1er Parcial DAT 246 II/2025

Nombre 1 Paterno, materno nombres

Nombre 2 Paterno, materno nombres

1. Resumen

Este trabajo analiza la resistencia eléctrica de 30 cables de cobre comunes en función de su longitud (x_1, en cm) y diámetro (x_2, en cm), mediante un modelo de regresión lineal múltiple. El objetivo es determinar cómo estas variables independientes influyen en la resistencia (y, en ohmios) bajo condiciones de uso cotidiano. Se recopilaron 30 observaciones, considerando cables con longitudes entre 10 y 300 cm y diámetros de 0.001 a 0.0326 cm. El modelo se ajusta utilizando el método de mínimos cuadrados para estimar los coeficientes β_0, β_1 y β_2, cumpliendo supuestos de linealidad, normalidad, homocedasticidad e independencia. Los resultados permitirán predecir la resistencia eléctrica y evaluar la relación entre las variables, contribuyendo al diseño eficiente de sistemas eléctricos. Se espera que la longitud incremente la resistencia y el diámetro la reduzca, según principios físicos.

2. Objetivo

Determinar la resistencia eléctrica de una muestra de 30 cables de cobre comunes y de uso cotidiano en función de su longitud y grosor, mediante la construcción de un modelo de regresión lineal múltiple, con el propósito de identificar la relación entre estas variables bajo las condiciones específicas de cables de cobre de aplicación habitual.

3. Desarrollo

a) Muestreo Real

El muestreo consiste en 30 observaciones de cables de cobre comunes, donde se midió la resistencia eléctrica (y, en ohmios), la longitud (x_1, en cm) y el diámetro (x_2, en cm). A continuación, se presenta la tabla con los datos recopilados:

Número	y: Resistencia (ohmios)	x_1: Longitud (cm)	x_2: Diámetro (cm)
1	5.8	300	0.0163
2	2.9	50	0.0163
3	2.8	40	0.0163
4	2.4	30	0.0163
5	2.5	20	0.0163
6	4.2	10	0.0163
7	3.2	100	0.0326
8	2.6	90	0.0326
9	2.2	80	0.0326

10	2.0	70	0.0326
11	2.0	60	0.0326
12	2.0	50	0.0326
13	2.6	10	0.0326
14	2.1	150	0.0129
15	2.2	140	0.0129
16	2.0	130	0.0129
17	2.1	120	0.0129
18	2.0	110	0.0129
19	2.0	100	0.0129
20	2.1	90	0.0129
21	2.4	80	0.0129
22	2.0	70	0.0129
23	2.1	60	0.0129
24	2.0	50	0.0129
25	2.2	40	0.0129
26	2.4	30	0.0129
27	2.6	20	0.0129
28	2.7	10	0.0129
29	2.4	20	0.001
30	2.4	10	0.001

b) Intervalos y Representación de Clases

c) Gráfica de los puntos en tres dimensiones

Se grafican los 30 puntos de la muestra en un espacio tridimensional, con x_1 (longitud, en cm) en el eje X, x_2 (diámetro, en cm) en el eje Z, y y (resistencia, en ohmios) en el eje Y. Los puntos son:

Para graficar manualmente, se recomienda escalar los ejes: por ejemplo, 1 cm en papel = 50 cm para x_1, 1 cm = 1 ohmio para y, y 1 cm = 0.01 cm para x_2. Los puntos se trazan en un sistema de coordenadas 3D, usando proyección isométrica.

d) Gráfica de los regresores de manera individual

Se grafican los puntos de la muestra para analizar la relación de la resistencia (y) con cada regresor por separado: $y = f(x_1)$ (resistencia vs. longitud) y $y = f(x_2)$ (resistencia vs. diámetro).

Resistencia vs. Longitud ($y = f(x_1)$)

Los puntos (x_{i1}, y_i) se grafican en un plano 2D, con x_1 (longitud, en cm) en el eje x y y (resistencia, en ohmios) en el eje Y. Se distinguen los puntos según el valor de x_2.

