

1. Para los números 12, 17, 15, 10, 10, 10, 8, 10. Marque en caso de que la afirmación sea verdadera

- a. La media es 4.5
- b. La mediana es 10
- c. La media es 11.5
- d. La desviación estándar es 0.2629318
- e. La desviación estándar es 3.0237158

Respuesta:

La media \bar{x} es la suma de todos los números x_i dividida entre la cantidad de números n .

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{92}{8} = 11.5$$

La mediana \tilde{x} es el valor central cuando los números están ordenados.

8, 10, 10, 10, 10, 12, 15, 17, valor central: $\tilde{x} = 10$

La desviación estándar de una muestra s se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{64}{7}} \approx 3.0237158$$

Marcar: b. c. y e.

2. Se tienen los salarios de un grupo de 20 trabajadores para el tiempo t , distribuidos como:

Grupo 1: $n = 10$

1501	1642	2502
1896	1927	2768
2320	1609	2427
2837		

Grupo 2: $n = 6$

5329	5233	5135
4432	4561	3310

Grupo 3: $n = 4$

8093	8019	7636	8731
------	------	------	------

Si se decide hacer un incremento para el $t + 1$ de 400Bs a todos y además incrementar al salario t en 22.39 %. ¿Cuál es el promedio esperado para $t + 1$ de estos 20 trabajadores?

- a. 4495.4
- b. 5012.36006
- c. 4095.4
- d. 5412.36006
- e. 20

Respuesta:

Se saca la media \bar{x} de todos los salarios.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 4095.4$$

Se incrementa la media en 22.39%.

$$\bar{x} \cdot 1.2239 = 4095.4 \cdot 1.2239 = 5012.36006$$

Se incrementan los 400 Bs.

$$5012.36006 + 400 = 5412.36006$$

Marcar d.

Caso alternativo:

En una empresa donde los salarios tienen un promedio de 3434 Bs. al mes y una desviación estándar 584, el sindicato solicita un incremento del 50% al salario junto con un bono mensual de 300 Bs.

El director acepta parcialmente la petición rebajando un 27% la propuesta total del sindicato. A partir del nuevo salario, la media y desviación estándar son:

- a. $\bar{y} = 3979.23, S_y = 639.48$
- b. $\bar{y} = 4775.076, S_y = 0$
- c. $\bar{y} = 1989.615, S_y = 319.74$
- d. $\bar{y} = 3979.23, S_y = 767.376$
- e. $\bar{y} = 3581.307, S_y = 639.48$

Respuesta:

Se incrementa la media (promedio) en 50%:

$$\bar{y}_i \cdot 1.5 = 3434 \cdot 1.5 = 5151$$

Se incrementan los 300 Bs:

$$5151 + 300 = 5451$$

Se reduce un 27%:

$$\bar{y} = 5451 \cdot (1 - 0.27) = 3979.23$$

Calcular la desviación multiplicando la desviación estándar inicial por los porcentajes:

$$S_y = (584)(1.5)(1 - 0.27) = 639.48$$

Marcar a.

3. Una urna A contiene 4 bolas rojas y 3 negras, mientras que en la urna B contiene 4 bolas rojas y 6 negras. Si una bola es extraída aleatoriamente de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que las bolas sean del mismo color?

- a. $12/70$
- b. $28/70$
- c. $4/10$
- d. $1/2$
- e. $1/5$

Respuesta:

Calcular total de bolas en la urna A: $4 + 3 = 7$.

Calcular total de bolas en la urna B: $4 + 6 = 10$.

Calcular la probabilidad de que ambas sean rojas:

$$\frac{4}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{70}$$

Calcular la probabilidad de que ambas sean negras:

$$\frac{3}{7} \times \frac{6}{10} = \frac{18}{70}$$

Sumas las probabilidades: $\frac{16}{70} + \frac{18}{70} = \frac{34}{70} = \frac{17}{35}$

El inciso que más se acerca a la respuesta es b) $\frac{28}{70} \approx \frac{34}{70}$

Marcar b.

4. Un número es seleccionado al azar entre los números 2 al 20. Sean los eventos:

- A: El número es par
- B: El número es primo
- C: El número elegido es múltiplo de 5

Marque en caso de que sean verdaderas las siguientes afirmaciones:

- a. $A \cup B = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20$
- b. $(A \cup B) \cap C^c = 5, 10$
- c. $A \cap B = 2$
- d. $A^c \cap B^c = \emptyset$
- e. $A^c \cap B = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

Respuesta:

Anotar explícitamente los conjuntos:

- Números del 2 al 20:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- A (Pares):

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20
---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----

- B (Primos):

2	3		5		7				11		13				17		19	
---	---	--	---	--	---	--	--	--	----	--	----	--	--	--	----	--	----	--

- C (Múltiplos de 5):

			5					10					15					20
--	--	--	---	--	--	--	--	----	--	--	--	--	----	--	--	--	--	----

Verificar cada afirmación:

- $A \cup B$:

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20
---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----

∪

2	3		5		7				11		13				17		19	
---	---	--	---	--	---	--	--	--	----	--	----	--	--	--	----	--	----	--

=

2	3	4	5	6	7	8		10	11	12	13	14		16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	--	----	----	----	----	----	--	----	----	----	----	----

Así que a. está mal, le falta el 9, el 15 y le sobra el 1.

