UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

GUÍA DE EJERCICIOS
CÁLCULO II
ELABORADO POR: DAISY ARROYO FERNANDEZ

Paralelo A: M.Sc. Roberto Huaranca Ampa

Paralelo B: Dra. Daisy Arroyo Fernandez

Paralelo C: M.Sc. Eugenio Castaños Calle

Paralelo D: Lic. Ramiro Choque Canaza

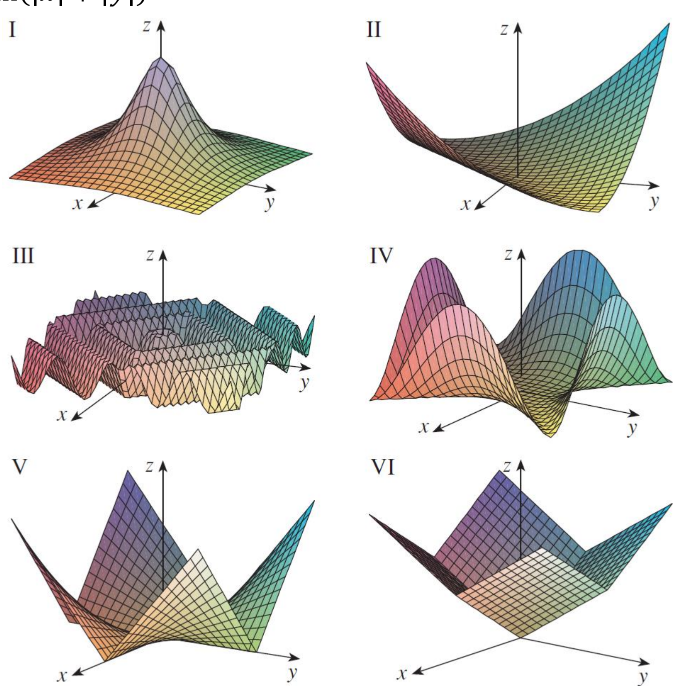
EVALUACIÓN	PONDERACIÓN	FECHA
Examen Primer Parcial (Cap. 1,2 y 3)	30	Sábado 29/03/2025
Examen Segundo Parcial (Cap. 4)	30	Sábado 17/05/2025
Examen Final (Cap. 5)	30	Sábado 21/06/2025
Prácticas	10	
Examen Segundo Turno (Todos los Capítulos) Nota mínima 35/100	100	Miércoles 25/06/2025

GESTIÓN I – 2025

4. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. Sea $g(x) = \cos(x + 2y)$.
   a) Evalúe $g(2, -1)$.
   b) Encuentre el dominio de g.
   c) Determine el rango de g.
2. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
   a) Evalúe $F(3, 1)$.
   b) Determine y trace el dominio de F.
   c) Determine el rango de F.
3. Determine y grafique el dominio de la función
   a) $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$
   b) $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$
   c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$
   d) $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$
   e) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$
4. Trace la gráfica de la función.
   a) $f(x, y) = 1 + y$
   b) $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$
   c) $f(x, y) = y^2 + 1$
   d) $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$
   e) $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$
5. Haga corresponder la función con su gráfica (marcadas de I a VI). Dé razones por su elección.
   a) $f(x, y) = |x| + |y|$
   b) $f(x, y) = |xy|$
   c) $f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$
   d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
   e) $f(x, y) = (x - y)^2$
   f) $f(x, y) = \sin(|x| + |y|)$



6. Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel.
   a) $f(x,y) = x^3 - y$
   b) $f(x,y) = \ln(x^2 + 4y^2)$
   c) $f(x,y) = y \sec x$
   d) $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$
7. Describa las superficies de nivel de la función.
   a) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$
   b) $f(x,y,z) = y^2 + z^2$
8. Grafique las funciones:
   a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   b) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
   c) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Límites y Continuidad

