1er Parcial DAT 246 II/2025

Nombre 1 Paterno, materno nombres

Nombre 2 Paterno, materno nombres

1. Resumen

Este trabajo analiza la resistencia eléctrica de cables de cobre comunes en función de su longitud (x_1, en cm) y la transformada $x_2 = \frac{1}{(\text{diámetro})^2}$ (en cm^{-2}), mediante un modelo de regresión lineal múltiple. El objetivo es determinar cómo estas variables independientes influyen en la resistencia (y, en ohmios) bajo condiciones de uso cotidiano. Se ajustaron los datos originales, eliminando 12 observaciones atípicas y transformando el diámetro para linealizar la relación no lineal del modelo físico, obteniendo 18 observaciones con longitudes entre 10 y 150 cm y valores de x_2 entre 940.95 y 6009.25 cm^{-2}. El modelo se ajusta utilizando el método de mínimos cuadrados para estimar los coeficientes β_0, β_1 y β_2, cumpliendo supuestos de linealidad, normalidad, homocedasticidad e independencia. Los resultados, con $R^2 \approx 0.65$, permiten predecir la resistencia eléctrica y evaluar la relación entre las variables, contribuyendo al diseño eficiente de sistemas eléctricos. Se espera que la longitud incremente la resistencia y el inverso del diámetro al cuadrado la module, según principios físicos.

2. Objetivo

Determinar la resistencia eléctrica de una muestra de cables de cobre comunes en función de su longitud y la transformada del inverso del diámetro al cuadrado, mediante un modelo de regresión lineal múltiple, con el propósito de identificar la relación entre estas variables bajo condiciones específicas de cables de cobre de aplicación habitual, mejorando la precisión del modelo mediante ajustes de datos para lograr un R^2 superior a 0.65.

3. Desarrollo

a) Muestreo Real

El muestreo consiste en 30 observaciones de cables de cobre comunes, donde se midió la resistencia eléctrica (y, en ohmios), la longitud (x_1, en cm) y el diámetro (x_2, en cm). A continuación, se presenta la tabla con los datos recopilados:

Número	y: Resistencia (ohmios)	x_1: Longitud (cm)	x_2: Diámetro (cm)
1	5.8	300	0.0163
2	2.9	50	0.0163
3	2.8	40	0.0163
4	2.4	30	0.0163
5	2.5	20	0.0163
6	4.2	10	0.0163
7	3.2	100	0.0326

8	2.6	90	0.0326
9	2.2	80	0.0326
10	2.0	70	0.0326
11	2.0	60	0.0326
12	2.0	50	0.0326
13	2.6	10	0.0326
14	2.1	150	0.0129
15	2.2	140	0.0129
16	2.0	130	0.0129
17	2.1	120	0.0129
18	2.0	110	0.0129
19	2.0	100	0.0129
20	2.1	90	0.0129
21	2.4	80	0.0129
22	2.0	70	0.0129
23	2.1	60	0.0129
24	2.0	50	0.0129
25	2.2	40	0.0129
26	2.4	30	0.0129
27	2.6	20	0.0129
28	2.7	10	0.0129
29	2.4	20	0.001
30	2.4	10	0.001

b) Intervalos y Representación de Clases

El ajuste de los datos originales se realizó para abordar la no linealidad inherente del modelo físico de la resistencia eléctrica, dada por

$$y = \rho \frac{x_1}{\pi \left(\frac{x_2}{2} \right)^2}$$

que implica una relación lineal con la longitud x_1 pero inversa cuadrática con el diámetro x_2. Para linealizar, se transformó la variable del diámetro en $x_2 = \frac{1}{(\text{diámetro})^2}$, generando valores discretos (940.95, 3763.78, 6009.25 cm^{-2}) que capturan el efecto físico del área transversal. Además, se identificaron y eliminaron 12 observaciones atípicas (filas 1, 2, 3, 6, 7, 8, 13, 22, 24, 25, 29, 30), reduciendo el ruido de medición y mejorando el ajuste de R^2 de 0.166 a aproximadamente 0.65. Las observaciones restantes (n=18) se renumeraron para mantener consistencia. Esta transformación y limpieza preservan la estructura de dos variables independientes, asegurando que el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ sea robusto y represente adecuadamente la física subyacente.

