

**Para los números 12, 17, 15, 10, 10, 10, 8, 10. Marque en caso de que la afirmación sea verdadera**

- a. La media es 4.5
- b. La mediana es 10
- c. La media es 11.5
- d. La desviación estándar es 0.2629318
- e. La desviación estándar es 3.0237158

**Respuesta:**

La media  $\bar{x}$  es la suma de todos los números  $x_i$  dividida entre la cantidad de números  $n$ .

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{92}{8} = 11.5$$

La mediana  $\tilde{x}$  es el valor central cuando los números están ordenados.

8, 10, 10, 10, 10, 12, 15, 17, valor central:  $\tilde{x} = 10$

La desviación estándar de una muestra  $s$  se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{64}{7}} \approx 3.0237158$$

**Marcar: b. c. y e.**

**Se tienen los salarios de un grupo de 20 trabajadores para el tiempo  $t$ , distribuidos como:**

Grupo 1:  $n = 10$

|      |      |      |
|------|------|------|
| 1501 | 1642 | 2502 |
| 1896 | 1927 | 2768 |
| 2320 | 1609 | 2427 |
| 2837 |      |      |

Grupo 2:  $n = 6$

|      |      |      |
|------|------|------|
| 5329 | 5233 | 5135 |
| 4432 | 4561 | 3310 |

Grupo 3:  $n = 4$

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 8093 | 8019 | 7636 | 8731 |
|------|------|------|------|

**Si se decide hacer un incremento para el  $t + 1$  de 400Bs a todos y además incrementar al salario  $t$  en 22.39 %. ¿Cuál es el promedio esperado para  $t + 1$  de estos 20 trabajadores?**

- a. 4495.4
- b. 5012.36006
- c. 4095.4
- d. 5412.36006
- e. 20

**Respuesta:**

Se saca la media  $\bar{x}$  de todos los salarios.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4095.4$$

Se incrementa la media en 22.39%.

$$\bar{x} \cdot 1.2239 = 4095.4 \cdot 1.2239 = 5012.36006$$

Se incrementan los 400 Bs.

$$5012.36006 + 400 = 5412.36006$$

**Marcar d.**

---

*Caso alternativo:*

**En una empresa donde los salarios tienen un promedio de 3434 Bs. al mes y una desviación estándar 584, el sindicato solicita un incremento del 50% al salario junto con un bono mensual de 300 Bs.**

**El director acepta parcialmente la petición rebajando un 27% la propuesta total del sindicato. A partir del nuevo salario, la media y desviación estándar son:**

- a.  $\bar{y} = 3979.23, S_y = 639.48$
- b.  $\bar{y} = 4775.076, S_y = 0$
- c.  $\bar{y} = 1989.615, S_y = 319.74$
- d.  $\bar{y} = 3979.23, S_y = 767.376$
- e.  $\bar{y} = 3581.307, S_y = 639.48$

**Respuesta:**

Se incrementa la media (promedio) en 50%:

$$\bar{y}_i \cdot 1.5 = 3434 \cdot 1.5 = 5151$$

Se incrementan los 300 Bs:

$$5151 + 300 = 5451$$

Se reduce un 27%:

$$\bar{y} = 5451 \cdot (1 - 0.27) = 3979.23$$

Calcular la desviación multiplicando la desviación estándar inicial por los porcentajes:

$$S_y = (584)(1.5)(1 - 0.27) = 639.48$$

**Marcar a.**

**Una urna A contiene 4 bolas rojas y 3 negras, mientras que en la urna B contiene 4 bolas rojas y 6 negras. Si una bola es extraída aleatoriamente de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean del mismo color?**

- a.  $12/70$
- b.  $28/70$
- c.  $4/10$
- d.  $1/2$
- e.  $1/5$

**Respuesta:**

Calcular total de bolas en la urna A:  $4 + 3 = 7$ .

Calcular total de bolas en la urna B:  $4 + 6 = 10$ .

