# Lógica Computacional

## Tema 5: Sistemas Dedutivos.

# Fundamentos:

**SISTEMAS DEDUTIVOS**

$\vee$

**SISTEMAS DE INFERÊNCIA**

$\vee$

**MÉTODOS DE PROVA**

$\downarrow$

**Procedimento** para cálculo de consequência lógica pela aplicação de regras de inferência.

# Definição de argumento:

Seja p1, p2,..., pn (n>=1) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Chama-se **argumento** toda afirmação de que uma dada sequência finita p1, p2,..., pn (n>=1) de proposições tem como **sequência** ou **acarreta** uma proposição final Q.

As proposições p1, p2,..., pn dizem-se as **premissas** do argumento, e a proposição final Q diz-se a **conclusão** do argumento.

# Definição de argumento:

Um argumento de **premissas** p1, p2,..., pn (n>=1) e uma **conclusão** Q indica-se por:

$p1, p2, \ldots, pn \vDash Q \quad \vee \quad p1, p2, \ldots, pn \vdash Q$

e lê-se da seguinte maneira:

(i) ‘ p1, p2, ...,pn **acarretam** Q ’
(ii)‘ Q **decorre** de p1, p2, ...,pn ’
(iii)‘ Q se **deduz** de p1, p2, ...,pn ’
(iv)‘ Q se **infere** de p1, p2, ...,pn ’

## Validade de um argumento:

Um argumento **p1, p2,…, pn $\vDash$ Q** diz-se **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas a vezes que as premissas p1, p2,…, forem verdadeiras.

# Métodos de dedução

Como podemos mostrar que uma *conclusão* é uma *consequência* lógica das *premissas*?

**Resposta:**

Construindo uma sucessão de passos em que em cada um a conclusão é inequivocamente consequência das conclusões e premissas anteriores. Formalmente iremos considerar sistemas de dedução.

# História (Gauss):

Johann Carl Gauss o alemão filho de pais humildes, Gerhard Diederich, era jardineiro e pedreiro, a mãe Dorothea Benze era analfabeta, (30 de Abril de 1777 - 23 de Fevereiro de 1855) foi um matemático, astrónomo e físico que contribuiu muito em diversas áreas da ciência.

**Contribuições:** a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, electroestática, astronomia e óptica.

Fonte:https://www.google.com/search?q=Gauss&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=2ahUKEwiEl6iwwuzaAhWsKsAKHTxlDfsQ_AUoAXoECAAQAw#imgrc=EQtxJDL-w_eQJM:

# História (Gauss):

Alguns se referem a ele como o príncipe da matemática e ele considerava a matemática como "a rainha das ciências"

