1. Vectores.

Vectores en dos y tres dimensiones.

2. Calcular cada uno de los múltiplos escalares de $v = \langle -1, 5 \rangle$.

a) $4v$
b) $-\frac{1}{2}$
c) $0v$
d) $-6v$

a) $4v$

$$\begin{aligned} 4v &= 4\langle -1, 5 \rangle \\ &= \langle (4)(-1), (4)(5) \rangle \\ &= \langle -4, 20 \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

b) $-\frac{1}{2}v$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}v &= -\frac{1}{2}\langle -1, 5 \rangle \\ &= \left\langle \left(-\frac{1}{2}\right)(-1), \left(-\frac{1}{2}\right)(5) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{5}{2} \right\rangle \blacksquare \end{aligned}$$

c) $0v$

$$\begin{aligned} 0v &= 0\langle -1, 5 \rangle \\ &= \langle (0)(-1), (0)(5) \rangle \\ &= \langle 0, 0 \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

d) $-6v$

$$\begin{aligned} -6v &= -6\langle -1, 5 \rangle \\ &= \langle (-6)(-1), (-6)(5) \rangle \\ &= \langle 6, -30 \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

4. Hallar el vector $v = 5u - 3w$ donde $u = 2, -1$y $w = 1, 2$.

$$\begin{aligned} v &= 5u - 3w \\ &= 5\langle 2, -1 \rangle - 3\langle 1, 2 \rangle \\ &= \langle 10, -5 \rangle - \langle 3, 6 \rangle \\ &= \langle 10 - 3, -5 - 6 \rangle \\ &= \langle 7, -11 \rangle \blacksquare \end{aligned}$$

5. Encontrar la magnitud del vector $v = -10i + 3j$.

$$\begin{aligned} v &= -10i + 3j = \langle -10, 3 \rangle \\ \|v\| &= \sqrt{(10)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{100 + 9} = \sqrt{109} \blacksquare \end{aligned}$$

8. Hallar $\left\|\frac{u+v}{\|u+v\|}\right\|$ si $u = \langle 2, 4\rangle$ y $v = \langle 5, 5\rangle$.

$$u + v = \langle 2+5, 4+5\rangle = \langle 7, 9\rangle$$

$$\|u+v\| = \sqrt{7^2+9^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$$

$$\frac{u+v}{\|u+v\|} = \left\langle \frac{7}{\sqrt{130}}, \frac{9}{\sqrt{130}} \right\rangle$$

$$\left\|\frac{u+v}{\|u+v\|}\right\| = \sqrt{\left(\frac{7}{\sqrt{130}}\right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{130}+\frac{81}{130}} = \sqrt{\frac{130}{130}} = \sqrt{1} = 1\blacksquare$$

9. Demostrar la desigualdad del triángulo si $u = \langle -3, 2\rangle$ y $v = \langle 1, -2\rangle$.

$$\|u+v\|^2 \le \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 = \|\langle -2, 0\rangle\|^2 = \left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$$

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \left(\sqrt{9+4}\right)^2 + \left(\sqrt{1+4}\right)^2 = 13 + 5 = 18$$

$$4 \le 18\blacksquare$$

10. Hallar las componentes de v dadas su magnitud y el ángulo que forma con el eje x positivo.

a) $\|v\| = 3, \theta = 0°$

$$\begin{aligned} v &= \left\langle \|v\|\cos\theta, \|v\|\sin\theta \right\rangle \\ &= \langle 3\cos 0°, 3\sin 0°\rangle \\ &= \langle 3, 0\rangle\blacksquare \end{aligned}$$

13. Hallar la distancia entre los puntos:

a) $(-2, 3, 2)$, $(2, -5, -2)$

$$v = \langle 4, -8, -4\rangle$$

$$\|v\| = \sqrt{16+64+16} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}\blacksquare$$

15. Hallar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos:

a) $(5, -9, 7)$, $(-2, 3, 3)$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{3}{2}, -\frac{6}{2}, \frac{10}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, -3, 5\right)\blacksquare \end{aligned}$$

