UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRÉS
FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

GUÍA DE EJERCICIOS
CÁLCULO II
ELABORADO POR: DAISY ARROYO FERNANDEZ

Paralelo A: M.Sc. Roberto Huaranca Ampa

Paralelo B: Dra. Daisy Arroyo Fernandez

Paralelo C: M.Sc. Eugenio Castaños Calle

Paralelo D: Lic. Ramiro Choque Canaza

EVALUACIÓN	PONDERACIÓN	FECHA
Examen Primer Parcial (Cap. 1,2 y 3)	30	Sábado 29/03/2025
Examen Segundo Parcial (Cap. 4)	30	Sábado 17/05/2025
Examen Final (Cap. 5)	30	Sábado 21/06/2025
Prácticas	10	
Examen Segundo Turno (Todos los Capítulos) Nota mínima 35/100	100	Miércoles 25/06/2025

GESTIÓN I – 2025

5. INTEGRALES MÚLTIPLES

Integración en dos variables

1. Sea A el cuadrado con vértices en $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$. Calcular aproximadamente el valor de la integral
$$\iint_A (x^2y)\,dA$$
   a) Dividiendo A en dos partes.
   b) Dividiendo A en cuatro partes.
2. Sea A el rectángulo con vértices en $(-1,0),(1,0),(1,2),(-1,2)$. Calcular aproximadamente el valor de la integral
$$\iint_A (1+x^2y)\,dA$$
   a) Dividiendo A en dos partes.
   b) Dividiendo A en cuatro partes.
3. Sea A el triángulo limitado por $x=0, y=0, x+y=1$; Calcular aproximadamente el valor de la integral
$$\iint_A e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$
4. Evaluar
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dydx \quad \text{y} \quad \int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dxdy$$
¿Las respuestas contradicen el Teorema de Fubini? Explicar lo que sucede.
5. Evaluar
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{y}{1+xy}\,dydx$$
   a) ¿En qué sentido son similares los teoremas de Fubini y de Clairaut?
   b) Si $f(x,y)$ es continua en $[a,b]\times[c,d]$ y
$$g(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(s,t)\,dtds$$
   para $a<x<b, c<y<d$. Probar que $g_{xy}=g_{yx}=f(x,y)$.

Integrales dobles sobre regiones generales

6. Calcular:
   a) $\iint_A x^2\,dA$, siendo A el rectángulo limitado por $x=0, x=2, y=0, y=4$.
   b) $\iint_A (x+2y)dA$, si A es el triángulo limitado por $x=0, y=0, x+y=1$.
   c) $\iint_A xy\,dA$, donde A es el cuadrilátero limitado por $x+y=1, x+y=3, y=0, y=1$.
   d) $\iint_A (x^2+y)\,dA$, donde A es la región limitada por $y=x^2, x=y^3$.
   e) $\iint_A x^2\,dA$, si A es la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy=16$ y las rectas $x=y, x=0, y=0, x=8$.
   f) $\iint_A y^2\,dA$, donde A es la región del primer cuadrante limitada por $xy=4, x=y, y=x-1$.
   g) $\iint_A \frac{1}{\sqrt{2a-x}}dA$, donde A es el círculo de radio a y tangente a los ejes coordenados que se encuentra en el primer cuadrante.

7. Calcular:
   a) $\iint_A y^2\, dA$, siendo A el rectángulo limitado por $x=0, x=1, y=0, y=3$.
   b) $\iint_A y dA$, si A es el triángulo limitado por $y=x, x+y=2, x=0$.
   c) $\iint_A (2x-y)dA$, si A es el cuadrilátero limitado por $x=0, x=1, x+y=1, x+y=3$.
   d) $\iint_A (1+2x)dA$, donde A es la región limitada por $y=x^2, x=y$.
   e) $\iint_A (1+x)dA$, si A es el triángulo limitado por $y=x, x+y=2, y=0$.
   f) $\iint_A xy\, dA$, donde A es la región limitada por $y=x^3, y=x$.
   g) $\iint_A (x-y)\, dA$, si A es la región limitada por $x=y^2, y=x^3$.
8. Graficar la región de integración e invertir el orden de integración:
   a) $\int_0^1 \int_0^x f(x,y)dydx$
   b) $\int_0^e \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$
   c) $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)dxdy$
   d) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$
   e) $\int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$
   f) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x} f(x,y)dydx$
   g) $\int_0^3 \int_x^3 e^{-y^2} dydx$, y calcular la integral.
9. Graficar la región de integración e invertir el orden de integración:
   a) $\int_0^2 \int_0^{2x} f(x,y)dydx$
   b) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$
   c) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$
   d) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$, y calcular la integral.

Aplicación: Área de regiones planas y otros.

