Objectivos

- Adquirir uma noção sobre a utilização da lógica no processo de representação do conhecimento e raciocínio
- Adquirir uma noção acerca dos conceitos básicos de lógica proposicional, sintaxe, semântica, mecanismos de inferência...
- Adquirir uma noção acerca das possibilidades e limitações da lógica proposicional no contexto da representação do conhecimento

- Sumário:
  - Representação do conhecimento e lógica
  - Lógica proposicional

Agentes lógicos

- As sentenças que constituem a base de conhecimento se expressam numa ***linguagem lógica***
- Um dos exemplos mais antigos do uso da lógica provém de Aristóteles
  - Todos os homens são mortais; Sócrates é um homem; logo Sócrates é mortal

Lógica: conceitos básicos

- Qualquer linguagem lógica se estrutura ao redor de um conjunto de elementos básicos
  - Sintaxe
  - Semântica
  - Modelo
  - Consequência lógica
  - Mecanismo de inferência…

Lógica: sintaxe

- Especifica as sentenças que são permitidas ou ***fórmulas bem formadas***
  - Por exemplo em matemática “x + y = 4” é uma sentença bem formada enquanto “x2y+=“ não é

Lógica: semântica

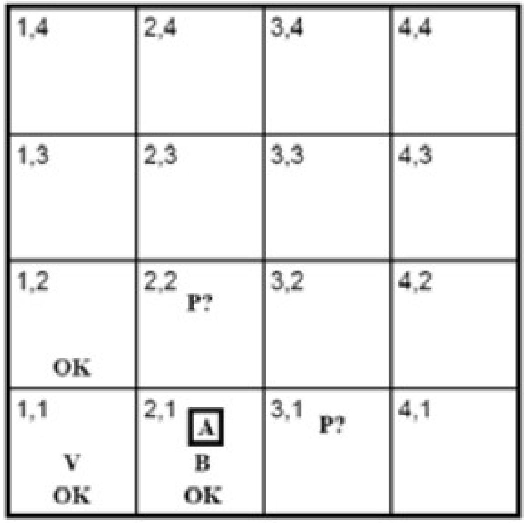
- Está relacionada com o "significado" das sentenças
- Define a ***verdade*** de cada sentença com relação a cada ***possível mundo***
  - A sentença "$x + y = 4$" é verdadeira num mundo em que $x = 2$ e $y = 2$, mas é falsa num mundo em que $x = 1$ e $y = 1$

Lógica: consequência

- O raciocínio lógico envolve a relação de ***consequência*** entre sentenças
- O conceito se utiliza quando uma sentença decorre logicamente de outra
  - $\alpha \models \beta \rightarrow \beta$ decorre logicamente de α
  - A sentença “*4 = x + y*” decorre da sentença “*x + y = 4*”

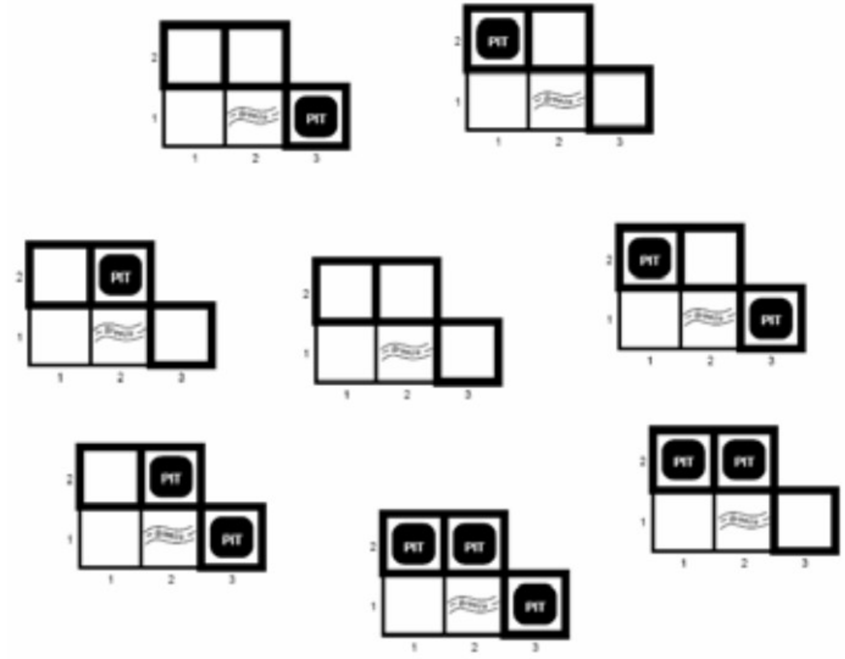
Lógica: mundo do wumpus (1/6)

