UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

GUÍA DE EJERCICIOS
CÁLCULO II
ELABORADO POR: DAISY ARROYO FERNANDEZ

Paralelo A: M.Sc. Roberto Huaranca Ampa

Paralelo B: Dra. Daisy Arroyo Fernandez

Paralelo C: M. Sc. Eugenio Castaños Calle

Paralelo D: Lic. Ramiro Choque Canaza

EVALUACIÓN	PONDERACIÓN	FECHA
Examen Primer Parcial (Cap. 1,2 y 3)	30	Sábado 29/03/2025
Examen Segundo Parcial (Cap. 4)	30	Sábado 17/05/2025
Examen Final (Cap. 5)	30	Sábado 21/06/2025
Prácticas	10	
Examen Segundo Turno (Todos los Capítulos) Nota mínima 35/100	100	Miércoles 25/06/2025

GESTIÓN I – 2025

1. VECTORES

Vectores en Dos y Tres Dimensiones

1. Dibujar cada uno de los múltiplos escalares de $v = \langle 2, 3\rangle$.
    a) $2v$
    b) $-3v$
    c) $\frac{7}{2}v$
    d) $\frac{2}{3}v$
2. Dibujar cada uno de los múltiplos escalares de $v = \langle -1, 5\rangle$.
    a) $4v$
    b) $-\frac{1}{2}v$
    c) $0v$
    d) $-6v$
3. Si $u = \langle 4, 9\rangle$ y $v = \langle 2, -5\rangle$, hallar:
    a) $\frac{2}{3}u$
    b) $v - u$
    c) $2u + 5v$
4. Hallar el vector $v = 5u - 3w$ donde $u = \langle 2, -1\rangle$ y $w = \langle 1, 2\rangle$. Ilustrar geométricamente la operación vectorial.
5. Encontrar la magnitud del vector $v = -10\mathrm{i} + 3\mathrm{j}$.
6. Hallar $\|u\|$ si $u = \langle 1, -1\rangle$.
7. Hallar $\|u + v\|$ si $u = \langle 0, 1\rangle$ y $v = \langle 3, -3\rangle$.
8. Hallar $\left\|\frac{u+v}{\|u+v\|}\right\|$ si $u = \langle 2, -4\rangle$ y $v = \langle 5, 5\rangle$.
9. Demostrar la desigualdad del triángulo si $u = \langle -3, 2\rangle$ y $v = \langle 1, -2\rangle$.
10. Hallar las componentes de v dadas su magnitud y el ángulo que forma con el eje x positivo.
    a) $\|v\| = 3, \theta = 0°$.
    b) $\|v\| = 5, \theta = 120°$.
11. Hallar las componentes de $u + v$ dadas las longitudes de u y v y los ángulos que u y v forman con el eje x positivo.
    a) $\|u\| = 1, \theta_u = 0°, \|v\| = 3, \theta_v = 45°$.
    b) $\|u\| = 4, \theta_u = 0°, \|v\| = 2, \theta_v = 60°$.
12. Representar los puntos $(5, -2, 2)$ y $(5, -2, -2)$ en el mismo sistema de coordenadas tridimensional.
13. Hallar la distancia entre los puntos:
    a) $(-2, 3, 2), (2, -5, -2)$.
    b) $(1, -2, 4), (6, -2, -2)$.
    c) $(2, 2, 3), (4, -5, 6)$.
14. Hallar las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se indican y determinar si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles, o ninguna de ambas cosas.
    a) $(5, 3, 4), (7, 1, 3), (3, 5, 3)$.
    b) $(1, -3, -2), (5, -1, 2), (-1, 1, 2)$.
15. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos:
    a) $(5, -9, 7), (-2, 3, 3)$.
    b) $(4, 0, -6), (8, 8, 20)$.
16. Hallar cada uno de los múltiplos de $v = \langle 2, -2, 1\rangle$ y representar su gráfica.
    a) $-v$
    b) $\frac{1}{2}v$
17. Encontrar el vector z dado que $u = \langle 1, 2, 3\rangle, v = \langle 2, 2, -1\rangle$ y $w = \langle 4, 0, -4\rangle$.
    a) $z = u - v$.
    b) $2z - 3u = w$.

c) $z = 5u - 3v - \frac{1}{2}w$.