9. Explique por qué cada una de las funciones es continua o discontinua.
   a) La temperatura en el exterior como función de la longitud, latitud y tiempo.
   b) Elevación (altura sobre el nivel del mar) en función de la longitud, latitud y tiempo.
   c) El costo de un viaje en taxi en función de la distancia re corrida y el tiempo.
10. Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.
   a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$
   b) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$
   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$
   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \sin^2 x}{x^4+y^4}$
   e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$
   g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
   h) $\lim_{(x,y,z)\to(\pi,0,1/3)} e^{y^2} \tan(xz)$
   i) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$
11. Encuentre $h(x,y) = g\big(f(x,y)\big)$ y el conjunto en el cual h es continua.
   a) $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, f(x,y) = 2x + 3y - 6$
   b) $g(t) = t + \ln t\,, f(x,y) = \frac{1-xy}{1+x^2y^2}$
12. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.
   a) $F(x,y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$
   b) $H(x,y) = \frac{e^x+e^y}{e^{xy}-1}$
   c) $G(x,y) = \tan^{-1}((x + y)^{-2})$
   d) $f(x,y,z) = \sqrt{y - x^2}\ln z$
   e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
13. Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r,θ) son las coordenadas polares del punto (x,y) con $r \geq 0$, observe que $r \to 0^+$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.]
   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$

Derivadas Parciales

14. Si $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.
15. Si $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1,0)$ y $f_y(1,0)$ e interprete estos valores como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.
16. Calcule las primeras derivadas parciales de la función.
    a) $f(x,y) = x^4y^3 + 8x^2y$
    b) $f(x,t) = \sqrt{x}\ln t$
    c) $z = \tan xy$
    d) $f(x,y) = \frac{x}{(x+y)^2}$
    e) $w = \frac{e^v}{u+v^2}$
    f) $u(r,\theta) = \sin(r\cos\theta)$
    g) $f(x,y) = x^y$
    h) $F(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3+1}dt$
    i) $f(x,y,z) = x\sin(y-z)$
    j) $w = ze^{xyz}$
    k) $u = x^{y/z}$
    l) $\phi(x,y,z,t) = \frac{\alpha x+\beta y^2}{\gamma z+\delta t^2}$
    m) $u = \sin(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$
17. Determine las derivadas parciales indicadas.
    a) $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right); f_x(3,4)$
    b) $f(x,y) = \arctan(y/x); f_x(2,3)$
    c) $f(x,y,z) = \frac{y}{x+y+z}; f_y(2,1,-1)$
    d) $f(x,y,z) = \sqrt{\sin^2 x + sin^2\, y + sin^2\, z};\ f_z(0,0,\pi/4)$
18. Mediante derivación implícita determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.
    a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$
    b) $e^z = xyz$
    c) $yz + x\ln y = z^2$
19. Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.
    a) $z = f(x)g(y)$
    b) $z = f(xy)$
    c) $z = f(x/y)$
20. Determine las segundas derivadas parciales.
    a) $f(x,y) = \sin^2(mx+ny)$
    b) $v = \frac{xy}{x-y}$
    c) $v = e^{xe^y}$
21. Compruebe que la conclusión del teorema de Clairaut se cumple, es decir, $u_{xy} = u_{yx}$.
    a) $u = e^{xy}\sin y$
    b) $u = \ln(x+2y)$
22. Encuentre la derivada parcial indicada.
    a) $f(x,y) = x^4y^2 - x^3y;\ f_{xxx}, f_{xyx}$
    b) $f(x,y,z) = e^{xyz^2};\ f_{xyz}$
    c) $u = e^{r\theta}\sin\theta;\ \frac{\partial^3 u}{\partial r^2\partial\theta}$

d) $w = \frac{x}{y+2z}$; $\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

23. Compruebe que la función $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin kx$ es una solución de la ecuación de la conducción de calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.
24. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
    a) $u = x^2 - y^2$
    b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
    c) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$
25. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.
26. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

