Para los números 12, 17, 15, 10, 10, 10, 8, 10. Marque en caso de que la afirmación sea verdadera

- a) La media es 4.5
- b) La mediana es 10
- c) La media es 11.5
- d) La desviación estándar es 0.2629318
- e) La desviación estándar es 3.0237158

Respuesta:

La media $\overline{x}$ es la suma de todos los números x_i dividida entre la cantidad de números n.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{92}{8} = 11.5$$

La mediana $\tilde{x}$ es el valor central cuando los números están ordenados.

$$8, 10, 10, 10, 10, 12, 15, 17, \text{ valor central: } \tilde{x} = 10$$

La desviación estándar de una muestra s se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{64}{7}} \approx 3.0237158$$

Marcar: b), c) y e)

Se tienen los salarios de un grupo de 20 trabajadores para el tiempo t, distribuidos como:

Grupo 1: n= 10

1501	1642	2502
1896	1927	2768
2320	1609	2427
2837		

Grupo 2: n = 6

5329	5233	5135
4432	4561	3310

Grupo 3: n= 4

8093	8019	7636	8731

Si se decide hacer un incremento para el $t+1$ de 400Bs a todos y además incrementar al salario t en 22.39 %. ¿Cuál es el promedio esperado para $t+1$ de estos 20 trabajadores?

- a) 4495.4
- b) 5012.36006
- c) 4095.4
- d) 5412.36006
- e) 20

Respuesta:

Se saca la media $\overline{x}$ de todos los salarios.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4095.4$$

Se incrementa la media en 22.39%.

$$\overline{x} \cdot 1.2239 = 4095.4 \cdot 1.2239 = 5012.36006$$

Se incrementan los 400 Bs.

$$5012.36006 + 400 = 5412.36006$$

Marcar d)

Una urna A contiene 4 bolas rojas y 3 negras, mientras que en la urna B contiene 4 bolas rojas y 6 negras. Si una bola es extraida aleatoriamente de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean del mismo color?

- a) 12/70
- b) 28/70
- c) 4/10
- d) 1/2
- e) 1/5

Respuesta:

Calcular total de bolas en la urna A: $4+3=7$.
Calcular total de bolas en la urna B: $4+6=10$.
Calcular la probabilidad de que ambas sean rojas:

$$\frac{4}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{70}$$

Calcular la probabilidad de que ambas sean negras:

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{10} = \frac{18}{70}$$

Sumas las probabilidades: $\frac{16}{70} + \frac{18}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$
El inciso que más se acerca a la respuesta es b) $\frac{28}{70} \approx \frac{34}{70}$
Marcar b)

Un número es seleccionado al azar entre los numeros 2 al 20. Sean los eventos:

- A: El número es par
- B: El número es primo
- C: El número elegido es múltiplo de 5

Marque en caso de que sean verdaderas las siguientes afirmaciones:

- a. $A \cup B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20$
- b. $(A \cup B) \cap C^c = 5, 10$
- c. $A \cap B = 2$
- d. $A^c \cap B^c = \emptyset$
- e. $A^c \cap B = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

Respuesta:

Anotar explícitamente los conjuntos:

- Números del 2 al 20:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- A (Pares):

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20

- B (Primos):

2	3		5		7				11		13				17		19	

- C (Múltiplos de 5):

			5					10					15					20

Verificar acada afirmación:

- $A \cup B$:

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20

$$\cup$$

2	3		5		7				11		13				17		19	

$$=$$

2	3	4	5	6	7	8		10	11	12	13	14		16	17	18	19	20

Así que a. está mal, le falta el 9, el 15 y le sobra el 1.

- $(A \cup B) \cap C^c$

2	3	4	5	6	7	8		10	11	12	13	14		16	17	18	19	20

$\cap$

2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14		16	17	18	19	

$=$

2	3	4		6	7	8			11	12	13	14		16	17	18	19	

Así que b. está mal

- $A \cap B = 2$

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20

$\cap$

2	3		5		7				11		13				17		19	

$=$

2																		

Así que c. está bien

- $A^c \cap B^c$

	3		5		7		9		11		13		15		17		19	

$\cap$

		4		6		8	9	10		12		14	15	16		18		20

$=$

							9						15					

Así que d. está mal

- $A^c \cap B$

	3		5		7		9		11		13		15		17		19	

$\cap$

2	3		5		7				11		13				17		19	

$=$

	3		5		7				11		13				17		19	

Así que e. está bien.
Marcar c. y e.