- $(A \cup B) \cap C^c$

2	3	4	5	6	7	8		10	11	12	13	14		16	17	18	19	20
---	---	---	---	---	---	---	--	----	----	----	----	----	--	----	----	----	----	----

\cap

2	3	4		6	7	8	9		11	12	13	14		16	17	18	19	
---	---	---	--	---	---	---	---	--	----	----	----	----	--	----	----	----	----	--

=

2	3	4		6	7	8			11	12	13	14		16	17	18	19	
---	---	---	--	---	---	---	--	--	----	----	----	----	--	----	----	----	----	--

Así que b. está mal

- $A \cap B = 2$

2		4		6		8		10		12		14		16		18		20
---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----

\cap

2	3		5		7				11		13				17		19	
---	---	--	---	--	---	--	--	--	----	--	----	--	--	--	----	--	----	--

=

2																		
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Así que c. está bien

- $A^c \cap B^c$

	3		5		7		9		11		13		15		17		19	
--	---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

\cap

		4		6		8	9	10		12		14	15	16		18		20
--	--	---	--	---	--	---	---	----	--	----	--	----	----	----	--	----	--	----

=

							9						15					
--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	----	--	--	--	--	--

Así que d. está mal

- $A^c \cap B$

	3		5		7		9		11		13		15		17		19	
--	---	--	---	--	---	--	---	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

\cap

2	3		5		7				11		13				17		19	
---	---	--	---	--	---	--	--	--	----	--	----	--	--	--	----	--	----	--

=

	3		5		7				11		13				17		19	
--	---	--	---	--	---	--	--	--	----	--	----	--	--	--	----	--	----	--

Así que e. está bien.

Marcar c. y e.

5. Sea X una v.a. con función de distribución acumulada:

$$F(x) = \frac{x}{x+1}; \quad x \geq 0$$

La función de densidad es:

- a. $\frac{1}{(x+1)^2}$
- b. $\frac{x}{(x+1)^2}$
- c. $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$
- d. $\frac{x}{(x-1)^2}$
- e. $\frac{1}{(x-1)^2}$

Respuesta:

Derivar $F(x)$ con la regla del cociente:

$$f(x) = \frac{\text{derivada del numerador} \times \text{denominador} - \text{numerador} \times \text{derivada del denominador}}{(\text{denominador})^2}$$

$$\text{Numerador: } x \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} x = 1$$

$$\text{Denominador: } x + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} x + 1 = 1$$

$$f(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Marcar a.

6. Sea X una v.a. con función generatriz de momentos:

$$M_x(t) = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t})$$

La varianza de X esta definida como:

- a. 1/4
- b. 1/2
- c. 2/4
- d. 3/4
- e. 6/7

Respuesta:

Calcular la esperanza $E[X]$ sacando la primera derivada y evaluando en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) \right] = \frac{1}{4}(3e^t - e^{-t}) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}(3e^0 - e^{-0}) = \frac{1}{4}(3 - 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calcular la esperanza del cuadrado de X $E[X^2]$ sacando la segunda derivada y evaluando en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4}(3e^t - e^{-t}) \right] = \frac{1}{4}(3e^t + e^{-t}) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}(3e^0 + e^0) = \frac{1}{4}(3 + 1) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Calcular la varianza restando el segundo resultado (1) por el primer resultado $\left(\frac{1}{2}\right)$ al cuadrado:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E[X^2] - (E[X])^2 = \\ &1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Marcar d.

7. Sea (X,Y) v.a. continuas definidas ambas para los reales positivos, con función de densidad:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}$$

La marginal $f_X(x)$ es:

- a. Ninguna.
- b. $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$
- c. $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$
- d. Falta información.
- e. $f_X(x) = \frac{x^2+x}{4}e^{-x}$

Respuesta:

Integrar desde 0 hasta ∞ con dy :

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}dy = \frac{1}{4}xe^{-x} \int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy$$

Dividir la integral en dos partes:

$$\int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy = \int_0^{\infty} (xye^{-y} + y^2e^{-y})dy = x \int_0^{\infty} (ye^{-y})dy + \int_0^{\infty} (y^2e^{-y})dy$$

Según las integrales gamma:

$$\int_0^{\infty} y^k e^{-y} dy = k!$$

Entonces:

$$\int_0^{\infty} (x + y)ye^{-y}dy = x(1!) + (2!) = x + 2$$

Multiplicando por el factor externo:

$$f_X(x) = \frac{1}{4}xe^{-x}(x + 2) = \frac{x(x + 2)}{4}e^{-x} = \frac{x^2 + 2x}{4}e^{-x}$$

Marcar c.

8. Para la siguiente tabla de probabilidad conjunta, calcule la esperanza de X

x	y	Probabilidad
1	1	0.19
2	1	0.23
3	1	0.24
1	2	0.05
2	2	0.06
3	2	0.04
1	3	0.03
2	3	0.02
3	3	0.02
1	4	0.03
2	4	0.05
3	4	0.04

- a. 1.65
- b. 1
- c. 2.04
- d. Falta información
- e. Ninguna o la información dada es incorrecta

Respuesta:

Sumar las probabilidades para cada valor de x:

- Para $x = 1$: $0.19 + 0.05 + 0.03 + 0.03 = 0.30$
- Para $x = 2$: $0.23 + 0.06 + 0.02 + 0.05 = 0.36$
- Para $x = 3$: $0.24 + 0.04 + 0.02 + 0.04 = 0.34$

Multiplicar cada suma con el valor de x correspondiente y hacer la suma de productos:

$$E[X] = (1 \times 0.30) + (2 \times 0.36) + (3 \times 0.34) = 0.30 + 0.72 + 1.02 = 2.04$$

Marcar c.

9. Sean dos variables aleatorias X, Y , con $E[X] = 7$, $E[Y] = 6$, $E[XY] = 45$, la covarianza es:

- a. 87
- b. Falta información
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. 42
- e. 3

Respuesta:

La fórmula de la covarianza es:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 45 - 7 \cdot 6 = 45 - 42 = 3$$

Marcar e.

Caso alternativo:

Sean dos variables aleatorias X, Y independientes, con $E[X] = 3$, $E[Y] = 3$, $E[XY] = 14$, la covarianza es:

- a. Falta información
- b. Ninguna o la información dada es incorrecta
- c. 23
- d. -5
- e. 9

Respuesta:

Si las variables aleatorias son independientes, entonces la covarianza es siempre 0.

Marcar b.

10. Si:

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) \quad 0 \leq x \leq 2 \quad 2 \leq y \leq 6$$

Encuentre la densidad $f(x)$.

