Programowanie narzędzi analitycznych Z08

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 02-12-2021

Metoda momentów

- Innym sposobem [niż MNW] znajdowania estymatorów parametrów jest metoda momentów.
- Niech $f(x)$ oznacza funkcję gęstości zmiennej losowej X.
- Dla dodatnich całkowitych r, r-ty moment (teoretyczny) X to

$$\mathbb{E}\left[X^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

- a r-ty moment próbkowy to

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^r \tag{1}$$

- Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu z r nieznanymi parametrami $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

Źródło: *Mathematical Statistics with Resampling and R*, str. 146. ([1])

Metoda momentów

W metodzie momentów przyrównujemy każdy moment teoretyczny z jego próbkowym odpowiednikiem.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)dx &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)dx &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\
&\vdots \\
\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_r)dx &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r
\end{aligned}$$

Rozwiązaniem tego układu r równań z r niewiadomymi są estymatory metody największej wiarygodności parametrów $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

Źródło: *Mathematical Statistics with Resampling and R*, str. 147. ([1])

Metoda momentów

k-ty teoretyczny moment zwykły, dla $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{E}(X^k)$$

k-ty teoretyczny moment centralny, dla $k = 1, 2, \ldots$

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu)^k\right] \tag{2}$$

k-tym moment zwykły z próby, dla $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \tag{3}$$

k-ty moment centralny z próby, dla $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^k \tag{4}$$

Przykład 1

- Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Unif[0, \beta]$
- Pierwszy moment teoretyczny $\mathbb{E}[X_i] = \beta/2$
- Średnia z próby $\overline{X}$ jest pierwszym momentem próbkowym
- Przyrównując $\beta/2 = \overline{X}$ otrzymujemy $\hat{\beta}_{MM} = 2\overline{X}$

Metoda momentów (Wikipedia)

Załóżmy, że interesuje nas wyznaczenie k nieznanych parametrów $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ charakteryzujących pewien rozkład $f_W(w; \theta)$. Załóżmy, że k momentów zwykłych prawdziwego rozkładu można wyrazić jako funkcje od parametrów θ:

$$\mu_1 = \mathbb{E}[W] = g_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$\mu_k = \mathbb{E}[W^k] = g_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) \tag{6}$$

Załóżmy, że dysponujemy n-elementową próbą z tego rozkładu o wartościach $w_1, \ldots, w_n$. Dla $j = 1, 2, \ldots, k$, j-ty moment próbkowy:

$$\hat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} w_i^j \tag{7}$$

Estymator metody momentów jest rozwiązaniem układu równań (o ile istnieje):

$$\hat{\mu}_1 = g_1\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k\right) \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mu}_k = g_k\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_k\right) \tag{9}$$

Rozkład ujemny dwumianowy

Niech Z będzie liczbą porażek przed osiągnięciem r sukcesów w ciągu niezależnych o jednakowym rozkładzie prób Bernoulliego z parametrem p, wówczas Z ma rozkład ujemny dwumianowy. Zapisujemy $Z \sim nbinom(r,p)$. Niech $Y_1, \ldots, Y_r$ będą *i.i.d.* $geom(p)$, wtedy

$$Z = Y_1 + \ldots + Y_r \sim nbinom(r,p). \tag{10}$$

Wynika z tego natychmiast, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= r(1-p)/p, \\ Var[Z] &= r(1-p)/p^2. \end{aligned}$$

Jeśli r-ty sukces przypada na próbę x, wówczas poprzednie $r-1$ sukcesów może wypaść gdziekolwiek w poprzednich $x-1$ próbach. Dlatego istnieją $\binom{x-1}{r-1}$ sposobów na otrzymanie r-tego sukcesu w x-tej próbie. Prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $p^r(1-p)^{x-r}$, więc podstawiając $z = x - r$ otrzymujemy dla $z = 0, 1, \ldots,$

$$\mathbb{P}(Z = z) = \binom{r+z-1}{r-1} p^r (1-p)^z. \tag{11}$$

Źródło: [2] str. 273.

Rozkład t-Studenta

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \tag{12}$$

gdzie ν oznacza liczbę stopni swobody, a Γ jest funkcją gamma.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \\ Var[X] &= \frac{\nu}{\nu+2} \end{aligned}$$

https://en.wikipedia.org/ (link)

Rozkład Gamma

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \tag{13}$$

Momenty rozkładu Gamma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha}{\beta} \\
Var[X] &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\
Moda[X] &= \frac{\alpha - 1}{\beta} \\
Skosnosc[X] &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}}
\end{aligned}$$

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \tag{14}$$

Momenty rozkładu Beta

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
Moda[X] &= \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2} \\
Var[X] &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}
\end{aligned}$$

Literatura

[1] Laura Chihara, Tim Hesterberg, *Mathematical Statistics with Resampling and R*, John Wiley&Sons, 2011.

[2] Owen Jones, Robert Maillardet, and Andrew Robinson, *Introduction to Scientific Programming and Simulation using R*, CRC Press, 2009.