Физика и методы расчетов

ZinCin

February 2026

1 Постановка задачи

В двумерной области $\Omega = [0, W] \times [0, H]$ найти потенциал каждоей точки $\varphi_{x,y}$. Для воссоздания потенциала, схожего с земным, зададим следующие граничные условия:

1. Верхняя граница ($y = H$): фиксированный потенциал 1.0 2. Нижняя граница ($y = 0$): фиксированный потенциал 0.0 3-4. Боковые границы ($x = 0$ и $x = W$): Условие Неймана $\frac{\delta\varphi}{\delta n} = 0 \Rightarrow \frac{\delta\varphi}{\delta x} = 0$

2 Уравнение Лапласа

В электростатике потенциал φ в областях, свободных от зарядов, удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = 0$$

Введём равномерную сетку с шагом $h = 1$ между узлами. Узлы сетки имеют координаты $0, 1, 2, ..., W-1, W$ и $0, 1, 2, ..., H-1, H$

$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right|_{i,j} \approx \varphi_{i,j-1} - 2\varphi i, j + \varphi_{i,j+1},$$
$$\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right|_{i,j} \approx \varphi_{i-1,j} - 2\varphi i, j + \varphi_{i+1,j},$$

Подставляем в уравнение Лапласа:

$$(\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}) + (\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}) = 0,$$

получая пятиточечный шаблон:

$$\varphi i - 1, j + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1} - 4\varphi_{i,j} = 0,$$

или что то же самое:

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j+1})$$

Откуда следует, что в каждой внутренней точке значение потенциала должно равняться среднему арифметическому четырёх соседей.

3 Итерационные методы решения

В отличии от решения Optozorax, я не использовал Метод Конечных Элементов (МКЭ), который помогает дискретизировать пространство и создаёт численный метод решения дифференциальных уравнений, а использовал другие итерационные методы. Далее будут рассмотрены методы вычисления потецниала во всей симуляции, а верхними индексами k и k+1 будут обозначаться потенциал в текущем и новом кадрах соответственно.

3.1 Метод Якоби

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k} + \varphi_{i,j+1}^{k}),$$

Это приемлемый метод, который я применял раньше, однако сейчас я нашел более эффективные методы, описанные ниже.

3.2 Метод Гаусса–Зейделя

На каждой итерации мы проходим по всем внутренним узлам и обновляем значение по формуле:

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i,j+1}^{k}),$$

где верхний индекс k означает итерацию. При этом используются уже посчитанные на текущей итерации значения слева и сверху (если обход идёт построчно сверху вниз, слева направо), что позволяет нам использовать метод Red-Black SOR.

3.3 Метод последовательной верхней релаксации SOR

SOR ускоряет сходимость, вводя параметр релаксации ω,удовлетворяющий неравенству $1 < \omega < 2$. Сперва вычисляется значение по Гауссу-Зейделю $\tilde{\varphi}$, а затем новое значение как взвешенная сумма старого потнциала φ и нового $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k+1} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k+1} + \varphi_{i,j+1}^{k}),$$

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^{k}(1-\omega) + \tilde{\varphi}_{i,j}\omega,$$

или эквивалентная форма:

$$\varphi_{i,j}^{k+1} = \varphi_{i,j}^{k} + \omega(\tilde{\varphi}_{i,j} - \varphi_{i,j}^{k}),$$

При $\omega = 1$ метод в точности совпадает с Гауссом-Зейделем (т.к. $(1 - \omega) = (1 - 1) = 0$), а при $1 < \omega < 2$ потенциал перенаправляется в сторону среднего, что ускоряет сходимость задач с превосходством низкочастотных компонент ошибки (с точностью до погрешности).

3.4 Red-Black SOR

В моем проекте я использую Red-Black SOR. Чтобы избежать зависимости порядка обхода и обеспечить векторизацию, я применяю шахматное упорядочивание. Разделим все внутренние узлы на два множества: красные (сумма индексов чётна), и чёрные (сумма индексов нечётна). Важно, что все соседи красных узлов - черные, и наоборот.

Итерация проходит в два полушага:

1. Обновляются все красные узлы, используя старые значения чёрных соседей.

2. Обновляются все чёрные узлы, используя только что посчитанные значения красных соседей.

Формула для красного полушага ($k \Rightarrow k + \frac{1}{2}$):

$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{red} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k} + \varphi_{i,j+1}^{k}), (i,j) - Red$$

$$\varphi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \varphi_{i,j}^{k}(1-\omega) + \tilde{\varphi}_{i,j}^{red}\omega$$

Формула для чёрного полушага ($k + \frac{1}{2} \Rightarrow k + 1$):

$$\tilde{\varphi}_{i,j}^{black} = \frac{1}{4}(\varphi_{i-1,j}^{k} + \varphi_{i+1,j}^{k} + \varphi_{i,j-1}^{k} + \varphi_{i,j+1}^{k}), (i,j) - Black$$

$$\varphi_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \varphi_{i,j}^{k}(1-\omega) + \tilde{\varphi}_{i,j}^{black}\omega$$

После чего получаем приближение, повторяя которое много раз можно добиться качественной апроксимации