МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики. Кафедра програмного забезпечення комп'ютерних систем

ЗВІТ
з лабораторної роботи № 1
«Нелінійні рівняння з одним невідомим»

Виконав:
студент 3-го курсу, групи КП-83,
спеціальності 121 – Інженерія
програмного забезпечення
Коваль Андрій Олександрович

Перевірив:
Онай Микола Володимирович

Київ – 2020

Мета роботи: опанувати методи наближеного розв’язання нелінійних рівнянь.

Завдання

1. Розробити програму на мові програмування C# у середовищі розробки Visual Studio 2013 (або вище), яка буде працювати у віконному режимі та реалізовувати метод Лобачевського розв’язання алгебраїчних рівнянь і дозволяти уточнювати (точність та проміжок локалізації задаються користувачем з клавіатури) корені будь-яких нелінійних рівнянь методами, що задані за варіантом. Розроблена програма повинна виводити на екран всі проміжні результати.
2. За допомогою розробленої програми з п.1 розв'язати задані за варіантом рівняння на заданому проміжку з точністю $\varepsilon < 10^{-7}$.
3. При виконанні завдання з п.2 необхідно побудувати графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення. Якщо рівняння має більше двох коренів, то побудувати графіки для двох будьяких коренів.
4. Знайти верхню та нижню границю додатних і від’ємних коренів заданого за варіантом алгебраїчного рівняння.
5. За допомогою розробленої програми з п.1, знайти корені, заданого за варіантом алгебраїчного рівняння, методом Лобачевського та уточнити отримані корені будь-яким методом розв’язання нелінійних рівнянь.
6. Задані за варіантом, рівняння розв’язати у MatLab 7.0 (або вище) або у MathCAD 15.0 (або вище), або у Mathematica 7.0 (або вище). Задане за варіантом, алгебраїчного рівняння необхідно розв’язати, як мінімум двома функціями наявними у відповідному математичному пакеті. Наприклад, в математичному пакеті MatLab

7.0 наявна функція solve для розв'язання будьякого нелінійного рівняння та функція roots для розв'язання алгебраїчного рівняння.

№ за списком викладача: 8

Варіант № 24

Рівняння 18:

18	$\cos^3 x + x^3 e^x = x^6 + 35$	$(-\infty; \infty)$

Рис 1. рівняння 18

Спрощений метод Ньтютона

Рівняння 31

31	$x^3 chx + \pi - 9\pi x = 0$	$[-10.0; 10.0]$

Рис 2. рівняння 31

Метод поділу навпіл

Метод простих ітерацій

Коефіцієнти алгебраїчного рівняння

24	18	84	–225	–811	565	842	–437	–62

Рис 3. Коефіцієнти алгебраїчного рівняння

Математичне підгрунття для виконання роботи

1. **Перевірка наявності лише одного кореня в уведеному проміжку**
   Перед початком роботи з введеним проміжком локалізації [a;b], слід впевнитися, що на цьому проміжку існує корінь, причому один і тільки один. Для цього потрібно впевнитися, що

- $f(a) * f(b) < 0$ (на даному проміжку функція хоча б один раз обертається на 0);
- функція є монотонною на даному проміжку

Після виконання обох умов ми можемо бути впевненими, що на проміжку [a;b] функція набуває значення 0 один і тільки один раз.

2. **Спрощений метод Ньютона**

Точку x_0 знаходимо за такою умовою $f(x_0) * f''(x_0) > 0$.

Якщо жодна з проміжку не виконує цю умову, то на даному проміжку немає коренів.

Основна ітераційна формула	Критерій зупмнки
$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_0)}$	$\lvert f(x_{k+1}) - f(x_k) \rvert < \varepsilon$

3. **Метод поділу навпіл**

Метод поділу навпіл реалізує найпростіший спосіб вибору пробної точки – поділ проміжку існування кореня навпіл. Середина, т. m. Якщо $f(a) * f(m) > 0$, то $a = m$ і, навпаки, якщо $f(b) * f(m) > 0$, то $b = m$

Основна ітераційна формула	Критерій зупмнки
$m = (a + b)/2$ $f(a) * f(m) > 0 \Rightarrow a = m$ $f(b) * f(m) > 0 \Rightarrow b = m$	$\lvert a - b \rvert < \varepsilon$

