Programowanie narzędzi analitycznych Z10

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 14-01-2021

Uogólniona Metoda Momentów - [1] str. 363

Niech $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_K)'$ będzie wektorem parametrów, a $m_t(y_t;\theta)$ będzie $N \times 1$ wektorem momentów

$$m_t(y_t;\theta) = \begin{bmatrix} m_{1,t}(y_t;\theta) & m_{2,t}(y_t;\theta) & \ldots & m_t(y_{N,t};\theta) \end{bmatrix}'. \tag{1}$$

Prawdziwa wartość θ_{true} spełnia

$$\mathbb{E}[m_t(y_t;\theta_{true})] = 0. \tag{2}$$

Próbkową średnią tych momentów jest

$$M_T(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_t(y_{N,t};\theta), \tag{3}$$

ale w przeidentyfikowanym przypadku nie można wyznaczyć estymatora $\hat{\theta}$ spełniającego $M_T(\hat{\theta}) = 0$, które jest spełnione tylko dla dokładnie zidentyfikowanych modeli. Estymator GMM jest zdefiniowany jako

$$\hat{\theta}_{GMM} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \ \frac{1}{2} M_T'(\theta) W_T^{-1} M_T(\theta) \tag{4}$$

Uogólniona Metoda Momentów

$$\begin{bmatrix} m_{1,t=1}(\theta) & m_{1,t=2}(\theta) & \dots & m_{1,t=T}(\theta) \\ m_{2,t=1}(\theta) & m_{2,t=2}(\theta) & \dots & m_{2,t=T}(\theta) \\ m_{3,t=1}(\theta) & m_{3,t=2}(\theta) & \dots & m_{3,t=T}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,t=1}(\theta) & m_{2,t=1}(\theta) & m_{3,t=1}(\theta) \\ m_{1,t=2}(\theta) & m_{2,t=2}(\theta) & m_{3,t=2}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1,t=T}(\theta) & m_{2,t=T}(\theta) & m_{3,t=T}(\theta) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}^2(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{2,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) \\ \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{2,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}^2(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) \\ \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{3,t}^2(\theta) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Załóżmy, że oszacowaliśmy parametr β metodą GMM

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \to N(0, \Sigma) \tag{7}$$

Załóżmy, że chcemy przetestować liniową względem parametrów hipotezę postaci

$$H_0 : R\theta - q = 0, \tag{8}$$

gdzie R ma wymiar $g \times k$, q ma wymiar $g \times 1$. Niech $S = R\theta - q$, wtedy

$$\sqrt{T}S \to N(0, R\Sigma R') \tag{9}$$

Statystyka testowa

$$W = T * (R\theta - q)' \left(R\hat{\Sigma}R'\right)^{-1} (R\theta - q) \to \chi^2(g) \tag{10}$$

Testowanie liniowych ograniczeń w GMM statystyką Walda

Przykład 1
Załóżmy, że $K = 3$, czyli mamy 3 parametry i że chcemy przetestować hipotezę $\beta_1 = \beta_2$, wtedy

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = 0 \tag{11}$$

Przykład 2
Załóżmy, że $K = 3$, czyli mamy 3 parametry i że chcemy przetestować hipotezę łączną $\beta_1 = \beta_2$ oraz $\beta_3 = 2$, wtedy

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Zadanie

Załóżmy, że dysponujemy próbką z rozkładu Gamma z parametrami α oraz β i że chcemy oszacować te parametry uogólnioną metodą momentów.

$$\mathbb{E}[y_t] = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \mathbb{E}[y_t^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} \qquad \mathbb{E}[\frac{1}{y_t}] = \frac{\beta}{\alpha-1} \tag{13}$$

Podać postać macierzy R oraz q dla testowania hipotez łącznych

- $H_0: \ \alpha = 3, \ \beta = 4$
- $H_0: \ \alpha = 2, \ \alpha + \beta = 5$

Literatura

[1] S. Gilchrist, Ch. Himmelberg, Lecture 4: Hypothesis testing with GMM, http://people.bu.edu/sgilchri/teaching/gmmnotes/gmmlecture4.pdf