10. Hallar el área de la región limitada por las curvas dadas.
    a) $3x+4y=24, x=0, y=0$
    b) $y=x^2+2, y=x+4$
    c) $y^2=10x+25, y^2=-6x+9$
    d) $y=x^2, x=y^3$
    e) $y=x^3-x, y=x-x^3$
    f) $x+3y=3, x+3y=6, y=2x, y=2x+1$ (Sugerencia: efectuar un cambio de variables).
    g) $x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=b^2,\ 0<a<b$ (Sugerencia: pasar a coordenadas polares).
11. Hallar el área de la región limitada por las curvas dadas.
    a) $x+y=2, 2y=x+4, y=0$
    b) $y^2=5-x, y=x+1$
    c) $y^2=2-x, y^2=2x-2$
    d) $y=x^2, x^2+y^2=2$
    e) $(y-x)^2+x^2=1$
    f) $y=x^2, y=x, y=3x$
    g) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (Sugerencia: efectuar un cambio de variables).
    h) $y=x^3, y=4x^3, x=y^3, x=4y^3$ (Sugerencia: efectuar un cambio de variables).
12. Hallar el área encerrada por $x^4+y^4=x^2+y^2$.
13. Calcular el área de la región limitada por $x=6y-y^2, y=x$
14. Hallar el área de la región limitada por $x+y=1, x+y=2, y=2x, y=2x+2$.
15. Hallar el área de la región del primer cuadrante limitada por $xy=4, xy=8, xy^3=5, xy^3=15$.

16. Hallar el área de la región anular limitada por $x^2+y^2=4, x^2+y^2=9$.

Integración en tres variables

17. Dividiendo en cuatro partes la región V limitada por los planos $x=4, y=2, z=4$ y los planos coordenados, calcular aproximadamente el valor de la integral triple

$$\iiint_V (x-y+z)\, dV$$

18. Si V es el conjunto $0\leq x\leq 2, 0\leq y\leq 3, 1\leq z\leq 2$, calcular aproximadamente la integral triple

$$\iiint_V xyz\, dV$$

Integrales triples sobre regiones generales

19. Calcular el volumen del tetraedro limitado por $x+y+z=a$ y los planos coordenados.
20. Hallar el volumen del sólido limitado por los planos $x=y, x+3y+z=4, y=0, z=0$.
21. Hallar el volumen encerrado por $x+y-z=0, z=4$ y los planos coordenados $x=0, y=0$.
22. Hallar el volumen del sólido limitado por $x+y=1, x=2y, y=0, z=0, z=4$.
23. Hallar el volumen encerrado por $x^2+y^2=z, x^2+y^2=4, z=0$.
24. Hallar el volumen encerrado por $x^2+y^2+z^2=R^2$.
25. Hallar el volumen encerrado por $x-y+2z=0, y=2, x=0, z=0$.
26. Hallar el volumen encerrado entre las esferas $x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2+z^2=4$.
27. Hallar el volumen limitado por los cilindros $x^2+y^2=4, x^2+z^2=4$.
28. Hallar el volumen limitado por los cilindros $x^2+y^2=a^2, x^2+z^2=a^2$.
29. Calcular el volumen limitado por $x^2+y^2=4, z=0, z=2y$.
30. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$, el cilindro $x^2-x+y=0$, el plano $z=0, y=0$.
31. Calcular el volumen limitado por $x^2+y^2=4, x^2+y^2=2z^2, z=0$.
32. Calcular el volumen limitado por $x^2+y^2=z, x^2+y^2-y=0, z=0$.
33. Hallar el volumen limitado por $y^2+4z=16, x^2+y^2=16, z=0$.
34. Hallar el volumen encerrado por $z^2=y, x^2+9y-9=0$.
35. Hallar el volumen encerrado por $x^2+4y^2+z=1, x^2+4y^2-4z=1$.
36. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
37. Hallar el volumen limitado superiormente por $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente por $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
38. Hallar el volumen de la región limitada superiormente por $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente por $z=x^2+y^2$.

Integración en coordenadas polares

39. Bosquejar la región cuya área está dada por la integral y evaluar la integral

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_{1}^{2} r\, dr\, d\theta$$

40. Bosquejar la región cuya área está dada por la integral y evaluar la integral

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{1}^{2\sin\theta} r\, dr\, d\theta$$

41. Evaluar la integral cambiando a coordenadas polares.
    a) $\iint_A x^2y$, donde A es la mitad superior del disco con centro en el origen y radio 5.
    b) $\iint_A (2x-y)dA$, donde A es la región en el primer cuadrante encerrada por la circunferencia $x^2+y^2=4$ y las rectas $x=0$ y $y=x$.
    c) $\iint_A \sin(x^2+y^2)\, dA$, donde A es la región en el primer cuadrante entre las circunferencias con

centro en el origen y radios 1 y 3.

d) $\iint_A \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dA$, donde A es la región que está entre las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$ con $0 < a < b$.

