Programowanie narzędzi analitycznych Z09

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 09-12-2021

Uogólniona Metoda Momentów - [1] str. 363

Niech $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)'$ będzie wektorem parametrów, a $m_t(y_t; \theta)$ będzie $N \times 1$ wektorem momentów

$$m_t(y_t;\theta) = \begin{bmatrix} m_{1,t}(y_t;\theta) & m_{2,t}(y_t;\theta) & \dots & m_t(y_{N,t};\theta) \end{bmatrix}'. \tag{1}$$

Prawdziwa wartość θ_{true} spełnia

$$\mathbb{E}[m_t(y_t;\theta_{true})] = 0. \tag{2}$$

Próbkową średnią tych momentów jest

$$M_T(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_t(y_{N,t};\theta), \tag{3}$$

ale w przeidentyfikowanym przypadku nie można wyznaczyć estymatora $\hat{\theta}$ spełniającego $M_T(\hat{\theta}) = 0$, które jest spełnione tylko dla dokładnie zidentyfikowanych modeli. Estymator GMM jest zdefiniowany jako

$$\hat{\theta}_{GMM} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ M_T'(\theta) W_T^{-1} M_T(\theta) \tag{4}$$

Przykład

Dysponujemy niezależną próbą losową z rozkładu Poissona. Chcemy oszacować parametr λ metodą momentów korzystając z dwóch momentów:

$$\mathbb{E}(Y) = \lambda \qquad Var(Y) = \lambda \tag{5}$$

Taki układ 2 równań z jedną niewiadomą będzie przeidentyfikowany, wobec stosujemy GMM. Momenty próbkowe przyrównane z momentami teoretycznymi:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T} y_t = \lambda \tag{6}$$

$$Var(Y) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \mathbb{E}(Y))^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}(y_t - \lambda)^2 = \lambda \tag{7}$$

$$m_t(y_t;\theta) = \begin{bmatrix} y_t - \lambda \\ (y_t - \lambda)^2 - \lambda \end{bmatrix} \quad M_T(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t - \lambda \\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y_t - \lambda)^2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{8}$$

Uogólniona Metoda Momentów

Zakładamy, że

$$\sqrt{T} M_T(\theta_{true}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} m_t(y_t; \theta_{true}) \to N(0, J) \tag{9}$$

dla pewnej macierzy wariancji J. Jeśli momenty $m_t(y_t; \theta_{true})$ spełniają kilka założeń, to

$$J = \mathbb{E}\left[m_t'(y_t; \theta_{true}) \; m_t(y_t; \theta_{true}) \right]. \tag{10}$$

Tylko nie znamy θ_{true}, tylko musimy ją oszacować.

Strategie estymacji - [1] str. 367

$$W_T(\theta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} m_t(y_t;\theta)\ m_t'(y_t;\theta) \tag{11}$$

Strategia 1

$$\hat{\theta}_{n+1} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ M_T'(\theta) W_T^{-1}(\hat{\theta}_n) M_T(\theta) \tag{12}$$

Strategia 2

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}}\ M_T'(\theta) W_T^{-1}(\theta) M_T(\theta) \tag{13}$$

Continuous updating estimator

Ciąg dalszy przykładu

$$m_t(y_t;\theta)\ m_t'(y_t;\theta) = \begin{bmatrix} y_t - \lambda \\ (y_t - \lambda)^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t - \lambda & (y_t - \lambda)^2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$= \begin{bmatrix} (y_t - \lambda)^2 & (y_t - \lambda)[(y_t - \lambda)^2 - \lambda] \\ (y_t - \lambda)[(y_t - \lambda)^2 - \lambda] & [(y_t - \lambda)^2 - \lambda]^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} m_{1,t=1}(\theta) & m_{1,t=2}(\theta) & \dots & m_{1,t=T}(\theta) \\ m_{2,t=1}(\theta) & m_{2,t=2}(\theta) & \dots & m_{2,t=T}(\theta) \\ m_{3,t=1}(\theta) & m_{3,t=2}(\theta) & \dots & m_{3,t=T}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1,t=1}(\theta) & m_{2,t=1}(\theta) & m_{3,t=1}(\theta) \\ m_{1,t=2}(\theta) & m_{2,t=2}(\theta) & m_{3,t=2}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{1,t=T}(\theta) & m_{2,t=T}(\theta) & m_{3,t=T}(\theta) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}^{2}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{2,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) \\ \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{2,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}^{2}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) \\ \sum_{t=1}^{T} m_{1,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{2,t}(\theta) m_{3,t}(\theta) & \sum_{t=1}^{T} m_{3,t}^{2}(\theta) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Literatura

[1] Owen Jones, Robert Maillardet, and Andrew Robinson, *Introduction to Scientific Programming and Simulation using R*, CRC Press, 2009.