- **Base de conhecimento:**
  - Nada em [1,1]
  - Brisa em [2,1]
  - Regras do mundo de Wumpus
- **Interesse do agente:**
  - Saber se os quadrados [1,2], [2,2] e [3,1] contém poços.



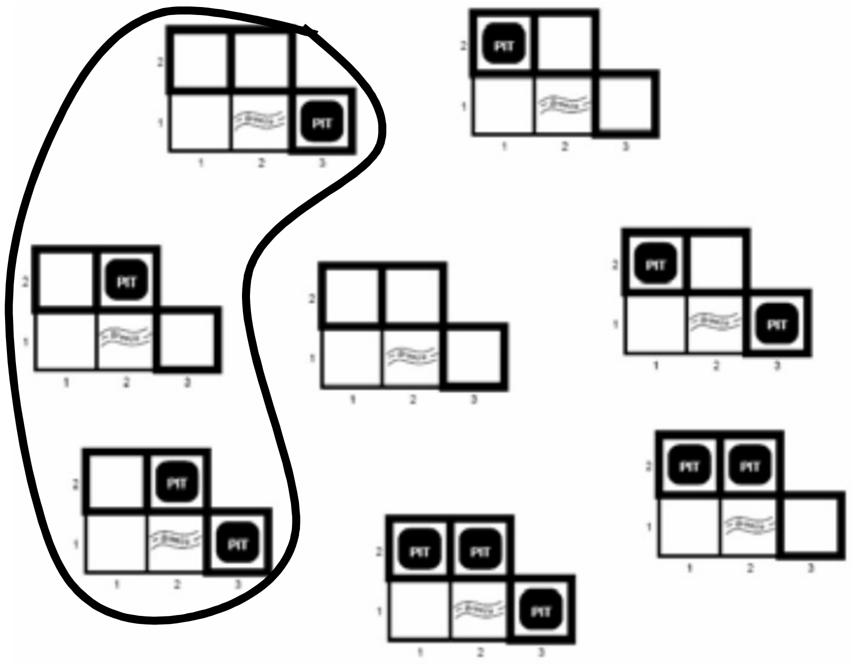
Lógica: mundo do wumpus (2/6)

