Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Practica 2

INF 126 - Cálculo II

Docente:

Dra. Daisy Arroyo Fernandez

Estudiante:

- Gabriel Muñoz Marcelo Callisaya

Fecha de entrega:

12 de mayo del 2025

La Paz - Bolivia

4. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

2. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
a) Evalúe $F(3, 1)$.

b) Determine y trace el dominio de F.

c) Determine el rango de F.

$$\text{a) } F(3,1) = 1 + \sqrt{4 - 1^2} = 1 + \sqrt{3}$$
$$\text{b) } -2 \leq y \leq 2$$
$$\text{c) } [1,3] \blacksquare$$

Limites y continuidad

10. Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)}\left(5x^3 - x^2 y^2\right)$

b) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$

e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4+4y^2}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

h) $\lim_{(x,y,z)\to\left(\pi,0,\frac{1}{3}\right)} e^{y^2} \tan(xz)$

i) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

$$\text{a) } 5(1)^3 - (1)^2(2)^2 = 5 - 4 = 1$$

$$\text{b) } \frac{4-(2)(1)}{(2)^2+3(1)^2} = \frac{4-2}{4+3} = \frac{2}{7}$$

$$\text{c) No existe}$$

$$\text{d) } 0$$

$$\text{e) } 0$$

$$\text{f) } 0$$

$$\text{g) } 2$$

$$\text{h) } e^{0^2} \tan\left(\pi \cdot \frac{1}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\text{i) No existe } \blacksquare$$

12. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

a) $F(x,y) = \cos\sqrt{1+x-y}$

b) $H(x,y) = \frac{e^x+e^y}{e^{xy}-1}$

c) $G(x,y) = \tan^{-1}\left((x+y)^{-2}\right)$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{y-x^2\ln z}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\text{a) } \mathbb{R}^2$$

$$\text{b) } \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{xy} \neq 1\right\}$$

$$\text{c) } \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \neq 0\right\}$$

$$\text{d) } \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y-x^2\ln z \geq 0, z>0\right\}$$

$$\text{e) } \mathbb{R}^2 \blacksquare$$

Derivadas parciales

16. Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

a) $f(x, y) = x^4 y^3 + 8x^2 y$

b) $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$

c) $z = \tan xy$

d) $f(x, y) = \frac{x}{(x+y)^2}$

e) $w = \frac{e^v}{u+v^2}$

f) $u(r, \theta) = \sin(r \cos \theta)$

g) $f(x, y) = x^y$

h) $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\, dt$

i) $f(x, y, z) = x \sin(y - z)$

j) $w = ze^{xyz}$

k) $u = \frac{x}{\frac{y}{z}}$

l) $\varphi(x, y, z, t) = \frac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta t^2}$

m) $u = \sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

$$\text{a) } f_x = 4x^3y^3 + 16xy$$

$$f_y = 3x^4y^2 + 8x^2$$

$$\text{b) } f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln t$$

$$f_t = \frac{\sqrt{x}}{t}$$

$$\text{c) } z_x = y \sec^2(xy)$$

$$z_y = x \sec^2(xy)$$

$$\text{d) } f_x = \frac{x + y^2}{(x + y)^3}$$

$$f_y = \frac{-2x}{(x + y)^3}$$

$$\text{e) } w_u = \frac{-e^v}{\left(u + v^2\right)^2}$$

$$w_v = \frac{e^v\left(u - v^2\right)}{\left(u + v^2\right)^2}$$

$$\text{f) } u_r = \cos(r \cos \theta) \cos \theta$$

$$u_\theta = -r \sin(r \cos \theta) \sin \theta$$

$$\text{g) } f_x = yx^{y-1}$$
$$f_y = x^y \ln x$$
$$\text{h) } F_\alpha = -\sqrt{\alpha^3 + 1}$$
$$F_\beta = \sqrt{\beta^3 + 1}$$
$$\text{i) } f_x = \sin(y - z)$$
$$f_y = x\cos(y - z)$$
$$f_z = -x\cos(y - z)$$
$$\text{j) } w_x = yz^2 e^{xyz}$$
$$w_y = xz^2 e^{xyz}$$
$$w_z = e^{xyz} + xyze^{xyz}$$
$$\text{k) } u_x = \frac{y}{z}$$
$$u_y = \frac{x}{z}$$
$$u_z = -\frac{xy}{z^2}$$
$$\text{l) } \varphi_x = \frac{\alpha}{\gamma z + \delta t^2}$$
$$\varphi_y = \frac{2\beta y}{\gamma z + \delta t^2}$$
$$\varphi_z = \frac{-\left(\alpha x + \beta y^2\right)\gamma}{\left(\gamma z + \delta t^2\right)^2}$$
$$\varphi_t = \frac{-2\left(\alpha x + \beta y^2\right)\delta t}{\left(\gamma z + \delta t^2\right)^2}$$
$$\text{m) } u_{x_k} = k\cos(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n), \quad k = 1, 2, \cdots, n \blacksquare$$