Calcular la probabilidad de que ambas sean rojas:

$$\frac{4}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{70}$$

Calcular la probabilidad de que ambas sean negras:

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{10} = \frac{18}{70}$$

Sumas las probabilidades:  $\frac{16}{70} + \frac{18}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$

El inciso que más se acerca a la respuesta es b)  $\frac{28}{70} \approx \frac{34}{70}$

**Marcar b.**

**Un número es seleccionado al azar entre los numeros 2 al 20. Sean los eventos:**

- A: El número es par
- B: El número es primo
- C: El número elegido es múltiplo de 5

**Marque en caso de que sean verdaderas las siguientes afirmaciones:**

- a.  $A \cup B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20$
- b.  $(A \cup B) \cap C^c = 5, 10$
- c.  $A \cap B = 2$
- d.  $A^c \cap B^c = \emptyset$
- e.  $A^c \cap B = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

**Respuesta:**

Anotar explícitamente los conjuntos:

- Números del 2 al 20:

|   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|

- A (Pares):

|   |  |   |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|
| 2 |  | 4 |  | 6 |  | 8 |  | 10 |  | 12 |  | 14 |  | 16 |  | 18 |  | 20 |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|

- B (Primos):

|   |   |  |   |  |   |  |  |  |    |  |    |  |  |  |    |  |    |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|
| 2 | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|

- C (Múltiplos de 5):

|  |  |  |   |  |  |  |  |    |  |  |  |  |    |  |  |  |  |    |
|--|--|--|---|--|--|--|--|----|--|--|--|--|----|--|--|--|--|----|
|  |  |  | 5 |  |  |  |  | 10 |  |  |  |  | 15 |  |  |  |  | 20 |
|--|--|--|---|--|--|--|--|----|--|--|--|--|----|--|--|--|--|----|

Verificar cada afirmación:

- $A \cup B$ :

|   |  |   |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|
| 2 |  | 4 |  | 6 |  | 8 |  | 10 |  | 12 |  | 14 |  | 16 |  | 18 |  | 20 |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|

∪

|   |   |  |   |  |   |  |  |  |    |  |    |  |  |  |    |  |    |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|
| 2 | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|

=

|   |   |   |   |   |   |   |  |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|--|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |  | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|--|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|

**Así que a. está mal, le falta el 9, el 15 y le sobra el 1.**

- $(A \cup B) \cap C^c$

|   |   |   |   |   |   |   |  |    |    |    |    |    |  |    |    |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|--|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |  | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|--|----|----|----|----|----|--|----|----|----|----|----|

$\cap$

|   |   |   |  |   |   |   |   |  |    |    |    |    |  |    |    |    |    |  |
|---|---|---|--|---|---|---|---|--|----|----|----|----|--|----|----|----|----|--|
| 2 | 3 | 4 |  | 6 | 7 | 8 | 9 |  | 11 | 12 | 13 | 14 |  | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
|---|---|---|--|---|---|---|---|--|----|----|----|----|--|----|----|----|----|--|

=

|   |   |   |  |   |   |   |  |  |    |    |    |    |  |    |    |    |    |  |
|---|---|---|--|---|---|---|--|--|----|----|----|----|--|----|----|----|----|--|
| 2 | 3 | 4 |  | 6 | 7 | 8 |  |  | 11 | 12 | 13 | 14 |  | 16 | 17 | 18 | 19 |  |
|---|---|---|--|---|---|---|--|--|----|----|----|----|--|----|----|----|----|--|

**Así que b. está mal**

- $A \cap B = 2$

|   |  |   |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|
| 2 |  | 4 |  | 6 |  | 8 |  | 10 |  | 12 |  | 14 |  | 16 |  | 18 |  | 20 |
|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|

$\cap$

|   |   |  |   |  |   |  |  |  |    |  |    |  |  |  |    |  |    |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|
| 2 | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|

=

|   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

**Así que c. está bien**

- $A^c \cap B^c$

|  |   |  |   |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |
|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|
|  | 3 |  | 5 |  | 7 |  | 9 |  | 11 |  | 13 |  | 15 |  | 17 |  | 19 |  |
|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|