Para graficar manualmente, usa una escala de 1 cm = 50 cm para x_1 y 1 cm = 1 ohmio para y. Usa símbolos distintos (por ejemplo, círculos para $x_2 = 0.0163$, cruces para $x_2 = 0.0326$, triángulos para $x_2 = 0.0129$, cuadrados para $x_2 = 0.001$).

Resistencia vs. Diámetro ($y = f(x_2)$)
Los puntos (x_{i2}, y_i) se grafican en un plano 2D, con x_2 (diámetro, en cm) en el eje X y y (resistencia, en ohmios) en el eje Y. Se distinguen los puntos según rangos de x_1:

Para graficar manualmente, usa una escala de 1 cm = 0.01 cm para x_2 y 1 cm = 1 ohmio para y. Usa símbolos distintos para rangos de x_1 (por ejemplo, $[10, 68)$, $[68, 126)$, $[126, 184)$, $[184, 242)$, $[242, 300]$).

e) Hiperplanos

f) Método de Mínimos Cuadrados

Se usará el método de mínimos cuadrados. Este método minimiza la suma de los cuadrados de los residuos, asegurando un ajuste óptimo del modelo a los datos.

El modelo de regresión lineal múltiple es:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

donde β_0 es el intercepto, β_1 y β_2 son los coeficientes parciales que indican el cambio en y por unidad de x_1 o x_2, manteniendo la otra variable constante, y ε_i es el error con media cero.

Se minimiza la función:

$$L = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2$$

Derivando L respecto a β_0, β_1 y β_2 e igualando a cero, se obtienen los estimadores $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$. El método es adecuado por su simplicidad y capacidad para modelar múltiples variables, ajustándose a la relación lineal asumida entre resistencia, longitud y diámetro.

g) Cálculos

Se plantea el modelo de regresión lineal múltiple para la resistencia eléctrica y_i en función de la longitud x_{i1} y el diámetro x_{i2} de los cables, dado por:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i$$

La función de mínimos cuadrados a minimizar es:

$$L = \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2})^2$$

Derivando parcialmente con respecto a β_0, β_1 y β_2, se obtienen las ecuaciones normales:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)x_{i1} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = -2\sum\left(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2}\right)x_{i2} = 0$$

Simplificando:

$$\sum y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}$$
$$\sum y_i x_{i1} = \hat{\beta}_0 \sum x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1} x_{i2}$$
$$\sum y_i x_{i2} = \hat{\beta}_0 \sum x_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2$$

Se procede a calcular las sumatorias necesarias con los datos proporcionados ($n = 30$, $k = 2$, $p = k + 1 = 3$):

$$\sum y_i = 74.9$$
$$\sum x_{i1} = 2140$$
$$\sum x_{i2} = 0.5215$$
$$\sum x_{i1}^2 = 255600$$
$$\sum x_{i2}^2 = 0.01153161$$
$$\sum x_{i1} x_{i2} = 37.841$$
$$\sum y_i x_{i1} = 5890$$
$$\sum y_i x_{i2} = 1.30615$$

La solución matricial para los estimadores de mínimos cuadrados se obtiene como:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' y$$

Se construye la matriz X incluyendo la columna de unos para el término independiente β_0:

$$y = \begin{bmatrix} 5.8 \\ 2.9 \\ 2.8 \\ 2.4 \\ 2.5 \\ 4.2 \\ 3.2 \\ 2.6 \\ 2.2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2.6 \\ 2.1 \\ 2.2 \\ 2 \\ 2.1 \\ 2 \\ 2 \\ 2.1 \\ 2.4 \\ 2 \\ 2.1 \\ 2 \\ 2.2 \\ 2.4 \\ 2.6 \\ 2.7 \\ 2.4 \\ 2.4 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 300 & 0.0163 \\ 1 & 50 & 0.0163 \\ 1 & 40 & 0.0163 \\ 1 & 30 & 0.0163 \\ 1 & 20 & 0.0163 \\ 1 & 10 & 0.0163 \\ 1 & 100 & 0.0326 \\ 1 & 90 & 0.0326 \\ 1 & 80 & 0.0326 \\ 1 & 70 & 0.0326 \\ 1 & 60 & 0.0326 \\ 1 & 50 & 0.0326 \\ 1 & 10 & 0.0326 \\ 1 & 150 & 0.0129 \\ 1 & 140 & 0.0129 \\ 1 & 130 & 0.0129 \\ 1 & 120 & 0.0129 \\ 1 & 110 & 0.0129 \\ 1 & 100 & 0.0129 \\ 1 & 90 & 0.0129 \\ 1 & 80 & 0.0129 \\ 1 & 70 & 0.0129 \\ 1 & 60 & 0.0129 \\ 1 & 50 & 0.0129 \\ 1 & 40 & 0.0129 \\ 1 & 30 & 0.0129 \\ 1 & 20 & 0.0129 \\ 1 & 10 & 0.0129 \\ 1 & 20 & 0.001 \\ 1 & 10 & 0.001 \end{bmatrix}$$