- a. Falta información
- b. $f(x) = 6$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. $f(x) = \frac{x^2}{3}$
- e. $f(x) = \frac{x}{4} + 5$

Respuesta:

Para que la función conjunta sea una densidad de probabilidad válida, no debe tomar valores negativos, sin embargo:

Si $(x, y) = (2, 6)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y) \rightarrow f(2, 6) = \frac{1}{8}(6 - 2 - 6) = \frac{1}{8}(-2) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Como la función toma valores negativos, entonces no es una densidad de probabilidad.

Marcar c.

Caso alterno:

Si:

$$f(x, y) = \frac{1}{8}(6 - x - y); \quad 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4$$

Obtenga $f(x/y)$

- a. $f(x/y) = \frac{6-x-y}{10-2y}$
- b. Falta información
- c. $f(x/y) = \frac{6-x-y}{6-2x}$
- d. $f(x/y) = \frac{3}{4} - \frac{x}{4}$
- e. $f(x/y) = \frac{5}{4} - \frac{y}{4}$

Respuesta:

Calcular la marginal de y ($f_Y(y)$) integrando respecto a x de 0 a 2:

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{1}{8}(6 - x - y) dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{8} \left[6x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{8}(12 - 2 - 2y) = \frac{1}{8}(10 - 2y) = \frac{1}{4}(5 - y)$$

Calcular $f(x/y)$:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{4}(5 - y)} = \frac{6 - x - y}{2(5 - y)} = \frac{6 - x - y}{10 - 2y}$$

Marcar a.

Caso alternativo:

Obtenga $f(y/x)$

Respuesta:

Calcular la marginal de x ($f_X(x)$) integrando respecto a y de 2 a 4:

$$f_X(x) = \int_2^4 \frac{1}{8}(6 - x - y) dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{8} \left[6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4} = \frac{1}{8} (24 - 4x - 8 - 12 + 2x + 2) = \frac{1}{8} (6 - 2x) = \frac{1}{4} (3 - x)$$

Calcular $f(y/x)$:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{8}(6 - x - y)}{\frac{1}{4}(3 - x)} = \frac{6 - x - y}{2(3 - x)} = \frac{6 - x - y}{6 - 2x}$$

Marcar c.

11. Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Encuentre la correlación entre X y X

- a. $\rho = -1$
- b. $\rho = 0$
- c. Ninguna o la información dada es incorrecta
- d. Falta información
- e. $\rho = 1$

Respuesta:

La fórmula de la correlación es:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Como la correlación es entre X y X:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\text{Var}(x)}{(\sigma_X)^2}$$

Se sabe que:

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\sigma_X \cdot \sigma_X = \text{Var}(X)$

Entonces:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{\text{Var}(x)}{\text{Var}(x)} = 1$$

Marcar e.

Caso alterno:

Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Encuentre la correlación entre X y -X

Respuesta:

Se sabe que:

- $\text{Cov}(X, -X) = -\text{Var}(X)$
- $\sigma_X \cdot \sigma_X = \text{Var}(X)$

Entonces:

$$\rho_{X,X} = \frac{\text{Cov}(X, -X)}{\sigma_X \sigma_X} = \frac{-\text{Var}(x)}{\text{Var}(x)} = -1$$

Marcar a.

12. Sea X una va tal que $X \sim U(a, b)$, Se toma una muestra aleatoria de tamaño n , encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

- a. $f(x) = \frac{1}{b-a}$
- b. $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{b-a}$
- c. Ninguna
- d. $f(x) = \frac{1}{a-b}$
- e. $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}$

Respuesta:

La función de densidad conjunta es el producto de las densidades individuales, así que cada densidad se multiplicará n veces (el tamaño de la muestra aleatoria), por lo tanto la respuesta es la única que está elevada a la n

$$\frac{1}{(b-a)^n} = \left(\frac{1}{b-a} \right)^n$$

Marcar e.

13. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 7 de una población finita de tamaño 79, Calcular para el estimador de la media muestral, su varianza. Los datos son: 0, -6, 51, 46, -6, 14, 1

- a. Ninguna
- b. 14.2857143
- c. Falta información
- d. 592.9047619
- e. 77.1955567

Respuesta:

Obtener la suma de los datos:

$$\sum x_i = 0 + (-6) + 51 + 46 + (-6) + 14 + 1 = 100$$

Obtener la suma de cuadrados:

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 0^2 + (-6)^2 + 51^2 + 46^2 + (-6)^2 + 14^2 + 1^2 \\ &= 0 + 36 + 2601 + 2116 + 36 + 196 + 1 = 4986\end{aligned}$$

Aplicar la formula de la varianza muestral corregida s^2 :

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}{n - 1} = \\ \frac{100 - \frac{4986^2}{7}}{6} &= 592.9047619\end{aligned}$$

Obtener la varianza:

$$\begin{aligned}\left(\frac{s^2}{n}\right) \cdot \left(\frac{N - n}{N}\right) &= \\ \frac{592.9}{7} \cdot \left(\frac{79 - 7}{79}\right) &= 77.1949\end{aligned}$$

Marcar e.

14. La cantidad de tiempo que le toma al cajero de un banco con servicio en el automóvil atender a un cliente es una variable aleatoria con una media $\mu = 5.28$ minutos y una desviación estándar $\sigma = 5.38$ minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 58 clientes, calcule la probabilidad de que el tiempo medio que el cliente pasa en la ventanilla del cajero sea más de 8.7 minutos;

- a. Información insuficiente
- b. 6.4511315×10^{-7}
- c. Ninguna
- d. 0
- e. 0.9999994

Respuesta:

Obtener el error estándar $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.38}{\sqrt{58}} \approx 0.7067$$

Obtener el Z-score:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{8.7 - 5.28}{0.7067} \approx 4.838d$$

Calcular $P(Z > 4.838)$ buscando en la tabla Z (en el área de la derecha) el valor 4.838 (cuando $Z > 3$, las probabilidades son cercanas a 0).

$$P(Z > 4.838) \approx 6.45 \times 10^{-7}$$

Marcar b.