4. **Метод простих ітерацій**

Основна ітераційна формула	Критерій зупмнки
$x_{k+1} = \varphi(x_k)$ $x = x - \lambda\varphi(x)$	Ускладнений $\left\|x_{k+1} - x_k\right\| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$ Спрощений $\left\|x_{k+1} - x_k\right\| \le \varepsilon$

Підрахунок λ та q, вибор початкового значення x0
$\alpha = min(f'(x)),\ x \in [a; b]$ $\gamma = max(f'(x)),\ x \in [a; b]$ $\lambda = 2 / (\alpha + \gamma)$ $q = max\{\|1 - \alpha\lambda\|;\ \|1 - \gamma\lambda\|\}$ За x_0 зазвичай приймається будь-який з кінців проміжку [a;b], або середина проміжку. Якщо q < 0.5 то беремо спрощений критерій зупинки. Навпаки - ускладнений

5. **Метод Лобачевського**

Основною ітераційною формулою є формула заміни коефіцієнтів при квадруванні поліному:

$$b_k = a_k^2 + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j a_{k-j} a_{k+j},\ k = 0...n$$

Процес квадрування продовжується, поки подвійні добутки не перестануть впливати на перші головні члени коефіцієнтів перетвореного рівняння. Коротко можна записати:

$$b_k \approx a_k^2$$

Квадрування коренів відбувається через необхідну умову використання методу, тобто корені мають бути сильно віддаленими один від одного

$$|x_1| \gg |x_2| \gg \ldots \gg |x_n|$$

Формула для знаходження коренів:

$$|x_k| = \sqrt[2p]{\frac{b_{n+k-2}}{b_{n+k-1}}}$$

де p - к-ть ітерацій квадрування

Локалізація коренів

18	$\cos^3 x + x^3 e^x = x^6 + 35$	$(-\infty; \infty)$

Рис 4. Рівняння 18

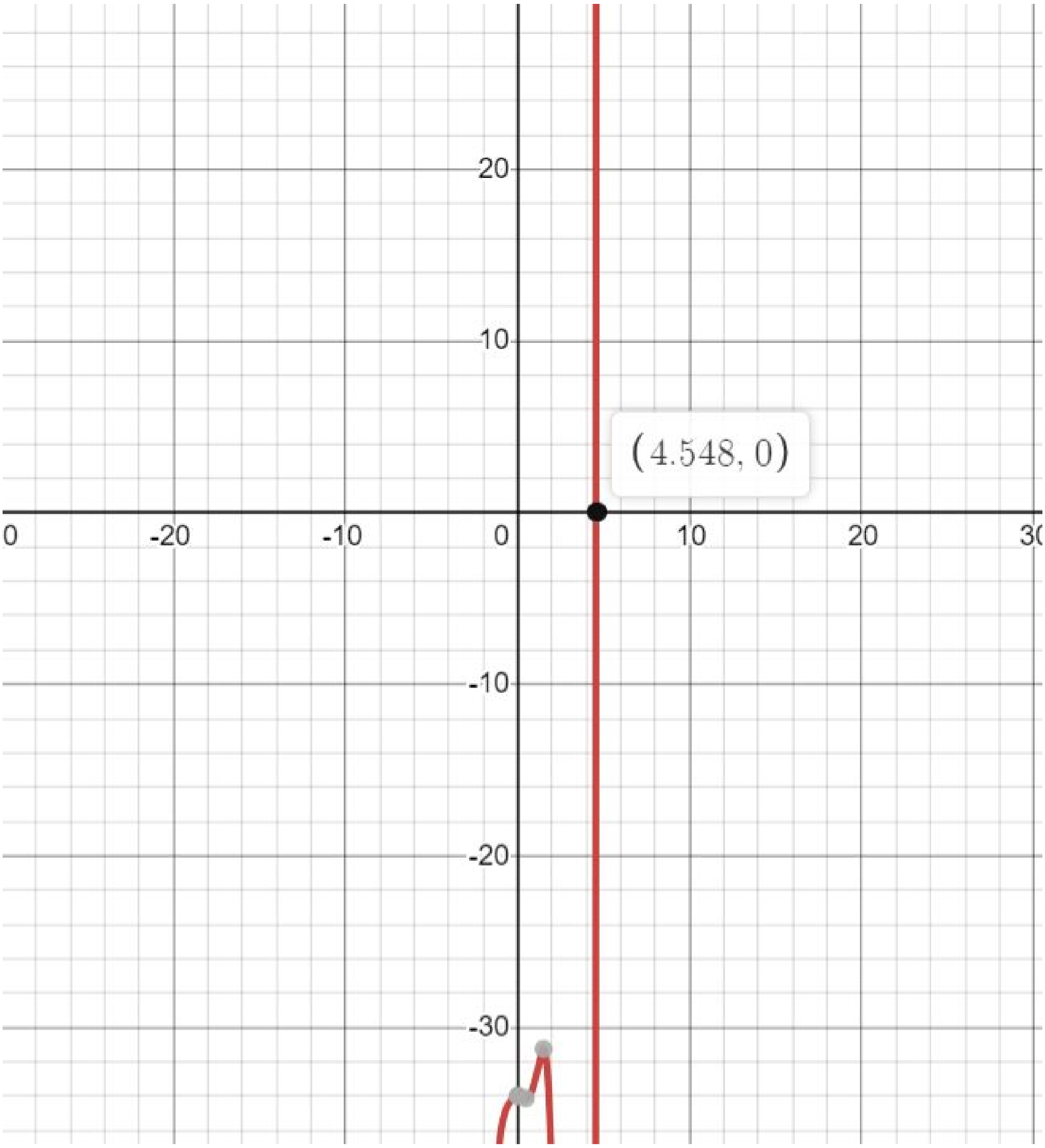

Рис 5. Графік рівняння 18

31	$x^3 chx + \pi - 9\pi x = 0$	$[-10.0; 10.0]$

Рис 6. Рівняння 31

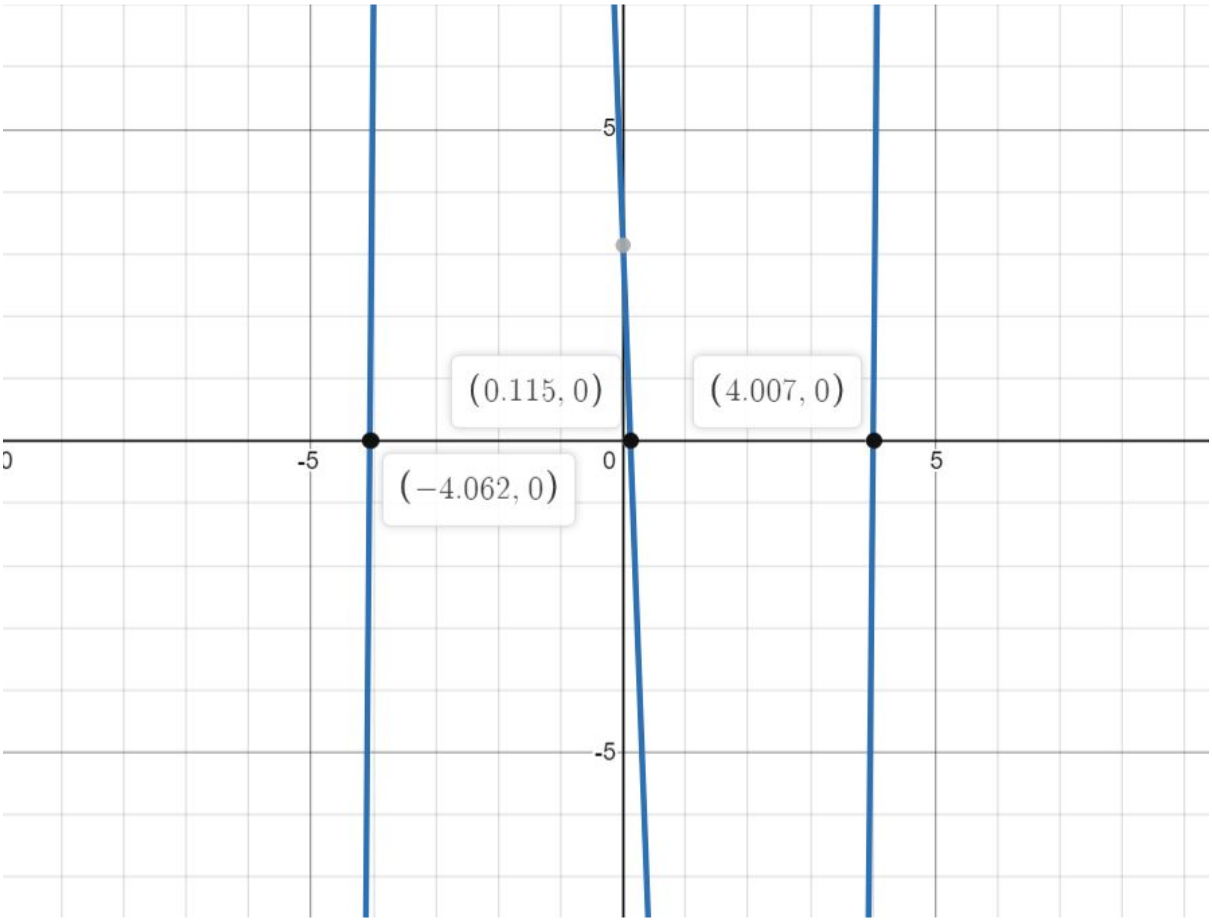

Рис 7. Графік рівняння 31

Значення коренів рівнянь

Рівняння 1

18	$\cos^3 x + x^3 e^x = x^6 + 35$	$(-\infty; \infty)$

Метод	C#	WolframAlpha
Спрощений метод Ньютона	4,548030221093484	4.54803012288107357691118478

