21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

李群和李代数

LIQUN HE LIDAISHU

北京师范大学数学科学学院　主　编

赵旭安/编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

李群和李代数／赵旭安编著.—北京：北京师范大学出版社，2012.9
(21世纪高等学校研究生教材　数学学科硕士研究生系列教材)
ISBN 978-7-303-14870-7

Ⅰ. ①李…　Ⅱ. ①赵…　Ⅲ. ①李群－研究生－教材②李代数－研究生－教材　Ⅳ. O152.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第141446号

营销中心电话　010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　刷：北京中印联印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：12
字　数：190千字
版　次：2012年9月第1版
印　次：2012年9月第1次印刷
定　价：20.00元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　钱　超
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　啸

前　言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据．纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953～1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962～1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966～1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生．1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课．每年导师根据招生情况，分别制订每个研究生的培养计划．从 1982 年开始，首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作．为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起，增加代数拓扑，共 6 门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练．由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障．在 1992 年修订教学计划时，增加了概率论基础和计算机基础．这

样，基础理论课共开设 8 门．从 1997 学年开始，规定研究生每人至少选 4 门．从 2000 年开始，增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程．从 2007 学年开始，增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础．规定研究生每人至少选 5 门．经过 30 多年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规．在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的．

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大．再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来．在 20 世纪 90 年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：泛函分析、实分析、随机过程等，但未系统策划出版系列教材．2005 年 5 月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦、岳昌庆进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院主编（李仲来教授负责），准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版，进一步计划用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材．

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善．

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论（数学）等硕士研究生使用和参考．（李仲来执笔）

北京师范大学数学科学学院

2011-12-06

作者的话

我最早对李群的了解，是在北京大学读研究生的时候开始的．那时用的教材是项武义先生的《李群讲义》．2003 年到 2004 年左右，因为我的研究工作中需要用到较多的李群和李代数方面的知识，所以对李群和李代数的理论产生了浓厚的兴趣．之后我开始在北京师范大学数学系担任研究生的“李群和李代数”课程的教学工作，在教学中，选用的是严志达和许以超先生所著的《李群及其李代数》一书．这两本书，对我来说都是很好的教材，它们的作者也都是国际知名的学者．项武义先生的书内容丰富，李群基本理论中的主要方面都涉及了，我对李群的理解就是从这本书开始的．这本书中对于李群和李代数的几何方面，有很多在我看来精辟的见解．但是对于怎么从李群过渡到李代数，商空间和商群上的解析结构和 Cartan 闭子群引理等，这本书都没有仔细交代．我想如果自己要写一本关于李群基本理论的书的话，那么这部分应该用一章的篇幅来介绍．严志达和许以超先生的书中的内容，涵盖了半单李群和李代数理论的基本方面，特别是对紧李群和紧李代数叙述很详细．我用这本书教过七届学生，从该书中可以看出两位先生深厚的学术造诣和严谨的写作风格．学生对书中不大满意的地方是比较多地采用了局部坐标下的表达方式，这大概是由于该书出版比较早的原因．我想应该尽量用现代的、学生习惯的整体的语言来重新表述一下．

本书的写作，我虽然花费了很多的时间和精力，

但是仅限于整理和表达方面，这些都是烦琐细碎的工作．书中很多内容都借鉴了上面两本书，如果读者在本书中看到和那两本书相似的内容，那么也是很自然的事情．

根据教学工作中自己的感受和学生的反应及建议，我意识到，一本研究生的教材，应该具备下面一些要素：

一、和书的内容匹配得很好的一定量的习题．在教学中会观察到如果缺少了课后习题，那么学生对学习内容的把握会欠缺很多．像李群和李代数这样的对学生在拓扑、几何、分析和代数方面的基础要求都比较高的课程，尤其是如此．

二、理论的表述和证明一定要简单、容易、直观．在写书的过程中，这方面的考虑是我时时都提醒自己的，不知道能不能达到期望的效果．我希望学过一学期研究生的微分几何和抽象代数的学生能够觉得比较容易接受．

三、书中的内容不要太多．因为本书的内容是专门为一年级下学期的研究生“李群”课程（每周 3 学时）设计的，所以我觉得篇幅不要超过 180 页．出于这方面的原因，像关于紧群的 Peter-Weyl 定理、Weyl 特征公式以及实半单李代数的分类等内容都只能放弃．另外还有一些其他的准备工具，如 Frobenius 定理、基本群、微分形式和流形上的积分，自己都尽量地用最简易的方式引进；或者取用权宜之计避开不谈．这些都是研究生数学课程中的标准内容，感兴趣的学生可以自行查阅．

在写作的开始阶段，鉴于想要写的这本书篇幅并不大，我以为能够容易的完成．在写作过程中，才发现这对自己真的不是一件容易的事．首先，李群和李代数不是我的专业；其次，我的写作和表述的能力本来就不高，尤其是对一次次的反复修改这样的工作，我一直有一种难以抑制的厌烦情绪．在写作过程中，后面谈到的事情，前面都得交代清楚．前面用的符号和后面用的符号也得协调一致，这些细节问题让我很伤脑筋．到今天这本书总算完成了，具体完成的怎么样，完全交给读者来评判．

这本书本来打算两年完成的，实际上却花了六年的时间．我非常感激李仲来教授，是他把这项工作交给我，并容忍我这么久才完成．另外感谢几何教研室的同事黄红博士，他仔细阅读了书稿，并提出了很多修改意见．

我还要感谢我的父母，他们为我腾出很多时间，让我来完成手中的工作．还要特别感谢我的妻子对我的理解、鼓励和支持．这本书的完成，她也有很多间接的付出．最后要感谢我的女儿，由于要赶书稿，我很多时候都不能够陪她玩．

本书中的一些符号和约定

N，**Z**，**Q**，**R**，**C**，**H** 分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数和四元数的集合.

说到线性变换都是指某个向量空间 V 到自身的可逆线性映射.

dim 表示维数

ker 表示同态映射的核

Coker 表示同态的余核

det 表示矩阵或线性自映射的行列式

Tr 表示线性自映射或矩阵的迹

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置

$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 单位矩阵

$\mathbf{Z}^+$，$\mathbf{R}^+$ 分别表示非负整数，非负实数的集合（包含 0）

$\mathbf{R}^*$，$\mathbf{C}^*$ 分别表示非 0 实数和复数的集合

$\varphi|_H$ 表示映射 φ 在子空间 H 上的限制映射

$V_1\oplus V_2$，$V_1\otimes V_2$ 分别表示向量空间的直和和张量积

$\Lambda^k(V)$ 表示向量空间的 k 次外幂

id 表示恒同映射

$\mathrm{diag}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 表示对角元素为 x_1，x_2，…，x_n 的对角矩阵

Jf 表示映射 f 的 Jacobi 矩阵

$\bigsqcup$ 表示集合的不交并

G_e 表示拓扑群或李群的单位元连通分支

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

目　录

绪论 /1

第 1 章　预备知识/3

§1.1　光滑流形和光滑映射 /4

§1.1.1　光滑流形 /4

§1.1.2　光滑映射 /6

§1.1.3　光滑子流形 /9

习题 1.1 /11

§1.2　光滑流形上的光滑向量场和微分形式 /12

§1.2.1　光滑流形的切空间和余切空间 /12

§1.2.2　光滑映射的切映射和余切映射 /17

§1.2.3　光滑流形上的向量场 /19

习题 1.2 /21

§1.3　流形上的光滑外微分形式 /22

§1.3.1　外微分形式 /22

§1.3.2　流形上的积分 /25

习题 1.3 /26

§1.4　拓扑群 /27

§1.4.1　拓扑群的定义和例子 /27

§1.4.2 拓扑群的一些基本性质 /28
§1.4.3 同态、子群和商群 /30
§1.4.4 拓扑群在拓扑空间上的作用 /32
习题 1.4 /34
§1.5 拓扑群的线性表示理论 /35
§1.5.1 拓扑群的线性表示的定义 /35
§1.5.2 子表示和商表示 /36
§1.5.3 Schur 引理 /37
习题 1.5 /38

第 2 章 李群的基本理论/39
§2.1 李群和李代数的定义与例子 /40
§2.1.1 李群的定义和例子 /40
§2.1.2 李代数的定义和例子 /42
习题 2.1 /45
§2.2 李群的李代数 /46
习题 2.2 /51
§2.3 李群的局部性质 /52
习题 2.3 /57
§2.4 单参数子群和指数映射 /58
§2.4.1 单参数子群 /58
§2.4.2 指数映射 /60
§2.4.3 李群上的 Taylor 公式 /62
习题 2.4 /64
§2.5 子群、同态和同构 /65
§2.5.1 同态和同构的进一步性质 /65
§2.5.2 李群的子群和李代数的子代数 /66
§2.5.3 李群之间的局部同态 /68

§2.5.4　Cartan 的闭子群引理 /69
习题 2.5 /71
§2.6　线性李群和线性李代数 /72
习题 2.6 /76
§2.7　商空间和商群 /77
习题 2.7 /80
§2.8　覆叠群 /81
习题 2.8 /85
§2.9　李群及李代数的自同构群和伴随表示 /86
§2.9.1　李群和李代数的自同构群 /86
§2.9.2　李群和李代数的表示 /88
§2.9.3　李群和李代数的伴随表示 /89
习题 2.9 /91

第 3 章　可解李代数、幂零李代数、约化李代数和半单李代数/92
§3.1　可解李代数和幂零李代数 /93
习题 3.1 /98
§3.2　约化李代数 /99
习题 3.2 /102
§3.3　半单李代数 /103
习题 3.3 /106
§3.4　Cartan 的可解性判别法 /107
§3.4.1　Cartan 的可解性判别法 /107
§3.4.2　可解李代数和半单李代数的关系 /109
习题 3.4 /111

第 4 章　紧李代数的结构和分类/112
§4.1　紧李群上的不变积分 /113

习题 4. 1 / 116
§4. 2 紧李代数的 Cartan 子代数和 Cartan 分解 / 117
习题 4. 2 / 122
§4. 3 紧李代数的根系和结构 / 123
习题 4. 3 / 128
§4. 4 抽象根系和素根系 / 129
§4. 4. 1 根系 / 129
§4. 4. 2 素根系 / 131
习题 4. 4 / 135
§4. 5 Weyl 群和 Weyl 房 / 136
习题 4. 5 / 142
§4. 6 Dynkin 图的分类 / 143
习题 4. 6 / 150
§4. 7 紧李群的 Cartan 子群的共轭性 / 151
习题 4. 7 / 156
§4. 8 紧李代数的分类 / 157
习题 4. 8 / 162
§4. 9 复半单李代数的分类 / 163
习题 4. 9 / 167

第 5 章 紧李代数的自同构群和表示论 / 168
§5. 1 紧李代数的自同构群 / 169
习题 5. 1 / 174
§5. 2 紧李代数的表示理论 / 175
习题 5. 2 / 179

参考文献 / 180

绪论

李群的理论发端于 19 世纪 70 年代挪威数学家 Sophus Lie 的工作. 到 1884 年,Lie 已经发表了他在李群理论方面的一些主要结果. 同一年,年轻的德国数学家 Friedrich Engel 开始和 Lie 一起工作. 他们合作完成了三卷本教程 Theorie der Transformations gruppen,分别在 1888 年、1890 年和 1893 年出版. 从开始,Lie 的想法就不是孤立于数学其他分支的. 实际上,他的兴趣在几何和微分方程上. Lie 的想法是系统的发展关于微分方程的对称性的理论,就像 Galois 对代数方程所做的那样. 当时的数学工作表明很多与特殊函数和正交多项式有关的方程都来自于群的对称性. 19 世纪的数学的三大主题:Galois 的群和对称性的代数概念、以 Poisson 和 Jacobi 为首的对力学中微分方程的几何理论及其明确的解的探求和以 Plücker、Möbius、Grassmann 及 Riemann 等人为代表的对几何学的新的理解,都在李群这一概念之下汇合了.