En una calculadora de DA normal (probabilidad de distribución acumulada normal), se pueden ingresar los parámetros:

- Límite inferior: $X=8.7$
- Límite superior: 1000 (cualquier valor alto)
- $\mu = 5.28$
- $\sigma_{\bar{x}} = 0.7067$

$$DA(8.7, 1000, 5.28, 0.7067) \approx 6.511 \times 10^{-7}$$

15. Una población de fuentes de energía para una computadora personal tiene un voltaje de salida que se distribuye normalmente con media 9 V y desviación estándar de 0.58. Se selecciona una muestra aleatoria de 57 fuentes de energía. ¿Cuál es la distribución de \bar{X} ?

- a. Ninguna
- b. Falta información
- c. $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.0101754)$
- d. $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.58)$
- e. $\bar{X} \sim N(9, \sigma_{\bar{X}} = 0.0768229)$

Respuesta:

Obtener el error estándar $\sigma_{\bar{X}}$:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{0.58}{\sqrt{57}} \approx 0.0768$$

Marcar e.

16. Sea \bar{X} una v.a. tal que $X \sim \chi^2(\nu = 14)$. Calcular la probabilidad que X se encuentren entre 6 y 13 (puede usar la aproximación normal)

- a. Falta información
- b. 0.4734764
- c. 0.4899288
- d. Ninguna
- e. 0.0335085

Respuesta:

Se pide $P(6 < X < 13)$

Usar la tabla chi-cuadrado para encontrar:

- $F(6) \approx 1 - 0.95 = 0.05$
- $F(13) \approx 1 - 0.5 = 0.5$

Calcular la probabilidad:

$$P(6 < X < 13) = F(13) - F(6) = 0.5 - 0.005 = 0.45$$

En la tabla chi cuadrado, hay que buscar los valores que más se aproximen al valor deseado (en este caso, 6 y 13) en la fila de grados de libertad (14) y fijarse en el valor de la cabecera de la columna, después sacar su complemento

Marcar d.

17. Suponga que se toman dos muestras aleatorias independientes de tamaño n_1 y n_2 de dos poblaciones normales con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2 , respectivamente. Si \bar{X}_1 y \bar{X}_2 son las medias de muestra, encuentre la distribución de muestreo de la estadística:

$$\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$$

- a. $N(0, 1)$
- b. $N(\mu_1 + \mu_2, 1)$
- c. Falta información
- d. $N(0, \sigma_1 + \sigma_2)$
- e. Ninguna o la información dada es incorrecta

Respuesta:

Siempre que las poblaciones sean normales, las muestras sean independientes y las varianzas sean conocidas, entonces la expresión siempre sigue una distribución normal estándar

$$N(0, 1)$$

Marcar a.

18. Si:

$$f(x, y) = x + y \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

Obtenga $E[X]$

- a. $\frac{1}{3}$
- b. Ninguna o la información dada es incorrecta
- c. $\frac{7}{12}$
- d. Falta información
- e. $\frac{5}{12}$

Respuesta:

Se sabe que la marginal de $f(x, y)$ es:

$$f_X(x) = x + \frac{1}{2}$$

Calcular la esperanza $E[X]$ integrando el producto de x por la marginal:

$$E[X] = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Marcar la c.

Caso alterno:

Obtenga $E[X^2]$

Respuesta:

Se sabe que la marginal de $f(x, y)$ es:

$$f_X(x) = x + \frac{1}{2}$$

Calcular la esperanza $E[X^2]$ integrando el producto de x^2 por la marginal:

$$E[X] = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Marcar la e.

Caso alterno:

Obtenga $E[XY]$

Respuesta:

$$E[XY] = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 xy(x + y) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Marcar la a.

19. La distribución de alturas de cierta raza de perros terrier tiene una media de 70.43 centímetros y una desviación estándar de 13.81 centímetros; en tanto que la distribución de alturas de cierta raza de poodles tiene una media de 41.28 centímetros con una desviación estándar de 10.1 centímetros. Calcule la probabilidad de que la media muestral de una muestra aleatoria de alturas de 67 terriers exceda la media muestral para una muestra aleatoria de alturas de 42 poodles a lo sumo 29.55 centímetros.

- a. Ninguna
- b. 0.5691281
- c. 0.4308719
- d. 1.1382563
- e. Información insuficiente

Respuesta:

Obtener el error estándar $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{13.81^2}{67} + \frac{10.1^2}{42}} \approx 2.2970$$

Obtener la diferencia de la media μ :

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 70.43 - 41.28 = 29.15$$

Obtener el Z-score:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{29.55 - 29.15}{2.2970} \approx 0.1742$$

Calcular $P(Z > 0.1742)$ buscando en la tabla Z (en el área de la derecha) 0.1742:

$$P(Z > 0.1742) \approx 0.433 \rightarrow 1 - 0.433 = 0.567$$

Marcar b.

En una calculadora de DA normal (probabilidad de distribución acumulada normal), se pueden ingresar los parámetros:

- Límite inferior: -1000 (cualquier valor bajo)
- Límite superior: $X = 29.55$
- $\mu = 29.15$
- $\sigma_{\bar{x}} = 2.2970$

$$DA(-1000, 29.55, 29.15, 2.2970) \approx 0.569122$$

20. Identifique las sentencias correctas

- a. El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa
- b. La varianza puede ser negativa
- c. La mediana siempre es mayor a la moda
- d. La media aritmética es un estadístico de tendencia central
- e. El coeficiente de variación es una medida de dispersión absoluta

Respuesta:

La media aritmética es un estadístico de tendencia central.

El coeficiente de variación es una medida de dispersión relativa.

Marcar a. y d.

21. La probabilidad de 3 jugadores de que conviertan un penal son respectivamente 0.18, 0.58 y 0.38. Si cada uno cobra una unica vez, ¿Cuál es la probabilidad que solo uno de ellos convierta?

- a. 0.58
- b. 0.18
- c. 0.2233659
- d. 0.472616
- e. 0.38

Respuesta:

Multiplicar las probabilidades de que cada uno anote y los otros fallen:

- El jugador 1 anota:

$$(0.18)(1 - 0.58)(1 - 0.38) = 0.046872$$

- El jugador 2 anota:

$$(1 - 0.18)(0.58)(1 - 0.38) = 0.294872$$

- El jugador 3 anota:

$$(1 - 0.18)(1 - 0.58)(0.38) = 0.130872$$

Sumar los resultados:

$$0.046872 + 0.294872 + 0.130872 = 0.472616$$

Marcar d.