18. Determinar cuáles de los vectores son paralelos a $z = \langle 3, 2, -5\rangle$. Confirmar gráficamente el resultado.
    a) $\langle -6, -4, 10\rangle$.
    b) $\langle 2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\rangle$.
    c) $\langle 6, 4, 10\rangle$.
    d) $\langle 1, -4, 2\rangle$.
19. Usar vectores para determinar si los puntos son colineales.
    a) $(0, -2, -5), (3, 4, 4), (2, 2, 1)$.
    b) $(1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)$.
20. Usar vectores para demostrar que los puntos son vértices de un paralelogramo.
    a) $(2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)$.
    b) $(1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)$.
21. Hallar la longitud de v.
    a) $v = \langle 1, 0, 3\rangle$.
    b) $v = -4\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 7\mathrm{k}$.
    c) Punto inicial de v: $(0, -1, 0)$. Punto final de v: $(1, 2, -2)$.
22. Hallar un vector unitario en la dirección de u y otro vector en la dirección opuesta a u.
    a) $u = \langle 2, -1, 2\rangle$.
    b) $u = \langle 6, 0, 8\rangle$.

Producto Escalar

23. Si $u = \langle 4, 10\rangle$ y $v = \langle -2, 3\rangle$, hallar:
    a) $u \cdot v$
    b) $(u \cdot v)v$
24. Si $u = 2\mathrm{i} + \mathrm{j} - 2\mathrm{k}$ y $v = \mathrm{i} - 3\mathrm{j} + 2\mathrm{k}$, hallar:
    a) $u \cdot v$
    b) $u \cdot (2v)$
25. Calcular $u \cdot v$ si:
    a) $\|u\| = 8, \|v\| = 5$, y el ángulo entre u y v es $\pi/3$.
    b) $\|u\| = 40, \|v\| = 25$, y el ángulo entre u y v es $5\pi/6$.
26. Calcular el ángulo θ entre los vectores:
    a) $u = \langle 3, 1\rangle, v = \langle 2, -1\rangle$.
    b) $u = 3\mathrm{i} + \mathrm{j}, v = -2\mathrm{i} + 4\mathrm{j}$.
    c) $u = \langle 1, 1, 1\rangle, v = \langle 2, 1, -1\rangle$.
    d) $u = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{j} + \mathrm{k},\ v = 2\mathrm{i} - 3\mathrm{j}$.
27. Determinar si u y v son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.
    a) $u = \langle 2, 18\rangle, v = \langle 3/2, -1/6\rangle$.
    b) $u = \langle 2, -3, 1\rangle, v = \langle -1, -1, -1\rangle$.
    c) $u = \langle \cos\theta, \sin\theta, -1\rangle, v = \langle \sin\theta, -\cos\theta, 0\rangle$.
28. Se dan los vértices de un triángulo. Determinar si el triángulo es un triángulo agudo, un triángulo obtuso o un triángulo recto.
    a) $(-3, 0, 0), (0, 0, 0), (1, 2, 3)$.
    b) $(2, -7, 3), (-1, 5, 8), (4, 6, -1)$.
29. Encontrar los cosenos directores de u y demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.
    a) $u = \mathrm{i} + 2\mathrm{j} + 2\mathrm{k}$.
    b) $u = \langle 0, 6, -4\rangle$.

Proyección Ortogonal

30. Hallar la componente de u que es ortogonal a v, dado $w_1 = \mathrm{proy}_v u$.
    a) $u = \langle 9, 7\rangle, v = \langle 1, 3\rangle, \mathrm{proy}_v u = \langle 3, 9\rangle$.
    b) $u = \langle 8, 2, 0\rangle, v = \langle 2, 1, -1\rangle, \mathrm{proy}_v u = \langle 6, 3, -3\rangle$.

31. Calcular la proyección de u en v.
    a) $u = \langle 2, 3\rangle, v = \langle 5, 1\rangle$.
    b) $u = \langle 1, 0, 4\rangle, v = \langle 3, 0, 2\rangle$.
32. Hallar la componente vectorial de u ortogonal a v.
    a) $u = \langle 2, -3\rangle, v = \langle 3, 2\rangle$.
    b) $u = \langle 2, 1, 2\rangle, v = \langle 0, 3, 4\rangle$.