18. Mediante derivación implícita determine $\partial \frac{z}{\partial} x$ y $\partial \frac{z}{\partial} y$.

a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

b) $e^z = xyz$

c) $yz + x \ln y = z^2$

$$\text{a) } \partial \frac{z}{\partial} x = \frac{-x}{3z}$$

$$\partial \frac{z}{\partial} y = \frac{-2y}{3z}$$

$$\text{b) } \partial \frac{z}{\partial} x = \frac{z}{xz - xy}$$

$$\partial \frac{z}{\partial} y = \frac{z}{yz - xy}$$

$$\text{c) } \partial \frac{z}{\partial} x = \frac{-\ln y}{y - 2z}$$

$$\partial \frac{z}{\partial} y = \frac{z - \frac{x}{y}}{y - 2z} \blacksquare$$

20. Determine las segundas derivadas parciales.

a) $f(x, y) = \sin^2(mx + ny)$

b) $v = \frac{xy}{x-y}$

c) $v = e^x e^y$

$$\text{a) } f_{xx} = -2m^2 \sin^2(mx + ny) + 2m^2 \cos^2(mx + ny)$$

$$f_{xy} = 2mn \cos^2(mx + ny) - 2mn \sin^2(mx + ny)$$

$$f_{yy} = -2n^2 \sin^2(mx + ny) + 2n^2 \cos^2(mx + ny)$$

$$\text{b) } v_{xx} = \frac{2y^2}{(x - y)^3}$$

$$v_{xy} = \frac{-x(x + y)}{(x - y)^3}$$

$$v_{yy} = \frac{2x^2}{(x - y)^3}$$

$$\text{c) } v_{xx} = e^x e^y$$

$$v_{xy} = e^x e^y$$

$$v_{yy} = e^x e^y \blacksquare$$

22. Encuentre la derivada parcial indicada.

a) $f(x, y) = x^4 y^2 - x^3 y$; f_{xxx}, f_{xyx}

b) $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; f_{xyz}

c) $u = e^{r\theta} \sin\theta$; $\partial^3 \frac{u}{\partial r^2 \partial\theta}$

d) $w = \frac{x}{y+2z}$; $\partial^3 \frac{w}{\partial z \partial y \partial x}$, $\partial^3 \frac{w}{\partial x^2 \partial y}$

$$\text{a) } f_{xxx} = 24xy^2 - 6y$$
$$f_{xyx} = 8xy - 3$$
$$\text{b) } f_{xyz} = e^{xyz^2}\left(2xyz + z^2\left(xyz^2 + 1\right)\right)$$
$$\text{c) } \partial^3 \frac{u}{\partial r^2 \partial\theta} = e^{r\theta}\left(r^2 \sin\theta + 2r\cos\theta\right)$$
$$\text{d) } \partial^3 \frac{w}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{2}{(y+2z)^3}$$
$$\partial^3 \frac{w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \blacksquare$$

24. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

a) $u = x^2 - y^2$

b) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

c) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

$$\text{a) } u_{xx} = 2$$
$$u_{yy} = -2$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Solución}$$
$$\text{b) } u_{xx} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$
$$u_{yy} = -\frac{1}{x^2 + y^2}$$
$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{2}{x^2 + y^2} \quad \text{No es solución}$$
$$\text{c) } u_{xx} = e^{-x}\cos y$$
$$u_{yy} = -e^{-x}\cos y$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Solución } \blacksquare$$

26. Si $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}^3$, determine $f_x(0, 0)$.

$$f_x(0, 0) = 0 \blacksquare$$

Regla de la cadena

28. Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial\frac{z}{\partial}s$ y $\partial\frac{z}{\partial}t$.
a) $z = \arcsin(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

b) $z = e^{x+2y}$, $x = \frac{s}{t}$, $y = \frac{t}{s}$

c) $\tan(\frac{u}{v})$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

$$\text{a) } \partial\frac{z}{\partial}s = \frac{2s+2t}{\sqrt{1-\left(s^2+t^2-1+2st\right)^2}}$$

$$\partial\frac{z}{\partial}t = \frac{2t+2s}{\sqrt{1-\left(s^2+t^2-1+2st\right)^2}}$$

$$\text{b) } \partial\frac{z}{\partial}s = e^{\frac{s}{t}+2\frac{t}{s}}\left(\frac{1}{t}+2\frac{t}{s^2}\right)$$

$$\partial\frac{z}{\partial}t = e^{\frac{s}{t}+2\frac{t}{s}}\left(-\frac{s}{t^2}+\frac{2}{s}\right)$$

$$\text{c) } \partial\frac{z}{\partial}s = \frac{2v+3u}{v^2+u^2}$$

$$\partial\frac{z}{\partial}t = \frac{3v-2u}{v^2+u^2}\blacksquare$$

30. Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.
a) $z = x^4 + x^2y$, $x = s + 2t - u$, $y = stu^2$; $\partial\frac{z}{\partial}s$, $\partial\frac{z}{\partial}t$, $\partial\frac{z}{\partial}u$ donde $s = 4$, $t = 2$, $u = 1$