Regla de la Cadena

27. Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.
    a) $z = x^2 + y^2 + xy, x = \sin t, y = e^t$
    b) $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, x = \ln t,\ y = \cos t$
    c) $w = xe^{y/z}, x = t^2, y = 1 - t, z = 1 + 2t$
28. Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.
    a) $z = \arcsin(x - y), x = s^2 + t^2, y = 1 - 2st$
    b) $z = e^{x+2y}, x = s/t, y = t/s$
    c) $\tan(u/v), u = 2s + 3t, v = 3s - 2t$
29. Si $z = f(x, y)$, donde f es derivable,

$$\begin{array}{cc} x = g(t) & y = h(t) \\ g(3) = 2 & h(3) = 7 \\ g'(3) = 5 & h'(3) = -4 \\ f_x(2,7) = 6 & f_y(2,7) = -8 \end{array}$$

    determine dz/dt cuando $t = 3$.
30. Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.
    a) $z = x^4 + x^2 y,\ x = s + 2t - u,\ y = stu^2$;
    $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u}$ donde $s = 4, t = 2, u = 1$
    b) $w = xy + yz + zx,\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = r\theta$;
    $\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta}$ donde $r = 2, \theta = \pi/2$
    c) $N = \frac{p+q}{p+r},\ p = u + vw,\ q = v + uw,\ r = w + uv$;
    $\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial w}$ donde $u = 2, v = 3, w = 4$

Diferenciabilidad de una función de varias variables

31. Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.
    a) $f(x, y) = x^3 y^4,\ (1, 1)$
    b) $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}},\ (3, 0)$
    c) $f(x, y) = y + \sin(x/y),\ (0, 3)$
32. Dado que f es una función diferenciable con $f(2, 5) = 6, f_x(2, 5) = 1$, y $f_y(2, 5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.
33. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - xy\cos\pi y$ en $(1, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Grafique f y su plano tangente.
34. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

35. Determine la diferencial de la función.
    a) $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$
    b) $m = p^5 q^3$
    c) $R = \alpha\beta^2 \cos\gamma$
36. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.
37. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de $(3, -1)$ a $(2.96, -0.95)$, compare los valores de Δz y dz.
38. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0.1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0.05 cm de espesor.
39. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 cm y altura de 12 cm si el estaño tiene 0.04 cm de espesor.

Vector Gradiente

40. Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.
    a) $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3,\ (1, 1),\ \theta = \pi/6$
    b) $f(x, y) = e^x \cos y,\quad (0, 0),\ \ \theta = \pi/4$
41. Determine el gradiente de f. Luego evalúe el gradiente en el punto P. Y encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.
    a) $f(x, y) = y^2/x, P(1, 2), \mathbf{u} = \frac{1}{3}\left(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}\right)$
    b) $f(x, y, z) = y^2e^{xyz}, P(0, 1, -1), u = \langle\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\rangle$
42. Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.
    a) $f(x, y) = e^x \sin y,\ (0, \pi/3),\ \mathbf{v} = \langle -6, 8\rangle$
    b) $g(p, q) = p^4 - p^2q^3,\ (2, 1),\ \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
    c) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x,\ (0, 0, 0),\ \mathbf{v} = \langle 5, 1, -2\rangle$
    d) $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)\ \ (1, 1, 1),\ \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
43. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.
44. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $P(1, -1, 3)$ en la dirección de $Q(2, 4, 5)$.
45. La segunda derivada direccional de $f(x, y)$ es $D_u^2 f(x, y) = D_u[D_u f(x, y)]$. Si $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ y $\mathbf{u} = \langle\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$, calcule $D_u^2 f(2, 1)$.
46. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y con éste determine la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.
47. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, 2)$ y utilícelo para encontrar la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

Matriz Jacobiana

48. Halla la matriz Jacobiana en el punto $(0, -2)$ de la siguiente función vectorial con 2 variables: $f(x, y) = (e^{xy} + y, y^2x)$.
49. Calcula la matriz Jacobiana en el punto $(2, -1)$ de la siguiente función con 2 variables: $f(x, y) = (x^3y^2 - 5x^2y^2, y^6 - 3y^3x + 7)$.
50. Determina la matriz Jacobiana en el punto $(2, -2, 2)$ de la siguiente función con 3 variables: $f(x, y, z) = \left(z\tan(x^2 - y^2), xy\ln\left(\frac{z}{2}\right)\right)$.
51. Determina la matriz Jacobiana en el punto (π, π) de la siguiente función multivariable: $f(x, y) = \left(\frac{\cos(x-y)}{x}, e^{x^2-y^2}, x^3\sin(2y)\right)$.
52. Determina la matriz Jacobiana en el punto $(3,0,\pi)$ de la siguiente función con 3 variables: $f(x, y, z) = \left(xe^{2y}\cos(-z), (y+2)^3\sin\left(\frac{z}{2}\right), e^{2y}\ln\left(\frac{x}{3}\right)\right)$.