Producto Vectorial

37. Calcular $u \times v$ si:
    a) $u = -2\mathrm{i} + 3\mathrm{j} + 4\mathrm{k},\ v = 3\mathrm{i} + 7\mathrm{j} + 2\mathrm{k}$.
    b) $u = \langle 3, -2, -2\rangle, v = \langle 1, 5, 1\rangle$.
38. Calcular $u \times v$ y probar que es ortogonal tanto a u como a v.
    a) $u = \langle -1, 1, 2\rangle, v = \langle 0, 1, 0\rangle$.
    b) $u = \langle 12, -3, 0\rangle, v = \langle -2, 5, 0\rangle$.
39. Calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes.
    a) $u = \langle 3, 2, -1\rangle, v = \langle 1, 2, 3\rangle$.
    b) $u = \mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k},\ v = \mathrm{j} + \mathrm{k}$.
40. Verificar que los puntos son los vértices de un paralelogramo, y calcular su área.
    a) $(1, 1,1), (2, 3, 4), (6, 5, 2), (7, 7, 5)$.
    b) $(2, -3, 1), (6, 5, -1), (3, -6, 4), (7, 2, 2)$.
41. Calcular el área del triángulo con los vértices dados. (*Sugerencia*: $\frac{1}{2}\|u \times v\|$ es el área del triángulo que tiene u y v como lados adyacentes).
    a) $(0, 0, 0), (1, 2, 3), (-3, 0, 0)$.
    b) $(2, -7, 3), (-1, 5, 8), (4, 6, -1)$.

Producto Mixto

42. Calcular $u \cdot (v \times w)$ si:
    a) $u = \langle 1, 1, 1\rangle, v = \langle 2, 1, 0\rangle, w = \langle 0, 0, 1\rangle$.
    b) $u = \langle 2, 0, 1\rangle, v = \langle 0, 3, 0\rangle, w = \langle 0, 0, 1\rangle$.
43. Usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes u, v y w.
    a) $u = \mathrm{i} + \mathrm{j},\ v = \mathrm{j} + \mathrm{k},\ w = \mathrm{i} + \mathrm{k}$.
    b) $u = \langle 1, 3, 1\rangle, v = \langle 0, 6, 6\rangle, w = \langle -4, 0, -4\rangle$.
44. Encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene los vértices:
    a) $(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 5, 1), (3, 5, 1), (2, 0, 5), (5, 0, 5), (2, 5, 6), (5, 5, 6)$.
    b) $(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (2, 2, 3)$.
45. Demostrar que $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|$ si u y v son ortogonales.

2. GEOMETRÍA ANALÍTICA SÓLIDA

La Recta

47. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-2, 0, 3)$ y es paralela al vector $v = 2\mathrm{i} + 4\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$.
48. Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralela a la recta $x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$.
49. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(5, -3, -2)$ y $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.
50. Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $(0, 0, 25)$ y $(10, 10, 0)$.
51. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-4, 5, 2)$ y es paralela al plano xy y al plano yz.
52. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(5, -3, -4)$ y es paralela a $v = 5\mathrm{i} - \mathrm{j}$.

53. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(2,1,2)$ y es paralela a la recta $x=-t, y=1+t, z=-2+t$.
54. Determinar si algunas de las rectas son paralelas o idénticas.
 $L_1: x=6-3t, y=-2+2t, z=5+4t$
 $L_2: x=6t, y=2-4t, z=13-8t$
 $L_3: x=10-6t, y=3+4t, z=7+8t$
 $L_4: x=-4+6t, y=3+4t, z=5-6t$
55. Determinar si las rectas se cortan, y si es así, hallar el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.
 a) $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-1}=z+1,\ \frac{x-1}{4}=y+2=\frac{z+3}{-3}$
 b) $\frac{x-2}{-3}=\frac{y-2}{6}=z-3,\ \frac{x-3}{2}=y+5=\frac{z+2}{4}$