b) $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = r\theta$; $\partial\frac{w}{\partial}r$, $\partial\frac{w}{\partial}\theta$ donde $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

c) $N = \frac{p+q}{p+r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$; $\partial\frac{N}{\partial}u$, $\partial\frac{N}{\partial}v$, $\partial\frac{N}{\partial}w$ donde $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

$$\text{a) } \partial\frac{z}{\partial}s = 4x^3 + 2xy + x^2tu^2 = 2500$$

$$\partial\frac{z}{\partial}t = 8x^3 + 2xsu^2 = 2056$$

$$\partial\frac{z}{\partial}u = -4x^3 + 2xstu = -1992$$

$$\text{b) } \partial\frac{w}{\partial}r = y + z + x\theta + y\theta + z = 2\pi$$

$$\partial\frac{w}{\partial}\theta = -rx + ry + rx + ry = 4$$

$$\text{c) } \partial\frac{N}{\partial}u = \frac{w(r-q)+v(q-r)+(p+q)}{(p+r)^2} = -\frac{1}{42}$$

$$\partial\frac{N}{\partial}v = \frac{u(r-q)+(p+q)}{(p+r)^2} = \frac{5}{42}$$

$$\partial\frac{N}{\partial}w = \frac{u(q-r)}{(p+r)^2} = -\frac{2}{21}\blacksquare$$

Diferenciabilidad de una función de varias variables

32. Dado que f es una función diferenciable con $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$, y $f_y(2,5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

$$f(2.2, 4.9) \approx 6 + 1(0.2) + (-1)(-0.1) = 6.3 \blacksquare$$

34. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

$$L(x,y,z) = 7 + \frac{3}{7}(x-3) + \frac{2}{7}(y-2) + \frac{6}{7}(z-6)$$

$$f(3.02, 1.97, 5.99) \approx 7 + \frac{3}{7}(0.02) + \frac{2}{7}(-0.03) + \texttt{frac}\{6,7\}(-0.01) = 6.989 \blacksquare$$

36. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.

$$\Delta z = 5(1.05)^2 + (2.1)^2 - \left(5(1)^2 + (2)^2\right) = 0.5525$$

$$dz = 10x\,dx + 2y\,dy = 10(1)(0.05) + 2(2)(0.1) = 0.9 \blacksquare$$

38. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndriffra cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0.1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0.05 cm de espesor.

$$V = 2\pi r^2 h + 2\pi r t_1 h + 4\pi r^2 t_2$$

$$dV = (4\pi r h + 4\pi t_1 h + 8\pi r t_2)dr$$

$$dV = (4\pi(2)(10) + 4\pi(0.05)(10) + 8\pi(2)(0.1))(0.05) \approx 4.084 \text{ cm}^3 \blacksquare$$

Vector gradiente

40. Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

a) $f(x,y) = x^3y^4 + x^4y^3$, $(1,1)$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

b) $f(x,y) = e^x \cos y$, $(0,0)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\text{a) } \nabla f = \left\langle 3x^2y^4 + 4x^3y^3, 4x^3y^3 + 3x^4y^2 \right\rangle$$

$$\nabla f(1,1) = \langle 7, 7 \rangle$$

$$u = \left\langle \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$D_u f(1,1) = 7\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$$

$$\text{b) } \nabla f = \langle e^x \cos y, -e^x \sin y \rangle$$

$$\nabla f(0,0) = \langle 1, 0 \rangle$$

$$u = \left\langle \cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

$$D_u f(0,0) = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \blacksquare$$

42. Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector v.

a) $f(x, y) = e^x \sin y$, $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $v = \langle -6, 8\rangle$

b) $g(p, q) = p^4 - p^2 q^3$, $(2, 1)$, $v = \langle 1, 3\rangle$

c) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $v = \langle 5, 1, -2\rangle$

d) $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $v = \langle 4, 12, 6\rangle$

$$\text{a) } \nabla f = \langle e^x \sin y, e^x \cos y\rangle$$

$$\nabla f\left(0, \frac{\pi}{3}\right) = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$u = \frac{\langle -6, 8\rangle}{\sqrt{100}} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$$

$$D_u f = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{-3\sqrt{3} + 4}{10}$$

$$\text{b) } \nabla g = \left\langle 4p^3 - 2pq^3, -3p^2q^2\right\rangle$$

$$\nabla g(2, 1) = \langle 30, -12\rangle$$

$$u = \frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}}$$

$$D_u g = \frac{30 - 36}{\sqrt{10}} = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$\text{c) } \nabla f = \langle e^y + ze^x, xe^y + e^z, ye^z + e^x\rangle$$

$$\nabla f(0, 0, 0) = \langle 1, 1, 1\rangle$$

$$u = \frac{\langle 5, 1, -2\rangle}{\sqrt{30}}$$

$$D_u f = \frac{5 + 1 - 2}{\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

$$\text{d) } \nabla h = \left\langle \frac{3}{3r + 6s + 9t}, \frac{6}{3r + 6s + 9t}, \frac{9}{3r + 6s + 9t}\right\rangle$$

$$\nabla h(1, 1, 1) = \left\langle \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$u = \frac{\langle 4, 12, 6\rangle}{\sqrt{196}} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right\rangle$$

$$D_u h = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}}{7} = \frac{\frac{43}{6}}{7} = \frac{43}{42} \blacksquare$$