虽然 Lie 当之无愧地被称为李群理论的奠基人,但是李群的结构理论的重大的进步是和 Wilhelm Killing 分不开的. Killing 的工作对随后数学的发展

产生了深刻的影响. 1888 年,Killing 发表了他的名为 Die Zusammensetzung der stetigen endichen Transformations gruppen 的一系列文章中的第一篇. 之后他的工作被 Elie Cartan 进一步发展,导致了后来的半单李代数的分类、Cartan 的对称空间理论和 Hermann Weyl 的关于紧和半单李群的最高权表示等. 从 Weyl 开始李群理论开始成熟,Weyl 不仅对半单李群及其表示进行了系统的研究,还把李群理论和量子力学联系起来,并且明确地区分了李代数(无穷小李群)和李群并开始研究李群的拓扑性质. Chevalley 最早系统的把李群理论用现代数学的语言予以重新整理.

李群和李代数是现代数学中的基本的研究对象,在整个数学大厦中占有重要的位置. 如果把整个数学看成一个按重要性从中心往外发展的一个系统,那么李群和李代数必定位于这一系统的中心附近.

李群是一个群,其上有拓扑,又是一个解析流形. 它上面同时包含代数结构、拓扑结构和解析结构,这些结构满足一些相容性条件. 在李群上,可以同时研究群结构、拓扑结构和几何结构. 李群是非线性的数学对象,李代数是李群结构的自然的线性化. 李群和李代数处于代数、拓扑、几何和分析的结合点上.

李群和李代数与其他的很多数学分支都有各种各样的深刻联系,对它们的研究也可以从不同的方向和角度来展开. 对李群和李代数,可以用微分几何的方法来研究李群,也可以从纯代数的观点来研究李代数及其表示理论. 李群及齐性空间上的调和分析,代数群的研究等,都体现了不同的研究方法. 当然也可以将各种方法融会贯通,相互借鉴.

按照 F. Klein 的观点,几何学就是研究在变换群作用下的不变量和不变性质的学问,而几何中的变换群通常都是李群. 比如,若在 $\mathbf{R}^m$ 上选取等距变换群,则有欧氏几何;若选取仿射变换群,则有仿射几何;若将 $\mathbf{R}^m$ 扩充为射影空间,选取射影变换群,则有射影几何. 由此足以看出李群在几何学研究中的统帅作用.

在几何和拓扑学中,李群及其齐性空间,对称空间都是重要的研究对象. 在代数学中,与李群和李代数相关的根系,Weyl 群,Hecke 代数,Chevalley 群等都是代数中关心的对象. 在有限单群的分类中,大量的单群是李型单群.

在物理学中,因为相对性原理具有基本的重要性,它需要借助变换的概念来描述,所以在这里也少不了李群的角色. 若考虑伽利略变换,可以得到经典牛顿力学;考虑洛伦兹群和 Poincaré 变换群,则是狭义相对论. 随着 20 世纪数学和物理学,尤其是量子力学和广义相对论的发展,人们越来越深刻地认识到李群理论在现代数学、物理中的重要作用. 纤维丛和规范理论,量子场论及量子引力理论的发展,离开李群和李代数及其相关的概念,是不可想象的. 李群和李代数及其表示理论已经深深地扎根于理论物理中,发挥着深刻而重要的作用.

在近年的发展中,李群和李代数及其推广,Kac-Moody 群和代数,李超代数,量子群等的研究更是全面地展开,这些充分展示了李群和李代数理论的重要性.

第1章 预备知识

本章前一部分内容简要地介绍一些微分几何方面的预备知识，如光滑流形和光滑映射、子流形、流形上的向量场和外微分形式、流形上的积分等基本概念；后一部分介绍与拓扑群及其在拓扑空间上的作用相关的一些基本事实，特别是介绍了关于群表示理论的一些基本概念. 同时，也约定后面要用到的一些记号.

§1.1　光滑流形和光滑映射

这一节介绍光滑流形及光滑流形上的光滑映射、光滑子流形等基本概念. 光滑流形是欧氏空间的概念的自然推广，从局部上来看，它同胚于欧氏空间的开集；从整体上来看，可以认为它是一片一片的欧氏空间的开集通过光滑的黏合得到的.

§1.1.1　光滑流形

我们假定读者了解 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U 上的实值光滑函数和实值解析函数的定义，以及 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U 映到 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 V 上的光滑映射和解析映射的定义.

定义 1.1.1　设 M 是拓扑空间，若有 M 的开集 U 及 U 到 m 维欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 的映射，使得 $\phi:U\to\phi(U)$ 是拓扑空间的同胚，则称 (U,ϕ) 是 M 上的一个局部坐标系，称 U 是 M 上的一个局部坐标邻域，ϕ 为 M 上的局部坐标映射.

设 $\pi_i:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}, x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\mapsto x^i$ 为到第 i 个坐标的投影映射，令 $\phi^i=\pi_i\circ\phi:U\to\mathbf{R}$，则 ϕ 可以写成分量形式 $\phi=(\phi^1,\phi^2,\cdots,\phi^m)$. 设 $p\in U$ 的在局部坐标映射 ϕ 下的像为 $\phi(p)=x=(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in\mathbf{R}^m$，则 $x^1=\phi^1(p), x^2=\phi^2(p),\cdots,x^m=\phi^m(p)$，$\phi(p)$ 称为 p 点在局部坐标系 (U,ϕ) 下的坐标，特别的 $\phi^i(p)$ 称为 p 点的第 i 个坐标，$1\leqslant i\leqslant m$. 注意在局部坐标系 (U,ϕ) 下，坐标只对坐标邻域 U 中的点有定义.

设 f 是定义在 M 的某个包含 U 的子集上的实值函数，则复合映射 $\hat{f}=f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\mathbf{R}$ 称为 f 在局部坐标系 (U,ϕ) 下的表示函数. $\hat{f}$ 是欧氏空间开集 $\phi(U)$ 上的实值函数，若 $\hat{f}$ 是光滑函数，则称 f 关于局部坐标系 (U,ϕ) 是光滑函数.

设 $(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)$ 是 M 上的两个局部坐标系，$p\in U_1\cap U_2$ 在这两个局部坐标系下的局部坐标都有意义，设为 $\phi_1(p),\phi_2(p)$. (U_1,ϕ_1) 到 (U_2,ϕ_2) 的局部坐标变换映射定义为 $\phi_2\circ\phi_1^{-1}:\phi_1(U_1\cap U_2)\to\phi_2(U_1\cap U_2)$，它将 p 点在局部坐标系 (U_1,ϕ_1) 下的坐标 $\phi_1(p)$ 映为 p 点在局部坐标系 (U_2,ϕ_2) 下的坐标 $\phi_2(p)$. 类似的有局部坐标变换映射 $\phi_1\circ\phi_2^{-1}$. M 上的两个局部坐标系 (U_1,ϕ_1) 和 (U_2,ϕ_2) 称为光滑相容的局部坐标系，若局部坐标变换 $\phi_2\circ\phi_1^{-1}$ 和 $\phi_1\circ\phi_2^{-1}$ 都是光滑映射.

下面利用这些概念来定义光滑流形.

定义 1.1.2 设 M 为 Hausdorff 拓扑空间(即对 M 中的任意两点 $p\neq q$,存在包含它们的不相交的开邻域),若 M 上有一组局部坐标系 $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$,这里 $\mathcal{A}$ 是指标集. U_α 为 M 中的开集,$\phi_\alpha:U_\alpha\to\mathbf{R}^m$ 是到欧氏空间中的开集的同胚映射,满足

(1) $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}}U_\alpha=M.$

(2) 对任意 $\alpha,\beta\in\mathcal{A}$,局部坐标系 (U_α,ϕ_α) 和 (U_β,ϕ_β) 是光滑相容的,即当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时,局部坐标变换 $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}:\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是光滑映射.

则称 $\mathcal{U}$ 为 M 上的一个光滑结构,称 $(M,\mathcal{U})$ 为 m 维光滑流形,或者直接称 M 为光滑流形.

在上面的定义中,如果要求局部坐标变换是实解析映射(即在定义域中的每一点附近都可以展成收敛的实系数幂级数),那么称 $(M,\mathcal{U})$ 为实解析流形. 因为实解析函数是光滑函数,所以实解析流形也是光滑流形. 如果在上面定义中要求 $\mathcal{U}$ 中的每个局部坐标系 (U_α,ϕ_α) 的局部坐标映射 ϕ_α 都是 U_α 到 $\mathbf{C}^m$ 中的开集的同胚映射,而且坐标变换是复解析映射,那么称 M 为 m 维复解析流形,简称复流形.

流形 M 上的两个光滑结构 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 等价,是指对任意 $(U_\alpha,\phi_\alpha)\in\mathcal{U}$ 和 $(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathcal{V}$,$(U_\alpha,\phi_\alpha)$ 和 (V_β,ψ_β) 都是 M 上相容的局部坐标系. 以后 M 上等价的两个光滑结构,就看成同样的光滑结构. 在有些书中将前述定义的光滑流形称作预光滑流形,在相应的光滑结构 $\mathcal{U}$ 中加入所有与 $\mathcal{U}$ 中的局部坐标系都相容的局部坐标系后得到一个与 $\mathcal{U}$ 等价的最大的光滑结构 $\widetilde{\mathcal{U}}$,$(M,\widetilde{\mathcal{U}})$ 才称为光滑流形. 我们不做这样的区分,但是需要注意采用 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 后局部坐标系的选取就具有更大的灵活性.

例 1.1.3 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 为实解析流形,它的维数为 n. 对 $\mathbf{R}^n$,只有一个局部坐标系 $(\mathbf{R}^n,\mathrm{id})$,此时没有相容性的问题. 这样给出的解析结构称为 $\mathbf{R}^n$ 上的标准的解析结构.

类似的 $\mathbf{C}^n$ 上有标准的复 n 维解析流形的结构.

例 1.1.4 n 维单位球面

$$S^n=\{x=(x^0,x^1,\cdots,x^n)\mid(x^0)^2+(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2=1\}$$

是实解析流形.