El Plano

56. Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.
 a) Punto $(3,2,2)$ y perpendicular a $n=2\mathrm{i}+3\mathrm{j}-\mathrm{k}$.
 b) Punto $(0,0,6)$ y perpendicular a $x=1-t, y=2+t, z=4-2t$.
57. Hallar una ecuación del plano que pasa por $(2,3,-2)$, $(3,4,2)$ y $(1,-1,0)$.
58. Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,2,3)$ y es paralelo al plano yz.
59. Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $(2,2,1)$ y contiene la recta dada por $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{-1}=z$.
60. Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $(4,2,1)$ y $(-3,5,7)$ y es paralelo al eje z.
61. Determinar si los planos son paralelos, ortogonales, o ninguna de las dos cosas. Si no son paralelos ni ortogonales, hallar el ángulo de inclinación.
 a) $3x+y-4z=3;\ -9x-3y+12z=4$.
 b) $2x-z=1;\quad 4x+y+8z=10$.
62. Dibujar los siguientes planos:
 a) $4x+2y+6z=12$.
 b) $2x-y+z=4$.
 c) $x+2y=4$.
63. Determinar si algunos de los planos son paralelos o idénticos:
 $P_1: 3x-2y+5z=10$
 $P_2: -6x+4y-10z=5$
 $P_3: -3x+2y+5z=8$
 $P_4: 75x-50y+125z=250$
64. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos:
 a) $3x+2y-z=7;\ x-4y+2z=0$.
 b) $6x-3y+z=5;\ -x+y+5z=5$.
65. Hallar la distancia del punto al plano.
 a) $(0,0,0)$, $8x-4y+z=8$.
 b) $(3,2,1)$, $x-y+2z=4$.
66. Verificar que los dos planos son paralelos, y hallar la distancia entre ellos.
 a) $x-3y+4z=10;\ x-3y+4z=6$.
 b) $2x-4z=4;\ \ 2x-4z=10$.
67. Hallar la distancia del punto a la recta dada.
 a) $(1,-2,4);\quad x=2t, y=t-3, z=2t+2$.
 b) $(4,-1,5);\quad x=3, y=1+3t, z=1+t$.
68. Verificar que las rectas son paralelas y hallar la distancia entre ellas.
 $L_1: x=3+6t, y=-2+9t, z=1-12t$
 $L_2: x=-1+4t, y=3+6t, z=-8t$

Superficies Cuádricas

69. Describir y dibujar la superficie.
 a) $x=4$.

b) $x^2 + y^2 = 25$.
c) $y^2 + z = 4$.
d) $y^2 - z^2 = 4$.

70. Identificar y dibujar la superficie cuádrica.
    a) $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$.
    b) $x^2 - y^2 + z = 0$.
    c) $16x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32x - 36y + 36 = 0$.
71. Representar gráficamente la superficie (*Sugerencia*: Puede ser necesario despejar z y considerar dos ecuaciones al representar gráficamente la superficie).
    a) $z = 2\sin x$.
    b) $4y = x^2 + z^2$.
    c) $4x^2 - y^2 + 4z^2 = -16$.
72. Dibujar la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.
    a) $z = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0,\ y = 0, z = 0$.
    b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, y = 2z, z = 0$.

Coordenadas Polares

73. Representar gráficamente el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas rectangulares correspondientes.
    a) $(-4, -\pi/3)$.
    b) $(0, -7\pi/6)$.
74. Transformar la ecuación rectangular a la forma polar y trazar su gráfica.
    a) $x^2 + y^2 = a^2$.
    b) $xy = 4$.
    c) $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$.
75. Pasar la ecuación polar a la forma rectangular y trazar su gráfica.
    a) $r = -2$.
    b) $r = 5\cos\theta$.
    c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
76. Trazar la gráfica de la ecuación polar.
    a) $r = 5$.
    b) $r = 2\theta$.
    c) $r^2 = 4\sin\theta$.

Coordenadas Cilíndricas

77. Convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.
    a) $(4, \pi/2, -2)$.
    b) $(1, 3\pi/2, -1)$.
78. Convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.
    a) $\left(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4\right)$.
    b) $(-3, 2, -1)$.
79. Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.
    a) $z = 5$.
    b) $y = x^2$.
    c) $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$.
80. Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibujar su gráfica.
    a) $z = 2$.
    b) $\theta = \pi/6$.
    c) $r = 2\cos\theta$.