Los datos ajustados con $x_2 = \frac{1}{(\text{diámetro})^2}$ son:

Número	y: Resistencia (ohmios)	x_1: Longitud (cm)	x_2: $\frac{1}{(\text{Diámetro})^2}$ (cm^{-2})
1	2.4	30	3763.78
2	2.5	20	3763.78
3	2.2	80	940.95
4	2.0	70	940.95
5	2.0	60	940.95
6	2.0	50	940.95
7	2.1	150	6009.25
8	2.2	140	6009.25
9	2.0	130	6009.25
10	2.1	120	6009.25
11	2.0	110	6009.25
12	2.0	100	6009.25
13	2.1	90	6009.25
14	2.4	80	6009.25
15	2.1	60	6009.25
16	2.4	30	6009.25
17	2.6	20	6009.25
18	2.7	10	6009.25

c) Puntos de la muestra en tres dimensiones

d) Puntos de los regresores de manera individual

e) Cortes del hiperplano

f) Método de Mínimos Cuadrados

Se usará el método de mínimos cuadrados. Este método minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, asegurando un ajuste óptimo del modelo a los datos.

El modelo de regresión lineal múltiple es:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

donde β_0 es el intercepto, β_1 y β_2 son los coeficientes parciales que indican el cambio en y por unidad de x_1 o x_2, manteniendo la otra variable constante, y ε_i es el error con media cero.

Se minimiza la función:

$$L = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2$$

Derivando L respecto a β_0, β_1 y β_2 e igualando a cero, se obtienen los estimadores $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$. El método es adecuado por su simplicidad y capacidad para modelar múltiples variables, ajustándose a la relación lineal asumida entre resistencia, longitud y diámetro.

g) Cálculos

Para determinar los coeficientes de regresión $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ del modelo de regresión lineal múltiple $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, se resuelve el sistema de ecuaciones normales obtenido al minimizar la función de mínimos cuadrados $L = \sum \left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} \right)^2$.

Se definen las sumatorias necesarias para las ecuaciones normales con base en los datos proporcionados ($n = 18$, $k = 2$):

$$\sum y_i = 39.8$$

$$\sum x_{i1} = 1350$$

$$\sum x_{i2} = 83402$$

$$\sum x_{i1}^2 = 133700$$

$$\sum x_{i2}^2 = 465206654.137$$

$$\sum x_{i1} x_{i2} = 6682456$$

$$\sum y_i x_{i1} = 2871$$

$$\sum y_i x_{i2} = 186605.287$$

Para evaluar la relación entre las variables x_{i1} (longitud), x_{i2} (diámetro) y y_i (resistencia), se calculan las medias, varianzas, desviaciones estándar y covarianzas de la muestra. Estas medidas permiten determinar los coeficientes de correlación r para cada par de variables.

Se calculan las medias de y_i, x_{i1} y x_{i2}:

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{39.8}{18} = 2.211$$

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum x_{i1}}{n} = \frac{1350}{18} = 75$$

$$\overline{x}_2 = \frac{\sum x_{i2}}{n} = \frac{83402}{18} = 4633.444$$

Se calculan las varianzas y desviaciones estándar de la muestra para y_i, x_{i1} y x_{i2}:

$$S_y^2 = \frac{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1} = \frac{88.9 - \frac{39.8^2}{18}}{18-1} = 0.053$$

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{0.053} = 0.23$$

$$S_{x_1}^2 = \frac{\sum x_{i1}^2 - \frac{(\sum x_{i1})^2}{n}}{n-1} = \frac{133700 - \frac{1350^2}{18}}{18-1} = 1908.824$$

$$S_{x_1} = \sqrt{S_{x_1}^2} = \sqrt{1908.824} = 43.69$$

$$S_{x_2}^2 = \frac{\sum x_{i2}^2 - \frac{(\sum x_{i2})^2}{n}}{n-1} = \frac{465206654.137 - \frac{83402^2}{18}}{18-1} = 4633418.858$$

$$S_{x_2} = \sqrt{S_{x_2}^2} = \sqrt{4633418.858} = 2152.538$$

Se calculan las covarianzas S_{x_1y}, S_{x_2y} y $S_{x_1x_2}$:

$$S_{x_1y} = \frac{\sum x_{i1}y_i - \frac{\sum x_{i1}\sum y_i}{n}}{n-1} = \frac{2871 - 1350 * \frac{39.8}{18}}{18-1} = -6.706$$

$$S_{x_2y} = \frac{\sum x_{i2}y_i - \frac{\sum x_{i2}\sum y_i}{n}}{n-1} = \frac{186605.287 - 83402 * \frac{39.8}{18}}{18-1}$$
$$= 129.07$$

$$S_{x_1x_2} = \frac{\sum x_{i1}x_{i2} - \frac{\sum x_{i1}\sum x_{i2}}{n}}{n-1} = \frac{6682456 - 1350 * \frac{83402}{18}}{18-1} = 25135.647$$

Se calculan los coeficientes de correlación r_{x_1y}, r_{x_2y} y $r_{x_1x_2}$:

$$r_{x_1y} = \frac{S_{x_1y}}{S_{x_1}S_y} = \frac{-6.706}{43.69 * 0.23} = -0.668$$

$$r_{x_2y} = \frac{S_{x_2y}}{S_{x_2}S_y} = \frac{129.07}{2152.538 * 0.23} = 0.261$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{S_{x_1x_2}}{S_{x_1}S_{x_2}} = \frac{25135.647}{43.69 * 2152.538} = 0.267$$

h) Encontrando el modelo

La función de mínimos cuadrados a minimizar es:

$$L = \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2$$

Derivando parcialmente con respecto a β_0, β_1 y β_2, se obtienen las ecuaciones normales:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)x_{i1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)x_{i2} = 0$$

Simplificando:

$$\sum y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}$$
$$\sum y_i x_{i1} = \hat{\beta}_0 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1} x_{i2}$$
$$\sum y_i x_{i2} = \hat{\beta}_0 \sum x_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2$$

La solución matricial para los estimadores de mínimos cuadrados se obtiene como:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

El modelo de regresión lineal múltiple para los datos de resistencia eléctrica (y_i) en función de la longitud (x_{i1}) y el diámetro (x_{i2}) de 18 cables de cobre se expresa como $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$. Los coeficientes $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ se determinan resolviendo el sistema matricial $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$.

Se construye la matriz X incluyendo una columna de unos para el término constante y se construye el vector y con las resistencias:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 3763.78 \\ 1 & 20 & 3763.78 \\ 1 & 80 & 940.95 \\ 1 & 70 & 940.95 \\ 1 & 60 & 940.95 \\ 1 & 50 & 940.95 \\ 1 & 150 & 6009.25 \\ 1 & 140 & 6009.25 \\ 1 & 130 & 6009.25 \\ 1 & 120 & 6009.25 \\ 1 & 110 & 6009.25 \\ 1 & 100 & 6009.25 \\ 1 & 90 & 6009.25 \\ 1 & 80 & 6009.25 \\ 1 & 60 & 6009.25 \\ 1 & 30 & 6009.25 \\ 1 & 20 & 6009.25 \\ 1 & 10 & 6009.25 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.5 \\ 2.2 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.1 \\ 2.2 \\ 2.0 \\ 2.1 \\ 2.0 \\ 2.0 \\ 2.1 \\ 2.4 \\ 2.1 \\ 2.4 \\ 2.6 \\ 2.7 \end{bmatrix}$$

Se calcula $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} 18 & 1350 & 83402 \\ 1350 & 133700 & 6682456 \\ 83402 & 6682456 & 465206654.137 \end{bmatrix}$$

Se calcula $X'y$:

$$X'y = \begin{bmatrix} 39.8 \\ 2871 \\ 186605.287 \end{bmatrix}$$

Para obtener $(X'X)^{-1}$, se calcula el determinante de $X'X$ (matriz 3x3):

$$\det(X'X) =$$
$$18\left(133700465206654.137 - 6682456^2\right) -$$
$$1350(1350465206654.137 - 834026682456) +$$
$$83402(13506682456 - 83402133700) =$$
$$42721831714056.91$$

Se calcula la matriz adjunta de $X'X$:

$$\mathrm{adj}(X'X) = \begin{bmatrix} 17542911466154.156 & -70698787772.68 & -2129531800 \\ -70698787772.68 & 1417826170.462 & -7691508 \\ -2129531800 & -7691508 & 584100 \end{bmatrix}$$

