Физика и методы расчетов

ZinCin

February 2026

1 Уравнение Лапласа

В электростатике потенциал φ в областях, свободных от зарядов, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = 0$$

Это уравнение описывает равновесное распределение потенциала в заданном поле с граничными условиями. В двумерном случае на прямоугольной сетке с шагом $h = 1$ между узлами уравнение Лапласа аппроксимируется конечными разностями с использованием пятиточечного шаблона:

$$\frac{\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j}}{h^2} = 0$$

Откуда следует, что в каждой внутренней точке значение потенциала должно равняться среднему арифметическому четырёх соседей:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1})$$

2 Итерационные методы решения

В отличии от решения Optozorax, я не использовал Метод Конечных Элементов (МКЭ), который помогает дискретизировать пространство и создаёт численный метод решения дифференциальных уравнений, а использовал другие итерационные методы.

2.1 Метод Гаусса–Зейделя

На каждой итерации мы проходим по всем внутренним узлам и обновляем значение по формуле:

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i,j+1}^{k}),$$

где верхний индекс k означает итерацию. При этом используются уже посчитанные на текущей итерации значения слева и сверху (если обход идёт построчно сверху вниз, слева направо), что позволяет нам использовать метод Red-Black SOR.

2.2 Метод последовательной верхней релаксации SOR

SOR ускоряет сходимость, вводя параметр релаксации ω,удовлетворяющий неравенству $1 < \omega < 2$. Сперва вычисляется значение по Гауссу-Зейделю $\tilde{\varphi}$, а затем новое значение как взвешенная сумма старого потнциала φ и нового $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi^{k+1}_{i-1,j} + \varphi^{k}_{i+1,j} + \varphi^{k+1}_{i,j-1} + \varphi^{k}_{i,j+1}),$$

$$\varphi^{k+1}_{i,j} = \varphi^{k}_{i,j}(1-\omega) + \tilde{\varphi}_{i,j} \cdot \omega$$

При $\omega = 1$ метод в точности совпадает с Гауссом-Зейделем (т.к. $(1 - \omega) = (1 - 1) = 0$), а при $1 < \omega < 2$ потенциал перенаправляется в сторону среднего, что ускоряет сходимость задач с превосходством низкочастотных компонент ошибки (с точностью до погрешности).

2.3 Red-Black SOR

В моем проекте я использую Red-Black SOR. Он разбивает все внутренние узлы на две группы, раскраской шахматной доски: на красные (сумма индексов чётная) и на чёрные (сумма индексов нечётная). Из чего вытекает свойство: все соседи красного узла - чёрные, и наоборот.

Итерация проходит в два этапа:

1. Обновляются все красные узлы, используя старые значения чёрных соседей.

2. Обновляются все чёрные узлы, используя только что посчитанные значения красных соседей.

Такая схема значительно оптимизирует симуляцию, способствуя параллельным вычислениям, внося малую погрешность в вычислениях.