Рівняння 2

31	$x^3 chx + \pi - 9\pi x = 0$	$[-10.0; 10.0]$

Метод	C#	WolframAlpha
Метод поділу навпіл	-2,357247054576874 0,11115998029708862 2,3053465485572815	-2.35724707770657529 0.111159991067432630 2.305346509335099944
Метод простих ітерацій	-2,3572470976285747 0,1111600002190207 2,3053465319243114	-2.35724707770657529 0.111159991067432630 2.305346509335099944

Графіки залежності наближеного значення кореня рівняння від кількості ітерацій починаючи з початкового наближення

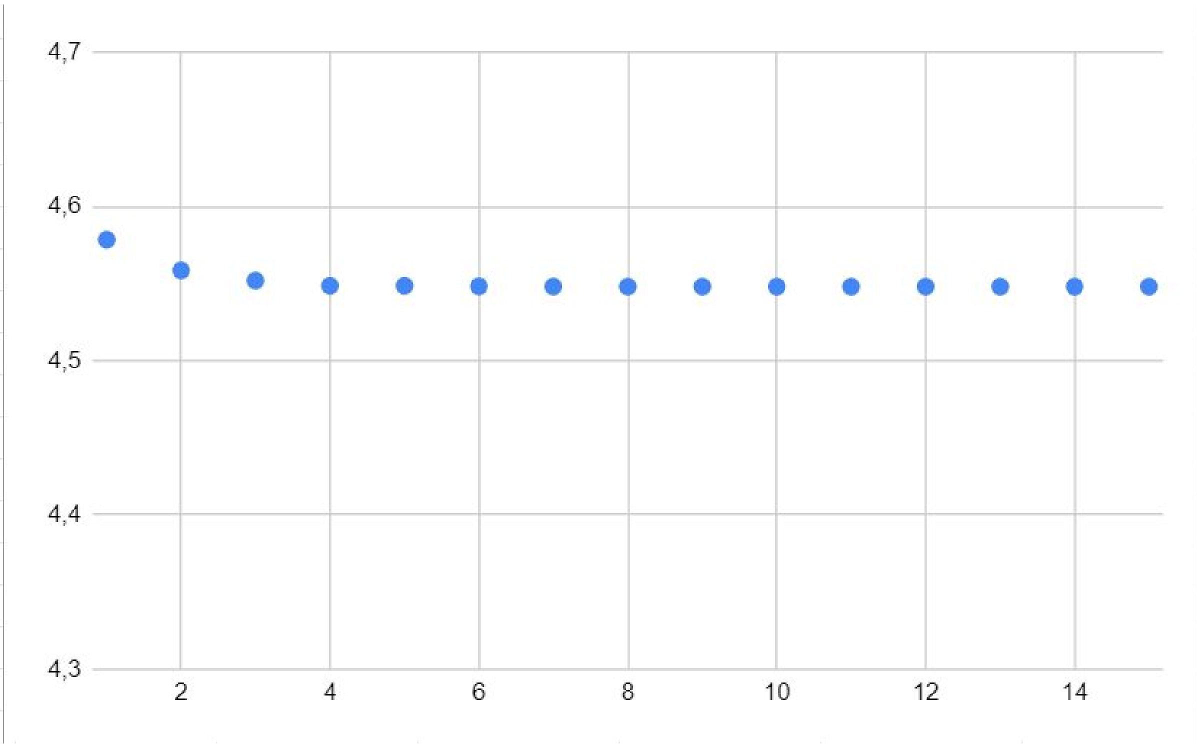

Рис 8. Спрощений метод ньютона. Границі [4.3; 4.7]

