1}=-\frac{Q_P-\phi_S^n-\phi_W^n-\phi_N^n-\phi_E^n}{4} \tag{9}$$

[1]更一般的形式为：$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}^{n+1}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\phi}^{n}+\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$。

3.3 Gauss-Seidel 方法（GS）

Gauss-Seidel 方法的思路在于将迭代更新的 ϕ^{n+1} 立即用于此后各点的计算中，迭代方程如下：

$$\boldsymbol{\phi}^{n+1} = \boldsymbol{D}^{-1}\left(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{U}\boldsymbol{\phi}^{n} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\phi}^{n+1}\right) \tag{10}$$

对于离散 Poisson 方程，迭代式可写为：

$$\phi_P^{n+1} = -\frac{Q_P - \phi_S^{n+1} - \phi_W^{n+1} - \phi_N^{n} - \phi_E^{n}}{4} \tag{11}$$

事实上 G-S 方法可以看作下文 SOR 方法的一个特例。

3.4 逐次超松弛方法（SOR）

逐次超松弛方法在 G-S 方法的基础上引入超松弛系数 $\omega > 1$，进而显著加速迭代过程，如下所示：

$$\phi_P^{n+1} = \omega\phi_P^{n+1,G-S} + (1-\omega)\phi_P^{n} \tag{12}$$

当 $\omega = 1$ 时退化为 G-S 方法，通常在 $1.6 \leq \omega \leq 1.9$ 时有很好的加速效果，而在 $\omega = 2$ 时迭代发散。常规 SOR 方法（含 G-S）的一大缺陷在于其每步迭代中各点的值存在依赖性，继而难以实现算法并行化。

3.5 线 SOR 方法（LSOR）

前述方法均为显式迭代方法，考虑到三对角矩阵直接求解具有极高的效率（见小节 3.7），线 SOR 方法在单步迭代中，逐行（列）构造三对角矩阵隐式求解，进而实现加速。以行 SOR（记为 LSOR-X）为例，即在 SOR 迭代式中用 ϕ_E^{n+1} 替代 ϕ_E^{n}：

$$\phi_P^{n+1} = \omega\left(-\frac{Q_P - \phi_S^{n+1} - \phi_W^{n+1} - \phi_N^{n} - \phi_E^{n+1}}{4}\right) + (1-\omega)\phi_P^{n} \tag{13}$$

$$-\frac{\omega}{4}\phi_W^{n+1} + \phi_P^{n+1} - \frac{\omega}{4}\phi_E^{n+1} = \omega\frac{\phi_S^{n+1} - Q_P}{4} + (1-\omega)\phi_P^{n} \tag{14}$$

其中 ϕ_S^{n+1} 为前一行已经计算得到的值，即右端项均已知，得到当前行上的代数方程组，其系数矩阵为三对角矩阵，可以采用 TDMA 直接求解。列 SOR（LSOR-Y）同理，单个迭代步内逐列求解。

3.6 块 SOR 方法（LSOR-ADI）

3.7 三对角矩阵直接解法（TDMA）

3.8 不完全 LU 分解方法（strongly implicit procedure, SIP）

4 加速方法

4.1 共轭梯度法（CG）

4.2 多重网格法（MG）

参考文献

Joel H. Ferziger, Milovan Perić, and Robert L. Street. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer International Publishing, Cham, 2020. ISBN 978-3-319-99691-2 978-3-319-99693-6. doi: 10.1007/978-3-319-99693-6. URL http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-99693-6.

Tim Sauer. *Numerical analysis*. Pearson, Hoboken, NJ?, third edition edition, 2018. ISBN 978-0-13-469645-4.