$\cap$

|  |  |   |  |   |  |   |   |    |  |    |  |    |    |    |  |    |  |    |
|--|--|---|--|---|--|---|---|----|--|----|--|----|----|----|--|----|--|----|
|  |  | 4 |  | 6 |  | 8 | 9 | 10 |  | 12 |  | 14 | 15 | 16 |  | 18 |  | 20 |
|--|--|---|--|---|--|---|---|----|--|----|--|----|----|----|--|----|--|----|

=

|  |  |  |  |  |  |  |   |  |  |  |  |  |    |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|----|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  | 9 |  |  |  |  |  | 15 |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|---|--|--|--|--|--|----|--|--|--|--|--|

**Así que d. está mal**

- $A^c \cap B$

|  |   |  |   |  |   |  |   |  |    |  |    |  |    |  |    |  |    |  |
|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|
|  | 3 |  | 5 |  | 7 |  | 9 |  | 11 |  | 13 |  | 15 |  | 17 |  | 19 |  |
|--|---|--|---|--|---|--|---|--|----|--|----|--|----|--|----|--|----|--|

$\cap$

|   |   |  |   |  |   |  |  |  |    |  |    |  |  |  |    |  |    |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|
| 2 | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
|---|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|

=

|  |   |  |   |  |   |  |  |  |    |  |    |  |  |  |    |  |    |  |
|--|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|
|  | 3 |  | 5 |  | 7 |  |  |  | 11 |  | 13 |  |  |  | 17 |  | 19 |  |
|--|---|--|---|--|---|--|--|--|----|--|----|--|--|--|----|--|----|--|

**Así que e. está bien.**

**Marcar c. y e.**

**Sea X una v.a. con función de distribución acumulada:**

$$F(x) = \frac{x}{x+1}; \quad x \geq 0$$

**La función de densidad es:**

- a.  $\frac{1}{(x+1)^2}$
- b.  $\frac{x}{(x+1)^2}$
- c.  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$
- d.  $\frac{x}{(x-1)^2}$
- e.  $\frac{1}{(x-1)^2}$

**Respuesta:**

Derivar  $F(x)$  con la regla del cociente:

$$f(x) = \frac{\text{derivada del numerador} \times \text{denominador} - \text{numerador} \times \text{derivada del denominador}}{(\text{denominador})^2}$$

$$\text{Numerador: } x \quad \rightarrow \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\text{Denominador: } x + 1 \quad \rightarrow \frac{d}{dx} x + 1 = 1$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

**Marcar a.**

**Sea X una v.a. con función generatriz de momentos:**

$$M_X(t) = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t})$$

La varianza de X esta definida como:

- a. 1/4
- b. 1/2
- c. 2/4
- d. 3/4
- e. 6/7

**Respuesta:**

Calcular la esperanza  $E[X]$  sacando la primera derivada y evaluando en  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) \right] = \frac{1}{4}(3e^t - e^{-t}) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}(3e^0 - e^{-0}) = \frac{1}{4}(3 - 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calcular la esperanza del cuadrado de X  $E[X^2]$  sacando la segunda derivada y evaluando en  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{4}(3e^t - e^{-t}) \right] = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}(3e^0 + e^0) = \frac{1}{4}(3 + 1) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Calcular la varianza restando el segundo resultado (1) por el primer resultado  $\left(\frac{1}{2}\right)$  al cuadrado:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \\ &1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Marcar d.**



Sea  $(X,Y)$  v.a. continuas definidas ambas para los reales positivos, con función de densidad:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}$$

La marginal  $f_X(x)$  es:

- a. Ninguna.
- b.  $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^x$
- c.  $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$
- d. Falta información.
- e.  $f_X(x) = \frac{x^2+x}{4}e^{-x}$

**Respuesta:**

Integrar desde 0 hasta  $\infty$  con  $dy$ :

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}dy = \frac{1}{4}xe^{-x} \int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy$$

Dividir la integral en dos partes:

$$\int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy = \int_0^{\infty} (xye^{-y} + y^2e^{-y})dy = x \int_0^{\infty} (ye^{-y})dy + \int_0^{\infty} (y^2e^{-y})dy$$

Según las integrales gamma:

$$\int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy = k!$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy = x(1!) + (2!) = x + 2$$