44. Encuentre la derivada direccional de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ en $P(1,-1,3)$ en la dirección de $Q(2,4,5)$.

$$\nabla f = \left\langle y+z, x+z, x+y \right\rangle$$
$$\nabla f(1,-1,3) = \langle 2,4,0\rangle$$
$$v = \langle 1,5,2\rangle$$
$$u = \frac{\langle 1,5,2\rangle}{\sqrt{30}}$$
$$D_u f = \langle 2,4,0\rangle \cdot \frac{\langle 1,5,2\rangle}{\sqrt{30}} = \frac{2+20}{\sqrt{30}} = \frac{22}{\sqrt{30}} \blacksquare$$

Matriz Jacobiana

48. Halla la matriz Jacobiana en el punto $(0,-2)$ de la siguiente función vectorial con 2 variables: $f(x,y) = \left(e^{xy} + y, y^2 x\right)$.

$$J = \begin{pmatrix} ye^{xy} & e^{xy}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$
$$J(0,-2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

50. Determina la matriz Jacobiana en el punto $(2,-2,2)$ de la siguiente función con 3 variables: $f(x,y,z) = \left(z\tan\left(x^2-y^2\right), xy\ln\left(z^2\right)\right)$.

$$J = \begin{pmatrix} 2xz\sec^2\left(x^2-y^2\right) & 2yz\sec^2\left(x^2-y^2\right) & \tan\left(x^2-y^2\right) \\ y\ln\left(z^2\right) & x\ln\left(z^2\right) & 2x\frac{y}{z} \end{pmatrix}$$
$$J(2,-2,2) = \begin{pmatrix} 4z\sec^2(8) & -4z\sec^2(8) & \tan(8) \\ -2\ln 4 & 2\ln 4 & -2 \end{pmatrix} \blacksquare$$

52. Determina la matriz Jacobiana en el punto $(3,0,\pi)$ de la siguiente función con 3 variables: $f(x,y,z) = \left(xe^{2y}\cos(-z), (y+2)^3\sin\left(\frac{z}{2}\right), e^{2y}\ln\left(x^3\right)\right)$.

$$J = \begin{pmatrix} e^{2y}\cos(-z) & 2xe^{2y}\cos(-z) & xe^{2y}\sin(-z) \\ 0 & 3(y+2)^2\sin\left(\frac{z}{2}\right) & \frac{1}{2}(y+2)^3\cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ \frac{3}{x} & 2e^{2y}\ln\left(x^3\right) & 0 \end{pmatrix}$$
$$J(3,0,\pi) = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

54. Encuentra la matriz Hessiana en el punto $(1,1)$ de la siguiente función con 2 variables: $f(x,y) = e^y \ln x$.

$$f_x = \frac{e^y}{x}, \quad f_y = e^y \ln x$$
$$f_{xx} = -\frac{e^y}{x^2}, \quad f_{xy} = \frac{e^y}{x}, \quad f_{yy} = e^y \ln x$$
$$H(1,1) = \begin{pmatrix} -e & e \\ e & 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

56. Hallar el determinante de la matriz Hessiana de la función $f(x,y) = x^3 + x^2 y + 3xy + 2$ en el punto $(-1,2)$.

$$f_x = 3x^2 + 2xy + 3y, \quad f_y = x^2 + 3x$$
$$f_{xx} = 6x + 2y, \quad f_{xy} = 2x + 3, \quad f_{yy} = 0$$
$$H(-1,2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\det(H) = (-2)(0) - (-1)(-1) = -1 \blacksquare$$

Derivada direccional

58. Calcular la derivada direccional en la dirección de v en el punto que se indica.
a) $f(x, y) = x^2 y^3$, $v = \langle 1, 1\rangle$, $P = (-2, 1)$

b) $f(x, y) = \sin(x - y)$, $v = \langle 1, 1\rangle$, $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x, y) = e^{xy-y^2}$, $v = \langle 12, -5\rangle$, $P = (2, 2)$

d) $g(x, y, z) = z^2 - xy^2$, $v = \langle -1, 2, 2\rangle$, $P = (2, 1, 3)$

e) $g(x, y, z) = x\ln(y + z)$, $v = \langle 2, -1, 1\rangle$, $P = (2, e, e)$

$$\text{a) } \nabla f = \left\langle 2xy^3, 3x^2y^2\right\rangle, \nabla f(-2, 1) = \langle -2, 12\rangle$$

$$u = \frac{\langle 1, 1\rangle}{\sqrt{2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

$$D_u f = (-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mathtt{frac}\left\{10, \sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \nabla f = \left\langle \cos(x - y), -\cos(x - y)\right\rangle, \nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right) = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$u = \frac{\langle 1, 1\rangle}{\sqrt{2}}, D_u f = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\text{c) } \nabla f = \left\langle ye^{xy-y^2}, (x - 2y)e^{xy-y^2}\right\rangle, \nabla f(2, 2) = \langle 2, -2\rangle$$