18. Determinar cuáles de los vectores son paralelos a $z = \langle 3, 2, -5\rangle$.

a) $\langle -6, -4, 10\rangle$

$$\begin{aligned} \langle -6, -4, 10\rangle &= 2\langle 3, 2, -5\rangle \\ &= 2z \end{aligned}$$

$$\text{Es paralelo a z.}\blacksquare$$

20. Usar vecrores para determinar si los puntos son vértices de un paralelogramo.

a) $(2, 9, 1)$, $(3, 11, 4)$, $(0, 10, 2)$, $(1, 12, 5)$

$$A = (2, 9, 1), B = (3, 11, 4), C = (0, 10, 2), D = (1, 12, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1, 2, 3\rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -2, 1, 1\rangle$$

$$\overrightarrow{AD} = \langle -1, 3, 4\rangle$$

$$A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \langle 1, 12, 5\rangle = D\blacksquare$$

22. Hallar un vector unitario en la dirección de $u = \langle 2, -1, 2\rangle$ y otro vector en la dirección opuesta de u.

$$\vec{u} = \frac{u}{\|u\|}$$

$$\|u\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle\blacksquare$$

$$-\vec{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle\blacksquare$$

23. Si $u = \langle 4, 10\rangle$ y $v = \langle -2, 3\rangle$, hallar uv.

$$uv = -8 + 30 = 22\blacksquare$$

25. Calcular $u \cdot v$ si $\|u\| = 8$, $\|v\| = 5$ y el ángulo entre u y v es $\frac{\pi}{3}$.

$$uv = \|u\|\|v\| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 40 \cdot \frac{1}{2} = 20\blacksquare$$

26. Calcular el ángulo θ entre los vectores $u = \langle 2, 18\rangle$ y $v = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right\rangle$.

$$uv = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{uv}{\|u\|\|v\|}$$

$$uv = 3 + \left(-\frac{18}{6}\right) = \frac{9}{3} - \frac{9}{3} = 0$$

$$\theta = \arccos 0 = 90°\blacksquare$$

27. Determinar si $u = \langle 2, 18\rangle$ y $v = \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right\rangle$ son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

$$2x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}\langle 2, 18\rangle = \left\langle \frac{3}{2}, \frac{27}{2}\right\rangle$$

$$\text{No son paralelos.}\ \blacksquare$$

$$uv = 3 + (-3) = 0$$

$$\text{Sí son ortogonales } \blacksquare$$

30. Hallar la componente de $u = \langle 9, 7\rangle$ que es ortogonal a $v = \langle 1, 3\rangle$, y $w_1 = \text{proj}_v u = \langle 3, 9\rangle$.

$$w_2 = u - \text{proj}_v u$$
$$= \langle 9, 7\rangle - \langle 3, 9\rangle$$
$$= \langle 6, -2\rangle \blacksquare$$

31. Hallar la proyección de $u = \langle 2, 3\rangle$ en $v = \langle 5, 1\rangle$.

$$\text{proj}_v u = v\frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$$
$$= v\frac{13}{\|v\|^2} = v\frac{13}{\left(\sqrt{25+1}\right)^2} = v\frac{13}{26} = \left\langle \frac{65}{26}, \frac{13}{26}\right\rangle = \left\langle \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle \blacksquare$$

32. Hallar la componente vectorial de $u = \langle 2, -3\rangle$ ortogonal a $v = \langle 3, 2\rangle$.

$$\text{proj}_v u = v\frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$$
$$w_2 = u - \text{proj}_v u$$
$$\text{proj}_v u = v\frac{6 + -6}{\left(\sqrt{9+4}\right)^2} = v\frac{0}{13} = \langle 0, 0\rangle$$
$$w_2 = \langle 2, -3\rangle - \langle 0, 0\rangle = \langle 2, -3\rangle \blacksquare$$

37. Calcular $u \times v$ si $u = -2i + 3j + 4k$ y $v = 3i + 7j + 2k$.

$$\begin{matrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{matrix}$$

$$u \times v = (6 - 28)i - (-4 - 12)j + (-14 - 9)k = -22i + 16j - 23k$$
$$= \langle -22, -16, -23\rangle \blacksquare$$

39. Calcular el area del paralelogramo que tiene los vectores dados como lados adyacentes $u = \langle 3, 2, -1\rangle$ y $v = \langle 1, 2, 3\rangle$

$$A = \|u \times v\|$$
$$\det \begin{pmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$u \times v = (6 + 2)i - (9 + 1)j + (6 - 2)k = \langle 8, -10, 4\rangle$$
$$\|\langle 8, -10, 4\rangle\| = \sqrt{64 + 100 + 16} = \sqrt{164 + 16} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \blacksquare$$

40. Calcular si los puntos $(1,1,1)$, $(2,3,4)$, $(6,5,2)$ y $(7,7,5)$ son vértices de un paralelogramo y calcular su área.