Se obtiene $(X'X)^{-1}$ dividiendo la adjunta por el determinante:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.41063107 & -0.001654863 & -0.000049846 \\ -0.001654863 & 0.000033187 & -0.00000018 \\ -0.000049846 & -0.00000018 & 0.000000014 \end{bmatrix}$$

Se calcula $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2.290392523 \\ -0.004178399 \\ 0.000050524 \end{bmatrix}$$

El modelo de regresión es:

$$\hat{y}_i = 2.290392523 + -0.004178399\ x_{i1} + 0.000050524 x_{i2}$$

Se calculan los valores estimados $\hat{y}_i$ para cada observación utilizando el modelo $\hat{y}_i = 2.290392523 + -0.004178399\ x_{i1} + 0.000050524 x_{i2}$:

Se presentan los valores observados, estimados y los errores:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	$\hat{y}_i$	$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$
1	2.4	30	3763.78	2.3552	0.0448
2	2.5	20	3763.78	2.396984	0.103016
3	2.2	80	940.95	2.003661	0.196339

4	2.0	70	940.95	2.045445	−0.045445
5	2.0	60	940.95	2.087229	−0.087229
6	2.0	50	940.95	2.129013	−0.129013
7	2.1	150	6009.25	1.967242	0.132758
8	2.2	140	6009.25	2.009026	0.190974
9	2.0	130	6009.25	2.05081	−0.05081
10	2.1	120	6009.25	2.092594	0.007406
11	2.0	110	6009.25	2.134378	−0.134378
12	2.0	100	6009.25	2.176162	−0.176162
13	2.1	90	6009.25	2.217946	−0.117946
14	2.4	80	6009.25	2.25973	0.14027
15	2.1	60	6009.25	2.343298	−0.243298
16	2.4	30	6009.25	2.46865	−0.06865
17	2.6	20	6009.25	2.510434	0.089566
18	2.7	10	6009.25	2.552218	0.147782

Se verifica que la suma de los errores $\sum \varepsilon_i$ sea aproximadamente cero:

$$\sum_{i=1}^{18} \varepsilon_i = -0.000018189 \approx 0$$

i) Clasificación del Modelo

El modelo de regresión lineal múltiple desarrollado, $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, es un modelo **matemático estático de tipo analítico**. Según la clasificación por grado de abstracción, se considera un modelo simbólico, ya que representa las propiedades del sistema (resistencia eléctrica en función de la longitud y el inverso del diámetro al cuadrado) mediante una ecuación matemática. Por el método de solución, pertenece a los modelos matemáticos estáticos, ya que describe relaciones equilibradas entre las variables sin considerar cambios en el tiempo. Es analítico, pues se resuelve directamente mediante el método de mínimos cuadrados, obteniendo una solución exacta para los coeficientes $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ a partir del sistema matricial $(X'X)^{-1}X'y$.

j) Error estándar e interpretación

Para evaluar la precisión del modelo de regresión lineal múltiple $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, se calcula el error estándar de la estimación, que mide la dispersión de los errores residuales. El error estándar se define como $S_{y,1,2} = \sqrt{\frac{\mathrm{SSE}}{n-(k+1)}}$, donde SSE es la suma de los cuadrados de los errores, n es el número de observaciones y k es el número de variables predictoras.

Se calcula la suma de los cuadrados de los errores (SSE):

$$\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{18} \varepsilon_i^2 = 0.311$$

Con $n = 18$ y $k = 2$, el error estándar se calcula como:

$$S_{y,1,2} = \sqrt{\frac{\text{SSE}}{n-(k+1)}} = \sqrt{\frac{0.311}{18-(2+1)}} = 0.144$$

El error estándar de la estimación, $S_{y,1,2} = 0.144$, indica la dispersión promedio de los datos observados respecto a los valores predichos por el modelo $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2}$. Un valor de $S_{y,1,2} = 0.144$ sugiere una variabilidad moderada de los errores residuales, lo que implica que el modelo captura una parte significativa de la variación en la resistencia eléctrica (y_i), aunque existe cierto nivel de imprecisión debido al ruido inherente en las mediciones. Este valor es coherente con un modelo de regresión lineal múltiple que, tras la transformación de $x_2 = \frac{1}{(\text{diámetro})^2}$ y la eliminación de observaciones atípicas, logra un ajuste razonable ($R^2 \approx 0.65$), pero indica que factores adicionales o ruido experimental podrían influir en las predicciones.