- **Possíveis modelos:**
  - $2^3=8$



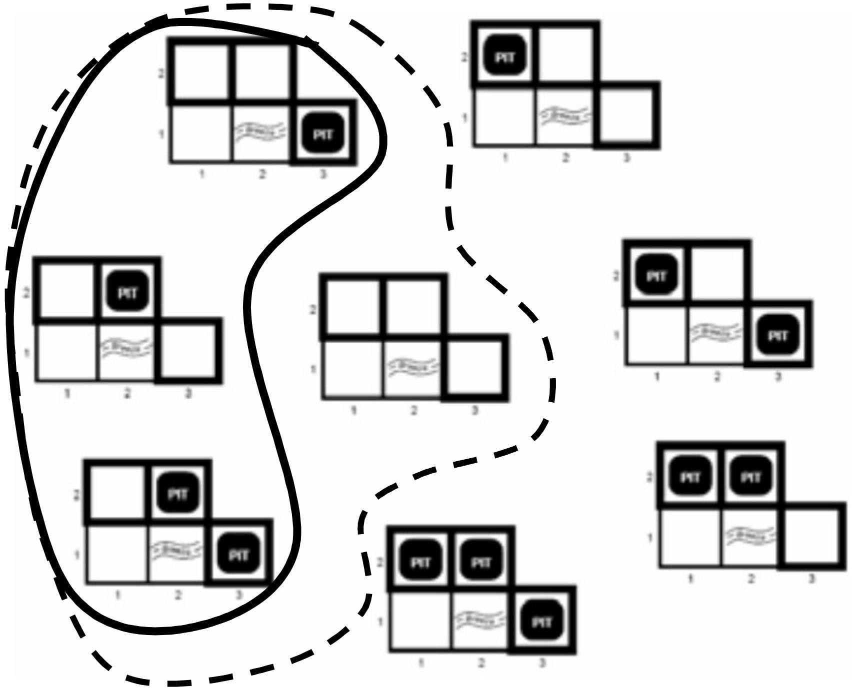
Lógica: mundo do wumpus (3/6)

- A base de conhecimento é falsa em modelos que contradizem o que o agente sabe
- Há apenas 3 modelos em que a base de conhecimento é verdadeira



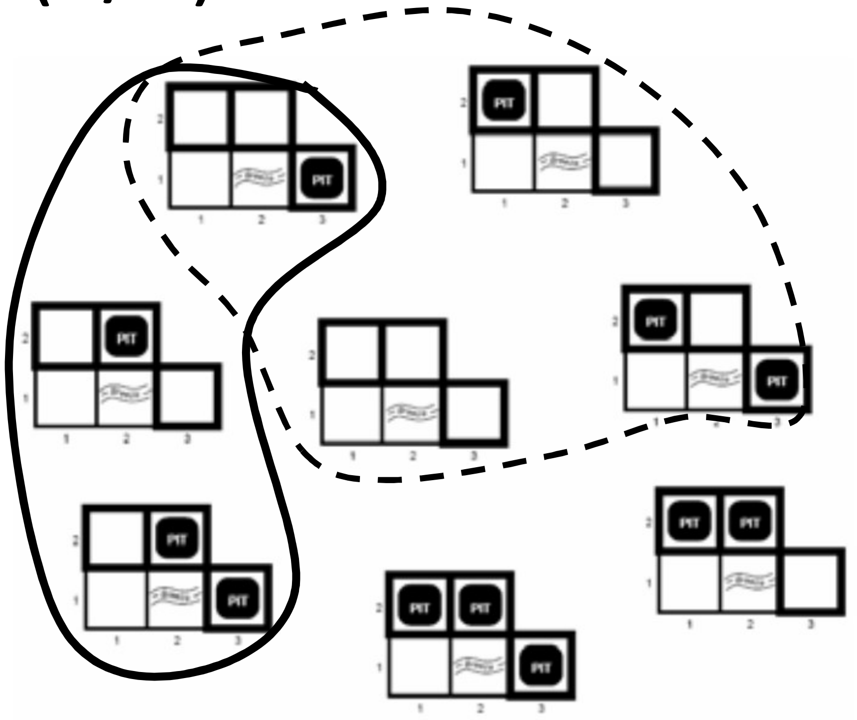
Lógica: mundo do wumpus (4/6)

- Considerando a possível conclusão:
  - c^1 = “não existe nenhum poço em [1,2]”
- É possivel afirmar que $BC \models c^1$



Lógica: mundo do wumpus (5/6)

- Considerando a possível conclusão:
  - c^2 = "não existe nenhum poço em [2,2]"
- É possivel afirmar que $BC \not\models c^2$



Lógica: mundo do wumpus (6/6)