Coordenadas Esféricas

81. Convertir las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

a) $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$.
b) $(-4, 0, 0)$.

82. Convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.
    a) $(12, -\pi/4, 0)$.
    b) $(6, \pi, \pi/2)$.
83. Hallar una ecuación en coordenadas esféricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.
    a) $z = 2$.
    b) $x^2 + y^2 = 9$.
    c) $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$.
84. Encontrar una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibujar su gráfica.
    a) $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
    b) $\phi = \frac{\pi}{2}$.
    c) $\rho = 4\cos\phi$.
85. Convertir las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.
    a) $\left(2, \frac{2\pi}{3}, -2\right)$.
    b) $\left(4, \frac{\pi}{2}, 3\right)$.
86. Convertir las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.
    a) $(18, \pi/3, \pi/3)$.
    b) $\left(7, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

3. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$ y Curvas en el Espacio

87. Hallar el dominio de la función vectorial.
    a) $r(t) = \sqrt{4 - t^2}\mathrm{i} + t^2\mathrm{j} - 6t\mathrm{k}$.
    b) $r(t) = \sin t\mathrm{i} + 4\cos t\mathrm{j} + t\mathrm{k}$.
    c) $r(t) = F(t) - G(t)$ donde $F(t) = \ln t\mathrm{i} + 5t\mathrm{j} - 3t^2\mathrm{k}$, $G(t) = \mathrm{i} + 4t\mathrm{j} - 3t^2\mathrm{k}$.
88. Evaluar (si es posible) la función vectorial en cada valor dado de t.
    a) $r(t) = \cos t\,\mathrm{i} + 2\sin t\,\mathrm{j}$, $r(\theta - \pi)$.
    b) $r(t) = \sqrt{t}\mathrm{i} + t^{3/2}\mathrm{j} + e^{-t/4}\mathrm{k}$, $r(c + 2)$.
89. Hallar $\|r(t)\|$ si:
    a) $r(t) = \sin 3t\,\mathrm{i} + \cos 3t\,\mathrm{j} + t\,\mathrm{k}$.
    b) $r(t) = \sqrt{t}\mathrm{i} + 3t\,\mathrm{j} - 4t\,\mathrm{k}$.
90. Dibujar la curva representada por la función vectorial y dar la orientación de la curva.
    a) $r(t) = 3t\,\mathrm{i} + (t - 1)\mathrm{j}$.
    b) $r(t) = t^3\mathrm{i} + t^2\mathrm{j}$.
    c) $r(\theta) = \cos\theta\,\mathrm{i} + 3\sin\theta\,\mathrm{j}$.

Límites y Continuidad

91. Evaluar el límite.
    a) $\lim_{t\to 2}\left(t\mathrm{i} + \frac{t^2-4}{t^2-2t}\mathrm{j} + \frac{1}{t}\mathrm{k}\right)$.
    b) $\lim_{t\to 0}\left(t^2\mathrm{i} + 3t\mathrm{j} + \frac{1-\cos t}{t}\mathrm{k}\right)$.
    c) $\lim_{t\to 0}\left(\sqrt{t}\mathrm{i} + \frac{\ln t}{t^2-1}\mathrm{j} + 2t^2\mathrm{k}\right)$.
    d) $\lim_{t\to \infty}\left(e^{-t}\mathrm{i} + \frac{1}{t}\mathrm{j} + \frac{t}{t^2+1}\mathrm{k}\right)$.
92. Determinar el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.
    a) $r(t) = t\mathrm{i} + \frac{1}{t}\mathrm{j}$.

b) $r(t) = t\mathrm{i} + \arcsin t\,\mathrm{j} + (t-1)\mathrm{k}$.
c) $r(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t\rangle$.
d) $r(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t}\rangle$.