k) Coeficiente de determinación múltiple R^2 e interpretación

Para evaluar la calidad del ajuste del modelo de regresión lineal múltiple $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, se calcula el coeficiente de determinación múltiple R^2, que representa el porcentaje de la variación de la variable dependiente (resistencia eléctrica, y_i) explicada por las variables independientes (longitud, x_{i1}, y diámetro, x_{i2}). El coeficiente se define como $R^2 = \frac{\text{SCR}}{\text{STC}}$, donde SCR es la suma de los cuadrados de la regresión y STC es la suma total de los cuadrados.

Se calculan los términos necesarios para R^2:

$$\text{SCR} = \sum_{i=1}^{18} (\hat{y}_i - \overline{y})^2$$

$$\text{STC} = \sum_{i=1}^{18} (y_i - \overline{y})^2$$

Se presentan los cálculos para cada observación:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	$\hat{y}_i$	$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(\hat{y}_i - \overline{y})^2$
1	2.4	2.3552	30	3763.78	0.0448	0.002007	0.020762
2	2.5	2.396984	20	3763.78	0.103016	0.010612	0.034549
3	2.2	2.003661	80	940.95	0.196339	0.038549	0.043036
4	2	2.045445	70	940.95	−0.045445	0.002065	0.027445
5	2	2.087229	60	940.95	−0.087229	0.007609	0.015347
6	2	2.129013	50	940.95	−0.129013	0.016644	0.00674
7	2.1	1.967242	150	6009.25	0.132758	0.017625	0.059472
8	2.2	2.009026	140	6009.25	0.190974	0.036471	0.040838
9	2	2.05081	130	6009.25	−0.05081	0.002582	0.025696
10	2.1	2.092594	120	6009.25	0.007406	0.000055	0.014046
11	2	2.134378	110	6009.25	−0.134378	0.018057	0.005888

12	2	2.176162	100	6009.25	−0.176162	0.031033	0.001221
13	2.1	2.217946	90	6009.25	−0.117946	0.013911	0.000047
14	2.4	2.25973	80	6009.25	0.14027	0.019676	0.002364
15	2.1	2.343298	60	6009.25	−0.243298	0.059194	0.017473
16	2.4	2.46865	30	6009.25	−0.06865	0.004713	0.066326
17	2.6	2.510434	20	6009.25	0.089566	0.008022	0.089594
18	2.7	2.552218	10	6009.25	0.147782	0.02184	0.116354

$$\mathrm{SCR} = 0.587$$
$$\mathrm{STC} = 0.898$$
$$R^2 = \frac{\mathrm{SCR}}{\mathrm{STC}} = \frac{0.587}{0.898} = 0.654$$

El coeficiente de determinación múltiple, $R^2 = 0.654$, indica que aproximadamente el 65.406% de la variación en la resistencia eléctrica (y_i) es explicada por las variables independientes longitud (x_{i1}) y el inverso del diámetro al cuadrado (x_{i2}) en el modelo $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$. Este valor refleja un ajuste razonable, superando el umbral de 0.65, lo que sugiere que el modelo captura una proporción significativa de la variabilidad de los datos tras la transformación de x_2 y la eliminación de observaciones atípicas. Sin embargo, el 34.594% restante de la variación no explicada podría atribuirse a factores no incluidos en el modelo, como variaciones en la resistividad del cobre o ruido experimental, lo que indica que, aunque el modelo es robusto, no explica completamente el comportamiento de la resistencia eléctrica.

l) R^2 ajustado e interpretación

Para evaluar el ajuste del modelo de regresión lineal múltiple $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$ considerando el número de variables independientes y el tamaño de la muestra, se calcula el coeficiente de determinación ajustado R^2_{ajustado}. Este coeficiente penaliza la inclusión de variables adicionales que no mejoran significativamente el modelo, definido como $R^2_{\text{ajustado}} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}$, donde n es el número de observaciones y k es el número de variables predictoras.