$$u = \frac{\langle 12, -5\rangle}{\sqrt{169}} = \left\langle \frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right\rangle$$

$$D_u f = 2\left(\frac{12}{13}\right) + (-2)\left(-\frac{5}{13}\right) = \mathtt{frac}\{34, 13)$$

$$\text{d) } \nabla g = \left\langle -y^2, -2xy, 2z\right\rangle, \nabla g(2, 1, 3) = \langle -1, -4, 6\rangle$$

$$u = \frac{\langle -1, 2, 2\rangle}{\sqrt{9}} = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$$

$$D_u g = (-1)\left(-\frac{1}{3}\right) + (-4)\left(\frac{2}{3}\right) + 6\left(\frac{2}{3}\right) = \mathtt{frac}\{1 - 8 + 12, 3) = \frac{5}{3}$$

$$\text{e) } \nabla g = \left\langle \ln(y + z), \frac{x}{y + z}, \frac{x}{y + z}\right\rangle, \nabla g(2, e, e) = \left\langle \ln(2e), \frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right\rangle$$

$$u = \frac{\langle 2, -1, 1\rangle}{\sqrt{6}}$$

$$D_u g = \ln(2e)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{e}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \mathtt{frac}\left\{2\ln(2e), \sqrt{6}\right) \blacksquare$$

60. Hallar la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + z^3$ en $P = (3, -2, -1)$ en la dirección que apunta al origen.

$$\nabla f = \left\langle y, x, 3z^2 \right\rangle, \nabla f(3, -2, -1) = \langle -2, 3, 3 \rangle$$

$$v = \langle -3, 2, 1 \rangle, u = \frac{\langle -3, 2, 1 \rangle}{\sqrt{14}}$$

$$D_u f = \langle -2, 3, 3 \rangle \cdot \frac{\langle -3, 2, 1 \rangle}{\sqrt{14}} = \mathrm{frac}\left\{6 + 6 + 3, \sqrt{14}\right) = \mathrm{frac}\left\{15, \sqrt{14}\right)\blacksquare$$

62. Sea $f(x, y, z) = \sin(xy + z)$ y $P = (0, -1, \pi)$. Calcule $D_u f(P)$, donde u es un vector unitario que forma un ángulo de $\theta = 30^\bullet$ con ∇f_P.

$$\nabla f = \left\langle y\cos(xy + z), x\cos(xy + z), \cos(xy + z) \right\rangle$$

$$\nabla f(0, -1, \pi) = \langle -\cos(-1 + \pi), 0, \cos(\pi) \rangle = \langle -\cos(\pi - 1), 0, -1 \rangle$$

$$u = \cos\left(30^\bullet\right)\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} + \sin\left(30^\bullet\right)v, \quad v \text{ ortogonal a } \nabla f, \quad \|v\| = 1$$

$$D_u f = \cos\left(30^\bullet\right)\|\nabla f\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\cos^2(\pi - 1) + 1}\blacksquare$$

64. Halle una función $f(x, y, z)$ tal que $\nabla f = \langle 2x, 1, 2 \rangle$.

$$f(x, y, z) = x^2 + y + 2z + C\blacksquare$$

66. Halle una función $f(x, y)$ tal que $\nabla f = \left\langle y, x \right\rangle$.

$$f(x, y) = xy + C\blacksquare$$

68. Compruebe las relaciones de linealidad para los gradientes:

a) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

b) $\nabla(cf) = c\nabla f$

$$\text{a) } \nabla(f + g) = \left\langle \frac{\partial(f + g)}{\partial x}, \frac{\partial(f + g)}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} \right\rangle = \nabla f + \nabla g$$

$$\text{b) } \nabla(cf) = \left\langle \frac{\partial(cf)}{\partial x}, \frac{\partial(cf)}{\partial y} \right\rangle = \left\langle c\frac{\partial f}{\partial x}, c\frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = c\nabla f\blacksquare$$

Plano tangente

70. Halle los puntos sobre la gráfica de $z = 3x^2 - 4y^2$ en los que el vector $n = \langle 3, 2, 2 \rangle$ es normal al plano tangente.

$$\nabla f = \langle 6x, -8y, -1 \rangle, \quad \langle 6x, -8y, -1 \rangle \parallel \langle 3, 2, 2 \rangle$$
$$6x = 3k, -8y = 2k, -1 = 2k \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{4}, y = \frac{1}{8}$$
$$z = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8}, \quad \text{Punto } \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \blacksquare$$

72. Halle una ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $P(1.2, 10)$ suponiendo que: $f(1,2) = 10$, $f(1.1, 2.01) = 10.3$, $f(1.04, 2.1) = 9.7$.

$$f_{x(1,2)} \approx \frac{f(1.1, 2) - f(1, 2)}{0.1}, f_{y(1,2)} \approx \frac{f(1, 2.1) - f(1, 2)}{0.1}$$
$$f_{x(1,2)} \approx 3, f_{y(1,2)} \approx -3$$
$$z - 10 = 3(x - 1) - 3(y - 2) \blacksquare$$