22. En una carrera de la UMSA los estudiantes se dividen en 3 grupos; los académicos (11%), los políticos (45%) y el resto (44%). El próximo año se realiza una elección para la dirección de carrera y se obtuvo mediante una encuesta que para el candidato X el 37% de los académicos lo apoyan, el 7% de los políticos y el 56% del resto de los estudiantes. Según la encuesta, que probabilidad de apoyo se espera que tenga el candidato X

- a. Falta información
- b. Ninguno
- c. 0.101506
- d. 0.3186
- e. 0.6372

Respuesta:

Multiplicar los porcentajes de cada grupo que lo apoya:

- Académicos:

$$0.11 \times 0.37 = 0.0407$$

- Políticos:

$$0.45 \times 0.07 = 0.0315$$

- Resto:

$$0.44 \times 0.56 = 0.2464$$

Sumar todos los resultados:

$$0.0407 + 0.0315 + 0.2464 = 0.3186$$

Marcar d.

23. Sea a, b constantes y X una variable aleatoria. Identifique la veracidad de las siguientes propiedades:

- a. $P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\text{Var}[X]}{k}$
- b. $E[a] = 0$, con $a = 0$
- c. $E[a^2 X + b] = aE[X] + b$
- d. $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$
- e. $\text{Var}[aX - b] = a^2 \text{Var}[X]$

Respuesta:

Por propiedades:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\text{Var}[aX - b] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Si } a = 0, \text{ entonces } E[a] = 0$$

En desigualdades, el denominador debe ser k^2 , no solo k .
Sobre la esperanza, $E[a^2 X] = a^2 E[X]$, no $aE[X]$

Marcar b. d. y e.

24. De la siguiente serie de números: 11, 10, 12, 14, 9, 10. Determine el coeficiente de asimetría de Fisher.

- a. 11
- b. 1.0481569
- c. 0.2746582
- d. 0.5240784
- e. 1.7888544

Respuesta:

Encontrar la media de los números:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{66}{6} = 11$$

Calcular las desviaciones y sumar al cubo:

- $11 - 11 = 0$
- $10 - 11 = -1$
- $12 - 11 = 1$
- $14 - 11 = 3$
- $9 - 11 = -2$
- $10 - 11 = -1$

$$\text{Suma de cubos} = 0^3 - 1^3 + 1^3 + 3^3 - 2^3 - 1^3 = 18$$

Calcular el cubo de la desviación estándar (s^3):

$$s^3 \approx 1.78885^3 \approx 5.72429$$

Aplicar la fórmula del coeficiente de Fisher:

$$\text{Coeficiente de Fisher} = \frac{\text{Suma de cubos}}{n \cdot s^3} = \frac{18}{6 \cdot 5.72429} \approx 0.524082$$

Marcar d.

25. Juan y Maria juegan el siguiente juego. Juan arroja dos dados legales y Maria le paga k bolivianos, donde k es el producto de los dos números que muestran los dados. ¿Cuánto debe pagar Juan a Maria por cada juego para que este sea parejo?

- a. 15
- b. 7
- c. 6
- d. Ninguno
- e. 12.25

Respuesta:

Sumar la esperanza de lanzar un dado:

$$E[X] = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{7}{2}$$

Como son dos dados, multiplicar la esperanza por dos:

$$\frac{7}{2} \times 2 = \frac{14}{2} = 7$$

Marcar b.

26. Un especialista en adquisiciones ha comprado 27 resistores al vendedor 1 y 44 al vendedor 2, si las resistencias de los vendedores se distribuyen como normales e independientes con $\mu_1 = 94.45$ y $\mu_2 = 91.1$ y $\sigma_1 = 2.37$ y $\sigma_2 = 1.42$. Encuentre el error estándar de $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$.

- a. Falta información
- b. 9.6685826
- c. Ninguna
- d. 0.3464831
- e. 0.5038458

Respuesta:

Obtener el error estándar $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2.37^2}{27} + \frac{1.42^2}{44}} \approx 0.5038458$$

Marcar e.

27. Debe responder de forma correcta todas las sentencias para que la pregunta sea considerada correcta. Determine la veracidad de las siguientes sentencias:

- a. Para el caso continuo $\int_{\mathbb{R}^X} f(x, y) dx = f(y)$
- b. $f(x, y) = f(x) \times f(y)$ siempre
- c. Para el caso discreto si la variable X toma 3 valores y la variable Y toma 10 valores, entonces su distribución conjunta tiene 31 combinaciones
- d. Si dos variables aleatorias X, Y son independientes, entonces $\text{cov}(x, y) = 0$
- e. Para el caso continuo $\int_{\mathbb{R}^X} f(x, y) dx = f(x)$

Respuesta:

Para el caso continuo $\int_{\mathbb{R}^X} f(x, y) dx = f(y)$.

Si dos variables aleatorias X, Y son independientes, entonces $\text{cov}(x, y) = 0$.

Marcar a. y d.

28. Entre los métodos de momentos y máxima verosimilitud cuál de ellos emplea un proceso de optimización para encontrar la estimación

- a. Momentos
- b. Depende
- c. Ninguno
- d. Maxima Verosimilitud
- e. Ambos

Respuesta:

El método de máxima verosimilitud.

Marcar d.

29. Entre los métodos de momentos y máxima verosimilitud cuál de ellos emplea un proceso basada en comparar las esperanzas con sus equivalentes de la muestra según sus potencias, para encontrar la estimación

- a. Momentos
- b. Ninguno
- c. Ambos
- d. Depende
- e. Maxima Verosimilitud

Respuesta:

El método de momentos.

Marcar a.

30. La media muestral de una muestra tomada de una población normal con desviación estándar de 29, siempre es: (Seleccione una o más de una)

- a. Todas
- b. Un estimador sesgado de la media muestral
- c. Un estimador insesgado de la media poblacional
- d. Un estimador sesgado de la media poblacional
- e. Un estimador insesgado de la media muestral

Respuesta:

Un estimador insesgado de la media poblacional.