53. Encuentra la matriz Hessiana de la siguiente función de 2 variables en el punto (1,1): $f(x,y) = x^2y + y^2x$.
54. Encuentra la matriz Hessiana en el punto (1,1) de la siguiente función con 2 variables: $f(x,y) = e^{y\ln x}$.
55. Calcule la matriz Hessiana de la función $g(x,y) = \sin(xy) + x^2 + \cos(y^2)$ en el punto $(0,0)$.
56. Hallar el determinante de la matriz Hessiana de la función $f(x,y) = x^3 + x^2y + 3xy + 2$ en el punto $(-1,2)$.
57. Determinar la matriz Hessiana en el punto $(2,-1,1,-1)$ de la siguiente función con 4 variables: $f(x,y,z,w) = 2x^3y^4zw^2 - 2y^3w^4 + 3x^2z^2$.

Derivada Direccional

58. Calcular la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{v}$ en el punto que se indica.
    a) $f(x,y) = x^2y^3$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $P = (-2,1)$.
    b) $f(x,y) = \sin(x-y)$, $\mathbf{v} = \langle 1,1\rangle$, $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$.
    c) $f(x,y) = e^{xy-y^2}$, $\mathbf{v} = \langle 12,-5\rangle$, $P = (2,2)$.
    d) $g(x,y,z) = z^2 - xy^2$, $\mathbf{v} = \langle -1,2,2\rangle$, $P = (2,1,3)$.
    e) $g(x,y,z) = x\ln(y+z)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $P = (2,e,e)$.
59. Hallar la derivada direccional de $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ en $P = (3,2)$ en la dirección que apunta al origen.
60. Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = xy + z^3$ en $P = (3,-2,-1)$ en la dirección que apunta al origen.
61. Suponga que $\nabla f_P = \langle 2,-4,4\rangle$. ¿Es f creciente o decreciente en P para la dirección dada por $\mathbf{v} = \langle 2,1,3\rangle$?
62. Sea $f(x,y,z) = \sin(xy+z)$ y $P = (0,-1,\pi)$. Calcule $D_{\mathbf{u}}f(P)$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario que forma un ángulo de $\theta = 30°$ con ∇f_P.
63. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle 1,3,1\rangle$.
64. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle 2x,1,2\rangle$.
65. Halle una función $f(x,y,z)$ tal que $\nabla f = \langle z,2y,x\rangle$.
66. Halle una función $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \langle y,x\rangle$.
67. Sea $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{x}{y}$ y $\mathbf{u} = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$.
    a) Calcule el gradiente de f.
    b) Calcule $D_{\mathbf{u}}f(1,1)$ y $D_{\mathbf{u}}f(\sqrt{3},1)$.
    c) Pruebe que las rectas $y = mx$ para $m \neq 0$ son curvas de nivel para f.
    d) Compruebe que ∇f_P es ortogonal a la curva de nivel que pasa por P para $P = (x,y) \neq (0,0)$.
68. Compruebe las relaciones de linealidad para los gradientes:
    a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
    b) $\nabla(cf) = c\nabla f$