Sea X una v.a. con función de distribución acumulada:

$$F(x) = \frac{x}{x+1}; x \geq 0$$

La función de densidad es:

- a. $\frac{1}{(x+1)^2}$
- b. $\frac{x}{(x+1)^2}$
- c. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$
- d. $\frac{x}{(x-1)^2}$
- e. $\frac{1}{(x-1)^2}$

Respuesta:

Derivar $F(x)$ con la regla del cociente:

$$f(x) = \frac{\text{derivada del numerador} \times \text{denominador} - \text{numerador} \times \text{derivada del denominador}}{(\text{denominador})^2}$$

Numerador: $x \quad \rightarrow \frac{d}{\mathrm{d}x}x \quad = 1$

Denominador: $x+1 \quad \rightarrow \frac{d}{\mathrm{d}x}x+1 \quad = 1$

$$f(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Marcar a.

Sea X una v.a. con función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = \frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-t}\right)$$

La varianza de X esta definida como:

- a. 1/4
- b. 1/2
- c. 2/4
- d. 3/4
- e. 6/7

Respuesta:

Calcular la esperanza $E[X]$ sacando la primera derivada y evaluando en $t = 0$:

$$E[X] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-t}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(3e^t - e^{-t}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\left(3e^0 - e^{-0}\right) = \frac{1}{4}(3-1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Calcular la esperanza del cuadrado de X $E\left[X^2\right]$ sacando la segunda derivada y evaluando en $t = 0$:

$$E\left[X^2\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}\left(3e^t - e^{-t}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(3e^t + e^{-t}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\left(3e^0 + e^0\right) = \frac{1}{4}(3+1) = \frac{4}{4} = 1$$

Calcular la varianza restando el segundo resultado (1) por el primer resultado $\left(\frac{1}{2}\right)$ al cuadrado:

$$\mathrm{Var}(x) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 =$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Marcar d.

Sea (X,Y) va continuas definidas ambas para los reales positivos, con función de densidad:

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(x+y)xye^{-x-y}$$

La marginal $f(x)$ es:

- a. Ninguna.
- b. $f_X(x)=\frac{x^2+2x}{4}e^{x}$
- c. $f_X(x)=\frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$
- d. Falta información.
- e. $f_X(x)=\frac{x^2+x}{4}e^{-x}$

Respuesta:

Integrar desde 0 hasta ∞ con dy:

$$f_X(x)=\int_0^\infty \frac{1}{4}(x+y)xye^{-x-y}dy=\frac{1}{4}xe^{-x}\int_0^\infty (x+y)ye^{-y}dy$$

Dividir la integral en dos partes:

$$\int_0^\infty (x+y)ye^{-y}dy=\int_0^\infty \left(xye^{-y}+y^2e^{-y}\right)dy=x\int_0^\infty (ye^{-y})dy+\int_0^\infty \left(y^2e^{-y}\right)dy$$

Según las integrales gamma:

$$\int_0^\infty y^ke^{-y}dy=k!$$

Entonces:

$$\int_0^\infty (x+y)ye^{-y}dy=x(1!)+(2!)=x+2$$

Multiplicando por el factor externo:

$$f_X(x)=\frac{1}{4}xe^{-x}(x+2)=\frac{x(x+2)}{4}e^{-x}=\frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$$

Marcar b.

Para la siguiente tabla de probabilidad conjunta, calcule la esperanza de X

x	y	Probabilidad
1	1	0.19
2	1	0.23
3	1	0.24
1	2	0.05
2	2	0.06
3	2	0.04
1	3	0.03
2	3	0.02
3	3	0.02
1	4	0.03
2	4	0.05
3	4	0.04

- a. 1.65
- b. 1
- c. 2.04
- d. Falta información
- e. Ninguna o la información dada es incorrecta

Respuesta:

Sumar las probabilidades para cada valor de x:

- Para $x = 1 : 0.19 + 0.05 + 0.03 + 0.03 = 0.30$
- Para $x = 2 : 0.23 + 0.06 + 0.02 + 0.05 = 0.36$
- Para $x = 3 : 0.24 + 0.04 + 0.02 + 0.04 = 0.34$

Multiplicar cada suma con el valor de x correspondiente y hacer la suma de productos:

$$E[X] = (1 \times 0.30) + (2 \times 0.36) + (3 \times 0.34) = 0.30 + 0.72 + 1.02 = 2.04$$

Marcar c.

Sean dos variables aleatorias X, Y, con $E[X] = 7$, $E[Y] = 6$, $E[X, Y] = 45$, la covarianza es:

- a. 87
- b. Falta información
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. 42
- e. 3

Respuesta:
La fórmula de la covarianza es:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 45 - 7 \cdot 6 = 45 - 42 = 3$$

Marcar e.