42. Evaluar la integral cambiando a coordenadas polares.

a) $\iint_A e^{-x^2-y^2}\, dA$, donde A es la región acotada por la semicircunferencia $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y.

b) $\iint_A \cos\sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, donde A es el disco con centro en el origen y radio 2.

c) $\iint_A \arctan(y/x)\; dA$, donde $A = \{(x, y) | \, 1 \le x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$.

d) $\iint_A x\, dA$, donde A es la región en el primer cuadrante localizada entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

43. Use coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

a) Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \le 4$.

b) Bajo el paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy.

c) Encerrada por el hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 2$.

d) Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

44. Usar coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

a) Una esfera de radio a.

b) Acotada por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante.

c) Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

d) Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

e) Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

45. Evaluar la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

a) $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

b) $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$

46. Evaluar la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

a) $\int_{0}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 y\, dx\, dy$

b) $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

Integración en coordenadas cilíndricas

47. Trazar el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evaluarla

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{2} \int_{0}^{r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$$

48. Trazar el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evaluarla

$$\int_{0}^{2} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{r} r\, dz\, d\theta\, dr$$

49. Use coordenadas cilíndricas.

a) Evaluar $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, donde V es la región que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y entre los planos $z = -5$ y $z = 4$.

b) Evaluar $\iiint_V z\, dV$, donde V está encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

c) Evaluar $\iiint_V (x + y + z)\, dV$, donde V es el sólido en el primer octante que está bajo el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

d) Evaluar $\iiint_V x\, dV$, donde V está encerrada por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 5$ y los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

50. Use coordenadas cilíndricas.

a) Encuentre el volumen del sólido que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.
b) Encuentre el volumen del sólido que está encerrado por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.
c) Encuentre el volumen del sólido que está entre el paraboloide $z=x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=2$.
d) Evaluar $\iiint_V x^2\,dV$, donde V es el sólido que está dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, por encima del plano $z=0$ y por debajo del cono $z^2=4x^2+4y^2$.

51. Evaluar la integral cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dz\,dx\,dy$$

52. Evaluar la integral cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

Integración en coordenadas esféricas

53. Bosquejar el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evaluarla.

$$\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{3} \rho^2\sin\phi\;d\rho\,d\theta\,d\phi$$

54. Bosquejar el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evaluarla.

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{1}^{2} \rho^2\sin\phi\;d\rho\,d\phi\,d\theta$$

55. Usar coordenadas esféricas.
a) Evaluar $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dV$, donde V es la bola con centro en el origen y radio 5.
b) Evaluar $\iiint_V xe^{x^2+y^2+z^2}\,dV$, donde V es la porción de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2\le 1$ que está en el primer octante.
c) Hallar el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ por encima del plano xy y por debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

56. Usar coordenadas esféricas.
a) Evaluar $\iiint_V (x^2+y^2)\,dV$, donde V está entre las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$.
b) Encontrar el volumen de la parte de la esfera $\rho\le a$ que está entre los conos $\phi=\pi/6$ y $\phi=\pi/3$.
c) Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $\phi=\pi/3$ y debajo de la esfera $\rho=4\cos\phi$ y encontrar el centroide.

57. Encontrar el volumen y el centroide del sólido V que está arriba del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

58. Evaluar la integral cambiando a coordenadas esféricas.
a) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$
b) $\int_{-1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

Integrales iteradas

59. Calcular:

a) $\int_0^1 \int_1^2 dx\, dy$
b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 dy\, dx$
c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos\theta \, dr\, d\theta$

60. Calcular:
a) $\int_0^1 \int_1^{x^2} xe^y dy\, dx$
b) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} dx\, dy$
c) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^3 \cos^2\theta \, dr\, d\theta$

Jacobiano de una Aplicación. Cambio de Variable

61. Dada $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, calcular el jacobiano en el punto $(r,\theta) = (4, \pi/6)$.
62. Sea $G(u,v) = (3u + v, u - 2v)$. Usar el jacobiano para determinar el área de $G(R)$ para:
a) $R = [0,3] \times [0,5]$
b) $R = [2,5] \times [1,7]$
63. Se da una región R en el plano xy. Determinar ecuaciones para una transformación T que convierta una región rectangular S en el plano uv em R, donde los lados de S son paralelos a los ejes U y V.
a) R está entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$, en el primer cuadrante.
b) R está acotada por las hipérbolas $y = 1/x$, $y = 4/x$ y las rectas $y = x, t = 4x$ en el primer cuadrante.
64. Calcular

$$\iint_D e^{9x^2+4y^2} dxdy$$

Donde D es el interior de la elipse

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1$$

NOTA: El estudiante debe resolver los ejercicios pares de cada sección y ser entregados en el formato solicitado por el docente.