Lógica Computacional

Tema 4 : Algoritmo de Decisão.

Forma normal

É transformação de fórmulas lógicas em fórmulas semanticamente equivalentes, de modo a obter fórmulas de formas especiais e que nos permitam decidir mais facilmente sobre a validade das fórmulas originais.

OBS: Algumas dessas formas normais existem para qualquer fórmula, outras apenas para certas classes de fórmulas.

Formas normais:

Forma normal negativa

Forma normal disjuntiva

Forma normal conjuntiva

Forma Causal

Forma normal Conjuntiva

Um **literal** é uma variável proposicional ou a negação da mesma.

Clausula Disjuntiva: É uma fórmula proposicional envolvendo apenas literais e o conectivo de disjunção.

Exemplo:

$$Cláusula_1 = \sim p \vee q \vee r$$

$$Cláusula_2 = q \vee \sim r$$

$$Cláusula_3 = q$$

$$Cláusula_4 = \sim r$$

Forma normal Conjuntiva

Uma fórmula proposicional está na forma normal conjuntiva (FNC) se é a conjunção de cláusulas disjuntivas, sendo que nenhuma delas está contida na outra.

Exemplo:

$$\sim r \land (p \lor q \lor \sim r) \land (\sim p \lor q)$$

Forma normal Conjuntiva

Uma fórmula é FNC se, e somente se:

1. no máximo contem os conectivos ~, ∨ e ∧ ;

2. ~ somente tem alcance sobre as letras proposicionais;

3. não aparecem sinais de negação sucessivos como ~ ~ ;

4. ∨ não tem alcance sobre ∧ , isto é, não há expressões do tipo: p ∨ (q ∧ r).

Exemplos de fórmulas em forma normal conjuntiva(FNC):

a) $(\sim p \vee q) \wedge (r \vee s \vee p)$ **;**

b) $\sim p \wedge q$

CLASSIFIQUE as proposições abaixo em relação as Formas Normais:

(FND) = Forma Normal Disjuntiva
(FNC) = Forma Normal Conjuntiva
(NENHUMA) = Não esta na Forma Normal

a) ~p ^ (q v p) (FNC)
b) p => (q v p) (Nenhuma)
c) ~(q v r) (Nenhuma)
d) (p ^ r) v (~p ^ r) (FND)
f) p ^ (p v ~q) ^ (p v q v ~r) (FNC)
g) q ^ (~q v p) ^ (~ p ^ (q v r)) (FNC)
h) (~p ^ ~r) v p v (r ^ q ^ s) (FND)

Alguns exemplos de fórmulas semanticamente equivalentes:

$p \wedge q \equiv q \wedge p$		(comutatividade do $\wedge$)
$p \vee q \equiv q \vee p$		(comutatividade do $\vee$)
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$		(Lei de De Morgan)
$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$		(Lei de De Morgan)
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		(associatividade)
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$		(associatividade)
$(p \vee p) \equiv p$		(idempotência)
$(p \wedge p) \equiv p$		(idempotência)
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		(distributividade)
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$		(distributividade)
$\sim\sim p \equiv p$		(Dupla negação)
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$		(Eliminação de implicação)

Algoritmo:

Um algoritmo nada mais é do que uma receita que mostra passo a passo os procedimentos necessários para a resolução de uma tarefa.

Algoritmo "Trabalhar pela manhã"

1. Acordar
2. Tomar banho
3. Vestir-se
4. Tomar café
5. Tirar o carro da garagem
6. Ir para o trabalho

Algoritmo:

Teorema: Para toda fórmula B da Lógica Proposicional Clássica, existe uma fórmula A na FNC que é equivalente a B, $A \equiv B$.

Algoritmo 1: FNC

Entrada : Algoritmo A

Saída : Fórmula B em FNC tal que $A \equiv B$

Repita

para todas as subfórmulas X, Y, Z ∈ A **faça**

se $(X \rightarrow Y)$ redefina como $(\sim X \vee Y)$

se $\sim(X \vee Y)$ redefina como $(\sim X \wedge \sim Y)$

se $\sim(X \wedge Y)$ redefina como $(\sim X \vee \sim Y)$

Se $\sim\sim X$ redefina como X

se $X \vee (Y \wedge Z)$ redefina como $(X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

Até que: não ocorrerem substituições

Algoritmo:

Exercícios:

Seja a fórmula $p \rightarrow (q \wedge \sim(r \vee p))$, podemos transformá-la em um fórmula em FNC usando as equivalências descritas anteriormente.

Algoritmo 1: FNC

Entrada : Fórmula $A = p \rightarrow (q \wedge \sim(r \vee p))$.

Saída : Fórmula B em FNC; tal que $A \equiv B$.

Repita

para todas as subfórmulas p, q, r ∈ A **faça**

$p \rightarrow (q \wedge \sim(r \vee p))$ (Anulação de implicação)

$\sim p \vee (q \wedge \sim(r \vee p))$

$\sim p \vee (q \wedge (\sim r \wedge \sim p))$ (Lei de De Morgan)

$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee (\sim r \wedge \sim p))$ (Distributividades)

$(\sim p \vee q) \wedge ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim p))$ (Distributividades)

$(\sim p \vee q) \wedge ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p))$ (idempotência)

fim para

Até que: não ocorrerem substituições

Forma Clausal

Uma fórmula A em FNC, pode ser escrita como um conjunto cujos elementos são as cláusulas de A.

Tal forma será chamada Forma Clausal.

Exemplo:

A fórmula A em FNC

$$A = (\sim p \vee q) \wedge ((\sim p \vee \sim r) \wedge (\sim p))$$

pode ser escrita como:

$$A = \{\sim p \vee q, \sim p \vee \sim r, \sim p\}$$

que é a sua forma clausal.

Exercícios:

Transforme as seguintes fórmulas proposicionais para FNC e dê a forma clausal de cada uma das fórmulas.

a) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

b) $(\sim q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

c) $(p \rightarrow (q \wedge (q \rightarrow r))) \wedge (p \wedge \sim r)$