下面给出一个解析结构 $\mathcal{U}$,它包含 $2n+2$ 个局部坐标系:

$$(U_i^+,\phi_i^+),(U_i^-,\phi_i^-),0\leqslant i\leqslant n,$$

其中 $U_i^+=\{x\in S^n\mid x^i>0\}$,$\phi_i^+(x)=(x^0,x^1,\cdots,\overset{\wedge}{x^i},\cdots,x^n)$,

$$U_i^-=\{x\in S^n \mid x^i<0\},\ \phi_i^-(x)=(x^0,x^1,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^n).$$

上面 $\hat{x}^i$ 表示将 x^i 这项删去. 读者可以自己去验证局部坐标变换是实解析的. 这给出了 S^n 上的标准实解析流形的结构.

例 1.1.5　光滑流形 M 的开子集 U 上有由 M 的光滑结构诱导出的自然光滑结构,称为 M 的开子流形. 这是因为若 M 有一组局部坐标系 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid \alpha\in\mathcal{A}\}$,则 $\{(U_\alpha\cap U,\phi_\alpha|_{U_\alpha\cap U})\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$ 为 U 上的一个光滑结构.

例 1.1.6　实或复 n 维向量空间 V 上具有自然的实(或复)解析流形结构,可以这样给出:在 V 上选取一个基底,则 V 与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 同构,这一同构给出 V 上的解析流形结构. 因为不同的基底选取导致的坐标变换是线性映射,所以是解析的. 这说明不同的基底选取得到等价的解析流形结构,称为向量空间 V 上的标准解析结构.

考虑 V 上的所有的实(或复)线性自映射构成的空间 $M(V)$,它是一个向量空间,线性同构于 $\mathbf{R}^{n^2}$(或 $\mathbf{C}^{n^2}$). 它上面有由 $M(V)$ 的向量空间结构诱导出的标准解析结构. $\mathrm{GL}(V)=\{A\in M(V)\mid \det A\neq 0\}$ 是 $M(V)$ 中的开子集,所以是开子流形,具有诱导的自然的解析结构,使它成为实(或复)解析流形.

例 1.1.7　设 M 和 N 分别为 m 和 n 维光滑流形,则 $M\times N$ 上有乘积光滑结构,使得 $M\times N$ 成为光滑流形.

设流形 M 上有光滑结构 $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$,$N$ 上有光滑结构 $\mathcal{V}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\mid\beta\in\mathcal{B}\}$,则 $\mathcal{U}\times\mathcal{V}=\{(U_\alpha\times V_\beta,\phi_\alpha\times\psi_\beta)\mid\alpha\in\mathcal{A},\beta\in\mathcal{B}\}$ 给出 $M\times N$ 上的光滑结构.

在这里需要将 $\mathbf{R}^{m+n}$ 自然地等同于 $\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^n$.

在同一个拓扑空间 M 上可以有两个不相容的光滑结构.

例 1.1.8　在 $\mathbf{R}^1$ 上,标准的光滑结构由局部坐标系 $(\mathbf{R}^1,\mathrm{id})$ 给出,当然也可以给出其他的光滑结构,如由 $(\mathbf{R}^1,\mathrm{e}^x)$ 或 $(\mathbf{R}^1,x^3)$ 给定光滑结构. 可以看出 $(\mathbf{R}^1,\mathrm{id})$ 和 $(\mathbf{R}^1,\mathrm{e}^x)$ 是相容的,它们决定同一个光滑结构. 而 $(\mathbf{R}^1,\mathrm{id})$ 和 $(\mathbf{R}^1,x^3)$ 是不相容的,它们决定不等价的光滑结构.

§ 1.1.2　光滑映射

下面将把 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U 映到 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 V 的光滑映射的概念推广到一般光滑流形上.

设 p 是流形 M 中的一点,若 $p\in U$,则称局部坐标系 (U,ϕ) 为 p 点附近的一个局部坐标系.

定义 1.1.9　设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维光滑流形,$f:M\to N$ 为映射,

如果存在 M 上 p 点附近的局部坐标系 (U,ϕ) 和 N 上 $q=f(p)$ 点附近的局部坐标系 (V,ψ)，使得映射 $f(U)\subset V$，且 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\psi(V)$ 在 $\phi(p)$ 点是光滑的，那么称映射 f 在 p 点是光滑的. 如果 $f:M\to N$ 在 M 上的每一点都光滑，那么称 f 是光滑映射.

按照这一定义，f 是光滑映射当且仅当它在任意一对局部坐标系 (U,ϕ)，(V,ψ) 下的表示函数 $\hat{f}=\psi\circ f\circ\phi^{-1}$ 作为欧氏空间的开集之间的映射是光滑的. 光滑流形定义的中相容性条件保证 f 的光滑性与具体选取的局部坐标系无关.

为了使 M 具有好的性质，比如 M 上存在单位分解，常常要求 M 是第二可数的(即 M 具有可数的拓扑基)，这等价于 M 的任意开覆盖中可以找到可数子覆盖.

光滑映射 $\sigma:\mathbf{R}\to M$ 称为 M 上的光滑曲线. 光滑映射 $h:M\to\mathbf{R}$ 称为 M 上的实值光滑函数，简称光滑函数. M 上的所有光滑实值函数构成实数域上的一个代数，记为 $C^\infty(M)$. 流形 M 上的光滑曲线 σ 和光滑函数 f 可以复合得到 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f\circ\sigma$，这在后面有重要的应用.

在局部坐标系 (U,ϕ)，(V,ψ) 下，设 $x=\phi(p)$，$y=\psi(q)$，f 的坐标表示 $\hat{f}$：$\phi(U)\to\psi(V)$ 的分量形式为

$$\begin{cases} y^1=\hat{f}^1(x)=\hat{f}^1(x^1,x^2,\cdots,x^m), \\ y^2=\hat{f}^2(x)=\hat{f}^2(x^1,x^2,\cdots,x^m), \\ \qquad\cdots \\ y^n=\hat{f}^n(x)=\hat{f}^n(x^1,x^2,\cdots,x^m). \end{cases}$$

这里对 $x\in\phi(U)$，

$$y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)=\hat{f}(x),\ \hat{f}^j(x)=\pi_j\circ\psi\circ f\circ\phi^{-1}(x),\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

为了方便，也常常将 $\hat{f}$ 直接写成 f，或者直接写 $y=f(x)$.

例 1.1.10 在 S^n 和 $\mathbf{R}^{n-1}$ 的标准解析流形结构下，包含映射 $i:S^n\to\mathbf{R}^{n+1}$ 是解析映射.

证明 根据前面的例 1.1.4，U_i^-，U_i^-，$0\leqslant i\leqslant n$ 构成 S^n 的一个开覆盖. 下面只证明 i 限制在 U_0^+ 和 U_0^- 上光滑，其他情形类似.

将 S^n 上的局部坐标系选为 (U_0^+,ϕ_0^+)，$U_0^+=\{x\in S^n\mid x^0>0\}$，对 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^n)$，$\phi_0^+(x)=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$. $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的局部坐标映射为恒等映射. i 在局部坐标下的表示为 $\hat{i}_0^+=i\circ(\phi_0^+)^{-1}:\phi_0^+(U_0^-)\to\mathbf{R}^{n+1}$，使得

$$(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mapsto=(\sqrt{1-(x^1)^2-\cdots-(x^n)^2},x^1,x^2,\cdots,x^n).$$

这里 $\phi_0^+(U_0^+)=\{(x^1,x^2,\cdots,x^n)\in\mathbf{R}^n\mid(x^1)^2+(x^2)^2+\cdots+(x^n)^2<1\}$. 因为 $\hat{i}_0^+$ 在 $\phi_0^+(U_0^+)$上是解析映射,所以 i 在 U_0^+ 上是解析的. 对于 U_0^-,讨论类似. 只是此时 $\hat{i}_0^-=i\circ(\phi_0^-)^{-1}:\phi_0^-(U_0^-)\to\mathbf{R}^{n+1}$使得

$$(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mapsto(-\sqrt{1-(x^1)^2-\cdots-(x^n)^2},x^1,x^2,\cdots,x^n).$$

定义 1.1.11 设 M 和 N 分别为 m 维和 n 维光滑流形,映射 $f:M\to N$ 在 $p\in M$ 处光滑. 设存在 M 上 p 点附近的局部坐标系(U,ϕ)和 N 上 $q=f(p)$点附近的局部坐标系(V,ψ),$\hat{f}=\psi\circ f\circ\phi^{-1}:\phi(U)\to\psi(V)$是 f 在局部坐标下的表示,则称矩阵 $J\hat{f}=\dfrac{\partial\hat{f}}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\hat{f}^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\hat{f}^1}{\partial x^m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\hat{f}^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial\hat{f}^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$为映射 f 在局部坐标系(U,ϕ)和(V,ψ)下的 Jacobi 矩阵,$J\hat{f}$ 在 $\phi(p)$点的秩称为 f 在 p 点的秩.

若 f 在 M 中的任意点的秩都为 m,则称 f 为浸入. 若 f 在 M 中的任意点的秩都为 n,则称 f 为淹没.

如果局部坐标系(U,ϕ)和(V,ψ)已经明确给定时,为了记号的简单方便,$J\hat{f}$ 也常简单的记为 Jf 或者$\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Jacobi 矩阵在 $\phi(p)$点的值 $J\hat{f}(\phi(p))$也简单记为 $Jf(p)$或$\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_p$. 利用复合函数求导法则,不难看出虽然 Jacobi 矩阵 $Jf(p)$与局部坐标系的选取有关,但是 f 在 p 点的秩与局部坐标系的选取无关. 根据简单的线性代数知识可知,若 f 为浸入,则 $m\leqslant n$;若 f 为淹没,则 $m\geqslant n$.

定义 1.1.12 设 $f:M\to N$ 是光滑的一一映射且它的逆映射 f^{-1} 也是光滑映射,则称 f 为 M 和 N 之间的光滑微分同胚,简称为光滑同胚,此时也称 M 和 N 是光滑同胚的.

光滑同胚定义了流形之间的等价关系. 光滑流形的光滑同胚分类问题,是微分拓扑中的基本问题. 类似的也可以定义解析同胚的概念.

下面的定理是数学分析中的反函数定理的推论,在后面需要用到.

定理 1.1.13 设 $f:M\to N$ 是维数相同的光滑流形之间的光滑映射,若 f 是一一映射,且它在每点的 Jacobi 矩阵都是非奇异的,则 f^{-1} 也是光滑映射.

上面的结果对于解析流形也成立，即设 $f:M\to N$ 是维数相同的解析流形之间的解析映射，若 f 是一一映射，且它在每点的 Jacobi 矩阵都是非奇异的，则 f^{-1} 也是解析映射.

§1.1.3 光滑子流形

下面给出一般的光滑子流形的概念.

定义 1.1.14 设 N 是 m 维光滑流形 M 的子集，若 N 上有光滑结构，使得 N 成为 n 维光滑流形，包含映射光滑且在每点处的秩都是 n，则称 N 是 M 的嵌入子流形，简称为子流形. $m-n$ 称为 N 在 M 中的余维数.

例 1.1.15 最简单的子流形的例子是由嵌入

$$i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m:(x^1,x^2,\cdots,x^n)\mapsto(x^1,x^2,\cdots,x^n,0,\cdots,0)$$

给出，其中 $n\leqslant m$，以后称它为 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的标准嵌入.