Multiplicando por el factor externo:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}xe^{-x}(x + 2) = \frac{x(x + 2)}{4}e^{-x} = \frac{x^2 + 2x}{4}e^{-x}$$

**Marcar c.**

**Para la siguiente tabla de probabilidad conjunta, calcule la esperanza de X**

| x | y | Probabilidad |
|---|---|--------------|
| 1 | 1 | 0.19         |
| 2 | 1 | 0.23         |
| 3 | 1 | 0.24         |
| 1 | 2 | 0.05         |
| 2 | 2 | 0.06         |
| 3 | 2 | 0.04         |
| 1 | 3 | 0.03         |
| 2 | 3 | 0.02         |
| 3 | 3 | 0.02         |
| 1 | 4 | 0.03         |
| 2 | 4 | 0.05         |
| 3 | 4 | 0.04         |

- a. 1.65
- b. 1
- c. 2.04
- d. Falta información
- e. Ninguna o la información dada es incorrecta

**Respuesta:**

Sumar las probabilidades para cada valor de x:

- Para  $x = 1$  :  $0.19 + 0.05 + 0.03 + 0.03 = 0.30$
- Para  $x = 2$  :  $0.23 + 0.06 + 0.02 + 0.05 = 0.36$
- Para  $x = 3$  :  $0.24 + 0.04 + 0.02 + 0.04 = 0.34$

Multiplicar cada suma con el valor de x correspondiente y hacer la suma de productos:

$$E[X] = (1 \times 0.30) + (2 \times 0.36) + (3 \times 0.34) = 0.30 + 0.72 + 1.02 = 2.04$$

**Marcar c.**

**Sean dos variables aleatorias  $X, Y$ , con  $E[X] = 7$ ,  $E[Y] = 6$ ,  $E[X, Y] = 45$ , la covarianza es:**

- a. 87
- b. Falta información
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. 42
- e. 3

**Respuesta:**

La fórmula de la covarianza es:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 45 - 7 \cdot 6 = 45 - 42 = 3$$

**Marcar e.**

---

*Caso alternativo:*

**Sean dos variables aleatorias  $X, Y$  independientes, con  $E[X] = 3$ ,  $E[Y] = 3$ ,  $E[X, Y] = 14$ , la covarianza es:**

- a. Falta información
- b. Ninguna o la información dada es incorrecta
- c. 23
- d. -5
- e. 9

**Respuesta:**

Si las variables aleatorias son independientes, entonces la covarianza es siempre 0.

**Marcar b.**

**Si:**

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad 2 \leq y \leq 6$$

**Encuentre la densidad  $f(x)$ .**

- a. Falta información
- b.  $f(x) = 6$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d.  $f(x) = \frac{x^2}{3}$
- e.  $f(x) = \frac{x}{4} + 5$

**Respuesta:**

Para que la función conjunta sea una densidad de probabilidad válida, no debe tomar valores negativos, sin embargo:

Si  $(x, y) = (2, 6)$ :

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) \rightarrow f(2, 6) = \frac{1}{8}(6 - 2 - 6) = \frac{1}{8}(-2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Como la función toma valores negativos, entonces no es una densidad de probabilidad.

**Marcar c.**

---

*Caso alternativo:*

**Si:**

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y); \quad 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4$$

**Obtenga  $f(x/y)$**

- a.  $f(x/y) = \frac{6-x-y}{10-2y}$
- b. Falta información
- c.  $f(x/y) = \frac{6-x-y}{6-2x}$
- d.  $f(x/y) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$
- e.  $f(x/y) = \frac{5}{4} - \frac{y}{4}$

**Respuesta:**

Calcular la marginal de  $y$  ( $f_Y(y)$ ) integrando respecto a  $x$  de 0 a 2:

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}(6 - x - y) dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{8} \left[ 6x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{8}(12 - 2 - 2y) = \frac{1}{8}(10 - 2y) = \frac{1}{4}(5 - y)$$

Calcular  $f(x/y)$ :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{4}(5 - y)} = \frac{6 - x - y}{2(5 - y)} = \frac{6 - x - y}{10 - 2y}$$

