Programowanie narzędzi analitycznych Z07

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 25-11-2021

Metoda Największej Wiarygodności

- Zastosowania MNW w ekonometrii można podzielić na dotyczące modeli szacowanych na próbach przekrojowych i te dotyczące modeli szacowanych na szeregach czasowych.
- Skupimy się wyłącznie na przypadku modeli szacowanych MNW na danych przekrojowych.
- Próby przekrojowe są zazwyczaj dobierane losowo, więc możemy założyć, że poszczególne obserwacje są niezależne. W przypadku szeregów czasowych założenie o niezależności obserwacji nie jest zazwyczaj prawdziwe, co znacznie komplikuje wyprowadzenia.
  - Słaba egzogeniczność
  - Identyfikowalność parametrów
  - Niezależność
- J. Mycielski, *Ekonometria* (Skrypt), str. 245-246.

Metoda Największej Wiarygodności

([1] str. 251) Najważniejszymi własnościami estymatorów MNW jest ich

- zgodność,
- asymptotyczna normalność
- i asymptotyczna efektywność.

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right) \rightarrow N\left(0, I^{-1}(\theta_0)\right) \tag{1}$$

$$\sqrt{N}\left(\hat{\theta}-\theta_0\right) \to N\left(0, I^{-1}(\theta_0)\right) \tag{2}$$

Macierz wariancji-kowariancji estymatora MNW jest szacowana przez zastąpienie θ_0 za pomocą $\hat{\theta}$ i odwróceniu macierzy informacyjnej

$$\hat{\Sigma} = I^{-1}(\hat{\theta}) \tag{3}$$

Błędy standardowe każdego elementu $\hat{\theta}$ są równe pierwiastkowi odpowiedniego elementu diagonali macierzy $\hat{\Sigma}$. W większości zastosowań, macierz informacyjna nie jest łatwo wyznaczalna. Bardziej powszechnym podejściem zatem jest użycie ujemnej odwrotności hessjanu

$$\hat{\Sigma} = -H^{-1}(\hat{\theta}) \tag{4}$$

Jeśli hessjan nie jest ujemnie określony dla $\hat{\theta}_{MNW}$, to wyznaczenie błędów standardowych z (4) nie jest możliwe. Popularną alternatywą jest zastosowanie iloczynu diadycznego (*outer product*) gradientów

$$\hat{\Sigma} = \left(G(\hat{\theta})G'(\hat{\theta})\right)^{-1} \tag{5}$$

The take-home message

$$\hat{\theta} \sim N\left(\theta_0, -H^{-1}(\theta_0)\right) \tag{6}$$

Własności estymatorów MNW pozwalają wyprowadzić rozkłady statystyk testowych, które można zastosować do testowania hipotez nieliniowych o bardzo ogólnej postaci. Trzy najczęściej stosowane statystyki służące do testowania takich hipotez:

- ilorazu wiarygodności LR (**L**ikelihood **R**atio)
- statystyka Walda W
- statystyka mnożników Lagrange'a LM (**L**agrange **M**ultipliers)

Testowana hipoteza ma postać

$$H_0 : \begin{cases} h_1(\theta) = 0 \\ \vdots \\ h_g(\theta) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

gdzie g jest liczbą nałożonych ograniczeń.

Testowanie hipotez w MNW - [1] str. 245-255

- Zakłada się, że macierz pierwszych pochodnych $H(\theta) : \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta'}$ ma pełen rząd. Warunek ten będzie spełniony, jeśli żadnego z równań nie da się uzyskać z pozostałych równań.
- Oznaczenia
  - $\hat{\theta}$ oznacza estymator MNW bez ograniczeń
  - $\hat{\theta}_R$ oznacza estymator MNW z ograniczeniami
- $LR = 2\left(\ln L(\hat{(}\theta) - \ln L(\hat{\theta}_R)\right) \rightarrow \chi^2_g$
- Wzór ten jest prosty do policzenia. Oznacza on, że będziemy skłonni do odrzucenia hipotezy zerowej, jeśli narzucenie jej na parametry silnie zmniejsza dopasowanie modelu mierzone wartością log-wiarygodności.
- Wadą statystyki LR jest konieczność oszacowania zarówno modelu bez ograniczeń, jak i modelu z ograniczeniami, celem uzyskania $l(\hat{\theta})$ i $l(\hat{\theta}_R)$.

Literatura

[1] J. Mycielski, *Ekonometria* (Skrypt), WNE UW.

[2] V.L. Martin, A.S. Hurn and D. Harris, *Econometric Modelling with Time Series: Specification, Estimation and Testing*, Cambridge University Press, 2012.