注意在 N 上有由其上光滑流形结构确定的子流形拓扑，还有 N 作为 M 的子集对应的子空间拓扑，一般来说子流形拓扑和子空间拓扑两者并不一定相同. 这从下面例子可以看出：

例 1.1.16 对于环面 $T^2=S^1\times S^1$，定义 $\sigma:\mathbf{R}^1\to T^2$，$t\mapsto(\mathrm{e}^{ipt},\mathrm{e}^{iqt})$. 若 $\dfrac{p}{q}$ 为无理数，则对于任意 $t\neq s$，$\sigma(s)\neq\sigma(t)$，这说明 $\sigma:\mathbf{R}^1\to\sigma(\mathbf{R}^1)$ 是一一映射. 在 $N=\sigma(\mathbf{R}^1)$ 上利用局部坐标映射 σ^{-1} 定义 N 上的光滑结构，因为 σ 在任意点 t 处的秩都为 1. 所以 N 是 T^2 的一维子流形，但是 N 从这一微分结构获得的拓扑与子空间拓扑不同.

两种拓扑在 N 中的一点处局部来看图像分别如下：

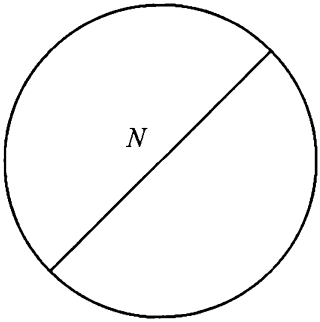

图 1-1

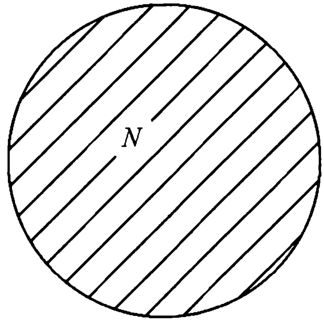

图 1-2

在子流形拓扑下 N 是局部连通的，但在子空间拓扑下，N 不是局部连通的.

上面两个例子中，前一个例子里两种拓扑是一致的，都是 $\mathbf{R}^n$ 上的标准拓扑. 后一个例子两种拓扑不一致，子流形拓扑是 $\mathbf{R}^1$ 上的标准拓扑，子空间拓扑不是 $\mathbf{R}^1$ 上的标准拓扑.

为了区分这两种不同的子流形，给出下面的概念.

定义 1.1.17　设 N 是 m 维流形 M 的子集，如果对于任意点 $p\in N$，都有 p 在 M 中的局部坐标系 (U,ϕ)，使得 $\phi(p)=0$ 且 $\phi(U\cap N)=\phi(U)\cap i(\mathbf{R}^n)$，那么称 N 为 M 的 n 维正则子流形. 这里 i 是 $\mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^m$ 中的标准嵌入.

读者可以参看图 1-3：

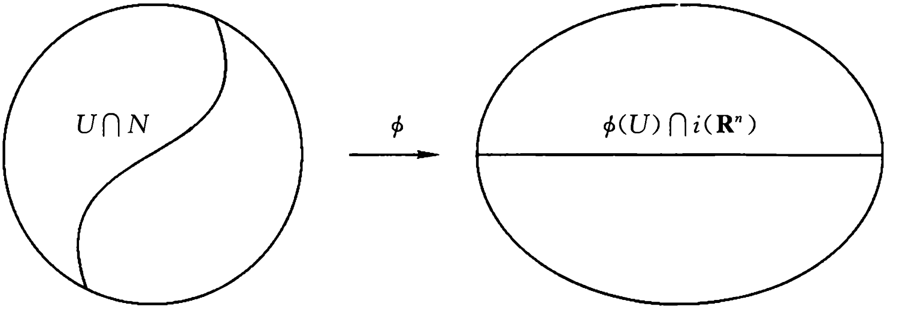

图 1-3

正则子流形在局部上看和 $\mathbf{R}^n$ 在 $\mathbf{R}^m$ 中的标准嵌入一样. 而例 1.1.16 中的子流形显然不是正则子流形.

设 N 是光滑流形 M 的正则子流形，对于 N 中任意一点 p，存在 M 在 p 点附近满足定义条件的局部坐标系 (U_p,ϕ_p). 定义 N 上的光滑结构 $\mathcal{V}=\{(U_p\cap N,\phi_p|_{U_p\cap N})\mid p\in N\}$，则 N 成为光滑流形. 读者可以自己去验证这些局部坐标系是相容的，且在此光滑结构下 N 是 M 中的 n 维正则子流形. 于是有

命题 1.1.18　光滑流形 M 的正则子流形必为 M 的嵌入子流形，且其上的光滑结构是从 M 的光滑结构诱导出的.

关于正则子流形，有以下重要结果：

命题 1.1.19　N 是光滑流形 M 的正则子流形当且仅当 N 上的子流形拓扑与子空间拓扑相同.

有兴趣的读者可以自己去根据定义证明，或者查阅相关参考文献.

下面给出一个正则子流形的例子.

例 1.1.20　S^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的正则子流形.

证明　对任意 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^n)\in S^n$，令 π_x 为超平面 $\{y\in\mathbf{R}^{n+1}\mid(y,x)=1\}$，它是球面 S^n 在 x 处的切空间，选取 π_x 的一个基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 令 $U_x=\{y\in\mathbf{R}^{n+1}\mid|y-x|<1\}$，$\phi_x:U_x\to\mathbf{R}^{n+1}$，$y\mapsto(z^1,z^2,\cdots,z^n,|y|^2-1)$，这里 $z^1,z^2,\cdots,z^n$ 是以向量 x 为起点，y 为终点的向量正交投影到超平面 π_x 后所得的向量在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的分量. 对任意 $x\in S^n$，选取 $\mathbf{R}^{n+1}$ 在 x 点附近的局部坐标系 (U_x,ϕ_x)，不难验证 $\phi_x(U_x\cap S^n)=\phi_x(U_x)\cap i(\mathbf{R}^n)$，所以 S^n 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的正则子流形.

习题 1.1

1. 设 $\mathbf{R}P^n$ 为 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的所有过原点的直线构成的集合，它可以如下得到：在 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 中定义等价关系～，对 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^0,y^1,\cdots,y^n)$，约定$x\sim y$，当且仅当存在非 0 实数 λ 使得 $y=\lambda x$. 将 x 的等价类记为$[x]=[x^0,x^1,\cdots,x^n]$，$x^0,x^1,\cdots,x^n$ 称为$[x]$的齐次坐标，则 $\mathbf{R}P^n=\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}/\sim$，其上给予商拓扑. 证明：$\mathbf{R}P^n$ 是 n 维实解析流形（提示：首先，$\forall p\in\mathbf{R}P^n$ 可以写成$[x^0,x^1,\cdots,x^n]$. 因为 x^i，$0\leqslant i\leqslant n$ 不全为 0，所以存在 i，使得 $x^i\neq 0$. 令 $U_i=\{[x^0,x^1,\cdots,x^n]\in\mathbf{R}P^n\mid x^i\neq 0\}$，因为 U_i 在商映射 $\pi:\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}\to\mathbf{R}P^n$ 下的原像是 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$中的开集，所以 U_i 是 $\mathbf{R}P^n$ 中的开集. 考虑映射 $\phi_i:U_i\to\mathbf{R}^n$，$[x^0,x^1,\cdots,x^n]\to(x^0/x^i,x^1/x^i,\cdots,x^i/x^i,\cdots,x^n/x^i)$，显然它是同胚. 令$\mathcal{U}=\{(U_0,\phi_0),(U_1,\phi_1),\cdots,(U_n,\phi_n)\}$，则它给出了 $\mathbf{R}P^n$ 上的实解析流形结构).
2. 证明：映射 $f:\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}\to\mathbf{R}P^n$，$(x^0,x^1,\cdots,x^n)\to[x^0,x^1,\cdots,x^n]$为光滑映射.
3. 证明：复射影空间 $\mathbf{C}P^n$，即 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中过原点的复直线的空间是 n 维复解析流形.
4. 设光滑映射 $f:M\to N$ 为浸入，证明：在任意点 $p\in M$ 都存在M 上 p 点附近的局部坐标系(U,ϕ)和 N 上 $q=f(p)$点附近的局部坐标系(V,ψ)，使得 f 的坐标表示$\hat{f}:\phi(U)\to\psi(V)$满足
$$\hat{f}(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0).$$
对淹没的情形叙述类似的结论，并加以证明.
5. 证明：若光滑映射 $f:M\to N$ 为淹没，则对于任意点 $y\in N$，$f^{-1}(y)$是 M 中的正则子流形.
6. 构造光滑流形 S^2 和 $\mathbf{C}P^1$ 之间的一个光滑同胚.

§1.2　光滑流形上的光滑向量场和微分形式

这一节要将 $\mathbf{R}^m$ 上的光滑向量场的概念推广到一般的光滑流形上，为此，首先需要定义光滑流形的切向量和余切向量.

§1.2.1　光滑流形的切空间和余切空间

首先回顾 $\mathbf{R}^m$ 上的切向量的概念. $\mathbf{R}^m$ 在点 x 处的一个切向量是 $\mathbf{R}^m$ 中以 x 为起点的一个向量. 所有以 x 为起点的向量构成一个向量空间，称为 $\mathbf{R}^m$ 在 x 处的切空间，记为 $T_x\mathbf{R}^m$，它同构于 $\mathbf{R}^m$. 用 $T\mathbf{R}^m$ 记 $\mathbf{R}^m$ 的所有切向量构成的空间，称为 $\mathbf{R}^m$ 的切丛，则有自然的商映射 $\pi: T\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$，它将 $\mathbf{R}^m$ 的一个切向量映为它的起点. $T\mathbf{R}^m$ 同胚于 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$.

对于 $\mathbf{R}^m$ 中的开集 U，定义 U 的切丛为由 $T\mathbf{R}^m$ 中的起点落在 U 中的向量构成的子空间，$TU \cong U \times \mathbf{R}^m$. 下面我们希望把欧氏空间的切空间的概念推广到一般的光滑流形上. 推广的麻烦在于在流形上没有向量的概念，但是如果把 $\mathbf{R}^m$ 在一点 x 处的切向量看做是 $\mathbf{R}^m$ 中某一条光滑曲线的切向量，由于曲线的概念可以推广到光滑流形上，那么光滑流形在一点的切向量也可以定义.

为了说得更清楚，设对于 $\mathbf{R}^m$ 中 x 点处的切向量 v，若存在 $\varepsilon>0$ 及局部定义的光滑曲线 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^m$，满足 $\sigma(0)=x$，且 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v$，则称 v 为局部定义的光滑曲线 σ 的切向量. 若两条过 x 的局部定义的光滑曲线 σ_1, σ_2 满足 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\sigma_1(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\mathrm{d}\sigma_2(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$，即它们在 x 点有相同的切向量，则称它们在 x 处相切. $\mathbf{R}^m$ 在 x 点处的切空间可以看成过 x 点的局部定义的光滑曲线在相切关系下的等价类的集合. 这种看法可以自然的推广到一般的光滑流形上.