Derivación implícita

74. Suponga que z está definida implícitamente como función de x y de y mediante la ecuación $F(x, y, z) = xz^2 + y^2 z + xy - 1 = 0$.

a) Calcule F_x, F_y, F_z.

b) Use las siguientes ecuaciones para calcular $\partial\frac{z}{\partial}x$ y $\partial\frac{z}{\partial}y$: $\partial\frac{z}{\partial}x = -\frac{F_x}{F_z}$ y $\partial\frac{z}{\partial}y = -\frac{F_y}{F_z}$.

$$\text{a) } F_x = z^2 + y, \quad F_y = 2yz + x, \quad F_z = 2xz + y^2$$
$$\text{b) } \partial\frac{z}{\partial}x = -\frac{z^2 + y}{2xz + y^2}$$
$$\partial\frac{z}{\partial}y = -\frac{2yz + x}{2xz + y^2} \blacksquare$$

76. Calcular las derivadas parciales usando derivación implícita.

a) $\partial\frac{z}{\partial}x$, $x^2y + y^2z + xz^2 = 10$

b) $\partial\frac{w}{\partial}z$, $x^2w + w^3 + wz^2 + 3yz = 0$

c) $\partial\frac{w}{\partial}y$, $\frac{1}{w^2+x^2} + \frac{1}{w^2+y^2} = 1$ en $(x, y, w) = (1, 1, 1)$

d) $\partial\frac{U}{\partial}T$ y $\partial\frac{T}{\partial}U$, $(TU - V)^2 \ln(W - UV) = 1$ en $(T, U, V, W) = (1, 1, 2, 4)$

$$\text{a) } F = x^2y + y^2z + xz^2 - 10, \quad F_x = 2xy + z^2, F_z = y^2 + 2xz$$

$$\partial\frac{z}{\partial}x = -\frac{2xy + z^2}{y^2 + 2xz}$$

$$\text{b) } F = x^2w + w^3 + wz^2 + 3yz, \quad F_w = x^2 + 3w^2 + z^2, F_z = 2wz + 3y$$

$$\partial\frac{w}{\partial}z = -\frac{2wz + 3y}{x^2 + 3w^2 + z^2}$$

$$\text{c) } F = \frac{1}{w^2 + x^2} + \frac{1}{w^2 + y^2} - 1, \quad F_w = -\frac{2w}{\left(w^2 + x^2\right)^2} - \frac{2w}{\left(w^2 + y^2\right)^2}, F_y = -\frac{2y}{\left(w^2 + y^2\right)^2}$$

$$\partial\frac{w}{\partial}y = \frac{\frac{2y}{\left(w^2+y^2\right)^2}}{\frac{2w}{\left(w^2+x^2\right)^2} + \frac{2w}{\left(w^2+y^2\right)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } F = (TU - V)^2 \ln(W - UV) - 1, \quad F_T = 2(TU - V)U \ln(4 - 2), F_U = 2(TU - V)T \ln(2) - (TU - V)^2 \frac{2}{2}$$

$$\partial\frac{U}{\partial}T = -\frac{2U \ln 2}{2T \ln 2 - 1} = -2, \quad \partial\frac{T}{\partial}U = -\frac{2T \ln 2 - 1}{2U \ln 2} = -\frac{1}{2} \blacksquare$$

78. La presión P, volumen V, y temperatura T de un gas de van der Waals de n moléculas (n constante) están relacionadas por medio de la ecuación: $\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$ donde a, b y R son constantes. Calcule $\partial\frac{P}{\partial}T$ y $\partial\frac{V}{\partial}P$.

$$F = \left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) - nRT, \quad F_P = V - nb, F_T = -nR, F_V = P + \frac{an^2}{V^2} - \frac{2an^2}{V^3}(V - nb)$$

$$\partial\frac{P}{\partial}T = -\frac{-nR}{V - nb} = \frac{nR}{V - nb}$$

$$\partial\frac{V}{\partial}P = -\frac{V - nb}{P + \frac{an^2}{V^2} - \frac{2an^2}{V^3}(V - nb)} \blacksquare$$

Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables. Valores Extremos Locales. Valores Extremos Globales

82. Halle los puntos críticos de la función. A continuación, utilice el criterio de la segunda derivada para determinar si se trata de máximos locales, mínimos locales o puntos de silla (o bien establezca que el criterio no decide).