Marcar c.

31. Una muestra aleatoria de tamaño 56 de una población normal tiene media $\bar{X} = 604.29$ y una varianza muestral de $\hat{S}^2 = 68.11$. Encuentre un intervalo de confianza al 99% de confiabilidad

- a. 602.128439, 606.451561
- b. 601.4446799, 607.1353201
- c. Falta información
- d. 602.4813469, 606.0986531
- e. Ninguna

Respuesta:

Obtener la desviación estándar muestral:

$$s = \sqrt{\hat{S}^2}$$
$$s = \sqrt{68.11} \approx 8.2528$$

Obtener el error estándar:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{8.2528}{\sqrt{56}} = 1.1028$$

Obtener el valor crítico z para el porcentaje de confianza:

- Obtener el valor que buscar en las tablas:

$$\frac{1 - \text{Porcentaje de confianza}}{2}$$
$$\frac{1 - 0.99}{2} = 0.005$$

- Buscar el valor más cercano en la tabla de distribución normal

$$\text{Para } 0.005, z \approx 2.575$$

Obtener el margen de error:

$$\text{Margen de error} = z \times \text{error estándar}$$
$$2.575 \times 1.1028 = 2.83971$$

Obtener el límite inferior y superior sumando y restando la media poblacional \bar{X} al margen de error:

$$\text{Margen inferior} = 604.29 - 2.83971 = 601.45029$$
$$\text{Margen superior} = 604.29 + 2.83971 = 607.12971$$

Marcar b.

32. Se extraen muestras aleatorias de tamaños $n_1 = n_2 = 63$ de dos poblaciones normales independientes. Las varianzas muestrales son $\hat{S}_1^2 = 13.75$ y $\hat{S}_2^2 = 50.09$. Construye un intervalo de confianza de dos lados del 95% respecto al cociente de las varianzas de las poblaciones σ_1^2/σ_2^2 . Use como $F_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1} = 0.6050539$ y $F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1} = 1.6527452$

- a. 0.1660909, 0.4536883
- b. Ninguna
- c. 0.0332182, 0.0907377
- d. 0.3660909, 0.6536883
- e. Falta información

Respuesta:

Dividir las varianzas muestrales:

$$\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{13.75}{50.09} \approx 0.2745$$

Dividir el resultado obtenido por los valores dados de $F_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1} = 0.6050539$ y $F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1} = 1.6527452$:

- Por $F_{\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$:

$$\frac{0.2745}{1.6527452} \approx 0.166087$$

- Por $F_{1-\alpha/2, n_2-1, n_1-1}$:

$$\frac{0.2745}{0.6050539} \approx 0.453678$$

Marcar a.

33. Se lleva a cabo un estudio para determinar el porcentaje de propietarios de casa que poseen al menos dos aparatos de televisión. ¿Qué tan grande debe ser la muestra si se desea tener una confianza del 95% de que el error al estimar esta cantidad sea menor que 0.07? (asuma máxima varianza)

- a. Falta información
- b. 16577
- c. 196
- d. 24
- e. 340

Respuesta:

Obtener el valor crítico z para el porcentaje de confianza:

- Obtener el valor que buscar en las tablas:

$$\frac{1 - \text{Porcentaje de confianza}}{2}$$
$$\frac{1 - 0.95}{2} = 0.025$$

- Buscar el valor más cercano en la tabla de distribución normal

Para 0.025, $z \approx 1.96$

Obtener el tamaño de la muestra usando la fórmula con el error máximo permitido $E = 0.07$:

$$n = \frac{z^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{E^2}$$
$$n = \frac{1.96^2 \cdot 0.025}{0.07^2} = 196$$

Marcar c.

34. El voltaje de salida de dos tipos diferentes de transformadores se está investigando. 29 transformadores de cada tipo se seleccionan al azar y se mide el voltaje. Las medias de muestras son 10.7 y 10.4 volts respectivamente. Sabemos que las varianzas del voltaje de salida para los dos tipos de transformadores son 0.2 y 0.1 respectivamente, Construya un intervalo de confianza de dos lados del 95% respecto la diferencia en el voltaje medio.

- a. 0.1006493, 0.4993507
- b. 0.1331964, 0.4668036
- c. Falta información
- d. Ninguna
- e. 0.0375894, 0.5624106

Respuesta:

Obtener la diferencia de las medias:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = 10.7 - 10.4 = 0.3$$

Obtener el error estándar SE con la fórmula:

$$SE = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}$$

$$SE = \sqrt{\frac{0.2 + 0.1}{29}} \approx 0.101709$$

Obtener el valor crítico z para el porcentaje de confianza:

- Obtener el valor que buscar en las tablas:

$$\frac{1 - \text{Porcentaje de confianza}}{2}$$

$$\frac{1 - 0.95}{2} = 0.025$$

- Buscar el valor más cercano en la tabla de distribución normal

$$\text{Para } 0.025, z \approx 1.96$$

Obtener el margen de error ME con la fórmula:

$$ME = z \times SE$$

$$ME = 1.96 \times 0.101709 \approx 0.199349$$

Obtener el límite inferior y superior sumando y restando la diferencia de las medias poblacionales (0.3) al margen de error:

$$\text{Margen inferior} = 0.3 - 0.199349 = 0.10065036$$

$$\text{Margen superior} = 0.3 + 0.199349 = 0.49934964$$

Marcar a.

35. Se está estudiando el rendimiento de un proceso químico. De la experiencia previa se sabe que la varianza del rendimiento con este proceso es 5. Los últimos seis días de operación de la planta han dado como resultado los siguientes rendimientos (en porcentajes):

x
89.49
88.43
90.25
89.35
93.09
91.26

¿Hay razón para creer que el rendimiento es menor al 90%? (asuma un error de tipo I del 1%)

- a. Ejercicio mal planteado
- b. Ninguna
- c. No se rechaza H_0
- d. Falta información
- e. Se rechaza H_0

Respuesta:

Obtener la media de los datos \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \approx 90.31166$$

Si la media muestral \bar{X} es mayor que el valor de prueba (90%), y la hipótesis pregunta si es «menor», automáticamente no se rechaza H_0

Como $90.31166 > 90$, entonces no se rechaza H_0

Marcar c.