定义 1.2.1　设 p 为 m 维光滑流形 M 中的一点，定义 V_p 为所有过 p 点的局部定义的光滑曲线 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 构成的集合，选取在 p 点处的任意的局部坐标系 (U, ϕ)，在 V_p 上定义如下的等价关系：

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \sigma_1)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \sigma_2)|_{t=0}.$$

若 σ_1 和 σ_2 等价，则称它们在 p 点处是相切的.

读者可以利用复合函数的求导法则直接验证这里定义的等价关系不依赖于局部坐标系的选取.

命题 1.2.2 $V_p/\sim$上有自然的 m 维向量空间的结构，且它的加法和数乘运算不依赖于局部坐标系的选取，称为 M 在 p 点的切空间，记作 T_pM. T_pM 中的元素称为M 在 p 点处的切向量.

证明 选取 p 点附近的一个局部坐标系(U,ϕ)，设 $\phi(p)=x$. 注意到若把 $\phi(U)$看成 $\mathbf{R}^m$ 的开子流形，则 ϕ 是 U 到 $\phi(U)$的光滑同胚. 从局部上看，V_p 与 V_x 中的局部定义的曲线在映射 ϕ 下一一对应. 因为 $\sigma_1,\sigma_2\in V_p$ 在 p 点处相切当且仅当它们对应的$\phi(U)$中的两条曲线 $\phi\circ\sigma_1$ 和 $\phi\circ\sigma_2$ 在 x 点处相切，所以这一对应是 $V_p/\sim$与 $T_x\mathbf{R}^m$ 之间的一一对应.

以后把局部定义的曲线 σ 对应的切向量直接记为$[\sigma]$.

为了建立 $V_p/\sim$上的向量空间结构，只需要把 $T_x\mathbf{R}^m$ 上的向量空间结构利用上面的对应直接搬过来，并验证与局部坐标系的选取无关即可，具体细节留给读者.

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 为 $T_x\mathbf{R}^m$ 的标准正交基底，即 $\boldsymbol{e}_i$ 为只有第 i 个坐标非 0 且为 1 的单位向量，则 $\boldsymbol{e}_i$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的曲线$\tilde{\sigma}_i:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^m$，$t\mapsto x+t\boldsymbol{e}_i$ 的切向量. 设 σ_i 是$\tilde{\sigma}_i$ 在 $U\subset M$ 中对应的局部定义的曲线，称它为局部坐标系(U,ϕ)下的局部坐标曲线，把 σ_i 对应的切向量$[\sigma_i]$暂时仍记为 $\boldsymbol{e}_i$，则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 构成了 T_pM 的基底. 需要注意这个基底依赖于局部坐标系的选取.

考虑 $\mathbf{R}^m$ 上所有的在原点的某个开邻域上有定义的光滑实值函数h 构成的集合C，在其上定义等价关系$\sim$，若两个这样的局部定义的光滑函数在原点的某一开集上的限制是相等的，即认为它们是等价的，则$\mathcal{O}=C/\sim$是实数域上的代数. 其上的加法、数乘和乘法运算由函数的相应运算给出，$\mathcal{O}$称为 $\mathbf{R}^m$ 在原点处的光滑芽函数空间.

在$\mathcal{O}$上可以进一步定义等价关系，$h_1\sim h_2$ 当且仅当 $\mathrm{d}h_1(0)=\mathrm{d}h_2(0)$，称为 h_1 和 h_2 在 0 点是余切的. 于是，$h_1\sim h_2$ 当且仅当它们在 0 点处的微分相等. 设在 $x=0$ 附近局部定义的光滑函数 $h(x^1,x^2,\cdots,x^m)$在 0 点的偏导数为 $\left.\dfrac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0}$，则 h 等价于线性函数 $\displaystyle\sum_{i=1}^m \left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0} x^i$.

定义赋值同态$\mathcal{O}\to\mathbf{R}$，$h\to h(0)$，记它的核为 $I=\{h\in\mathcal{O}\mid h(0)=0\}$，则 I 是$\mathcal{O}$的极大理想，并且有下面重要的

引理 1.2.3 对任意 $h\in I$，存在光滑函数 $h_1,h_2,\cdots,h_m\in\mathcal{O}$，使得

$$h(x)=x^1h_1+x^2h_2+\cdots+x^mh_m\text{，且 } h_i(0)=\left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0}.$$

证明 设 $h\in I$，则 $h(0,0,\cdots,0,0)=0$，于是

$$
\begin{aligned}
& h(x^1,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m) \\
= & h(x^1,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,0,\cdots,0,0) \\
= & h(x^1,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)+ \\
& h(0,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,0,\cdots,x^{m-1},x^m)+\cdots+ \\
& h(0,0,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,0,\cdots,0,x^m)+ \\
& h(0,0,\cdots,0,x^m)-h(0,0,\cdots,0,0) \\
= & x^1h_1+x^2h_2+\cdots+x^{m-1}h_{m-1}+x^mh_m,
\end{aligned}
$$

这里

$$
\begin{aligned}
& h_1=\lim_{t\to x^1}\frac{h(t,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,x^2,\cdots,x^{m-1},x^m)}{t}, \\
& h_2=\lim_{t\to x^2}\frac{h(0,t,\cdots,x^{m-1},x^m)-h(0,0,\cdots,x^{m-1},x^m)}{t}, \\
& \cdots \\
& h_{m-1}=\lim_{t\to x^{m-1}}\frac{h(0,\cdots,0,t,x^m)-h(0,0,\cdots,0,x^m)}{t}, \\
& h_m=\lim_{t\to x^m}\frac{h(0,0,\cdots,0,t)-h(0,0,\cdots,0,0)}{t}.
\end{aligned}
$$

容易知道,h_i,$1\leqslant i\leqslant m$,在原点以外的点处都光滑. 若 h 是 $x^1,x^2,\cdots,x^m$ 的多项式函数,则显然 $h_1,h_2,\cdots,h_m$ 也是多项式函数,它们在原点处也是光滑的. 若 h 是一般的光滑函数,则利用泰勒展开用多项式函数逼近 h 到足够高阶,可以证明 h_i,$1\leqslant i\leqslant m$,在原点处的任意阶导数都存在,于是 h_i 在原点处光滑. 根据 h_i 的定义可以直接看出 $h_i(0)=\left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0}$.

利用上面引理,有

命题 1.2.4

(1)I 有一组理想生成元 $x^1,x^2,\cdots,x^m$,即 $I=x^1\mathcal{O}+x^2\mathcal{O}+\cdots+x^m\mathcal{O}$.

(2)I^2 有一组理想生成元 x^ix^j,$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$.

(3)任意 $h\in\mathcal{O}$,可以写成 $h=h(0)+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_mx^m+h'$,其中 a_i 为常数,$h'\in I^2$.

(4)h 在余切关系下的等价类$[h]$仅由 $\mathrm{d}h(0)$决定.

(5)$\mathcal{O}/\sim\cong I/I^2$ 是 m 维向量空间,它的一个基底是$[x^1],[x^2],\cdots,[x^m]$.

证明 (1)这是引理 1.2.3 的直接推论.

(2)
$$
\begin{aligned}
I^2=I\cdot I &=(x^1\mathcal{O}+x^2\mathcal{O}+\cdots+x^m\mathcal{O})(x^1\mathcal{O}+x^2\mathcal{O}+\cdots+x^m\mathcal{O}) \\
&=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}^{m}x^ix^j\mathcal{O}.
\end{aligned}
$$

(3)对 $h-h(0)$ 应用引理 1.2.3,再对所得到的光滑函数 $h_1,h_2,\cdots,h_m$ 应用引理可得.

(4)这是(3)的直接结果.

(5)这是前面几条的自然结果.

因为 h 的等价类 $[h]$ 只依赖于 $\mathrm{d}h(0)$,所以以后直接将 $[h]$ 用 $\mathrm{d}h(0)$ 或 $\mathrm{d}h|_{x=0}$ 来表示. 这样 $[h]=\sum_{i=1}^{m}\left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0}[x^i]$ 就直接写成 $\mathrm{d}h(0)=\sum_{i=1}^{m}\left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_{x=0}\mathrm{d}x^i$,形式上与函数的微分公式完全一致.

定义 1.2.5 对 m 维光滑流形 M 及点 $p\in M$,选取 p 点处的一个局部坐标系 (U,ϕ),使得 $\phi(p)=0$. 记 $\mathcal{O}_p$ 为 M 在 p 点的光滑芽函数空间,定义等价关系:$h_1\sim h_2\Leftrightarrow \mathrm{d}(h_1\circ\phi^{-1})(0)=\mathrm{d}(h_2\circ\phi^{-1})(0)$,称 h_1 和 h_2 是余相切的.

下面与命题 1.2.2 类似的结论也成立.

命题 1.2.6 $\mathcal{O}_p/\sim$ 上有自然的 m 维向量空间的结构,且加法和数乘运算不依赖于坐标系的选择,称为 M 在 p 点的余切空间,记作 T_p^*M. T_p^*M 中的元素称为 M 在 p 点处的余切向量.

和前面完全类似的,从局部上看,$\mathcal{O}_p$ 与 $\mathcal{O}$ 在局部坐标映射 ϕ 下一一对应. 这一对应诱导出 $\mathcal{O}_p/\sim$ 与 $\mathcal{O}/\sim$ 之间的一一对应. 同样可以验证如此定义的 $\mathcal{O}_p/\sim$ 上的向量空间结构和局部坐标系的选取无关.

在选好局部坐标系后,T_p^*M 上有由局部坐标函数 $x^1,x^2,\cdots,x^m$ 决定的一个基底 $[x^1]=\mathrm{d}x^1|_p,[x^2]=\mathrm{d}x^2|_p,\cdots,[x^m]=\mathrm{d}x^m|_p$,而且任意光滑函数 h 决定的余切向量为 $\mathrm{d}h(p)=\left.\frac{\partial h}{\partial x^i}\right|_p\mathrm{d}x^i|_p$.

下面进一步讨论 T_pM 和 T_p^*M 的关系.

对于 $h\in\mathcal{O}_p,\sigma\in V_p$,$h\circ\sigma$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的在原点处局部定义的实值函数,所以有自然的配对映射

$$\langle\ ,\ \rangle:\mathcal{O}_p\times V_p\to\mathbf{R},(h,\sigma)\to\langle h,\sigma\rangle=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\circ\sigma)\right|_{t=0}.$$

对于 $\mathbf{R}^m$ 上的曲线 σ 和函数 h,上述配对表示函数 h 在 p 点沿曲线 σ 求导数,或者在 p 点 h 沿曲线 σ 的切向量求方向导数. 不难验证:

引理 1.2.7 对于任意 $h\in\mathcal{O}_p,\sigma_1,\sigma_1\in V_p$,若 $\sigma_1\sim\sigma_2$,则 $\langle h,\sigma_1\rangle=\langle h,\sigma_2\rangle$.

引理 1.2.8 对于任意 $\sigma\in V_p,h_1,h_2\in\mathcal{O}_p$,若 $h_1\sim h_2$,则 $\langle h_1,\sigma\rangle=\langle h_2,\sigma\rangle$.