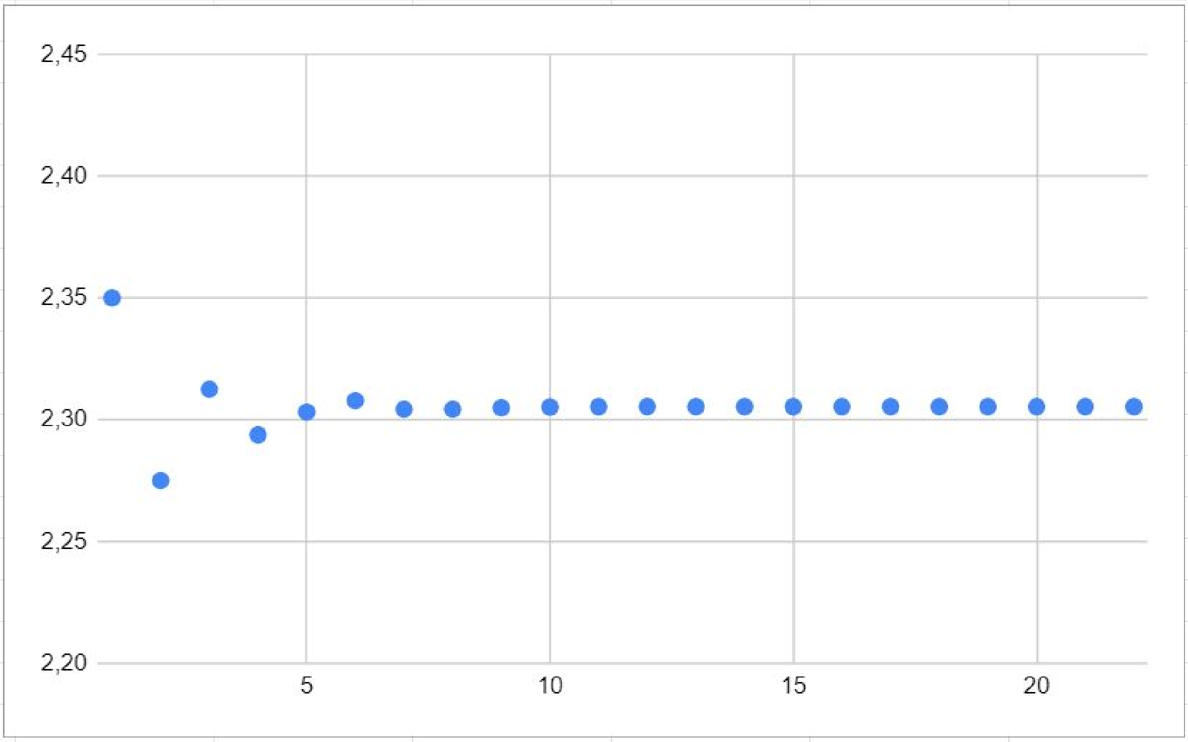

Рис 8. Метод поділу навпіл. Границі [2.2; 2.5]