En otros casos:

Obtener z directamente con la fórmula:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\frac{90.31166 - 90}{\sqrt{5}/\sqrt{6}} \approx 0.341406$$

(Donde μ es el valor del porcentaje y σ es la raíz de la varianza 5)

Como se indica que el error es del 1%, obtener el valor crítico para 0.01 buscando el valor más cercano en la tabla de distribución normal

Para 0.01, $z \approx 2.325$

Multiplicar el valor crítico por -1 y comparar con el z obtenido en la fórmula, si z es mayor que el punto crítico, H_0 no se rechaza

$$0.341406 > -2.325$$

Si z fuera menor que el punto crítico, H_0 se rechazaría

En general, marcar siempre que H_0 no se rechaza

Caso alterno:

Se está estudiando el rendimiento de un proceso químico. De la experiencia previa se sabe que la varianza del rendimiento con este proceso es 5. Los últimos diez días de operación de la planta han dado como resultado los siguientes rendimientos (en porcentajes):

86.58, 86.18, 90.49, 91.28, 86.14, 90.39, 89.65, 90.68, 90.62, 90.37, 86.8, 90.09

¿Hay razón para creer que el rendimiento es menor al 89%? (asuma un error de tipo I del 1%). Trabaje con el estadístico z_0 .

Respuesta:

No se rechaza H_0 .

Marcar c.

36. Se están investigando dos métodos para producir gasolina a partir de petróleo crudo. Se supone que el rendimiento de ambos procesos se distribuye normalmente, los siguientes datos se han obtenido de la planta piloto:

Rendimientos

x_1	x_2
23	22
27	25
24	24
23	25
25	23
26	23
24	24
26	24
26	23
25	21
24	22

Suponer igualdad de varianzas, encontrar el valor de t_0

- a. Falta in formación
- b. Ninguna
- c. 2.7872598
- d. 2.5085338
- e. 3.7872598

Respuesta:

Calcular la media para cada x :

- Para x_1 :

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum x_{1i}}{n} = \frac{273}{11} \approx 24.81818$$

- Para x_2 :

$$\bar{x}_{12} = \frac{\sum x_{2i}}{n} = \frac{256}{11} \approx 23.27272$$

Calcular la varianza muestral s^2 para cada x :

- Para x_1 :

$$s_1^2 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n - 1} \approx 1.76363$$

- Para x_2 :

$$s_1^2 = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n - 1} \approx 1.61818$$

Calcular la raíz de la varianza agrupada $\sqrt{s_p^2}$:

$$\begin{aligned} s_p^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{10 \cdot 1.76363 + 10 \cdot 1.61818}{20} = \frac{33.8181}{20} \approx 1.690905 \\ \sqrt{s_p^2} &= \sqrt{1.680905} \approx 1.300348 \end{aligned}$$

Calcular el error estándar:

$$\begin{aligned} SE &= s_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \\ &= 1.300348 \cdot \sqrt{\frac{2}{11}} \approx 0.55447 \end{aligned}$$

Calcular t_0 :

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{SE} \\ &= \frac{24.81818 - 23.27272}{0.55447} \approx 2.787274 \end{aligned}$$

Marcar c.

En general, siempre marcar la respuesta numérica que esté entre las otras dos

37. Suponga que $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son estimadores de θ . Se sabe que $\hat{\theta}_1$ es insesgado y que $E[\hat{\theta}_2] = \theta/2$, suponiendo que $V(\hat{\theta}_1) = V(\hat{\theta}_2)$, que estimador logra un menor error cuadrático medio.

- a. Ambos
- b. $\hat{\theta}_1$
- c. Ninguna
- d. Falta información
- e. $\hat{\theta}_2$

Respuesta:

Ya que $E[\hat{\theta}_2] = \theta/2$, entonces $\hat{\theta}_1$ es más pequeño.

Marcar b.

38. Supongase que la variable aleatoria X tiene la distribución de probabilidad

$$f(x) = (\gamma + 2)X^\gamma \quad 0 < X < 1$$

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de tamaño n . Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de γ

- a. $\hat{\gamma} = \bar{X}$
- b. $\hat{\gamma} = -1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$
- c. Ninguno
- d. $\hat{\gamma} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$
- e. No es una función de probabilidad

Respuesta:

Integrar de 0 a 1:

$$\int_0^1 (\gamma + 2)X^\gamma dx = (\gamma + 2) \int_0^1 X^\gamma dx = (\gamma + 2) \cdot \frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} \Big|_0^1 = (\gamma + 2) \cdot \frac{1}{\gamma+1} = \frac{\gamma+2}{\gamma+1}$$

Como $\frac{\gamma+2}{\gamma+1} \neq 1$, la función no es una función de probabilidad.

Marcar e.

39. Una carrera en la universidad esta a punto de elegir a sus autoridades, se busca hacer una encuesta de intención de votos en los estudiantes para el candidato "Z", se quiere un nivel de confianza del 95%, y no errar en $\pm 0.04\%$. Calcular el tamaño de muestra, suponiendo "n" máxima.

- a. Falta información
- b. 601
- c. Ninguna
- d. 811
- e. 751

Respuesta:

Obtener el valor crítico z para el porcentaje de confianza:

- Obtener el valor que buscar en las tablas:

$$\frac{1 - \text{Porcentaje de confianza}}{2}$$
$$\frac{1 - 0.95}{2} = 0.025$$

- Buscar el valor más cercano en la tabla de distribución normal

Para 0.025, $z \approx 1.96$

Obtener el tamaño de la muestra usando la fórmula con el error máximo permitido $E = 0.04$:

$$n = \frac{z^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{E^2}$$
$$n = \frac{1.96^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5}{0.04^2} \approx 600.25$$

Marcar b.