引理 1.2.7 和引理 1.2.8 保证有良好定义的导出双线性映射

$$\langle\ ,\ \rangle:T_p^*M\times T_pM\to\mathbf{R},([h],[\sigma])\to\langle h,\sigma\rangle.$$

下面利用$\langle , \rangle$来定义 $T_p^* M$ 到 $T_p M$ 的对偶空间$(T_p M)^*$ 的映射.

定义 1.2.9　$F: T_p^* M \to (T_p M)^*$, $F([h])([\sigma]) = \langle h, \sigma \rangle$.

不难验证 F 是线性映射,注意到局部坐标函数 x^i 和局部坐标曲线 σ_j 配对$\langle , \rangle$下的结果为常值函数 δ_{ij},马上可以证明 F 是同构. 因为 $F([h])$由 $\mathrm{d}h$ 在 p 点处的值决定,仍然用$\mathrm{d}h(p)$或 $\mathrm{d}h|_p$ 来记$F([h])$. 于是 $F([h]) = F(\mathrm{d}h|_p) = \mathrm{d}h|_p$,以后利用 F 直接把 $T_p^* M$ 和$(T_p M)^*$ 等同起来,不再区分. 因此有等式$\langle \mathrm{d}h|_p, \sigma \rangle = \mathrm{d}h|_p(\sigma)$.

于是,$\mathrm{d}x^1|_p, \mathrm{d}x^2|_p, \cdots, \mathrm{d}x^m|_p$ 和 $\boldsymbol{e}_1 = [\sigma_1], \boldsymbol{e}_2 = [\sigma_2], \cdots, \boldsymbol{e}_m = [\sigma_m]$构成 $T_p^* M$ 和 $T_p M$ 的对偶基,即 $\mathrm{d}x^i|_p(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, $\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant m$. 直接计算

$$\langle h, \sigma_i \rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h \circ \phi^{-1})(0, \cdots, t, \cdots, 0)\Big|_{t=0} = \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial x^i},$$

可得
$$\mathrm{d}h|_p = \sum_{i=1}^m \langle h, \sigma_i \rangle \mathrm{d}x^i|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial (h \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \Big|_p.$$

为了方便也常常忽略 p,并将 h 在局部坐标系下的表示函数 $\hat{h} = h \circ \phi^{-1}$ 直接写为 h,则有 $\mathrm{d}h = \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\partial h}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$.

设由局部坐标曲线给出的基底为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$,则 $\mathrm{d}x^j(\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ij}$,对于元素 $\boldsymbol{e}_i$,将它看成 $T_p^* M$ 上的线性函数,则有

$$\boldsymbol{e}_i([h]) = \boldsymbol{e}_i(h) = \langle h, \sigma_i \rangle = \sum_{j=1}^m \frac{\partial h}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial h}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} h.$$

以后就用符号$\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$,或者在不会混淆的情况下直接用$\dfrac{\partial}{\partial x^i}$来记 $\boldsymbol{e}_i$. 这样

$$\mathrm{d}x^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = \delta_{ij}.$$

对于 M 上的曲线 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\sigma(0) = p$,设 σ 在点 p 处的切向量为 $[\sigma]$. 直接计算不难看出 $[\sigma] = \sum\limits_{i=1}^m \langle \mathrm{d}x^i, \sigma \rangle \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, 而$\langle \mathrm{d}x^i, \sigma \rangle = \dfrac{\mathrm{d}(x^i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$,稍微思考一下就可以知道 $x^i \circ \sigma$ 恰好表示 σ 在局部坐标系下的表示的第 i 个分量,设 σ 的局部坐标表示函数为$(\sigma^1(t), \sigma^2(t), \cdots, \sigma^m(t))$,则 $[\sigma] = \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{\mathrm{d}\sigma^i(t)}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. 这一结论在局部坐标系的计算中是非常有用的事实. 根据这一公式,很多时候$[\sigma]$也直接写成$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}$,或在意义明确时直接写成$\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$.

下面给出在局部坐标变换下,上面的基底的变换关系.

命题 1.2.10　设(U, ϕ)和(V, ψ)都是流形 M 在 p 点附近的两个局部坐

标系,它们对应的坐标分别记为 $x^i,y^i,1\leqslant i\leqslant m$,则有基底变换公式

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad \mathrm{d}x^i=\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j.$$

注意这里用到了 Einstein 求和约定,即在一个求和表达式中略去求和号,出现两次的指标自动表示求和.

以后用字母 $X,Y,Z,\cdots$ 记切向量,用字母 $\theta,\varphi,\eta,\cdots$ 记余切向量. 任意 $X\in T_pM$,可以在基底下写成 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,类似的 $\theta\in T_p^*M$ 可以展开为 $\theta=\theta_i\mathrm{d}x^i$.

最后,总结一下这节用过的符号.

设 $X=[\sigma]=\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t},\theta=[h]=\mathrm{d}h$,则

$$\langle h,\sigma\rangle=\langle[h],[\sigma]\rangle=\langle\theta,X\rangle=\mathrm{d}h([\sigma])=\mathrm{d}h(X)=\theta(X).$$

若将 $X=[\sigma]=\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$看成作用在函数上的算子,则有

$$Xh=[\sigma]h=[\sigma]([h])=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}h=\mathrm{d}h(X)=\frac{\mathrm{d}(h\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}.$$

§1.2.2 光滑映射的切映射和余切映射

下面定义光滑映射的切映射和余切映射.

定义 1.2.11 设 $f:M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射,$p\in M,f(p)=q\in N$,则任给 M 上的过 p 点的局部定义的光滑曲线 σ,$f\circ\sigma$ 是 N 上的过 q 点的曲线;任给 N 上的在 q 点附近有定义的光滑函数 h,则 $h\circ f$ 是 M 上在 p 点附近有定义的光滑函数. f 诱导出相应的切空间的映射 $\mathrm{d}f(p):T_pM\to T_qN$,$[\sigma]\mapsto[f\circ\sigma]$,称为映射 f 在点 p 处的切映射. 类似的,f 也诱导出余切空间的映射 $\mathrm{d}f^*(p):T_q^*N\to T_p^*M,[h]\mapsto[h\circ f]$,称为 f 在 p 点的余切映射.

因为若 σ_1,σ_2 在 p 点相切,则 $f\circ\sigma_1$ 和 $f\circ\sigma_2$ 在 q 点相切,所以切映射是良好定义的,请读者自己验证它是线性映射. 对余切映射,类似的结论也成立.

注意切映射将 M 在 p 点的切向量映为 N 在 q 点的切向量,而余切映射将 N 在 q 点的余切向量映为 M 在 p 点的余切向量.

关于切映射和余切映射有下面的.

命题 1.2.12 (1)设 $f:M\to N$ 是光滑流形之间的光滑映射,$p\in M$,$f(p)=q\in N$,则映射 f 在 p 点的切映射和余切映射是对偶的线性映射,即对于任意 $\theta\in T_q^*N,X\in T_pM,\langle\mathrm{d}f^*(p)(\theta),X\rangle=\langle\theta,\mathrm{d}f(p)(X)\rangle$.

(2)若有光滑映射 $f:M\to N,g:N\to L$,则复合映射$g\circ f:M\to N\to L$ 是光滑映射. 设 $f(p)=q,g(q)=r$,则 $\mathrm{d}(g\circ f)(p)=\mathrm{d}g(q)\circ\mathrm{d}f(p),\mathrm{d}(g\circ f)^*(p)=$

$df^*(p)\circ dg^*(q)$. 另外对 $\mathrm{id}:M\to M$, $d(\mathrm{id})(p)=\mathrm{id}$, $d(\mathrm{id})^*(p)=\mathrm{id}$.

证明 (1)设存在局部定义的函数 h 和曲线 σ 使得 $\theta=[h]$, $X=[\sigma]$, 则

$$\begin{aligned}\langle df^*(p)(\theta),X\rangle &=\langle df^*(p)([h]),[\sigma]\rangle\\ &=\frac{d[(h\circ f)\circ\sigma]}{dt}=\frac{d[h\circ(f\circ\sigma)]}{dt}\\ &=\langle[h],df(p)([\sigma])\rangle=\langle\theta,df(p)(X)\rangle.\end{aligned}$$

(2)证明完全是形式的,留给读者.

对于在 M 上的 p 点附近有定义的函数 h, dh 是 $T_pM\to\mathbf{R}$ 的线性映射,读者可以去验证,它正好对应余切向量 dh.

设 $f:U\to V$ 是欧氏空间 $\mathbf{R}^m$ 和 $\mathbf{R}^n$ 中的开集之间的光滑映射,则切映射诱导出映射 $df:TU\to TV$,它将 $x\in\mathbf{R}^m$ 点处的切向量 X 映为 $df(p)(X)$,对偶的有 $df^*:T^*V\to T^*U$,读者可以自己去验证它们都是光滑映射. 特别的,若 f 是光滑同胚,则 df 和 df^* 是光滑同胚.

设 M 是光滑流形,M 的所有的切向量也构成一个拓扑空间 $TM=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM$,而且有自然的商映射 $\pi:TM\to M$,将 $X\in T_pM$ 映到点 p. 在 TM 上可以构造一个自然的光滑结构,使它成为光滑流形,且商映射 π 也是光滑映射.

具体构造如下,设 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 M 上的一个光滑结构,对于任意局部坐标系 (U_α,ϕ_α),设局部坐标为 x^i, $1\leqslant i\leqslant m$,令 $TU_\alpha=\pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup\limits_{p\in U_\alpha}T_pM$,定义映射 $T\phi_\alpha:TU_\alpha\to\mathbf{R}^{2m}$,使得对于任意切向量 $X=X^i\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$,

$$T\phi_\alpha(X)=(\phi_\alpha(p),X^1,X^2,\cdots,X^m).$$

利用 M 上局部坐标系的相容性读者可以验证 $\{(TU_\alpha,T\phi_\alpha)\mid\alpha\in\mathcal{A}\}$ 是 TM 上的一组相容的局部坐标系. 因为相应的坐标变换映射 $T\phi_\beta\circ T\phi_\alpha^{-1}$: $T\phi_\alpha(T(U_\alpha\cap U_\beta))\to T\phi_\beta(T(U_\alpha\cap U_\beta))$ 是光滑映射,所以它给出了 TM 上的一个光滑结构. 光滑流形 TM 称为 M 的切丛. 令 $T^*M=\bigcup\limits_{p\in M}T_p^*M$, $\pi:T^*M\to M$ 为商映射,则对偶的 T^*M 上也有自然的拓扑和光滑结构,称为 M 的余切丛.

注 1.2.13 这里 TM 上的拓扑开始并没有给定,事实上,上面定义的过程中通过要求 $T\phi_\alpha$ 为同胚自然地给出了 TM 上的拓扑.

设 f 是光滑流形 M 到 N 的光滑映射,切映射更整体的看法是看成切丛之间的映射. 对于任意 $X\in TM$, $X\mapsto df(X)$ 给出了光滑流形之间的光滑映射 $df:TM\to TN$,同样的有光滑映射 $df^*:T^*N\to T^*M$.