$$A=(1,1,1),B=(2,3,4),C=(6,5,2),D=(7,7,5)$$

$$\overrightarrow{AB}=\langle 1,2,3\rangle$$

$$\overrightarrow{AC}=\langle 5,4,1\rangle$$

$$\overrightarrow{AD}=\langle 6,6,4\rangle$$

$$A+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=A+\langle 6,6,3\rangle=\langle 7,7,4\rangle=D$$

$$\text{Sí es un paralelogramo, con } \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AC} \text{ como lados adyacentes}$$

$$A=\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow(2-12)i-(1-15)j+(4-10)k=\langle -10,14,-6\rangle$$

$$\|\langle -10,14,-6\rangle\|=\sqrt{100+196+36}=\sqrt{296+36}=\sqrt{332}=2\sqrt{83}\blacksquare$$

43. Usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes $u=i+j$, $v=j+k$ y $w=i+k$

$$u=\langle 1,1,0\rangle$$

$$v=\langle 0,1,1\rangle$$

$$w=\langle 1,0,1\rangle$$

$$V=u\cdot(v\times w)$$

$$=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\longrightarrow(1)1-(-1)1+0=1+1=2\blacksquare$$

44. Encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene los siguientes vertices:
$A = (0,0,0), B = (3,0,0), C = (0,5,1), D = (3,5,1), E = (2,0,5), F = (5,0,5), G = (2,5,6), H = (5,5,6)$

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3,0,0 \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 0,5,1 \rangle$$
$$\overrightarrow{AD} = \langle 3,5,1 \rangle$$
$$\overrightarrow{AE} = \langle 2,0,5 \rangle$$
$$\overrightarrow{AF} = \langle 5,0,5 \rangle$$
$$\overrightarrow{AG} = \langle 2,5,6 \rangle$$
$$\overrightarrow{AH} = \langle 5,5,6 \rangle$$
$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 3(25) = 75 \neq 0$$
$$u = \overrightarrow{AB}, v = \overrightarrow{AC}, w = \overrightarrow{AE}$$
$$V = u \cdot (v \times w)$$
$$= \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 75 \blacksquare$$

45. Demostrar que $\|u \times v\| = \|u\|\|y\|$ si u y v son ortogonales
$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin \theta$$
Como u y v son ortogonales; son perpendiculares, y el ángulo entre ellos es $\theta = 90°$.
$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin 90°$$
$$= \|u \times v\| = \|u\|\|v\|1$$
$$= \|u \times v\| = \|u\|\|v\| \blacksquare$$

47. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-2,0,3)$ y es paralela al vector $v = 2i + 4j - 2k$.
$$v = \langle 2,4,-2 \rangle$$
$$(-2,0,3) + vt = (-2,0,3) + \langle 2,4,-2 \rangle t$$
$$x = -2 + 2t, y = 4t, z = 3 - 2t \blacksquare$$

48. Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $(1,0,1)$ y es paralela a la recta $x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$.
$$v = \langle 3,-2,1 \rangle$$
$$(1,0,1) + \langle 3,-2,1 \rangle t$$
$$x = 1 + 3t \longrightarrow t = \frac{x-1}{3}$$
$$y = -2t \longrightarrow t = -\frac{y}{2}$$
$$z = 1 + t \longrightarrow t = z - 1$$
$$t = \frac{x-1}{3} = -\frac{y}{2} = z - 1 \blacksquare$$

49. Hallar un conjunro de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(5,-3,-2)$ y $\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\right)$

$$v=\left\langle -\frac{2}{3}-5,\frac{2}{3}+3,3\right\rangle=\left\langle -\frac{17}{3},\frac{11}{3},3\right\rangle$$

$$(5,-3,-2)+\left\langle -\frac{17}{3},\frac{11}{3},3\right\rangle$$

$$x=5-\frac{17}{3}t$$

$$y=-3+\frac{11}{3}t$$

$$z=-2+3t$$

51. Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-4,5,2)$ y es paralela al plano xy y al plano yz

$$(-4,5,2)+vt$$

$$\text{Plano } xy=\langle 1,1,0\rangle$$

$$\text{Plano } yz=\langle 0,1,1\rangle$$

$$\text{Restricciones combinadas: }\langle 0,1,0\rangle$$

$$(-4,5,2)+\langle 0,1,0\rangle t$$

$$x=-4+0t$$

$$y=5+t$$

$$z=2+0t$$