- ***Consequência lógica*** pode ser utilizada para realizar ***inferência lógica*** (derivar conclusões)
- Algoritmo de inferência ilustrado se denomina ***verificação de modelo*** (***model checking***)
  - Enumera todos os modelos possíveis para verificar se uma sentença dada é verdadeira em todos modelos nos quais BC é verdadeira

Tipos de lógica

- Que tipo de lógica utilizar para representar a base de conhecimento?
  - Lógica proposicional
  - Lógica de primeira ordem…

Lógica proposicional (LP)

- Linguagem lógica mais simples, conhecida também como ***Lógica de Ordem Zero***
- Permite representar e manipular frases declarativas (proposições) que podem ser ***verdadeiras*** ou ***falsas***
- Como qualquer lógica, define
  - Sintaxe
  - Semântica
  - Consequência lógica
  - Algoritmos para inferência lógica

Lógica proposicional: sintaxe

- Define as sentenças permitidas ou ***fórmulas bem formadas (fbf)***
- Composta por:
  - Sentenças atómicas:
    - elementos sintácticos indivisíveis, constituídos por um símbolo proposicional simples
    - Cada símbolo representa uma proposição que pode ser verdadeira ou falsa (P, Q, R, …)
  - Sentenças complexas
    - Construídas a partir de sentenças mais simples utilizando-se conectivos lógicos: $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\Rightarrow$ (implica), $\Leftrightarrow$ (dupla implicação)

Lógica proposicional: gramática

- **Sentença** → SentençaAtómica | SentençaComplexa
- **SentençaAtómica** → Verdadeiro | Falso | Símbolo
- **Símbolo** → P | Q | R | ...
- **SentençaComplexa** → ¬Sentença

  | (Sentença ∧ Sentença)

  | (Sentença ∨ Sentença)

  | (Sentença ⇒ Sentença)

  | (Sentença ⇔ Sentença)

Lógica proposicional: semântica

- Define as regras para calcular o valor de verdade de uma sentença com base num modelo em particular
  - Um modelo fixa o valor de verdade (***verdadeiro*** ou ***falso***) de cada símbolo proposicional
- Define como calcular o valor de verdade de sentenças atómicas e de sentenças formadas com cada um dos conectivos

Lógica proposicional: semântica

- Sentenças atómicas
  - ***Verdadeiro*** é verdadeiro e ***Falso*** é falso em todos os modelos
  - O valor de verdade de qualquer outro símbolo proposicional deve ser especificado directamente no modelo
- Sentenças complexas
  - As regras para cada conectivo podem ser resumidas numa ***tábua de verdade***

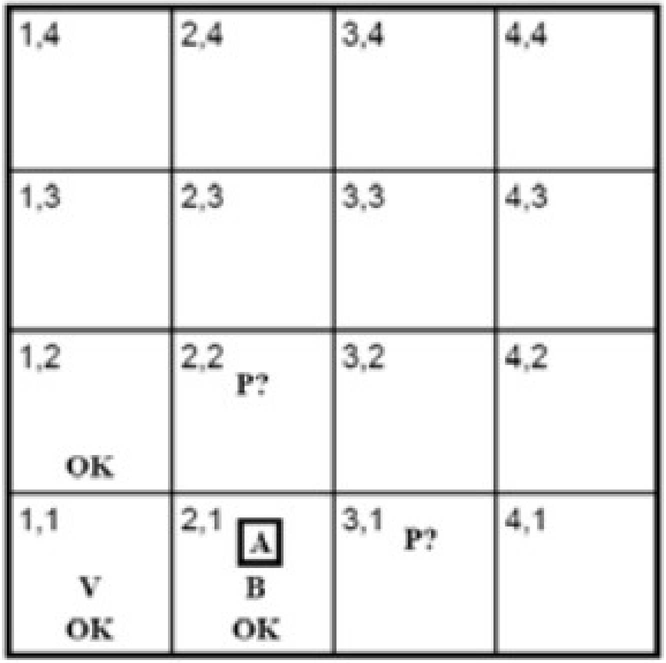
Lógica proposicional: semântica

- Para os cinco conectivos:

P	Q	¬P	P∧ Q	P∨ Q	P⇒ Q	P ⇔Q
F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V

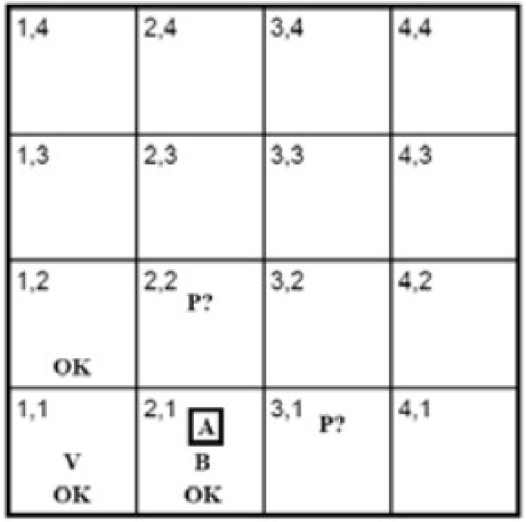
Exemplo: bc mundo do wumpus (1/2)

- Vocabulário de símbolos proposicionais
- Para cada *i*, *j*
  - Seja P_{ij} verdadeiro se existe um poço em [*i*, *j*]
  - Seja B_{ij} verdadeiro se existe brisa em [*i*, *j*]



Exemplo: bc mundo do wumpus (2/2)

- Base de conhecimento
  - Não há poços em [1, 1]
    - R_1: $\neg P_{11}$
  - Um quadrado tem uma ***brisa*** se e somente se existe um ***poço*** num quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados)
    - R_2: $B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$
    - R_3: $B_{21} \Leftrightarrow (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31})$
  - Percepções adquiridas nos primeiros quadrados visitados
    - R_4: $\neg B_{11}$
    - R_5: B_{21}



Inferência

- O objectivo da inferência lógica é decidir se uma sentença dada é consequência de outras conhecidas anteriormente
  - Dada uma base de conhecimento (BC) e uma sentença (α), decidir se BC $\models \alpha$
  - Por exemplo, P_{12}? P_{22}?
- Algoritmo → ***model checking***
  - Enumerar os modelos e verificar se a sentença α é verdadeira em todos os modelos nos quais BC é verdadeira

Inferência: exemplo (1/2)

- No mundo do wumpus, verificar P_{12} e P_{22}
  - Símbolos proposicionais relevantes: B_{11}, B_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22} e P_{31}
  - 7 símbolos → $2^7 = 128$ possíveis modelos

Inferência: exemplo (2/2)

B_{11}	B_{21}	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	BC
F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
F	V	F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V	F
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	F	V	F

- Em três dos modelos toda a base de conhecimento é verdadeira.
- Nesses três modelos, $\neg P_{1,2}$ é verdadeira. Portanto ***não existe poço em [1,2]***.
- $P_{2,2}$ é verdadeira em dois dos três modelos e falsa num. Assim, ***não podemos dizer ainda se existe um poço em [2,2]***.

Equivalência

- Duas sentenças, α e β, são logicamente equivalentes se ambas são verdadeiras no mesmo conjunto de modelos ($\alpha \Leftrightarrow \beta$)

$(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$ comutatividade de $\wedge$

$(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$ comutatividade de $\vee$

$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ associatividade de $\wedge$

$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$ associatividade de $\vee$

$\neg\neg\alpha \equiv \alpha$ eliminação de dupla negação

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$ contraposição

$(\alpha \Rightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \beta)$ eliminação de implicação

$(\alpha \Leftrightarrow \beta) \equiv ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$ eliminação de bicondicional