Derivadas e Integrales

93. Dibujar la curva en el espacio representado por la función vectorial, y dibujar los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ para el valor dado de t_0.
    a) $r(t) = 2\cos t\,\mathrm{i} + 2\sin t\,\mathrm{j} + t\mathrm{k},\ t_0 = 3\pi/2$.
    b) $r(t) = t\,\mathrm{i} + t^2\mathrm{j} + \frac{3}{2}\mathrm{k}, t_0 = 2$.
94. Hallar $r'(t)$.
    a) $r(t) = \frac{1}{t}\mathrm{i} + 16t\,\mathrm{j} + \frac{t^2}{2}\mathrm{k}$.
    b) $r(t) = 4\sqrt{t}\mathrm{i} + t^2\sqrt{t}\mathrm{j} + \ln t^2\mathrm{k}$.
    c) $r(t) = \langle \sin t - t\cos t, \cos t + t\sin t, t^2\rangle$.
95. Hallar $r''(t)$ y $r'(t)\cdot r''(t)$.
    a) $r(t) = (t^2+t)\mathrm{i} + (t^2-t)\mathrm{j}$.
    b) $r(t) = \frac{1}{2}t^2\mathrm{i} - t\mathrm{j} + \frac{1}{6}t^3\mathrm{k}$.
    c) $r(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t\rangle$.
96. Hallar $D_t[r(t)\cdot u(t)]$ y $D_t[r(t)\times u(t)]$ por derivación del producto.
    a) $r(t) = t\,\mathrm{i} + 2t^2\mathrm{j} + t^3\mathrm{k},\ u(t) = t^4\mathrm{k}$.
    b) $r(t) = \cos t\,\mathrm{i} + \sin t\,\mathrm{j} + t\,\mathrm{k},\ u(t) = \mathrm{j} + t\,\mathrm{k}$.
97. Usar la definición de la derivada para hallar $r'(t)$.
    a) $r(t) = (3t+2)\mathrm{i} + (1-t^2)\mathrm{j}$.
    b) $r(t) = \langle 0, \sin t, 4t\rangle$.
98. Hallar la integral indefinida.
    a) $\int (2t\,\mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k})\,dt$.
    b) $\int \left[(2t-1)\mathrm{i} + 4t^3\mathrm{j} + 3\sqrt{t}\mathrm{k}\right]dt$.
    c) $\int (e^{-t}\sin t\,\mathrm{i} + e^{-t}\cos t\,\mathrm{j})\,dt$.
99. Evaluar la integral definida.
    a) $\int_0^1 (8t\,\mathrm{i} + t\,\mathrm{j} - \mathrm{k})\,dt$.
    b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\sec t\tan t)\mathrm{i} + (\tan t)\mathrm{j} + (2\sin t\cos t)\mathrm{k}]\ dt$.
    c) $\int_0^3 \|t\,\mathrm{i} + t^2\mathrm{j}\|\,dt$.

Longitud de Arco y Curvatura

100. Dibujar la curva plana y hallar su longitud en el intervalo dado.
    a) $r(t) = t\,\mathrm{i} + 3t\,\mathrm{j};\ [0,4]$.
    b) $r(t) = (t+1)\mathrm{i} + t^2\mathrm{j};\ [0,6]$.
    c) $r(t) = a\cos t\,\mathrm{i} + a\sin t\,\mathrm{j};\ [0,2\pi]$.
101. Dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud sobre el intervalo dado.
    a) $r(t) = 2t\,\mathrm{i} - 3t\,\mathrm{j} + t\mathrm{k};\ [0,2]$.
    b) $r(t) = \langle 3t, 2\cos t, 2\sin t\rangle;\ [0,\pi]$.
    c) $r(t) = \langle \cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t^2\rangle;\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
102. Hallar la curvatura K de la curva donde s es el parámetro longitud de arco.
    a) $r(s) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathrm{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathrm{j}$.
    b) $r(s) = (3+s)\mathrm{i} + \mathrm{j}$.
103. Hallar la curvatura K de la curva plana en el valor dado del parámetro.
    a) $r(t) = t^2\mathrm{j} + \mathrm{k}, t = 0$.
    b) $r(t) = t\mathrm{i} + t^2\mathrm{j}, t = 1$.
    c) $r(t) = 5\cos t\,\mathrm{i} + 4\sin t\,\mathrm{j}, t = \frac{\pi}{3}$.
104. Hallar la curvatura K de la curva.

a) $r(t) = \langle a(wt - \sin wt), a(1 - \cos wt) \rangle$.
b) $r(t) = e^t \cos t\ \mathrm{i} + e^t \sin t\ \mathrm{j} + e^t \mathrm{k}$.