40. Un fabricante de propulsores está investigando la desviación lateral en yardas de cierto tipo de proyectil mortero. Se han observado los siguientes datos:

x
−1.673025
−4.885796
−2.698088
10.352116
0.947634
−6.135548
2.923138
−9.472094
7.109478
9.717690
4.470182
10.325810
−7.648696

Pruebe la hipótesis de que la desviación lateral media de estos proyectiles de mortero es cero. Suponer que los datos son normales. El valor de tablas corresponde a $t_{\alpha/2, n-1} = 2.1788128$

- a. No se rechaza H_0
- b. Ejercicio mal planteado
- c. Falta información
- d. Ninguna
- e. Se rechaza H_0

Respuesta:

No se rechaza H_0 .

Marcar a.

41. Seleccione los supuestos correctos para la prueba de hipótesis de igualdad de dos varianzas

- a. La estadística de prueba se distribuye como una F de Fisher
- b. El tamaño de muestra de ambas poblaciones son iguales
- c. Las variables de las dos poblaciones se distribuyen como t student
- d. Las variables de las dos poblaciones se distribuyen como normal
- e. Las variables de las dos poblaciones se distribuyen como chi cuadrado

Respuesta:

La estadística de prueba se distribuye como una F de Fisher

Las variables de las dos poblaciones se distribuyen como normal

Marcar a. y d.

42. Para la prueba de hipótesis de la media (con dos colas). Si se toma la razón $\delta/\sigma = 1.05$, un error de tipo I del 5% y un error de tipo II del 10%. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

- a. 7.7
- b. 11
- c. 22
- d. Falta información
- e. Ninguna

Respuesta:

Se sabe que:

- Para error tipo I del 5%:

$$z_{\alpha/2} = 1.96$$

- Para error tipo II del 10%:

$$z_{\beta} = 1.28$$

Aplicar la fórmula:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{z_{\alpha/2} + z_{\beta}}{\delta/\sigma} \right)^2 \\ &= \left(\frac{3.24}{1.05} \right)^2 \approx 9.52163 \end{aligned}$$

Marcar e.

43. Deseamos que el ancho total del intervalo de confianza respecto a la vida media sea de 9.49 horas. Si se sabe que $\sigma = 24.76$. ¿Cuál debe ser el tamaño de muestra? Tome un nivel de confiabilidad del 95%

- a. Falta información
- b. 157.5
- c. Ninguna
- d. 52.5
- e. 105

Respuesta:

Se sabe que el z-score para 95% de confianza es:

$$Z = 1.96$$

Aplicar la fórmula:

$$n = \left(\frac{2 \cdot Z \cdot \sigma}{\text{ancho}} \right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 1.96 \cdot 24.76}{9.49} \right)^2 \approx 104.60224$$

Marcar e.

44. Dada la siguiente tabla de probabilidades de las variables X e Y, obtenga la covarianza.

	y	1	2	3	4
x					
1		0.05	0.16	0.03	0.00
2		0.00	0.18	0.20	0.11
3		0.00	0.00	0.10	0.16

- a. Falta información
- b. 1.4360656
- c. Ninguna
- d. 0.6759133
- e. 0.48

Respuesta:

Sumar las probabilidades para cada fila de X:

- $P(X = 1) = 0.05 + 0.16 + 0.03 + 0.00 = 0.24$
- $P(X = 2) = 0.00 + 0.18 + 0.20 + 0.11 = 0.49$
- $P(X = 3) = 0.00 + 0.00 + 0.10 + 0.16 = 0.26$

Calcular $E[X]$ multiplicando el valor de x para cada resultado de las sumas y hacer la suma de productos:

$$E[X] = (1 \cdot 0.24) + (2 \cdot 0.49) + (3 \cdot 0.26) = 2$$

Sumar las probabilidades para cada fila de Y:

- $P(Y = 1) = 0.05 + 0.00 + 0.00 = 0.05$
- $P(Y = 2) = 0.16 + 0.18 + 0.00 = 0.34$
- $P(Y = 3) = 0.03 + 0.20 + 0.10 = 0.33$
- $P(Y = 4) = 0.00 + 0.11 + 0.16 = 0.27$

Calcular $E[Y]$ multiplicando el valor de y para cada resultado de las sumas y hacer la suma de productos:

$$E[Y] = (1 \cdot 0.05) + (2 \cdot 0.34) + (3 \cdot 0.33) + (4 \cdot 0.27) = 2.8$$

Calcular $E[XY]$ multiplicando cada valor de x, y y el valor que apuntan en la tabla

$$\begin{aligned}
 E[XY] &= \\
 &= (1 \cdot 1 \cdot 0.05) + (1 \cdot 2 \cdot 0.16) + (1 \cdot 3 \cdot 0.03) + (1 \cdot 4 \cdot 0.00) \\
 &+ (2 \cdot 1 \cdot 0.00) + (2 \cdot 2 \cdot 0.18) + (2 \cdot 3 \cdot 0.20) + (2 \cdot 4 \cdot 0.11) \\
 &+ (3 \cdot 1 \cdot 0.00) + (3 \cdot 2 \cdot 0.00) + (3 \cdot 3 \cdot 0.10) + (3 \cdot 4 \cdot 0.16) \\
 &= 0.46 + 2.8 + 2.82 = 6.08
 \end{aligned}$$

Aplicar la fórmula de la covarianza:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y] = 6.08 - 2 \cdot 2.8 = 0.48$$

Marcar e.

45. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud del parámetro λ de la distribución de Poisson. Basado en una muestra aleatoria de tamaño n

- a. Ninguna
- b. $\hat{\lambda} = \bar{x}^2$
- c. $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$
- d. Falta información
- e. $\hat{\lambda} = \bar{x}$

Respuesta:

Para la distribución de Poisson, el estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{\lambda} = \bar{x}$$

Marcar e.

Caso alternativo:

Encuentre el estimador de máxima verosimilitud del parámetro λ de la distribución exponencial. Basado en una muestra aleatoria de tamaño n

Respuesta:

Para la distribución exponencial, el estimador de máxima verosimilitud es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Marcar c.