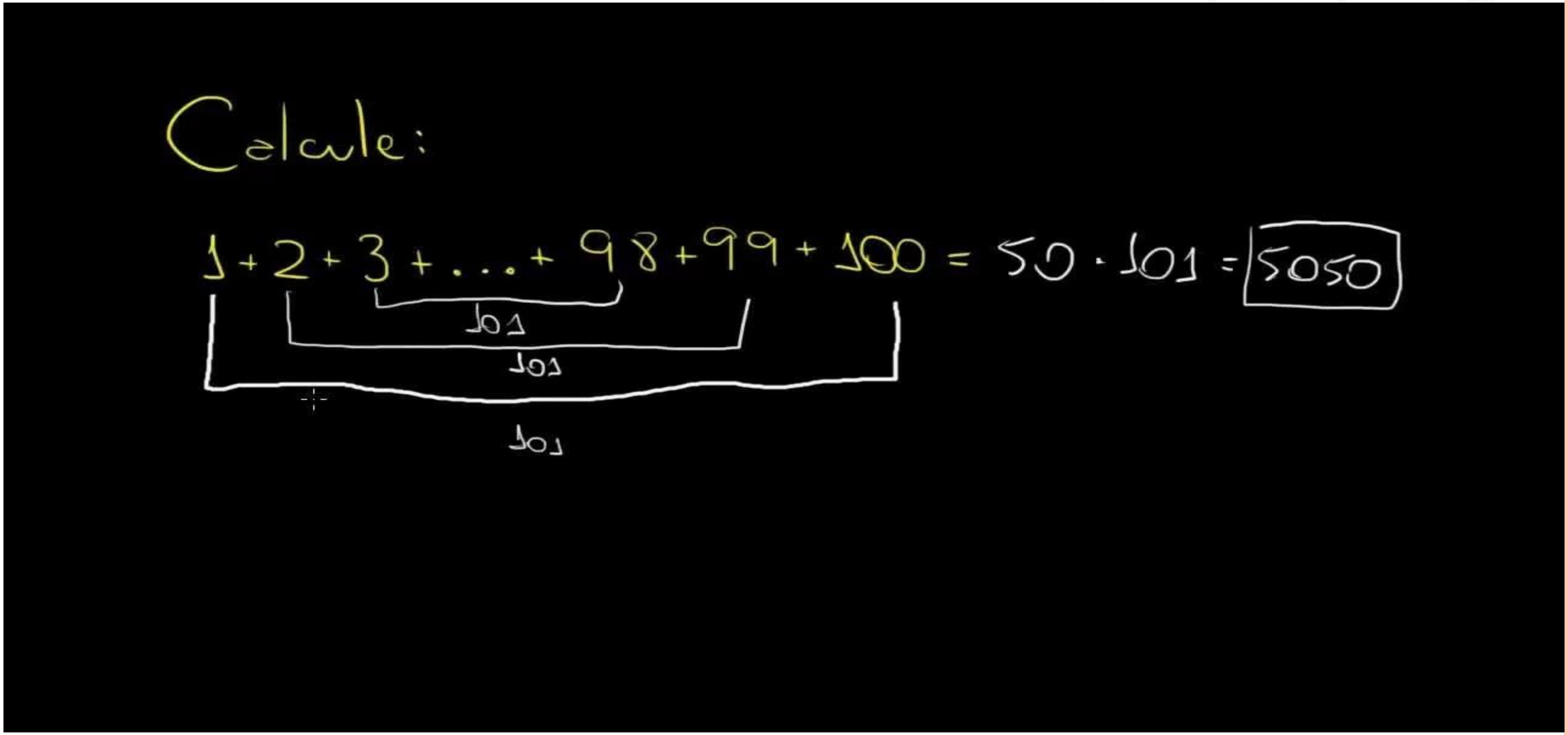
Seu diretor, Butner, pediu que os alunos somassem os números inteiros de **1** à **100**. Mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss colocou sua resposta, **5050**, foi encontrada através do raciocínio que demonstra a fórmula da soma de uma **progressão aritmética**.

Butner reconheceu a genialidade do menino de **dez anos**, passou a incentivá-lo nos seus estudos, e com o aluno de dez anos nasceu uma boa amizade que durou a vida toda.

# História (Gauss):

Qual foi então a fórmula de Gauss?

Fonte: https://c8.alamy.com/comppt/cp8gyj/johann-carl-friedrich-gauss-1777-1855-um-alemao-matematico-astronomo-e-fisico-historische-zeichnung-aus-dem-19-ja-cp8gyj.jpg



# Indução matemática

A soma de Gauss é igual à
Seguinte fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall\, n \in N^*$$

Como provar o argumento de Gaus..?

$$\downarrow$$

Através de princípios de indução matemática

# Indução matemática

Indução matemática: é uma análise de um problema particular de maneiras a chegar a uma conclusão geral.