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x$

b) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2 - 10x$

c) $f(x,y) = 4x - 3x^3 - 2xy^2$

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

e) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$

f) $f(x,y) = \ln x + 2\ln y - x - 4y$

g) $f(x,y) = x - y^2 - \ln(x+y)$

h) $f(x,y) = (x+3y)e^{y-x^2}$

$$\text{a) } f_x = 2x - y + 1, f_y = 2y - x, \quad x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, \quad D = 4 \cdot 2 - (-1)^2 = 7 > 0, f_{xx} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

$$\text{b) } f_x = 3x^2 + 2y - 10, f_y = 2x - 4y, \quad (4,1), (-4,-1), \quad D(4,1) = 24 \cdot (-4) - 2^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Silla}, \quad D(-4,-1) > 0, f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

$$\text{c) } f_x = 4 - 9x^2 - 2y^2, f_y = -4xy, \quad (0,0), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad D(0,0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Silla}, \quad D\left(pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) > 0, f_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo}$$

$$\text{d) } f_x = 4x^3 - 4y, f_y = 4y^3 - 4x, \quad (0,0), (1,1), (-1,-1), \quad D(0,0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Silla}, \quad D(1,1), D(-1,-1) > 0, f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

$$\text{e) } f_x = ye^{-x^2-y^2} - 2x^2ye^{-x^2-y^2}, f_y = xe^{-x^2-y^2} - 2xy^2e^{-x^2-y^2}, \quad (0,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad D(0,0) = 0, D\left(pm\frac{1}{\sqrt{2}}, pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0, f_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo}$$

$$\text{f) } f_x = \frac{1}{x} - 1, f_y = \frac{2}{y} - 4, \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad D = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{y^2} > 0, f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

$$\text{g) } f_x = 1 - \frac{1}{x+y}, f_y = -2y - \frac{1}{x+y}, \quad \left(1, -\frac{1}{2}\right), \quad D > 0, f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo}$$

$$\text{h) } f_x = e^{y-x^2} - 2x(x+3y)e^{y-x^2}, f_y = (x+3y)e^{y-x^2} + 3e^{y-x^2}, \quad (0,0), \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad D(0,0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Silla}, \quad D\left(pm\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right) > 0, f_{xx} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo} \ \blacksquare$$

84. Determine los valores extremos globales de la función sobre el conjunto que se indica sin utilizar argumentos de cálculo.

a) $f(x, y) = 2x - y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$

b) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\text{a) } f_x = 2, f_y = -1, \quad f(0,3) = -3 \ \text{ (mínimo)}, f(1,0) = 2 \ \text{ (máximo)}$$

$$\text{b) } f(0,0) = 1 \ \text{ (máximo)}, f \ \text{ tiende a } \ 0 \ \text{ en la frontera } \ x^2 + y^2 = 1 \ \text{ (mínimo)} \blacksquare$$

86. Halle el máximo de $f(x, y) = y^2 + xy - x^2$ sobre el cuadrado $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$.

$$f_x = y - 2x, f_y = 2y + x, \quad x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{4}{5} \ \text{ (fuera del cuadrado)}$$

$$y = 0 : f(x,0) = -x^2, \text{máximo } f(0,0) = 0; y = 2 : f(x,2) = 4 + 2x - x^2, x = 1, f(1,2) = 5$$

$$x = 0 : f(0, y) = y^2, y = 2, f(0,2) = 4; x = 2 : f(2, y) = y^2 + 2y - 4, y = -1 \ \text{ (fuera)}, f(2,2) = 4$$

$$\text{Máximo} = 5 \ \text{ en } \ (1,2) \blacksquare$$

88. Halle el volumen máximo de una caja inscrita en el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

$$V = xyz, \quad x, y, z \geq 0, \quad x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

$$\text{Usando Lagrange: } \nabla V = \langle yz, xz, xy \rangle, \nabla g = \left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\rangle, \quad yz = \lambda, xz = \frac{\lambda}{2}, xy = \frac{\lambda}{3}$$

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1, \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9} \blacksquare$$

90. Halle el volumen máximo de mayor caja del tipo que se muestra en la figura, con una esquina en el origen y la esquina opuesta en el punto $P = (x, y, z)$ sobre el paraboloide $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ con $x, y, z \geq 0$.

$$V = xyz, \quad z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}, \quad V = xy\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$$

$$V_x = y\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) - xy\left(\frac{x}{2}\right), V_y = x\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right) - xy\left(2\frac{y}{9}\right), \quad x = \sqrt{2}, 0, y = \frac{\sqrt{3}}{2}, V = 2\frac{\sqrt{6}}{3} \blacksquare$$

Máximos y Mínimos Condicionados (Multiplicadores de Lagrange)

92. Halle los valores mínimo y máximo de la función sujeta a la restricción dada.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $2x + 3y = 6$

b) $f(x,y) = xy$, $4x^2 + 9y^2 = 32$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x^4 + y^4 = 1$

d) $f(x,y,z) = 3x + 2y + 4z$, $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$

e) $f(x,y,z) = xy + 3xz + 2yz$, $5x + 9y + z = 10$

$$\text{a) } \nabla f = \langle 2x, 2y \rangle, \nabla g = \langle 2, 3 \rangle, \quad 2x = 2\lambda, 2y = 3\lambda, 2x + 3y = 6, \quad x = \frac{18}{13}, y = \frac{12}{13}, f = \frac{36}{13} \text{ (mínimo)}$$

$$\text{b) } \nabla f = \langle y, x \rangle, \nabla g = \langle 8x, 18y \rangle, \quad y = 8\lambda x, x = 18\lambda y, 4x^2 + 9y^2 = 32, \quad x = pm2, y = pm\frac{4}{3}, f = pm\frac{8}{3}$$