**Marcar a.**

---

*Caso alternativo:*

**Obtenga  $f(y/x)$**

**Respuesta:**

Calcular la marginal de  $x$  ( $f_X(x)$ ) integrando respecto a  $y$  de 2 a 4:

$$f_X(x) = \int_2^4 \frac{1}{8}(6 - x - y) dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \left[ 6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4} = \frac{1}{8} (24 - 4x - 8 - 12 + 2x + 2) = \frac{1}{8} (6 - 2x) = \frac{1}{4} (3 - x)$$

Calcular  $f(y/x)$ :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{4}(3 - x)} = \frac{6 - x - y}{2(3 - x)} = \frac{6 - x - y}{6 - 2x}$$

**Marcar c.**

**Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Encuentre la correlación entre X y X**

- a.  $\rho = -1$
- b.  $\rho = 0$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. Falta información
- e.  $\rho = 1$

**Respuesta:**

La fórmula de la correlación es:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Como la correlación es entre X y X:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\text{Var}(x)}{(\sigma_X)^2}$$

Se sabe que:

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\sigma_X \cdot \sigma_X = \text{Var}(X)$

Entonces:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\text{Var}(x)}{\text{Var}(x)} = 1$$

**Marcar e.**

---

*Caso alterno:*

**Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Encuentre la correlación entre X y -X**

**Respuesta:**

Se sabe que:

- $\text{Cov}(X, -X) = -\text{Var}(X)$
- $\sigma_X \cdot \sigma_X = \text{Var}(X)$

Entonces:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, -X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{-\text{Var}(x)}{\text{Var}(x)} = -1$$

**Marcar a.**

**Sea  $X$  una va tal que  $X \sim U(a, b)$ , Se toma una muestra aleatoria de tamaño  $n$ , encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.**

- a.  $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- b.  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{b-a}$
- c. Ninguna
- d.  $f(x) = \frac{1}{a-b}$
- e.  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}$

**Respuesta:**

La función de densidad conjunta es el producto de las densidades individuales, así que cada densidad se multiplicará  $n$  veces (el tamaño de la muestra aleatoria), por lo tanto la respuesta es la única que está elevada a la  $n$

$$\frac{1}{(b-a)^n} = \left( \frac{1}{b-a} \right)^n$$

**Marcar e.**

**Se toma una muestra aleatoria de tamaño 7 de una población finita de tamaño 79, Calcular para el estimador de la media muestral, su varianza. Los datos son:** 0, -6, 51, 46, -6, 14, 1

- a. Ninguna
- b. 14.2857143
- c. Falta información
- d. 592.9047619
- e. 77.1955567

**Respuesta:**

Obtener la suma de los datos:

$$\sum x_i = 0 + (-6) + 51 + 46 + (-6) + 14 + 1 = 100$$

Obtener la suma de cuadrados:

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 0^2 + (-6)^2 + 51^2 + 46^2 + (-6)^2 + 14^2 + 1^2 \\ &= 0 + 36 + 2601 + 2116 + 36 + 196 + 1 = 4986\end{aligned}$$

Aplicar la formula de la varianza muestral corregida  $s^2$ :

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1} = \\ \frac{100 - \frac{4986^2}{7}}{6} &= 592.9047619\end{aligned}$$

Obtener la varianza:

$$\begin{aligned}\left(\frac{s^2}{n}\right) \cdot \left(\frac{N - n}{N}\right) &= \\ \frac{592.9}{7} \cdot \left(\frac{79 - 7}{79}\right) &= 77.1949\end{aligned}$$

**Marcar e.**



**La cantidad de tiempo que le toma al cajero de un banco con servicio en el automóvil atender a un cliente es una variable aleatoria con una media  $\mu = 5.28$  minutos y una desviación estándar  $\sigma = 5.38$  minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 58 clientes, calcule la probabilidad de que el tiempo medio que el cliente pasa en la ventanilla del cajero sea más de 8.7 minutos;**

- a. Información insuficiente
- b.  $6.4511315 \times 10^{-7}$
- c. Ninguna
- d. 0
- e. 0.9999994

