Варіант 14   Коваль Андрій КП-83

$$x^4 + 8x^3 + 13x^2 - 12x - 9 = 0$$

Знайти проміжки існування коренів методом, що заснований на теоремі модуля коренів алгебраїчного рівняння та розв'язати методом Лобачевського.

$$R = 1 + \frac{A}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}}$$

$$A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$$

$$B = \max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|\}$$

$$A = 12, \quad B = 13$$

$$R = 1 + \frac{12}{1} = 14$$

$$r = \frac{1}{1 + \frac{13}{9}} = \frac{1}{\frac{9+13}{9}} = \frac{9}{9+13} = \frac{9}{22}$$

$$b_k = a_k^2 + 2\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j a_{k-j} a_{k+j}, \quad k = 0 \ldots n$$

$b_0 = a_0^2 + 2((-1)(0 * a_1)) = a_0^2$

$b_1 = a_1^2 + 2((-1)^1(a_0 * a_2) + (-1)^2(0 \cdot a_3)) =$

$= a_1^2 - 2(a_0 \cdot a_2)$

$b_2 = a_2^2 + 2((-1)^1(a_1 \cdot a_3) + (-1)^2(a_0 \cdot a_4)$

$b_3 = a_3^2 + 2((-1)^1(a_2 \cdot a_4))$

$b_4 = a_4^2$

I Ітерація

$b_0 = a_0^2 = 81$

$b_1 = 144 + 2((-1)^1(-9) \cdot 13) = 378$

$b_2 = 169 + 2((-1)^1(-12) \cdot 8 + (-9)) = 343$

$b_3 = 64 + 2((-1) \cdot 13) = 38$

$b_4 = 1$

Критерій зупинки $a_k^2 \approx b_k$

$$n = \text{норм}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_0/a_0^2 \\ b_1/a_1^2 \\ b_2/a_2^2 \\ b_3/a_3^2 \\ b_4/a_4^2 \end{pmatrix}\right)_\infty = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 81/81 \\ 378/144 \\ 343/169 \\ 38/64 \\ 1/1 \end{pmatrix}\right)_\infty =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -234/144 \\ -174/169 \\ 26/64 \\ 0 \end{pmatrix}\right)_\infty = \frac{234}{144} > \varepsilon. \quad \text{Нехай } \varepsilon = 0{,}01$$

Критерій не виконується, ідемо далі
Притягаємо b_n за a і виконуємо ітерацію

II Ітерація

$b_0 = 6561$

$b_1 = 142884 + 2\cdot(-1)81\cdot 343 = 87318$

$b_2 = 117649 + 2(-1\cdot 878\cdot 38 + 81) = 39083$

$b_3 = 1444 + 2(-1)\,343\cdot 1 = 758$

$b_4 = 1$

$$r = \text{норм}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6561/6561\\87318/142884\\39083/117649\\758/1444\\1/1\end{pmatrix}\right)_\infty =$$

$$= \text{норм}\begin{pmatrix}0\\7/18\\78566/117649\\343/722\\0\end{pmatrix}_\infty = 78566/117649 > \varepsilon \approx$$

$$\approx 0{,}668 > \varepsilon$$

Критерій не виконується, ідемо далі
Притягаємо b_n за a і виконуємо наступну ітерацію

III Ітерація

$b_0 = 43\,046\,721$

$b_1 = 2041\,5837\,456 + 2(-1)(6561 \cdot 39083) =$
$= 19902990330$

$b_2 = 1527\,480\,889 + 2(-1)^1(87318 \cdot 757) + (6561 \cdot (1)) = 1395119923$

$b_3 = 574564 - 2(39083 \cdot 1) = 496398$

$b_4 = 1$

$$n = \text{почт}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}43046721/43046721\\19902990330/20415837456\\1395119923/1527480889\\496398/574564\\1\end{pmatrix}\right)_\infty =$$

$$\approx \begin{pmatrix}0\\0,025\\0,087\\0,136\\1\end{pmatrix}_\infty = 0,136 > \varepsilon.$$

Необхідної точності не було досягнуто за 3 ітерації

За завданням необхідно виконати 3 ітерації. Знайдемо корені

$X_i \approx \pm \sqrt[2p]{\dfrac{b_{n-i}}{b_{n-i+1}}}$, де $p = 3$ - к-ть ітерацій

$$x_1 \approx \pm\sqrt[8]{\frac{b_3}{b_4}} \approx \pm\sqrt[8]{\frac{496388}{1}} \approx \pm 5{,}15203$$

$$x_2 \approx \pm\sqrt[8]{\frac{b_2}{b_3}} \approx \pm\sqrt[8]{\frac{1395119923}{496398}} \approx \pm 2{,}699$$

$$x_3 \approx \pm\sqrt[8]{\frac{b_1}{b_2}} \approx \pm\sqrt[8]{\frac{19902990330}{1395119923}} \approx \pm 1{,}394082$$

$$x_4 \approx \pm\sqrt[8]{\frac{b_0}{b_1}} \approx \pm\sqrt[8]{\frac{43046721}{19902990330}} \approx \pm 0{,}46438$$

$f(5{,}15203) = 2072{,}81$

$f(-5{,}15203) = 8{,}42183$ ✓

$f(2{,}699) = 263{,}666$

$f(-2{,}699) = 13{,}8641$ ✓

$f(1{,}394082) = 24{,}9879$

$f(-1{,}394082) = 15{,}0963$ ✓

$f(0{,}46438) = -10{,}9215$

$f(-0{,}46438) = -1{,}37865$ ✓

Звідси $x_1 = -5{,}152$

$x_2 = -2{,}699$

$x_3 = -1{,}394082$

$x_4 = -0{,}46438$

Корені входять до меж, отриманої на початку

$\frac{9}{22} < |x| < 14$, $0{,}409 < |x| < 14$