Programowanie narzędzi analitycznych Z05

Rafał Woźniak

Faculty of Economic Sciences, University of Warsaw

Warszawa, 19-11-2020

Metoda Największej Wiarygodności

Niech $f(x;\theta)$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa dyskretnej zmiennej losowej z parametrem θ.
Załóżmy, ze $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależną próbą losową z tego rozkładu oraz, że $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zaobserwowanymi wartościami tych zmiennych losowych.
Wówczas, funkcją wiarygodności dla parametru θ jest

$$\begin{aligned} L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n) \\ &= f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \end{aligned}$$

F. wiarygodn. jest funkcją θ i bywa oznaczana $L(\theta) = L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Źródło: *Mathematical Statistics with Resampling and R, str. 137.*

Metoda Największej Wiarygodności

Niech $f(x;\theta)$ będzie rozkładem prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej z parametrem θ.
Załóżmy, ze $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależną próbą losową z tego rozkładu oraz, że $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zaobserwowanymi wartościami tych zmiennych losowych.
Wówczas, funkcją wiarygodności dla parametru θ jest

$$L(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$$

Oszacowaniem największej wiarygodności parametru θ jest statystyka $\hat{\theta}$, która maksymalizuje funkcję wiarygodności $L(\theta)$

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta) \text{ dla każdego } \theta. \tag{1}$$

Źródło: *Mathematical Statistics with Resampling and R, str. 139.*

MNW Przykład

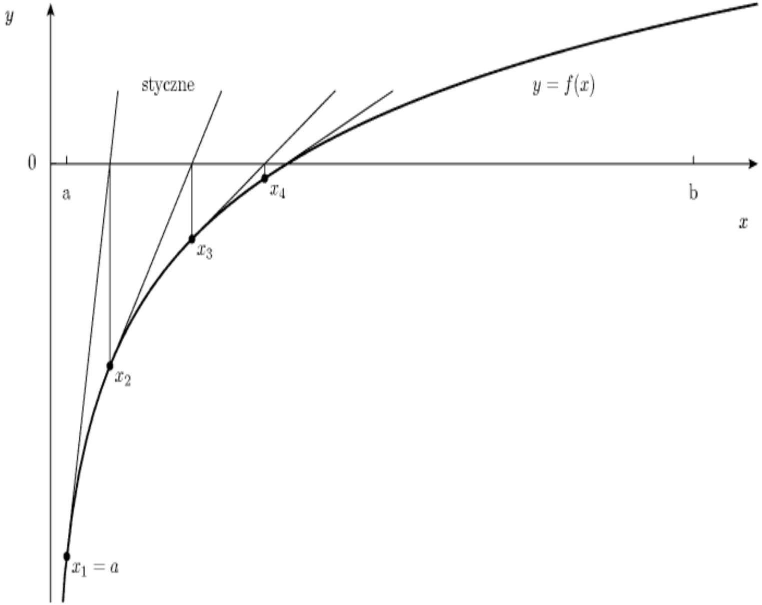
- Załóżmy, że kupiliśmy monetę w sklepie z magicznymi rekwizytami. Moneta wygląda na symetryczną, ale nie koniecznie taka jest. Rzuciliśmy monetą 8 razy i otrzymaliśmy OOOROROR. Jaka wartość będzie dobrym oszacowaniem p, prawdopodobieństwa orła?
- Niech $X_i \sim Bern(p)$, gdzie X_i oznacza orła. Załóżmy, że poszczególne wyniki rzutów są niezależne.

$$
\begin{aligned}
& P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0, X_7 = 1, X_8 = 0) \\
= \; & P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1) \cdots P(X_8 = 0) \\
= \; & p^5(1-p)^3
\end{aligned}
$$

- $\hat{p}_{MNW} = 5/8$

Źródło: *Mathematical Statistics with Resampling and R, str. 136.*

Metoda Newtona-Raphsona



Metoda Newtona (zwana też Metodą Newtona-Raphsona)

Dobre omówienie z przykładami

Włodzimierz Krysicki, Lech Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach tom I (Rozdział XIV Przybliżone rozwiązywanie równań i układów), Wydawnictwo Naukowe PWN.

Metoda

1. Zaczynamy od jakiegoś punktu startowego θ_0.
2. Jeżeli wartość w tym punkcie jest różna od zera, to wyznaczamy styczną do funkcji w tym punkcie i wyliczamy jej punkt przecięcia z osią X - otrzymujemy nowy punkt θ_1.
3. Powtarzamy punkty (1) i (2) dopóki nie uzyskamy zbieżności, czyli dopóki nie otrzymamy takiego θ_n, że w następnym kroku daje on siebie, czyli θ_n.

Przykład (Zadanie 14.2 Krysicki-Włodarski)

Za pomocą metody Newtona znaleźć miejsce zerowe funkcji

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

w przedziale (3; 4).

Przykład (Zadanie 14.2 Krysicki-Włodarski)

Za pomocą metody Newtona znaleźć miejsce zerowe funkcji

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$$

w przedziale (3; 4).
$f(3) = 27 - 18 - 12 - 7 = -10 < 0$
$f(4) = 64 - 32 - 16 - 7 = 9 > 0$
Wyjdźmy z punktu $\theta_0 = x_0 = 4$. Styczną do funkcji $f(x)$ w x_0:

$$y - y_0 = f'(x)(x - x0)$$

Pochodna $f(x)$ to $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$, a
$f'(x_0 = 4) = 48 - 16 - 4 = 28$. Styczna do $f(x)$ w punkcie $x_0 = 4$:

$$y - 9 = 28(x - 4) \rightarrow y = 28x - 103$$

Styczna przecina się z osią X w punkcie $y = 0$, czyli dla
$x_1 = \frac{103}{28} = 3.678$.
Następny krok: wyznaczamy wartość funkcji $f(x)$ w punkcie
$x_1 = 3.678$ i jeśli jest różna od zera, to wyznaczamy styczną itd.

Metoda Newtona

Metoda Newtona do znajdowania miejsca zerowego

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= f'(x)(x - x_0) \\
f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - 0}{x - x_0} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}
\end{aligned}
$$

W maksymalizacji funkcji metodą Newtona znajduje się miejsce zerowe pochodnej

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \tag{2}$$

Literatura

[1] Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewski M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, Tom I i II, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010.

[2] Boratyńska A., *Zadania na ćwiczenia ze statystyki matematycznej*.

[3] Laura Chihara, Tim Hesterberg, *Mathematical Statistics with Resampling and R*, John Wiley&Sons, 2011.