Plano Tangente

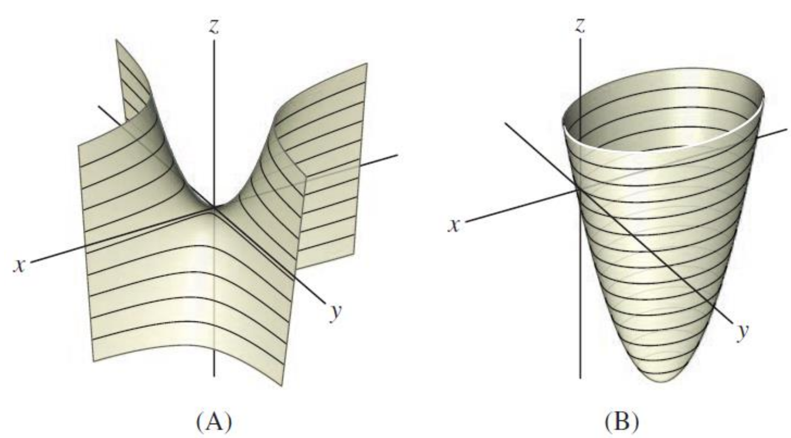
69. Halle una ecuación del plano tangente en el punto que se indica.
    a) $f(x,y) = x^2y + xy^3$, $(2,1)$
    b) $f(x,y) = x^2 + y^{-2}$, $(4,1)$
    c) $f(r,s) = r^2s^{-1/2} + s^{-3}$, $(2,1)$
    d) $f(x,y) = \operatorname{sech}(x-y)$, $(\ln 4, \ln 2)$
70. Halle los puntos sobre la gráfica de $z = 3x^2 - 4y^2$ en los que el vector $n = \langle 3,2,2\rangle$ es normal al plano tangente.
71. Halle los puntos sobre la gráfica de $z = xy^3 + 8y^{-1}$ en los que el plano tangente es paralelo a $2x + 7y + 2z = 0$.
72. Halle una ecuación del plano tangente a $z = f(x,y)$ en $P(1.2, 10)$ suponiendo que:
    $f(1,2) = 10$; $f(1.1, 2.01) = 10.3$; $f(1.04, 2.1) = 9.7$
73. Suponga que la ecuación del plano tangente a $z = f(x,y)$ en $(-2.3, 4)$ es $4x + 2y + z = 2$. Estime $f(-2.1, 3.1)$.

Diferenciación Implícita

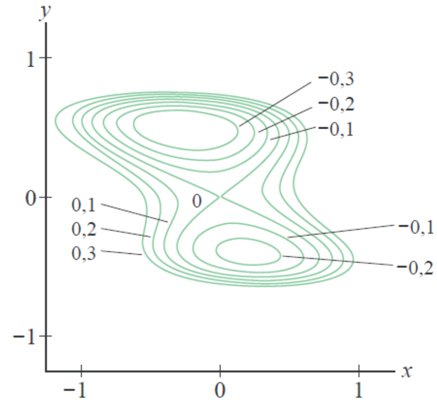
74. Suponga que z está definida implícitamente como función de x y de y mediante la ecuación $F(x,y,z) = xz^2 + y^2z + xy - 1 = 0$.
    a) Calcule F_x, F_y, F_z.
    b) Use las siguientes ecuaciones para calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$
75. Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en los puntos $(3,2,1)$ y $(3,2,-1)$, donde z está definida implícitamente por la ecuación $z^4 + z^2x^2 - y - 8 = 0$.
76. Calcular las derivadas parciales usando derivación implícita.
    a) $\frac{\partial z}{\partial x},\ x^2y + y^2z + xz^2 = 10$
    b) $\frac{\partial w}{\partial z},\ x^2w + w^3 + wz^2 + 3yz = 0$
    c) $\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{1}{w^2+x^2} + \frac{1}{w^2+y^2} = 1$ en $(x,y,w) = (1,1,1)$
    d) $\partial U/\partial T$ y $\partial T/\partial U,\ (TU - V)^2 \ln(W - UV) = 1$ en $(T,U,V,W) = (1,1,2,4)$
77. Según el teorema del coseno $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, donde a,b,c son los lados de un triángulo y θ es el ángulo opuesto al lado de longitud c.
    a) Calcule $\partial\theta/\partial a, \partial\theta/\partial b$, y $\partial\theta/\partial c$ usando derivación implícita.
    b) Suponga que $a = 10, b = 16, c = 22$. Estime el cambio en θ, si a y b aumentan en 1 y c lo hace en 2.
78. La presión P, volumen V, y temperatura T de un gas de van der Waals de n moléculas (n constante) están relacionadas por medio de la ecuación:
$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$
donde a, b y R son constantes. Calcule $\partial P/\partial T$ y $\partial V/\partial P$.