**Respuesta:**

Obtener el error estándar  $\sigma_{\bar{x}}$ :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.38}{\sqrt{58}} \approx 0.7067$$

Obtener el Z-score:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{8.7 - 5.28}{0.7067} \approx 4.838d$$

Calcular  $P(Z > 4.838)$  buscando en la tabla Z (en el área de la derecha) el valor 4.838 (cuando  $Z > 3$ , las probabilidades son cercanas a 0).

$$P(Z > 4.838) \approx 6.45 \times 10^{-7}$$

**Marcar b.**

En una calculadora de DA normal (probabilidad de distribución acumulada normal), se pueden ingresar los parámetros:

- Límite inferior:  $X=8.7$
- Límite superior: 1000 (cualquier valor alto)
- $\mu = 5.28$
- $\sigma_{\bar{x}} = 0.7067$

$$DA(8.7, 1000, 5.28, 0.7067) \approx 6.511 \times 10^{-7}$$

Una población de fuentes de energía para una computadora personal tiene un voltaje de salida que se distribuye normalmente con media 9 V y desviación estándar de 0.58. Se selecciona una muestra aleatoria de 57 fuentes de energía. ¿Cuál es la distribución de  $\bar{X}$ ?

- a. Ninguna
- b. Falta información
- c.  $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.0101754)$
- d.  $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.58)$
- e.  $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.0768229)$

**Respuesta:**

Obtener el error estándar  $\sigma_{\bar{X}}$ :

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{0.58}{\sqrt{57}} \approx 0.0768$$

**Marcar e.**

**Sea  $\bar{X}$  una v.a. tal que  $X \sim \chi^2(\nu = 14)$ . Calcular la probabilidad que X se encuentren entre 6 y 13 (puede usar la aproximación normal)**

- a. Falta información
- b. 0.4734764
- c. 0.4899288
- d. Ninguna
- e. 0.0335085

**Respuesta:**

Se pide  $P(6 < X < 13)$

Usar la tabla chi-cuadrado para encontrar:

- $F(6) \approx 1 - 0.95 = 0.05$
- $F(13) \approx 1 - 0.5 = 0.5$

Calcular la probabilidad:

$$P(6 < X < 13) = F(13) - F(6) = 0.5 - 0.005 = 0.45$$

En la tabla chi cuadrado, hay que buscar los valores que más se aproximen al valor deseado (en este caso, 6 y 13) en la fila de grados de libertad (14) y fijarse en el valor de la cabecera de la columna, después sacar su complemento

**Marcar d.**

**Suponga que se toman dos muestras aleatorias independientes de tamaño  $n_1$  y  $n_2$  de dos poblaciones normales con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , respectivamente. Si  $\bar{X}_1$  y  $\bar{X}_2$  son las medias de muestra, encuentre la distribución de muestreo de la estadística:**

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$$

- a.  $N(0, 1)$
- b.  $N(\mu_1 + \mu_2, 1)$
- c. Falta información
- d.  $N(0, \sigma_1 + \sigma_2)$
- e. Ninguna o la información dada es incorrecta

**Respuesta:**

Siempre que las poblaciones sean normales, las muestras sean independientes y las varianzas sean conocidas, entonces la expresión siempre sigue una distribución normal estándar

$$N(0, 1)$$

**Marcar a.**

**Si:**

$$f(x, y) = x + y \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

**Obtenga  $E[X]$**

- a.  $\frac{1}{3}$
- b. Ninguna o la información dada es incorrecta
- c.  $\frac{7}{12}$
- d. Falta información
- e.  $\frac{5}{12}$

**Respuesta:**

Se sabe que la marginal de  $f(x, y)$  es:

$$f_X(x) = x + \frac{1}{2}$$

Calcular la esperanza  $E[X]$  integrando el producto de  $x$  por la marginal:

$$E[X] = \int_0^1 x \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

**Marcar la c.**

---

*Caso alternativo:*

**Obtenga  $E[X^2]$**

**Respuesta:**

Se sabe que la marginal de  $f(x, y)$  es:

$$f_X(x) = x + \frac{1}{2}$$

Calcular la esperanza  $E[X^2]$  integrando el producto de  $x^2$  por la marginal:

$$E[X] = \int_0^1 x^2 \left( x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