§1.2.3 光滑流形上的向量场

光滑流形上的向量场，通俗地说就是在光滑流形的每一点 p，给定 T_pM 中的一个切向量，下面给出严格的定义.

定义 1.2.14 设 $X:M\to TM$ 为光滑映射，若 X 满足 $\pi\circ X=\mathrm{id}$，则称 X 为流形 M 上的一个光滑切向量场. 这里 π 是 TM 到 M 的商映射.

根据定义 p 点对应的切向量 $X(p)\in T_pM$，而且切向量随流形上的点 p 是光滑变化的. 切向量场在局部坐标系下的表达式形如 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，这里 X^i 是局部坐标邻域上定义的实值函数. 根据 TM 的光滑结构的定义，不难说明 X 是光滑映射，等价于在任意相容的局部坐标系下，X^i，$1\leqslant i\leqslant m$，是光滑函数.

$X(p)$在后面有时也记为 X_p. 对于 M 上的任意光滑函数 h，定义函数 Xh 满足 $Xh(p)=X(p)h$，在局部坐标系下运算可知对光滑向量场 $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$Xh=X^i\dfrac{\partial h}{\partial x^i}$也是光滑的.

命题 1.2.15 以 $C^\infty(M)$表示 M 上的所有的光滑函数构成的代数，则光滑向量场 X 可以看成$C^\infty(M)$上的线性算子 $X:C^\infty(M)\to C^\infty(M)$，$h\mapsto Xh$，而且它是$C^\infty(M)$上的导子，满足 Leibniz 求导法则. 即对任意$g,h\in C^\infty(M)$，

$$X(gh)=gXh+(Xg)h.$$

读者可以自己根据方向导数的性质给出证明.

关于这一引理重要的是它反过来也成立，即有

命题 1.2.16 设 D 是$C^\infty(M)$上的一个导子，即 D 是满足 Leibniz 求导法则的线性算子，则存在唯一的光滑向量场 X，使得 $Dh=Xh$，$\forall\, h\in C^\infty(M)$.

这两个命题说明 M 上的光滑向量场和 $C^\infty(M)$上的导子，本质上是一回事. 证明需要用到下面的引理.

引理 1.2.17 设 D 是 $C^\infty(M)$上的一个导子，则它是局部算子，即对于 M 的任意开子集 U 及 $h_1,h_2\in C^\infty(M)$，若 $h_1|_U=h_2|_U$，则 $Dh_1(p)=Dh_2(p)$，$\forall\, p\in U$.

证明 因为 D 是线性的，所以只需要证明，若 $h|_U\equiv 0$，则 $Dh(p)=0$，$\forall\, p\in U$. 对任意 $p\in U$，选取 p 点附近的合适的局部坐标系(V,ϕ)，不妨设 $V\subset U$ 且 $\phi(V)$为欧氏空间的开球，容易构造 M 上的光滑函数g 在 V 上取值为 1，在$M-U$上取值为 0. 于是$gh\equiv 0$，由 $D(gh)(p)=(Dg(p))h(p)+g(p)Dh(p)$及 $h(p)=0$，可得 $Dh(p)=0$.

这个引理表明函数 $Dh(p)$只与函数 h 在 p 点附近的取值有关. 因此对任

意开集 $U\subset M$，D 也可以看成 $C^\infty(U)$ 上的导子.

现在继续上面命题的证明，从 D 出发来构造一个向量场，要点是对任意 $p\in M$，构造 T^*M 上的线性函数 $X(p):T_p^*M\to\mathbf{R}$，对于 $h\in\mathcal{O}_p$，定义 $X(p)([h])=Dh(p)$，它给出 p 点的一个切向量.

在这里需要注意 D 原本只能作用于在整个 M 上有定义的光滑函数上，因为上面的引理，它可以作用在局部定义的函数 $h\in\mathcal{O}_p$ 上，所以 $Dh(p)$ 有意义. 由命题 1.2.4，可知在局部坐标下 $h=h(0)+a_1x^1+\cdots+a_mx^m+h'$，$h'\in I^2$. 于是

$$Dh(p)=D(h(0))(p)+a_1D(x_1)(p)+\cdots+a_mD(x_m)(p)+Dh'(p).$$

对常值函数 $h\equiv 1$，$D(1)=D(1\cdot 1)=D(1)+D(1)=2D(1)$，可知 $D(1)=0$，所以 $D(h(0))=h(0)D(1)=0$. 再若 $g,h\in I$，则 $f(p)=h(p)=0$，于是 $D(gh)(p)=g(p)Dh(p)+(Dg(p))h(p)=0$. 这说明 $Dh'=0$. 直接计算

$$\begin{aligned}Dh(p)&=a_1D(x^1)(p)+a_2D(x^2)(p)+\cdots+a_mD(x^m)(p)\\&=\left.\frac{\partial h}{\partial x^1}\right|_pD(x^1)+\left.\frac{\partial h}{\partial x^2}\right|_pD(x^2)+\cdots+\left.\frac{\partial h}{\partial x^m}\right|_pD(x^m)\\&=D(x^1)\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_ph+D(x^2)\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_ph+\cdots+D(x^m)\left.\frac{\partial}{\partial x^m}\right|_ph.\end{aligned}$$

这表明 $X=D(x^1)\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p+D(x^2)\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_p+\cdots+D(x^m)\frac{\partial}{\partial x^m}$，由 $D(x^i)$ 的光滑性可知 X 是光滑向量场.

令 $\mathcal{X}(M)$ 为 M 上的所有光滑向量场构成的集合，则 $\mathcal{X}(M)$ 上可以定义加法和函数乘法，即 $(X+Y)(p)=X(p)+Y(p)$，$(hX)(p)=h(p)X(p)$. 实际上，$\mathcal{X}(M)$ 上还可以定义如下的重要运算.

定义 1.2.18 对于光滑流形 M 上的两个向量场 X,Y，把它们看成 $C^\infty(M)$ 上的导子，可以定义算子 $[X,Y]=XY-YX$，称为向量场 X,Y 的李括号.

直接验证可知对任意 $g,h\in C^\infty(M)$，算子 $[X,Y]$ 满足

$$\begin{aligned}&[X,Y](gh)=XY(gh)-YX(gh)\\&=X(gYh)+X(hYg)-Y(hXg)-Y(gXh)=([X,Y]g)h+g[X,Y]h.\end{aligned}$$

所以 $[X,Y]$ 是 $C^\infty(M)$ 上的一个导子，它对应 M 上的一个光滑向量场.

命题 1.2.19 在 $\mathcal{X}(M)$ 上的李括号运算 $[,]:(X,Y)\to[X,Y]$，$[X,Y]f=XYf-YXf$ 满足

(1) $[,]$ 是双线性运算.

(2) 反对称性：对任意 $X,Y\in\mathcal{X}(M)$，$[X,Y]=-[Y,X]$.

(3) Jacobi 恒等式：对任意 $X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$，

$$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0.$$

满足上面性质的代数对象称为李代数，在后面会进一步介绍.

习题 1.2

1. 对于 $\sigma\in V_p,\sigma(0)=p$，证明：$[\sigma]=\mathrm{d}\sigma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$，其中$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$是 $\mathbf{R}$ 在原点处的标准单位切向量.
2. 对于 $f\in C_p,f(p)=0$，证明：$\mathrm{d}f^*(\mathrm{d}t)=\mathrm{d}f(p)$，这里 $\mathrm{d}t$ 是 $\mathbf{R}$ 在原点的标准单位余切向量.
3. 设(U,ϕ)是 M 上的局部坐标系，U 看成 M 的开子流形后，映射 $\phi:U\to\phi(U)$是光滑映射. 它诱导出 $\mathrm{d}\phi:T_pU\to T_{\phi(p)}(\phi(U))$和 $\mathrm{d}\phi^*:T^*_{\phi(p)}(\phi(U))\to T^*_pU$. 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$ 为 $\phi(U)$在 $\phi(p)$点的标准正交切向量，且 $\boldsymbol{\theta}_1,\boldsymbol{\theta}_2,\cdots,\boldsymbol{\theta}_m$ 为其对偶余切向量，证明：$(\mathrm{d}\phi)^{-1}(\boldsymbol{e}_i)=\frac{\partial}{\partial x^i}$，$\mathrm{d}\phi^*(\boldsymbol{\theta}_i)=\mathrm{d}x^i$.
4. 设 $f:M\to N$ 为光滑映射，$f(p)=q$，选取 p 点附近的局部坐标系(U,ϕ)和 q 点附近的局部坐标系(V,ψ)，设相应的局部坐标为 $x^i,1\leqslant i\leqslant m,y^j,1\leqslant j\leqslant n$，若 f 在局部坐标下的表示函数为 $y^j=y^j(x^1,x^2,\cdots,x^m)$，证明：
$$\mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad \mathrm{d}f^*(\mathrm{d}y^j)=\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$
5. 设 f 是光滑流形 M 到 N 的光滑映射，
   (1)验证切映射 $\mathrm{d}f(p)$及其对偶的余切映射$\mathrm{d}f^*(p)$都是线性映射.
   (2)建立 T^*M 上自然的光滑结构，并证明它是光滑流形.
   (3)证明 $\mathrm{d}f:TM\to TN$ 和 $\mathrm{d}f^*:T^*N\to T^*M$ 是光滑映射.
6. 任意 $X\in T_pM$ 可以看成一个线性映射 $X:\mathcal{O}_p\to\mathbf{R},f\mapsto Xf$. 证明
   (1)X 是导子，即 $X(fg)=Xf\cdot g(p)+f(p)\cdot Xg,\forall f,p\in\mathcal{O}_p$.
   (2)证明：$\mathcal{O}_p$ 上的所有导子成为一个向量空间，且同构于 T_pM. 这表明可以从$\mathcal{O}_p$ 出发代数的定义 T_pM.
7. 验证命题 1.2.19 中的李括号满足的性质.
8. 选取适当的局部坐标系，在局部坐标给出的基底下计算映射
$$\pi:\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}\to\mathbf{R}P^n,x\mapsto[x]$$
的切映射和余切映射.

§1.3 流形上的光滑外微分形式

在光滑流形上可以定义一般的张量场的概念，在这里，只介绍后面需要用到的外微分形式及其积分的概念.

§1.3.1 外微分形式

先回顾 k 个元素 $1,2,\cdots,k$ 的置换群 S_k. S_k 的一个元素 σ 是集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到自身的一个一一映射，也称为 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个置换. 任意给定有序的 k 元组 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)$，定义 $\sigma(X_1,X_2,\cdots,X_k)=(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(k)})$. 对 k 元函数 θ，定义 $\sigma\theta(X_1,X_2,\cdots,X_k)=\theta(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(k)})$.

定义同态 $\mathrm{sgn}: S_k\to\{\pm 1\}$，若 σ 为偶置换，$\mathrm{sgn}\,\sigma=1$；若 σ 为奇置换，$\mathrm{sgn}\,\sigma=-1$.

对于实（或复）m 维向量空间 V，可以定义 V 上的协变张量和 k-形式，对于我们关心的情形：V 是流形 M 在 p 点处的切空间 T_pM.