Máximos y Mínimos de Funciones de Varias Variables. Valores Extremos Locales. Valores Extremos Globales

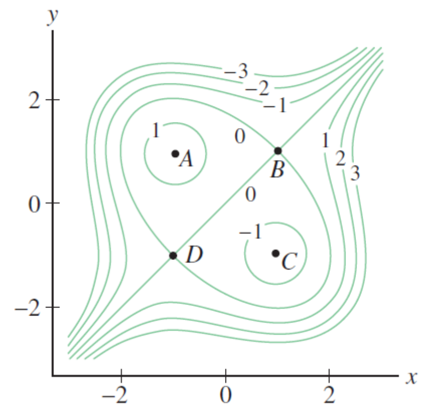
79. Halle los puntos críticos de las funciones:
$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x \qquad g(x,y) = x^2 - 12xy + y$$
Use el criterio de la segunda derivada para determinar el máximo local, el mínimo local y los puntos de silla. Relacione $f(x,y)$ y $g(x,y)$ con sus gráficas:



80. Halle los puntos críticos de:
$$f(x,y) = 8y^4 + x^2 + xy - 3y^2 - y^3$$
Use el mapa de contorno para determinar su naturaleza (máximo local. Mínimo local o punto de silla).



81. Use el mapa de contorno para determinar si los puntos críticos A, B, C, D son máximos locales, mínimos locales, o puntos de silla.



82. Halle los puntos críticos de la función. A continuación, utilice el criterio de la segunda derivada para determinar si se trata de máximos locales, mínimos locales o puntos de silla (o ben establezca que el criterio no decide).
    a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x$
    b) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2 - 10x$
    c) $f(x,y) = 4x - 3x^3 - 2xy^2$
    d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$
    e) $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$
    f) $f(x,y) = \ln x + 2\ln y - x - 4y$
    g) $f(x,y) = x - y^2 - \ln(x+y)$
    h) $f(x,y) = (x+3y)e^{y-x^2}$
83. Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.
    a) ¿En qué punto alcanza f su valor mínimo? No use cálculo para responder a esta pregunta.
    b) Compruebe que el conjunto de puntos críticos de f está formado por el origen $(0,0)$ y la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$.
    c) El criterio de la segunda derivada no decide para los puntos sobre la circunferencia unitaria (esto se puede verificar con algo de álgebra, aunque la comprobación es larga). Demuestre que f alcanza su valor máximo sobre la circunferencia unitaria analizando la función $g(t) = te^{-t}$ para $t > 0$.
84. Determine los valores extremos globales de la función sobre el conjunto que se indica sin utilizar argumentos de cálculo.
    a) $f(x,y) = 2x - y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 3$
    b) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2},\ x^2 + y^2 \le 1$
85. Halle el máximo de

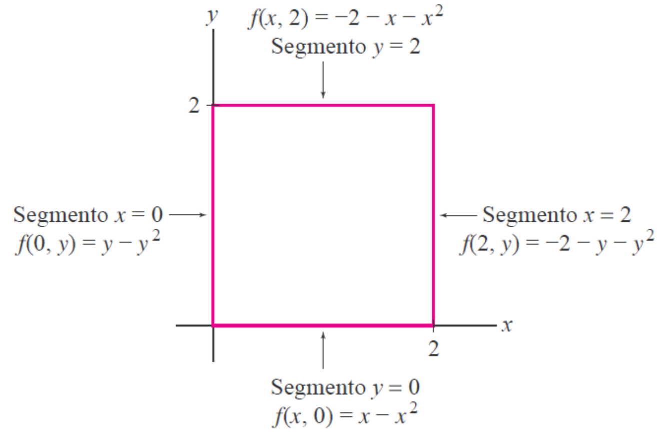
$$f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$$

sobre el cuadrado $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.
    a) En primer lugar, localice el punto crítico de f en el cuadrado y evalúe f en este punto.
    b) Sobre el segmento inferior del cuadrado, $y = 0$ y $f(x,0) = x - x^2$. Halle los valores extremos de

f sobre el segmento inferior.