## Princípio de indução matemática:

- Início de Indução Matemática. (I.I.M)
- Hipótese de Indução Matemática (H.I.M)
- Tese de Indução Matemática. (T.I.M)
- Demonstração de Indução Matemática (D.I.M)

# Indução matemática

## Princípios de indução matemática:

**Início de Indução Matemática(I.I.M):** Deve-se provar que a proposição é verdadeira para n = 1, 2, 3,4,…

**Hipótese de Indução Matemática (H.I.M):** Deve-se provar que a proposição é verdadeira para n=k; se se cumpre o 1º e o 2º passo então:

# Indução matemática

## Princípios de indução matemática:

**Tese de Indução Matemática(T.I.M):** Deve-se provar que a proposição é verdadeira para n = k+1.

**Demonstração de Indução Matemática (D.I.M):** Demonstrar que a Hipótese + Tese deia igual à conclusão.

# Princípio de indução matemática:

Proposição:

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \in N^*$$

**(I.I.M):**

Se n = 1 então: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Se n = 2 então: $\frac{2(2+1)}{2} = \frac{2(3)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Se n = 3 então: $\frac{3(3+1)}{2} = \frac{3(4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$

# Princípio de indução matemática:

$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ou $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \in N^*$

**(H.I.M):**

Se $n = k$ então: $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

**(T.I.M):**

Se $n=k+1$ então: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)= \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

**(D.I.M):** Hipótese + tese = Conclusão

Se $n=k+1$ então: $\underbrace{1+2+3+\ldots+k}+(k+1)= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Hipótese $= \frac{k(k+1)}{2}$

$: \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

# Princípio de indução matemática:

**(D.I.M):** Hipótese + tese = Conclusão

Se n=k+1 então: $\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{Hipótese\ =\ \frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$: \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\longrightarrow \quad : \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$: \frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad =$$

Argumento *Válido* ou Proposição *verdadeira*

**Exercícios:**

Fórmula:

$1+2+3+\ldots(2n\text{-}1) = n^2$ ou $\sum_{i=1}^{n} (2n-1) = n^2 \quad \forall\, n \in N^*$

**(I.I.M):**

Se n = 1 então: $(2.1\text{-}1) = (2-1) = 1$ ; $1 = 1$

M.E=M.D

Se n = 2 então: $= (2.1\text{-}1) + (2.2-1)$

$= (2\text{-}1) + (4-1)$

$= 1 + 3$

$= 4$ ; $4 = 4$

M.E=M.D

**Exercícios:**

Fórmula:

1+2+3+…(2n-1) = $n^2$ ou $\sum_{i=1}^{n}$ (2n−1) = $n^2$ $\forall\, n \in N^*$

**(H.I.M):**

Se n = k então: 1+2+3+…(2k-1) = $k^2$

**(T.I.M):**

Se n = k+1 então: $\underbrace{\text{1+2+3+…(2k-1)}}_{Hipótese\, =\, k^2}$+(2(k+1)-1) = $(k+1)^2$

: $k^2$ +2k+2-1 = $(k+1)^2$

: $k^2$+2k+1 = $(k+1)^2$

Proposição verdadeira ⟶ : $(k+1)^2 = (k+1)^2$

# Referências Bibliográficas:


- Iniciação a lógica matemática. Edgard de Alencar Filho. Ed. Paym gráfica 2003.

- Lógica Computacional. Nelma Moreira. Departamento de Ciência de Computadores, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto. Ed.2016.

- 1. Mathematical Logic: a course with exercices. Part I: propositional calculus, boolean algebras, predicate calculus. René Cori e Daniel Lascar. Oxford Press, 2007.

# Referências Bibliográficas:


- 2. A First Course in Logic: An Introduction to Model Theory, Proof Theory, Computability, and Complexity. Shawn Hedman. Oxford Texts in Logic, 2004.

- 3. Logic in Computer Science: modelling and reasoning about systems (2nd edition). Michael Huth and Mark Ryan. Cambridge University Press, 2004.

- Language Proof and Logic (4th edition). Jon Barwise and John Etchemendy. CSLI Publications, 2003.