$\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ Lei de Morgan

$\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ Lei de Morgan

$(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

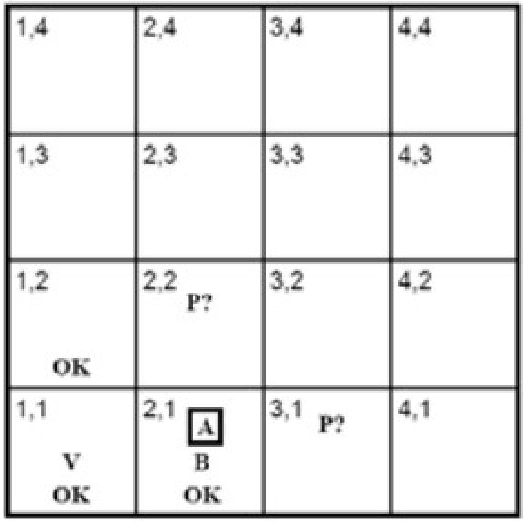
$(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv ((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

Padrões de raciocínio em LP

- Designadas ***regras de inferência***
  - **Modus Ponens**: A partir de uma implicação e a premissa da implicação, pode-se inferir a conclusão $$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$$
  - **Eliminação de E**: De uma conjunção, pode-se inferir qualquer um dos conjuntores $$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$
  - **Resolução Unitária**: De uma disjunção, se um dos disjuntores é falso, então pode-se inferir que o outro é verdadeiro $$\frac{\alpha \vee \beta, \quad \neg \beta}{\alpha}$$

Padrões de raciocínio: exemplo (1/2)

- Dada a base de conhecimento
  - Não há poços em [1, 1]
    - R_1: $\neg P_{11}$
  - Um quadrado tem uma brisa se e somente se existe um poço num quadrado vizinho (todos os quadrados devem ser declarados)
    - R_2: $B_{11} \Leftrightarrow (P_{12} \vee P_{21})$
    - R_3: $B_{21} \Leftrightarrow (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31})$
  - Percepções adquiridas nos primeiros quadrados visitados
    - R_4: $\neg B_{11}$
    - R_5: B_{21}



Provar $\neg P_{12}$

Padrões de raciocínio: exemplo (2/2)

- Eliminação bicondicional em **R2**:

  R2: $B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$

  R6: $(B_{1,1} \Rightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1})$
- Eliminação de “e” em **R6**:

  R7: $(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \Rightarrow B_{1,1}$
- Contraposição em R7:

  R8: $\neg B_{1,1} \Rightarrow \neg (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
- Modus Ponens (**R4** + **R8**)

  R4: $\neg B_{1,1}$

  R9: $\neg (P_{1,2} \vee P_{2,1})$
- Regra de Morgan em **R9**:

  R10: $\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}$
- Eliminação de “e” em **R10**: $\neg P_{1,2}$

1,4	2,4	3,4	4,4
1,3	2,3	3,3	4,3
1,2 OK	2,2 P?	3,2	4,2
1,1 V OK	2,1 $\boxed{A}$ B OK	3,1 P?	4,1

Prova lógica

- Sequência de aplicações de regras de inferência para derivar uma conclusão se designa ***prova***
- É uma alternativa à ***enumeração de modelos***
- A prova se assemelha à busca de soluções com algoritmos de busca
  - Se a função sucessor se define de forma a gerar todas as possíveis aplicações das regras de inferência, a prova pode ser realizada utilizando-se qualquer algoritmo de busca

Limitações da LP

- A LP é simples demais para representar alguns problemas reais
- Se o número de variáveis proposicionais for elevado, o método de verificação de modelo pode ser impraticável
- Ao implementar um sistema de prova, pode ser necessário utilizar um número muito grande de sentenças para criar um agente inteligente
- A LP tem certa falta de generalidade e não permite descrever objectos estruturados

Bibliografia

- Russell & Norvig, pg. 194 – 233
- Costa & Simões, pg. 121 – 131 , 133 – 146
- Palma Méndez & Marín Morales, pg. 33 – 46