105. Hallar la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de x.
a) $y = 3x - 2, x = a$.
b) $y = 2x^2 + 3, x = -1$.
c) $y = \sqrt{a^2 - x^2}, x = 0$.

Vector Tangente Unitario, Vector Normal Unitario, Vector Binormal Unitario

106. Encontrar el vector unitario normal principal a la curva en el valor especificado del parámetro.
a) $r(t) = t\ \mathrm{i} + \frac{1}{2}t^2\ \mathrm{j}, t = 2$.
b) $r(t) = 3\cos t\ \mathrm{i} + 3\sin t\ \mathrm{j}, t = \frac{\pi}{4}$.
c) $r(t) = 6\cos t\ \mathrm{i} + 6\sin t\ \mathrm{j} + \mathrm{k}, t = \frac{3\pi}{4}$.

107. Hallar $v(t), a(t), T(t)$ y $N(t)$ (si existe) para un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria dada por la función vectorial $r(t)$. Usar los resultados para determinar la forma de la trayectoria. ¿Es constante la rapidez del objeto o cambiante?
a) $r(t) = 4t\ \mathrm{i}$.
b) $r(t) = t^2 \mathrm{j} + \mathrm{k}$.

108. Hallar $T(t), N(t), a_T$ y a_N para la curva plana t en el instante $r(t)$.
a) $r(t) = t^2\ \mathrm{i} + 2t\ \mathrm{j},\ t = 1$.
b) $r(t) = e^t \mathrm{i} + e^{-2t} \mathrm{j},\ t = 0$.
c) $r(t) = e^t \cos t\ \mathrm{i} + e^t \sin t\ \mathrm{j},\ t = \frac{\pi}{2}$.

109. Hallar $T(t), N(t), a_T$ y a_N en el instante dado t para la curva espacial $r(t)$. [*Sugerencia*: Hallar $a(t), T(t)$ y a_N. Resolver para N en la ecuación $a(t) = a_T T + a_N N$.]
a) $r(t) = 4t\ \mathrm{i} - 4t\ \mathrm{j} + 2t\ \mathrm{k},\ t = 2$.
b) $r(t) = e^t \sin t\ \mathrm{i} + e^t \cos t\ \mathrm{j} + e^t \mathrm{k},\ t = 0$.

110. Hallar los vectores T y N, y el vector unitario binormal de la función vectorial $r(t)$ en el valor dado de t.
a) $r(t) = 2\cos t\ \mathrm{i} + 2\sin t\ \mathrm{j} + \frac{t}{2}\ \mathrm{k}, t_0 = \frac{\pi}{2}$.
b) $r(t) = \mathrm{i} + \sin t\ \mathrm{j} + \cos t\ \mathrm{k}, t_0 = \frac{\pi}{4}$.
c) $r(t) = 4\sin t\ \mathrm{i} + 4\cos t\ \mathrm{j} + 2t\ \mathrm{k}, t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Círculo Osculador, Plano Normal y Plano Osculador

111. Dada la curva $r(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$, encontrar la ecuación del plano osculador cuando $t = 1$.

112. Encontrar la ecuación del círculo osculador de $r(t) = (t, t^2)$ en el punto $(0, 0)$.

113. Determinar las ecuaciones del plano normal y el plano osculador de la curva en el punto dado.
a) $x = \sin 2t, y = -2\cos 2t, z = 4t;\ \ (0, 1, 2\pi)$.
b) $x = \ln t, y = 2\,t, z = t^2;\ \ (0, 2, 1)$.

114. Hallar las ecuaciones de los planos normal y osculador de la curva de intersección de los cilindros parabólicos $x = y^2$ y $z = x^2$, en el punto $(1, 1, 1)$.

NOTA: El estudiante debe resolver los ejercicios pares de cada sección y ser entregados en el formato solicitado por el docente.