Programowanie narzędzi analitycznych Z04

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 28-10-2021

Programowanie metody najmniejszych kwadratów

Model regresji liniowej ma postać:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \ldots + \beta_K x_{K,i} + \varepsilon_i$$

Estymator wektora parametrów β

$$\hat{\beta} = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathrm{y}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} \quad \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & \ldots & x_{K,1} \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & \ldots & x_{K,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{1,N} & x_{2,N} & \ldots & x_{K,N} \end{bmatrix} \quad \mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Zadanie 1
Dla modelu regresji liniowej postaci

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

a) Wzór na $\beta = (\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}\mathbb{X}'\mathbb{y}$

b) Postać macierzy $\mathbb{X}$

c) Macierz $\mathbb{X}'\mathbb{X}$

d) Macierz $(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}$

e) Macierz $(\mathbb{X}'\mathbb{y})$

f) Postać funkcji regresji to ....

Współczynnik determinacji liniowej R^2

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}$$

Skorygowany współczynnik determinacji liniowej $\bar{R}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{N-1}{N-K} \left(1 - R^2\right)$$

Estymator macierzy wariancji-kowariancji

$$\widehat{\Sigma} = s^2 \left(\mathbb{X}'\mathbb{X}\right)^{-1} \quad \widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} Cov(\beta_0, \beta_0) & Cov(\beta_0, \beta_1) & \dots & Cov(\beta_0, \beta_K) \\ Cov(\beta_1, \beta_0) & Cov(\beta_1, \beta_1) & \dots & Cov(\beta_1, \beta_K) \\ Cov(\beta_2, \beta_0) & Cov(\beta_2, \beta_1) & \dots & Cov(\beta_2, \beta_K) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Cov(\beta_K, \beta_0) & Cov(\beta_K, \beta_1) & \dots & Cov(\beta_K, \beta_K) \end{bmatrix}$$