INF 126 - Cálculo 2.

Ponderación.

1er parcial.	30 puntos.	Sábado 29 de marzo.
2do parcial.	30 puntos.	Sábado 17 de mayo.
Exámen final.	30 puntos.	Sábado 21 de junio.
Prácticas.	10 puntos.	
Exámen segundo turno.	100 puntos.	Miércoles 25 de junio.

El exámen de segundo turno solo aplica a partir de los 35 puntos.

Auxiliar.

76267371.
Auxiliar Alexander.

1. Escalar.

Un escalar es un número $x \in \mathbb{R}$.

2. Vector.

Un vector v es una recta en el espacio. Un vector no es lo mism que una recta.
En el plano cartesiano (dos dimensiones) tiene dos componentes, $v = \langle a, b \rangle$.
Se representa en una sistema de coordenadas; en el plano cartersiano, partiendo desde el origen $(0, 0)$ hasta el punto (a, b).
Se describe por los parametros magnitud (un escalar) y dirección (un ángulo).

3. Norma o magnitud.

La norma de un vector v se escribe $\|v\|$ e indica el tamaño del vector.

Definición de norma:

$$v = \langle a, b \rangle$$

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da como resultado un escalar.

La norma de la suma de vectores no es igual a la suma de sus normas, es decir

$$\|v + w\| \neq \|v\| + \|w\|$$

Ese caso solo ocurre si los vectores son paralelos

4. Dirección.

En un plano cartesiano, la dirección es el ángulo θ que forma un vector $v = \langle a, b \rangle$ respecto al eje x positivo.

Definición de ángulo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Siguiedo las reglas:

4.1. Si $a > 0$:

Si $b \geq 0$: Sin modificaciones.
Si $b < 0$:Suma 360° al resultado

4.2. Si $a < 0$:

Suma 180° al resultado

4.3. Si $a = 0$:

Si $b > 0$: El resultado es 90°.
Si $b < 0$: El resultado es 270°.

5. Operaciones básicas con vectores.

5.1. Entre un vector $v = \langle a, b\rangle$ y un escalar $x \in \mathbb{R}$.

Definición de multiplicacion por un escalar:

$$xv = x\langle a, b\rangle = \langle ax, bx\rangle$$

Da como resultado un vector, que mantiene la dirección de v.

Definición de división por un escalar:

$$\frac{v}{x} = \frac{\langle a, b\rangle}{x} = \left\langle \frac{a}{x}, \frac{b}{x}\right\rangle$$

Da como resultado un vector, que mantiene la dirección de v.

5.2. Entre dos vectores.

Sean $v_1 = \langle a_1, b_1\rangle$ y $v_2 = \langle a_2, b_2\rangle$:

Definición de suma de vectores:

$$\begin{aligned} &v_1 + v_2 \\ &= \langle a_1, b_1\rangle + \langle a_2, b_2\rangle \\ &= \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2\rangle \end{aligned}$$

Da como resultado un vector.

Definición de resta de vectores:

$$\begin{aligned} &v_1 - v_2 \\ &= \langle a_1, b_1\rangle - \langle a_2, b_2\rangle \\ &= \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2\rangle \end{aligned}$$

Da como resultado un vector.

Definiciones de producto escalar, producto interior producto punto:

$$v_1 \cdot v_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2$$
$$v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos\theta$$

Donde θ es el ángulo entre v_1 y v_2. Da como resultado un escalar.

Definición de producto vectorial o producto cruz en dos dimensiones:

$$v_1 \times v_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Da como resultado un escalar.

Sean $v_1 = \langle a_1, b_1, c_1\rangle$ y $v_2 = \langle a_2, b_2, c_2\rangle$:

Definición de producto vectorial o producto cruz en tres dimensiones:

$$v_1 \times v_2 = \langle a_1 c_2 - c_1 b_2, -(a_1 c_2 - c_1 a_2), a_1 b_2 - b_1 a_2\rangle$$

Da como resultado un vector que es perpendicular a v_1 y v_2.

5.3. Producto mixto o triple producto escalar

Definición de triple producto escalar

$$u \cdot (v \times w)$$
$$= \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

6. Vectores unitarios.

Son vectores v tal que su norma $\|v\| = 1$.

Definición de vector unitario:

$$v = \langle a, b \rangle$$
$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1} = 1$$

7. Nomalización.

Es el proceso de convertir un vector v cualquiera, a otro vector $\vec{v}$ con la misma dirección que v pero con norma igual a uno $\|\vec{v}\| = 1$; es decir, unitario.

Definición de normalización:

$$\text{sea } v = \langle a, b \rangle$$
$$\vec{v} = \frac{v}{\|v\|}$$

8. Vectores canónicos

Todo vector en dos dimensiones ($\mathbb{R}^2$) tiene 2 vectores canónicos.

$$i = \langle 1, 0 \rangle$$
$$j = \langle 0, 1 \rangle$$

9. Descomposición de vectores

Un vector se puede descomponer por sus vectores canónicos.

$$v = \langle a, b \rangle$$
$$= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$$
$$= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle$$
$$= ai + bj$$

10. Vectores paralelos

Dos vectores son paralelos si uno es un producto escalar del otro.