Se calcula $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} 30 & 2140 & 0.5215 \\ 2140 & 255600 & 37.841 \\ 0.5215 & 37.841 & 0.01153161 \end{bmatrix}$$

Se calcula $X'y$:

$$X'y = \begin{bmatrix} 74.9 \\ 5890 \\ 1.30615 \end{bmatrix}$$

Para resolver $\hat{\beta}$, se necesita $(X'X)^{-1}$. Se define la matriz $X'X$:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.199300069 & -0.0006501008 & -6.8797437156 \\ -0.0006501008 & 0.0000097295 & -0.0025275161 \\ -6.8797437156 & -0.0025275161 & 406.1384390694 \end{bmatrix}$$

Se calcula $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2.112504202 \\ 0.0053128899 \\ 0.2978480631 \end{bmatrix}$$

El modelo de regresión estimado es:

$$\widehat{y_i} = 2.112504202 + 0.0053128899x_{i1} + 0.2978480631x_{i2}$$

Se calculan los valores estimados $\hat{y}_i$ para cada observación utilizando el modelo $\hat{y}_i = 2.112504202 + 0.0053128899x_{i1} + 0.2978480631x_{i2}$:

Se presentan los valores observados, estimados y los errores:

i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	$\hat{y}_i$	$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_i$
1	5.8	300	0.0163	3.7112260954	2.0887739046
2	2.9	50	0.0163	2.3830036204	0.5169963796
3	2.8	40	0.0163	2.3298747214	0.4701252786
4	2.4	30	0.0163	2.2767458224	0.1232541776
5	2.5	20	0.0163	2.2236169234	0.2763830766
6	4.2	10	0.0163	2.1704880244	2.0295119756
7	3.2	100	0.0326	2.6535030389	0.5464969611
8	2.6	90	0.0326	2.6003741399	−0.0003741399
9	2.2	80	0.0326	2.5472452409	−0.3472452409
10	2	70	0.0326	2.4941163419	−0.4941163419
11	2	60	0.0326	2.4409874429	−0.4409874429
12	2	50	0.0326	2.3878585439	−0.3878585439
13	2.6	10	0.0326	2.1753429479	0.4246570521
14	2.1	150	0.0129	2.913279927	−0.813279927
15	2.2	140	0.0129	2.860151028	−0.660151028
16	2	130	0.0129	2.807022129	−0.807022129
17	2.1	120	0.0129	2.75389323	−0.65389323
18	2	110	0.0129	2.700764331	−0.700764331

19	2	100	0.0129	2.647635432	−0.647635432
20	2.1	90	0.0129	2.594506533	−0.494506533
21	2.4	80	0.0129	2.541377634	−0.141377634
22	2	70	0.0129	2.488248735	−0.488248735
23	2.1	60	0.0129	2.435119836	−0.335119836
24	2	50	0.0129	2.381990937	−0.381990937
25	2.2	40	0.0129	2.328862038	−0.128862038
26	2.4	30	0.0129	2.275733139	0.124266861
27	2.6	20	0.0129	2.22260424	0.37739576
28	2.7	10	0.0129	2.169475341	0.530524659
29	2.4	20	0.001	2.2190598481	0.1809401519
30	2.4	10	0.001	2.1659309491	0.2340690509

Se verifica que la suma de los errores $\sum \varepsilon_i$ sea aproximadamente cero:

$$\sum_{i=1}^{30} \varepsilon_i = -0.0000382109$$