Si:

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(6-x-y) \quad 0\le x\le 2 \quad 2\le y\le 6$$

Encuentre la densidad $f(x)$.

- a. Falta información
- b. $f(x)=6$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. $f(x)=\frac{x^2}{3}$
- e. $f(x)=\frac{x}{4}+5$

Respuesta:
Para que la función conjunta sea una densidad de probabilidad válida, no debe tomar valores negativos, sin embargo:
Si $(x,y)=(2,6)$:

$$f(x,y)=\frac{1}{8}(6-x-y)\rightarrow f(2,6)=\frac{1}{8}(6-2-6)=\frac{1}{8}(-2)=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

Como la función toma valores negativos, entonces no es una densidad de probabilidad.

Marcar c.

Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Encuentre la correlación entre X y X

- a. $\rho = -1$
- b. $\rho = 0$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. Falta información
- e. $\rho = 1$

Respuesta:

La fórmula de la correlación es:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Como la correlación es entre X y X:

$$\rho_{X,X} = \frac{\mathrm{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\mathrm{Var}(x)}{(\sigma_X)^2}$$

Se sabe que:

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- $\sigma_X \cdot \sigma_X = \mathrm{Var}(X)$

Entonces:

$$\rho_{X,X} = \frac{\mathrm{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\mathrm{Var}(x)}{\mathrm{Var}(x)} = 1$$

Marcar e.

Sea X una va tal que $X \sim U(a, b)$, Se toma una muestra aleatoria de tamaño n, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

- a. $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- b. $f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{b-a}$
- c. Ninguna
- d. $f(x) = \frac{1}{a-b}$
- e. $f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}$

Respuesta:

La función de densidad conjunta es el producto de las densidades individuales, así que cada densidad se multiplicará n veces (el tamañi de la muestra aleatoria), por lo tanto la respuesta es la única que está elevada a la n

$$\frac{1}{(b-a)^n} = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n$$

Marcar e.

Se toma una muestra aleatoria de tamaño 7 de una población finita de tamaño 79, Calcular para el estimador de la media muestral, su varianza. Los datos son: $0, -6, 51, 46, -6, 14, 1$

- a. Ninguna
- b. 14.2857143
- c. Falta información
- d. 592.9047619
- e. 77.1955567

Respuesta:

Obtener la suma de los datos:

$$\sum x_i = 0 + (-6) + 51 + 46 + (-6) + 14 + 1 = 100$$

Obtener la suma de cuadrados:

$$\sum x_i^2 = 0^2 + (-6)^2 + 51^2 + 46^2 + (-6)^2 + 14^2 + 1^2$$
$$= 0 + 36 + 2601 + 2116 + 36 + 196 + 1 = 4986$$

Aplicar la formula de la varianza muestral corregida s^2:

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n-1} =$$
$$\frac{100 - \frac{4986^2}{7}}{6} = 592.9047619$$

Obtener la varianza:

$$\left(\frac{s^2}{n}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N}\right) =$$
$$\frac{592.9}{7} \cdot \left(\frac{79-7}{79}\right) = 77.1949$$

Marcar e.

La cantidad de tiempo que le toma al cajero de un banco con servicio en el automóvil atender a un cliente es una variable aleatoria con una media $\mu = 5.28$ minutos y una desviación estándar $\sigma = 5.38$ minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 58 clientes, calcule la probabilidad de que el tiempo medio que el cliente pasa en la ventanilla del cajero sea más de 8.7 minutos;

- a. Información insuficiente
- b. 6.4511315×10^{-7}
- c. Ninguna
- d. 0
- e. 0.9999994

Una población de fuentes de energía para una computadora personal tiene un voltaje de salida que se distribuye normalmente con media 9 V y desviación estándar de 0.58. Se selecciona una muestra aleatoria de 57 fuentes de energía. ¿Cuál es la distribución de $\overline{X}$?

- a. Ninguna
- b. Falta información
- c. $\overline{X} \sim N(9, \sigma_{\overline{X}} = 0.0101754)$
- d. $\overline{X} \sim N(9, \sigma_{\overline{X}} = 0.58)$
- e. $\overline{X} \sim N(9, \sigma_{\overline{X}} = 0.0768229)$

Sea $\overline{X}$ una v.a. tal que $X \sim \chi^2(\upsilon = 14)$. Calcular la probabilidad que X se encuentren entre 6 y 13 (puede usar la aproximación normal)

- a. Falta información
- b. 0.4734764
- c. 0.4899288
- d. Ninguna
- e. 0.0335085