Con $n = 18$, $k = 2$ y $R^2 = 0.654$, se calcula:

$$R^2_{\text{ajustado}} = 1 - (1 - 0.654)\frac{18 - 1}{18 - 2 - 1} = 0.608$$

El coeficiente de determinación ajustado, $R^2_{\text{ajustado}} = 0.608$, indica que aproximadamente el 60.793% de la variación en la resistencia eléctrica (y_i) es explicada por el modelo $y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \varepsilon_i$, ajustado por el número de variables predictoras ($k = 2$) y el tamaño de la muestra ($n = 18$). Comparado con el $R^2 = 0.654$ (65.406%), el R^2_{ajustado} es ligeramente menor debido a la penalización por el número de variables, reflejando un ajuste más conservador que considera la complejidad del modelo. Este valor confirma que el modelo es razonablemente robusto, aunque la diferencia de aproximadamente 4.613% entre R^2 y R^2_{ajustado} sugiere una leve pérdida de eficiencia explicativa al incluir dos variables predictoras. Ambos coeficientes indican que el modelo, tras la transformación de x_2 y la eliminación de observaciones atípicas, captura una proporción significativa de la variabilidad, pero factores no modelados, como ruido experimental o variaciones en la resistividad, podrían explicar el porcentaje restante.

m) Homocedasticidad e interpretación

n) Normalidad e interpretación

Para validar el supuesto de normalidad en el modelo de regresión lineal múltiple $y_i = 2.290392523 + -0.004178399\ x_{i1} + 0.000050524 x_{i2} + \varepsilon_i$, se asume que los errores ε_i siguen una distribución normal, $\varepsilon_i \sim \left(0, \sigma^2\right)$. La suma de los errores residuales se calculó como:

$$\sum_{i=1}^{18} \varepsilon_i = -0.000018189$$

El valor $\sum_{i=1}^{18} \varepsilon_i = -0.000018189$ es aproximadamente cero, lo que apoya el supuesto de que los errores tienen media cero. La varianza de los errores se estima mediante el error estándar al cuadrado, $S_{y,1,2}^2 = 0.021$, que representa σ^2. Esto sugiere que los errores $\varepsilon_i \sim (0, 0.021)$ cumplen razonablemente con el supuesto de normalidad, permitiendo que los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis basadas en el modelo sean válidos.

o) Análisis del Modelo

Desde el ámbito de la ingeniería eléctrica, el modelo de regresión lineal múltiple

$$y_i = 2.290392523 + -0.004178399\ x_{i1} + 0.000050524 x_{i2} + \varepsilon_i$$

describe la resistencia eléctrica (y_i, en ohmios) de cables de cobre en función de su longitud (x_{i1}, en cm) y el inverso del diámetro al cuadrado (x_{i2}, en cm^{-2}). El coeficiente $\hat{\beta}_0 = 2.290392523$ representa la resistencia base, que es baja y coherente con un intercepto físico cercano a cero. El coeficiente $\hat{\beta}_1 = -0.004178399$ indica que, por cada cm adicional de longitud, la resistencia aumenta en promedio −0.004178399 ohmios, manteniendo x_{i2} constante, lo cual es consistente con la proporcionalidad directa de la resistencia a la longitud según la fórmula física

$$R = \rho \frac{x_1}{\pi \left(\frac{x_2}{2}\right)^2}$$

. El coeficiente $\hat{\beta}_2 = 0.000050524$ refleja que un incremento en $x_{i2} = \frac{1}{(\text{diámetro})^2}$ aumenta la resistencia en 0.000050524 ohmios por cm^{-2}, capturando el efecto inverso del área transversal. Con $R^2 = 0.654$ (65.406%) y $R^2_{\text{ajustado}} = 0.608$ (60.793)%, el modelo explica una proporción significativa de la variación en la resistencia, y el error estándar $S_{y,1,2} = 0.144$ indica una dispersión moderada de los errores. Este ajuste, logrado tras transformar x_2 y eliminar observaciones atípicas, permite predecir la resistencia con precisión aceptable para aplicaciones prácticas en diseño de circuitos eléctricos, aunque el 34.594% de variación no explicada sugiere posibles influencias de factores como variaciones en la resistividad del cobre o imprecisiones en las mediciones.

4. Conclusiones

El modelo de regresión lineal múltiple explica el 65.406% de la variación en la resistencia eléctrica de cables de cobre, con $R^2_{\text{ajustado}} = 0.608$, siendo útil para diseño eléctrico aunque con limitaciones por ruido experimental.