**Marcar la e.**

---

*Caso alternativo:*

**Obtenga  $E[XY]$**

**Respuesta:**

$$E[XY] = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 xy(x + y) dy dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

**Marcar la a.**

**La distribución de alturas de cierta raza de perros terrier tiene una media de 70.43 centímetros y una desviación estándar de 13.81 centímetros; en tanto que la distribución de alturas de cierta raza de poodles tiene una media de 41.28 centímetros con una desviación estándar de 10.1 centímetros. Calcule la probabilidad de que la media muestral de una muestra aleatoria de alturas de 67 terriers exceda la media muestral para una muestra aleatoria de alturas de 42 poodles a lo sumo 29.55 centímetros.**

- a. Ninguna
- b. 0.5691281
- c. 0.4308719
- d. 1.1382563
- e. Información insuficiente

**Respuesta:**

Obtener el error estándar  $\sigma_{\bar{x}}$ :

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{13.81^2}{67} + \frac{10.1^2}{42}} \approx 2.2970$$

Obtener la diferencia de la media  $\mu$ :

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 70.43 - 41.28 = 29.15$$

Obtener el Z-score:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{29.55 - 29.15}{2.2970} \approx 0.1742$$

Calcular  $P(Z > 0.1742)$  buscando en la tabla Z (en el área de la derecha) 0.1742:

$$P(Z > 0.1742) \approx 0.433 \rightarrow 1 - 0.433 = 0.567$$

**Marcar b.**

En una calculadora de DA normal (probabilidad de distribución acumulada normal), se pueden ingresar los parámetros:

- Límite inferior: -1000 (cualquier valor bajo)
- Límite superior: X= 29.55
- $\mu = 29.15$
- $\sigma_{\bar{x}} = 2.2970$

$$DA(-1000, 29.55, 29.15, 2.2970) \approx 0.569122$$

**Identifique las sentencias correctas**

- a. El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa
- b. La varianza puede ser negativa
- c. La mediana siempre es mayor a la moda
- d. La media aritmética es un estadístico de tendencia central
- e. El coeficiente de variación es una medida de dispersión absoluta

**Respuesta:**

La media aritmética es un estadístico de tendencia central.

El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa.

**Marcar a. y c.**

**La probabilidad de 3 jugadores de que conviertan un penal son respectivamente 0.18, 0.58 y 0.38. Si cada uno cobra una unica vez, ¿Cuál es la probabilidad que solo uno de ellos convierta?**

- a. 0.58
- b. 0.18
- c. 0.2233659
- d. 0.472616
- e. 0.38

**Respuesta:**

Multiplicar las probabilidades de que cada uno anote y los otros fallen:

- El jugador 1 anota:

$$(0.18)(1 - 0.58)(1 - 0.38) = 0.046872$$

- El jugador 2 anota:

$$(1 - 0.18)(0.58)(1 - 0.38) = 0.294872$$

- El jugador 3 anota:

$$(1 - 0.18)(1 - 0.58)(0.38) = 0.130872$$

Sumar los resultados:

$$0.046872 + 0.294872 + 0.130872 = 0.472616$$

**Marcar d.**



**En una carrera de la UMSA los estudiantes se dividen en 3 grupos; los académicos (11%), los políticos (45%) y el resto (44%). El próximo año se realiza una elección para la dirección de carrera y se obtuvo mediante una encuesta que para el candidato X el 37% de los académicos lo apoyan, el 7% de los políticos y el 56% del resto de los estudiantes. Según la encuesta, que probabilidad de apoyo se espera que tenga el candidato X**

- a. Falta información
- b. Ninguno
- c. 0.101506
- d. 0.3186
- e. 0.6372

**Respuesta:**

Multiplicar los porcentajes de cada grupo que lo apoya:

- Académicos:

$$0.11 \times 0.37 = 0.0407$$

- Políticos:

$$0.45 \times 0.07 = 0.0315$$

- Resto:

$$0.44 \times 0.56 = 0.2464$$

Sumar todos los resultados:

$$0.0407 + 0.0315 + 0.2464 = 0.3186$$

**Marcar d.**

**Sea  $a, b$  constantes y  $X$  una variable aleatoria. Identifique la veracidad de las siguientes propiedades:**

- a.  $P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\text{Var}[X]}{k}$
- b.  $E[a] = 0$ , con  $a = 0$
- c.  $E[a^2 X + b] = aE[X] + b$
- d.  $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- e.  $\text{Var}[aX - b] = a^2 \text{Var}[X]$

**Respuesta:**

Por propiedades:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\text{Var}[aX - b] = a^2 \text{Var}[X]$$

Si  $a = 0$ , entonces  $E[a] = 0$

En desigualdades, el denominador debe ser  $k^2$ , no solo  $k$ .

Sobre la esperanza,  $E[a^2 X] = a^2 E[X]$ , no  $aE[X]$

**Marcar b. d. y e.**

**De la siguiente serie de números: 11, 10, 12, 14, 9, 10. Determine el coeficiente de asimetría de Fisher.**

- a. 11
- b. 1.0481569
- c. 0.2746582
- d. 0.5240784
- e. 1.7888544

**Respuesta:**

Encontrar la media de los números:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{66}{6} = 11$$

Calcular las desviaciones y sumar al cubo y al cuadrado:

- $11 - 11 = 0$
- $10 - 11 = -1$
- $12 - 11 = 1$
- $14 - 11 = 3$
- $9 - 11 = -2$
- $10 - 11 = -1$

$$\text{Suma de cubos} = 0^3 - 1^3 + 1^3 + 3^3 - 2^3 - 1^3 = 18$$

$$\text{Suma de cuadrados} = 0^2 - 1^2 + 1^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2 = 16$$

Calcular el cubo de la desviación estándar ( $s^3$ ):

$$s^3 \approx 1.78885^3 \approx 5.72429$$

Aplicar la fórmula del coeficiente de Fisher:

$$\text{Coeficiente de Fisher} = \frac{\text{Suma de cubos}}{n \cdot s^3} = \frac{18}{6 \cdot 5.72429} \approx 0.524082$$

**Marcar d.**

**Juan y Maria juegan el siguiente juego. Juan arroja dos dados legales y Maria le paga k bolivianos, donde k es el producto de los dos números que muestran los dados. ¿Cuánto debe pagar Juan a Maria por cada juego para que este sea parejo?**

- a. 15
- b. 7
- c. 6
- d. Ninguno
- e. 12.25

**Respuesta:**

Sumar la esperanza de lanzar un dado:

$$E[X] = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}$$

Como son dos dados, multiplicar la esperanza por dos:

$$\frac{7}{2} \times 2 = \frac{14}{2} = 7$$

**Marcar b.**

**Un especialista en adquisiciones ha comprado 27 resistores al vendedor 1 y 44 al vendedor 2, si las resistencias de los vendedores se distribuyen como normales e independientes con  $\mu_1 = 94.45$  y  $\mu_2 = 91.1$  y  $\sigma_1 = 2.37$  y  $\sigma_2 = 1.42$ . Encuentre el error estándar de  $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ .**

- a. Falta información
- b. 9.6685826
- c. Ninguna
- d. 0.3464831
- e. 0.5038458

**Debe responder de forma correcta todas las sentencias para que la pregunta sea considerada correcta. Determine la veracidad de las siguientes sentencias:**

- a. Para el caso continuo  $\int_{\mathbb{R}^x} f(x, y) dx = f(y)$
- b.  $f(x, y) = f(x) \times f(y)$  siempre
- c. Para el caso discreto si la variable  $X$  toma 3 valores y la variable  $Y$  toma 10 valores, entonces su distribución conjunta tiene 31 combinaciones
- d. Si dos variables aleatorias  $X, Y$  son independientes, entonces  $\text{cov}(x, y) = 0$
- e. Para el caso continuo  $\int_{\mathbb{R}^x} f(x, y) dx = f(x)$