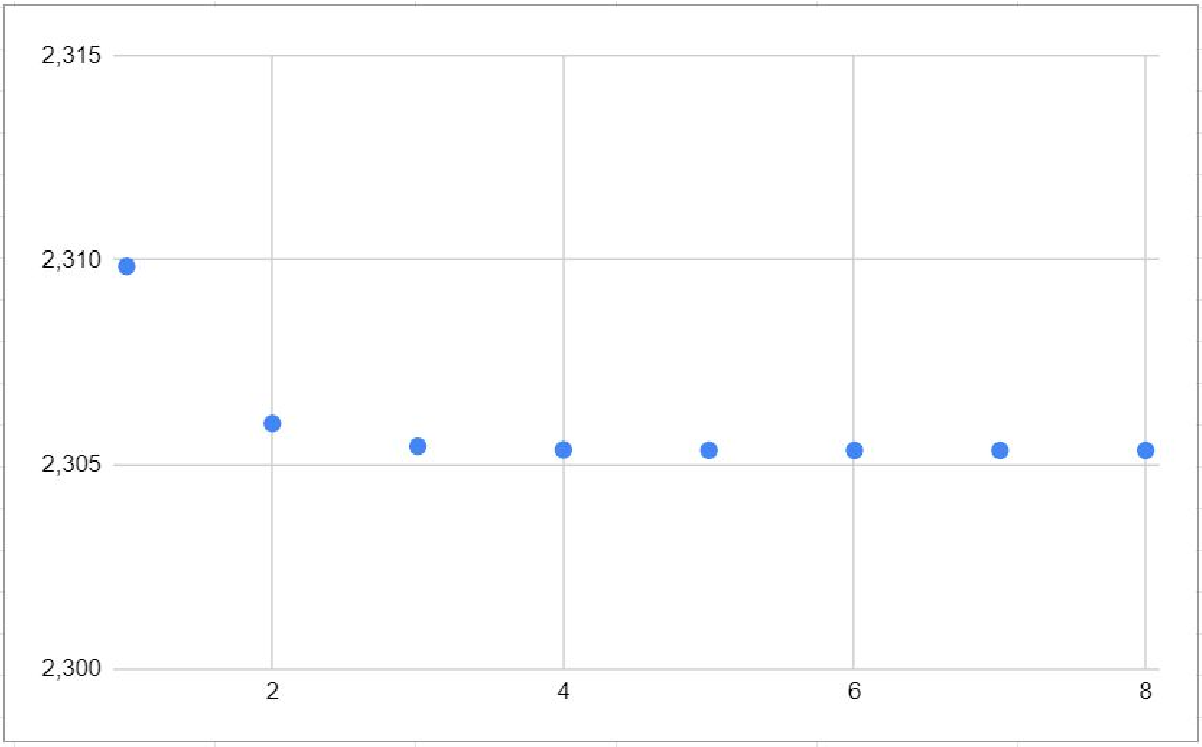

Рис 8. Метод простих ітерацій. Границі [2.2; 2.5]

Знаходження верхньої та нижньої додатньої та від'ємної границі коренів поліному

$$R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$$

$$r = \frac{1}{1+\frac{B}{|a_0|}}$$

$$A = max\{|a_{n-1}|,\ |a_{n-2}|,\ \dots,\ |a_0|\}$$

$$B = max\{|a_n|,\ |a_{n-1}|,\ |a_{n-2}|,\ \dots,\ |a_1|\}$$

A=842

B=842

R=1+842/18=47,(7)

r=1/(1+842/62)=0.06858407

Отже границі додатніх коренів (0.06858407; 47,(7)), а від'ємних (-47,(7); -0.06858407)

Знаходження коренів заданого алгебраїчного рівняння

Рівняння:

$$18\,x^7 + 84\,x^6 - 225x^5 - 811x^4 + 565x^3 + 842x^2 - 437x - 62 = 0$$

Метод	*C#*	*Wolfram*

Лобачевського	-5,2678142445025875 -2,722363290693533 -1,0949667151047355 -0,11765421055170447 0,6465052371130404 0,9543038436792931 -3,0218683497988175	-5.267768964300571 -2.77209791556021794 -1.08572062815764756 -0.11765421055171511 0.64658500641891822 0.96231206734737475 2.96767797813719171

При уточненні коренів спрощеним методом ньютона були отримані такі результати:

Метод	***C#***
Метод простих ітерацій	-5,267768964642444 -2,7720979140005024 -1,0857206282590817 -0,11765421055171561 0,6465850026510652 0,9623120668638421

Висновки

Я опанував методи наближеного розв’язання нелінійних рівнянь за допомогою спрощеного метода Ньютона, метода поділу навпіл та метода простих ітерацій. Алгоритм рішення було написано на мові програмування C#. Я порівняв результати роботи своєї системи з результати з Wolfram|Alpha та Desmos, після чого впевнився у достатній точності власних значень. Також, я опанував метод наближеного розв’язання лінійних рівнянь, метод Лобачевського, і перевірив його у такий самий спосіб, отримавши задовільні результати.