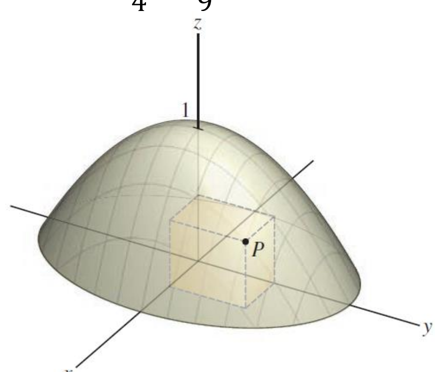
c) Halle los valores extremos de f sobre el resto de los segmentos.

d) Halle el mayor de los valores que ha obtenido en a), b) y c).



86. Halle el máximo de $f(x,y) = y^2 + xy - x^2$ sobre el cuadrado $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$.
87. Determine los valores extremis globales de la función en el dominio que se indica.
    a) $f(x,y) = x^3 - 2y,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
    b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
    c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$
    d) $f(x,y) = (4y^2 - x^2)e^{-x^2-y^2},\ x^2 + y^2 \le 2$
88. Halle el volumen máximo de una caja inscrita en el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$.
89. Halle el punto sobre el plano $z = x + y + 1$ más cercano al punto $P = (1, 0, 0)$. Indicación: minimice el cuadrado de la distancia.
90. Halle el volumen máximo de mayor caja del tipo que se muestra en la figura, con una esquina en el origen y la esquina opuesta en el punto $P = (x, y, z)$ sobre el paraboloide

$$z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \quad \text{con } x, y, z \ge 0$$



Máximos y Mínimos Condicionados (Multiplicadores de Lagrange)

91. Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange a la función $f(x,y) = (x^2 + 1)y$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 5$. Indicación: pruebe en primer lugar, que $y \ne 0$; a continuación, considere los casos $x = 0$ y $x \ne 0$ por separado.
92. Halle los valores mínimo y máximo de la función sujeta a la restricción dada.
    a) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ 2x + 3y = 6$
    b) $f(x,y) = xy,\ 4x^2 + 9y^2 = 32$
    c) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ x^4 + y^4 = 1$
    d) $f(x,y,z) = 3x + 2y + 4z,\ x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 1$
    e) $f(x,y,z) = xy + 3xz + 2yz,\ 5x + 9y + z = 10$
93. Halle la caja rectangular de volumen máximo si la suma de las longitudes de sus bordes es igual a 300 cm.

94. El área de un cono circular de radio r y altura h es $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, y su volumen es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
    a) Determine el cociente h/r para el cono de área dada S y máximo volumen V.
    b) ¿A qué es igual el cociente h/r para un cono de volumen dado V y área mínima S?
    c) ¿Existe un cono de volumen dado V y área máxima?
95. Halle el valor máximo de $f(x,y) = x^a y^b$ para $x \geq 0, y \geq 0$ sobre la recta $x + y = 1$, donde $a, b > 0$ son constantes.
96. Halle el valor máximo de $f(x,y) = x^a y^b$ para $x \geq 0, y \geq 0$ sobre la circunferencia unitaria, donde $a, b > 0$ son constantes.
97. Halle el valor máximo de $f(x,y,z) = x^a y^b z^c$ para $x, y, z \geq 0$ sobre la esfera unitaria, donde $a, b, c > 0$ son constantes.
98. El cilindro $x^2 + y^2 = 1$ interseca con el plano $x + z = 1$ formando una elipse. Halle el punto sobre esta elipse que esté más lejos del origen.
99. Halle el mínimo y el máximo de $f(x,y,z) = y + 2z$ sujeta a las dos restricciones, $2x + z = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$.
100. Halle el valor mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las dos restricciones $x + 2y + z = 3$ y $x - y = 4$.

NOTA: El estudiante debe resolver los ejercicios pares de cada sección y ser entregados en el formato solicitado por el docente.