Definición de vectores paralelos:

$$v_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$$
$$v_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$$
$$x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Son paralelos si } x v_1 = v_2$$

11. Vectores ortogonales

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) si su producto escalar es cero

Definición de vectores ortogonales:

$$v_1 \cdot v_2 = 0$$
$$\|v_1\|\|v_2\| \cos\theta = 0$$

Se cumple siempre que $\theta = 90^{\circ}$

12. Propiedades de vectores

Desigualdad del triángulo:

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

Vector que se forma entre los puntos $p_1 = (a_1, b_1)$ y $p_2 = (a_2, b_2)$:

$$v = p_2 - p_1$$
$$= \langle a_2 - a_1, b_2 - b_1 \rangle$$

Distancia D entre los puntos $p_1 = (a_1, b_1)$ y $p_2 = (a_2, b_2)$:

$$v = p_2 - p_1$$
$$D = \|v\|$$

Componentes a partir de medidas:

$$\text{Magnitud: } \|v\|, \text{ dirección: } \theta$$
$$v = \langle \|v\| \cos\theta, \|v\| \sin\theta \rangle$$

Punto medio entre dos puntos:

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2)$$
$$M = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2} \right)$$

Norma del producto vectorial:

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin\theta$$

Siendo θ el ángulo que forman los vectores.

Paralelogramo a partir de cuatro puntos:

$$A, B, C, D$$

$$\text{Si se cumple que } A + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = B$$

$$\text{O que } A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = C$$

$$\text{O que } A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = D$$

Entonces los cuatro puntos forman un paralelogramo con $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{AY}$ como lados adyacentes.

Área del paralelogramo con lados adyacentes igual a los vectores v y u:

$$A = \|u \times v\|$$

Paralelepípedo a partir de ocho puntos:

$$A, B, C, D, E, F, G, H$$
$$\text{Si se cumple que:}$$
$$A + u = B$$
$$A + v = C$$
$$A + w = D$$
$$A + u + v = E$$
$$A + u + w = F$$
$$A + v + w = G$$
$$A + u + v + w = H$$
$$\text{Probar con } u = \overrightarrow{AU},\ \ v = \overrightarrow{AV} \text{ y } w = \overrightarrow{AW}$$

Siendo U, Y y W cualquier punto; u, v y w deben ser linealmente independientes. Entonces los ocho puntos forman un paralelepípedo con u, v y w como aristas adyacentes.

Volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes u, v y w:

$$V = u \cdot (v \times w)$$

13. Proyección ortogonal

La proyección ortogonal de un vector u sobre otro vector v es un vector que tiene la misma dirección que v con una magnitud determinada de qué tanto u apunta a esa dirección.

Definición de proyección ortogonal:

$$\text{proj}_v u = v\left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2}\right)$$

14. Propiedades de la proyección ortogonal

Componente w_1 de un vector u paralelo a un vector v

$$f$$
$$w_1 = \text{proj}_v u$$

Componente w_2 de un vector u ortogonal a un vector v

$$w_2 = u - \mathrm{proj}_v u$$

15. Recta en tres dimensiones

Una recta en el sistema de coordenadas de tres dimensiones no tiene un punto de inicio ni fin, o sea que mientras que está atravesando infinitos puntos.
Una recta se puede describir con un punto al que atraviesa, un ángulo y una variable t, que representa cualquier punto que esa recta atraviera. El ángulo es la dirección de un vector, conocido como el vector director.
La recta puede escribirse con ecuaciones paramétricas o en forma vectorial.

Definición de recta con ecuaciones paramétricas:

$$x = p_1 + v_1 t$$
$$y = p_2 + v_2 t$$
$$z = p_3 + v_3 t$$

Donde $p = (p_1, p_2, p_3)$ es el punto que atraviesa, y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es el vector director.

Definición de recta con forma vectorial:

$$r(t) = (p_1, p_2, p_3) + (v_1, v_2, v_3)t$$

Donde $p = (p_1, p_2, p_3)$ es el punto que atraviesa, y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es el vector director.

A partir de las ecuaciones paramétricas, se pueden formar las ecuaciones simétricas despejando t e igualando cada término.

Definición de recta con forma vectorial:

$$x = p_1 + v_1 t \longrightarrow t = \frac{x - p_1}{v_1}$$
$$y = p_2 + v_2 t \longrightarrow t = \frac{y - p_2}{v_2}$$
$$z = p_3 + v_3 \longrightarrow t = \frac{z - p_2}{v_2}$$
$$t = \frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2} = \frac{z - p_2}{v_2}$$

Donde $p = (p_1, p_2, p_3)$ es el punto que atraviesa, y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es el vector director