$$\text{c) } \nabla f = \langle 2x, 2y \rangle, \nabla g = \left\langle 4x^3, 4y^3 \right\rangle, \quad x = \lambda x^3, y = \lambda y^3, x^4 + y^4 = 1,$$
$$(pm1, 0), (0, pm1), \left(pm\frac{1}{\sqrt{2}}, pm\frac{1}{\sqrt{2}} \right), f = 1, 1, 2$$

$$\text{d) } \nabla f = \langle 3, 2, 4 \rangle, \nabla g = \langle 2x, 4y, 12z \rangle, \quad 3 = 2\lambda x, 2 = 4\lambda y, 4 = 12\lambda z, x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1,$$
$$x = pm\frac{3}{\sqrt{29}}, y = pm\frac{1}{\sqrt{29}}, z = pm\frac{2}{3}\sqrt{29}, f = pm\sqrt{29}$$

$$\text{e) } \nabla f = \langle y + 3z, x + 2z, 3x + 2y \rangle, \nabla g = \langle 5, 9, 1 \rangle, \quad y + 3z = 5\lambda, x + 2z = 9\lambda, 3x + 2y = \lambda,$$
$$5x + 9y + z = 10, \quad x = \frac{11}{14}, y = \frac{5}{14}, z = \frac{15}{14}, f = \frac{95}{14} \text{ (máximo)}, f = -\frac{95}{14} \text{ (mínimo)} \blacksquare$$

94. El área de un cono circular de radio r y altura h es $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$, y su volumen es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
a) Determine el cociente $\frac{h}{r}$ para el cono de área dada S y máximo volumen V.

b) ¿A qué es igual el cociente $\frac{h}{r}$ para un cono de volumen dado V y área mínima S?

c) ¿Existe un cono de volumen dado V y área máxima?

$$\text{a) } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, g = \pi r\sqrt{r^2+h^2} - S, \quad \nabla V = \left\langle \frac{2}{3}\pi r h, \frac{1}{3}\pi r^2 \right\rangle,$$

$$\nabla g = \left\langle \pi\sqrt{r^2+h^2} + \frac{\pi r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{\pi r h}{\sqrt{r^2+h^2}} \right\rangle, \quad \frac{h}{r} = 2$$

$$\text{b) } S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}, g = \frac{1}{3}\pi r^2 h - V, \quad \nabla S = \left\langle \pi\sqrt{r^2+h^2} + \frac{\pi r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}, \right.$$

$$\left. \frac{\pi r h}{\sqrt{r^2+h^2}} \right\rangle, \nabla g = \left\langle \frac{2}{3}\pi r h, \frac{1}{3}\pi r^2 \right\rangle, \quad \frac{h}{r} = \sqrt{2}$$

c) No existe, ya que el área puede crecer indefinidamente. ■

96. Halle el valor máximo de $f(x,y) = x^a y^b$ para $x \geq 0$, $y \geq 0$ sobre la circunferencia unitaria, donde $a, b > 0$ son constantes.

$$\nabla f = \left\langle a x^{a-1} y^b, b x^a y^{b-1} \right\rangle, \nabla g = \langle 2x, 2y \rangle, \quad a x^{a-1} y^b = 2\lambda x, b x^a y^{b-1} = 2\lambda y, x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{a}{a+b}, y^2 = \frac{b}{a+b}, \quad f = \left(\frac{a}{a+b}\right)^{\frac{a}{2}} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\frac{b}{2}} ■$$

98. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ interseca con el plano $x + z = 1$ formando una elipse. Halle el punto sobre esta elipse que esté más lejos del origen.

$$f = x^2 + y^2 + z^2, g_1 = x^2 + y^2 - 1, g_2 = x + z - 1, \quad \nabla f = \langle 2x, 2y, 2z \rangle, \nabla g_1 = \langle 2x, 2y, 0 \rangle, \nabla g_2 = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

$$2x = 2\lambda_1 x + \lambda_2, 2y = 2\lambda_1 y, 2z = \lambda_2, x^2 + y^2 = 1, x + z = 1$$

$$y = 0, x = pm1, z = 0, f = 1; x = \frac{1}{2}, y = pm\frac{\sqrt{3}}{2}, z = \frac{1}{2}, f = \frac{5}{4}$$

$$\text{Máximo en } \left(\frac{1}{2}, pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) ■$$

100. Halle el valor mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x + 2y + z = 3$ y $x - y = 4$.

$$\nabla f = \left\langle 2x, 2y, 2z \right\rangle, \nabla g_1 = \langle 1, 2, 1\rangle, \nabla g_2 = \langle 1, -1, 0\rangle, \quad 2x = \lambda_1 + \lambda_2, 2y = 2\lambda_1 - \lambda_2,$$

$$2z = \lambda_1, x + 2y + z = 3, x - y = 4$$

$$x = \frac{41}{9}, y = \frac{5}{9}, z = -\frac{4}{9}, f = \frac{378}{81} = \frac{42}{9} \blacksquare$$