Programowanie narzędzi analitycznych - Z05

1 Metoda Największej Wiarygodności

Zadanie 1
Załóżmy, że kupiliśmy monetę w sklepie z magicznymi rekwizytami. Moneta wygląda na symetryczną, ale nie koniecznie taka jest. Rzuciliśmy monetą 8 razy i otrzymaliśmy OOORORОR. Jaka wartość będzie dobrym oszacowaniem p, prawdopodobieństwa orła?

$$\begin{aligned} & P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 0) \\ = \; & P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) \cdots P(X_8 = 0) \\ = \; & p^5(1-p)^3 \end{aligned}$$

Sporządzić wykres funkcji wiarygodności dla powyższego przykładu z asymetryczną monetą.

Zadanie 2 (Przykład 6.1 z [3])
Załóżmy, ze $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 3, x_4 = 7$ pochodzą z rozkładu Poissona z nieznanym parametrem λ. Funkcja gęstości rozkładu Poissona to $f(x;\lambda) = \lambda^x e^{-\lambda x}/x!$, dla $x = 0, 1, 2, \ldots$. Sporządzić wykres funkcji wiarygodności.

Zadanie 3
Załóżmy, ze $x_1 = 1.46, x_2 = 0.81, x_3 = 0.88, x_4 = 0.53, x_5 = 0.46$ pochodzą z rozkładu wykładniczego z nieznanym parametrem λ. Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego to $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$, dla $x \geq 0$. Sporządzić wykres funkcji wiarygodności.

Zadanie 4 (Przykład 6.4 z [3])
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Unif(0, \beta)$ z funkcją gęstości $f(x;\beta) = 1/\beta$, gdzie $0 \leq x \leq \beta$. Narysować funkcję wiarygodności i znaleźć estymator MNW parametru β.
Niech $(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (2.13; 1.24; 2.00; 1.27; 0.04; 2.83)$.

Zadanie 5 (Przykład 6.7 z [3])
Niech $X_1 = 1, X_2 = X_3 = 2, X_4 = 3, X_5 = 4$ będą próbą losową z rozkładu Cauchy'ego o rozkładzie $f(x;\theta) = 1/\left[\pi(1 + (x-\theta)^2)\right]$ dla $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$. Znaleźć $\hat{\theta}_{MNW}$ i narysować funkcję wiarygodności.

Zadanie 6 (Zadanie 2.34 z [1])
W celu oszacowania wartości przeciętnej czasu bezawaryjnej pracy maszyny pewnego typu z partii tych maszyn wybrano w sposób losowy 7 maszyn i obserwowano czasy ich pracy do momentu awarii. Uszkodzenia wystąpiły w chwilach (w h): 51, 115, 150, 190, 217, 228, 350. Wiedząc, że czas bezawaryjnej pracy maszyny ma rozkład wykładniczy o gęstości danej wzorem $f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ znaleźć ocenę wartości przeciętnej czasu bezawaryjnej pracy maszyny.

Zadanie 7 (Zadanie 2.35 z [1])
Pięciu strzelców strzelało do celu do momentu pierwszego trafienia. Pierwszy trafił za trzecim strzałem, drugi za czwartym, trzeci za trzecim, czwarty za drugim, piąty za siódmym strzałem. Przyjmując, że prawdopodobieństwo trafienia jednym strzałem do tego celu jest jednakowe i równe p na podstawie wyników tego strzelania znaleźć ocenę $\hat{p}$ nieznanej wartości p.

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \tag{1}$$

Rozkład geometryczny – dyskretny rozkład prawdopodobieństwa opisujący prawdopodobieństwo zdarzenia, że proces Bernoulliego odniesie pierwszy sukces dokładnie w k-tej próbie. k musi być liczbą naturalną dodatnią. Wikipedia: Rozkład geometryczny (link)

Zadanie 8
Zbiór danych `Auld_Enemy.txt` zawiera wyniki meczy piłki nożnej między Anglią i Szkocją. Załóżmy, że liczba strzelonych bramek przez Anglików jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Znaleźć oszacowanie parametru λ tego rozkładu przy założeniu niezależności poszczególnych wyników.

		Goals	
Host	Year	SCO	ENG
Scotland	1872	0	0
England	1873	4	2
Scotland	1874	2	1
⋮	⋮	⋮	⋮
Scotland	2014	1	3
England	2016	3	0
Scotland	2017	2	2

Zadanie 9
Zbiór danych `Purse_Snatch.txt` zawiera dzienne dane od 28 stycznia 1968 o liczbie skradzionych torebek w Hyde Parku w Chicago. Załóżmy, że skradzionych torebek jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Znaleźć oszacowanie parametru λ tego rozkładu przy założeniu niezależności obserwacji. **Sporządzić wykres kwantylowy z kwantylami z rozkładu Poissona z parametrem równym wartości oszacowanej z metody największej wiarygodności.**

Dane pochodzą z książki Andrew C. Harvey, *Forecasting, structrural time series models and forecasting*, Cambridge University Press, 1989.

2 Bibliografia

[1] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, Tom I i II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.

[2] Boratyńska A., *Zadania na ćwiczenia ze statystyki matematycznej.*

[3] Laura Chihara, Tim Hesterberg, *Mathematical Statistics with Resampling and R*, John Wiley&Sons, 2011.