定义 1.3.1 (1)V 上的 k 重线性函数，是指映射 $\theta:\overbrace{V\times V\times\cdots\times V}^{k}\to\mathbf{R}$（或 $\mathbf{C}$），它关于每个变量都是实（或复）线性的. θ 也称为 V 上的 k 阶协变张量.

(2)θ 称为 V 上的反对称的 k 阶协变张量，若对于任意 $\sigma\in S_k$ 及 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k\in V$，$\theta(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k)=(-1)^{\mathrm{sgn}\,\sigma}\theta(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\boldsymbol{v}_{\sigma(2)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(k)})$. 反对称的 k 阶协变张量也称为 k-形式. V 上的所有 k-形式构成一个向量空间，记为 $\mathcal{A}^k(V)$.

(3)V 上的任意的 k 阶协变张量，可以经过反对称化算子 A 作用，成为 k-形式，这里 A 定义为 $A\theta=\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\theta$.

(4)设 θ,φ 分别是 V 上的 k 阶和 l 阶协变张量，则它们的张量积定义为 $k+l$ 阶协变张量 $\theta\otimes\varphi$，其中

$$\theta\otimes\varphi(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k;\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_l)=\theta(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_k)\varphi(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_l).$$

(5)设 θ,φ 分别为 V 上的 k-形式和 l-形式，则它们的外积定义为 $(k+l)$-形式 $\theta\wedge\varphi=\dfrac{(k+l)!}{k!\ l!}A(\theta\otimes\varphi)$.

上面的定义给出向量空间 $\mathcal{A}^k(V)$，$k\geqslant 1$，约定 $\mathcal{A}^0(V)=\mathbf{R}$（或 $\mathbf{C}$）后，可以验证以下事实.

命题 1.3.2 (1)对 $k>m$，$\mathcal{A}^k(V)=\{0\}$.

(2)对 $0\leqslant k\leqslant m$，$\dim\mathcal{A}^k(V)=\dbinom{m}{k}$. 且如果 V 有一个基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$，

它的对偶基为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，那么$\mathcal{A}^k(V)$有基底 $\theta_{i_1}\wedge\theta_{i_2}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$.

(3)外积$\wedge$满足分次交换性：即对任意 $\theta\in\mathcal{A}^k(V)$，$\varphi\in\mathcal{A}^l(V)$，

$$\theta\wedge\varphi=(-1)^{kl}\varphi\wedge\theta.$$

(4)外积满足结合律：即对于任意 $\theta\in\mathcal{A}^k(V)$，$\varphi\in\mathcal{A}^l(V)$，$\psi\in\mathcal{A}^m(V)$，

$$(\theta\wedge\varphi)\wedge\psi=\theta\wedge(\varphi\wedge\psi).$$

于是$\mathcal{A}^*(V)=\bigoplus\limits_{k=0}^{m}\mathcal{A}^k(V)$成为一个分次的结合代数，称为 V 上的外代数.

在上面定义的基础上，可以类似的定义光滑流形 M 上的光滑协变张量场和外微分形式，考虑 M 上的所有光滑函数构成向量空间 $C^\infty(M)$和所有的光滑向量场构成的向量空间$\mathcal{X}(M)$，因为对于任意 $h\in C^\infty(M)$，$X\in\mathcal{X}(M)$，$hX\in\mathcal{X}(M)$，所以$\mathcal{X}(M)$可以看做 $C^\infty(M)$模.

定义 1.3.3 (1)$\mathcal{X}(M)$上的 k 重 $C^\infty(M)$线性映射，是指映射

$$\theta:\overbrace{\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\cdots\times\mathcal{X}(M)}^{k}\to C^\infty(M).$$

它关于每个变量都是 $C^\infty(M)$线性的. θ 也称为 M 上的光滑 k 阶协变张量场.

(2)θ 称为 M 上的反对称的光滑 k 阶协变张量场，若对于任意 $X_1,X_2,\cdots,X_k\in\mathcal{X}(M)$及 $\sigma\in S_k$，$\theta(X_1,X_2,\cdots,X_k)=(-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\theta(X_{\sigma(1)},X_{\sigma(2)},\cdots,X_{\sigma(k)})$. 反对称的 k 阶光滑协变张量场也称为 M 上的光滑 k 次外微分形式. M 上所有的光滑 k 次外微分形式构成一个 $C^\infty(M)$模，记为$\mathcal{A}^k(M)$.

(3)任意光滑 k 阶协变张量场可以经过反对称化算子 $A:\theta\mapsto A\theta=\dfrac{1}{k!}\sum\limits_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\theta$ 作用成为 k 次光滑外微分形式.

(4)设 θ,φ 分别是 M 上的 k 阶和 l 阶光滑协变张量场则它们的张量积定义为 $k+l$ 阶光滑协变张量场 $\theta\otimes\varphi$，这里

$$\theta\otimes\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_k;Y_1,Y_2,\cdots,Y_l)=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_k)\varphi(Y_1,Y_2,\cdots,Y_l).$$

(5)设 θ,φ 分别是 M 上的 k 次和 l 次光滑外微分形式，则它们的外积定义为 $k+l$ 次光滑外微分形式 $\theta\wedge\varphi=\dfrac{(k+l)!}{k!\ l!}A(\theta\otimes\varphi)$.

对 M 上的 k 阶光滑协变张量场 θ 及 $p\in M$，可以定义 p 点处的 k 阶协变张量 $\theta(p)\in\mathcal{A}^k(T_pM)$，使得 $\theta(p)(X_1(p),X_2(p),\cdots,X_k(p))=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_k)(p)$，容易验证在此定义下 θ 在 M 的每一点 p 给出一个 k 阶协变张量 $\theta(p)$. 不难看出，如果给出 $\theta(p)$，$p\in M$，那么 θ 也由上式完全决定.

给定一个 k 阶光滑协变张量场 θ，在 M 上的局部坐标系(U,ϕ)下

$$\theta(p) = \sum_{1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_k \leqslant m} \theta_{i_1 i_2 \cdots i_k}(p) \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \mathrm{d}x^{i_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_k}, p \in U.$$

这里 $\theta_{i_1, i_2, \cdots, i_k}(p) = \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_2}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)(p)$ 是 $\theta(p)$ 在基底下的分量. 由定义可知它是 U 上的光滑函数. 所以 M 上的 k 阶光滑协变张量场 θ 就是对任意 $p \in M$,指定 p 点处的一个 k 阶协变张量 $\theta(p) \in \mathcal{A}^k(T_pM)$,并且 $\theta(p)$ 光滑的依赖于点 p.

对于光滑的 k 次外微分形式,情形也完全类似,只是在局部坐标系下

$$\theta(p) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m} \theta_{i_1 i_2 \cdots i_k}(p) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}, p \in U.$$

当 $k=0$ 时,约定 $\mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$.

当 $k=1$ 时,$\mathcal{A}^1(M)$ 中的元素可以等同于下面的光滑余切向量场.

定义 1.3.4　设 M 是光滑流形,光滑映射 $\theta: M \to T^*M$,若满足 $\pi \circ \theta = \mathrm{id}$,则称 θ 为 M 上的一个光滑余切向量场.

具体的细节交给读者去验证.

下面定义对光滑外微分形式的外微分运算.

定义 1.3.5　设 θ 是 M 上的 k 次光滑外微分形式,则 θ 的外微分是如下定义的 $k+1$ 次光滑外微分形式,满足对任意 $X_1, X_2, \cdots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\theta(X_1, X_2, \cdots, X_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\theta(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_{k+1})) + \\
&\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k+1} (-1)^{i+j} \theta([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{k+1}).
\end{aligned}$$

特别的,对 $\theta \in \mathcal{A}^1(M)$, $\mathrm{d}\theta(X, Y) = X(\theta(Y)) - Y(\theta(X)) - \theta([X, Y])$.

请读者自行验证 $\mathrm{d}\theta$ 确实是 $k+1$ 次光滑外微分形式.

命题 1.3.6　外微分运算 $\mathrm{d}: \mathcal{A}^*(M) \to \mathcal{A}^*(M)$ 是向量空间的线性映射,并且满足:

(1)对于任意 $\theta \in \mathcal{A}^k(M)$, $\mathrm{d}(\mathrm{d}\theta) = 0$.

(2)d 是导子,即对任意 $\theta \in \mathcal{A}^k(M)$, $\varphi \in \mathcal{A}^l(M)$,

$$\mathrm{d}(\theta \wedge \varphi) = \mathrm{d}\theta \wedge \varphi + (-1)^k \theta \wedge \mathrm{d}\varphi.$$

(3)对于 $f \in \mathcal{A}^0(M)$, $\mathrm{d}f(Z) = Zf$, $Z \in \mathcal{X}(M)$.

实际上 d 是满足上面条件的唯一线性映射. 具体证明留给读者.

在局部坐标系下,设 $\theta = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m} \theta_{i_1 i_2 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$,则

$$\mathrm{d}\theta = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m} \mathrm{d}\theta_{i_1 i_2 \cdots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

§ 1.3.2 流形上的积分

为了在光滑流形上进行积分，首先定义流形的定向.

定义 1.3.7 设 M 是 m 维光滑流形，若在 M 上存在 m 次光滑外微分形式 ω，使得对任意 $p\in M,\omega(p)\neq 0$，则称 M 是可定向流形. 每一个这样的 ω 称为 M 的一个定向. 若 M 上有两个定向 ω_1,ω_2，则必有非 0 函数 h，使得 $\omega_1=h\omega_2$. 若 $h>0$，则称 ω_1 和 ω_2 是等价的定向. 若 $f:M\to N$ 为光滑流形的光滑同胚，ω_1,ω_2 为 M,N 上的定向，若 $\mathrm{d}f^*(\omega_2)$ 与 ω_1 是等价的定向，则称 f 为保定向的光滑同胚.

显然若连通流形 M 是可定向流形，则恰有两个不等价的定向，由 ω 和 $-\omega$ 分别给出. 以后等价的定向就看做相同的定向.

定义 1.3.8 给定光滑的可定向流形 M 及它的定向 ω，局部坐标系 (U,ϕ) 称为定向相容的局部坐标系，若 $\omega|_U$ 与局部坐标定义的定向 $\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$ 是 U 上的等价的定向.

定义 1.3.9 设 M 是光滑的可定向流形，具有定向 ω，(U,ϕ) 是定向相容的局部坐标系. M 上的 m 次光滑外微分形式 φ 在局部坐标系 (U,φ) 下表示为 $h(x)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$，则对 U 中的任意闭区域 W，定义 φ 在 W 上的积分为

$$\int_W\varphi=\int_{\varphi(W)}h(x)\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m.$$

读者可以自己利用换元积分公式去验证这里的积分与具体的局部坐标系的选取无关，只依赖于 φ 和定向. 若改变定向，积分会相差一个符号.

利用光滑流形上的单位分解和积分对区域的可加性可以定义积分 $\int_M\varphi$，当然如果 M 本身是非紧的光滑流形，那么积分可能会不收敛，因而不存在. 详细的讨论请读者参考相关文献.

关于流形上的积分，有下面的简单结果.

命题 1.3.10 设 $f:M\to N$ 为 m 维光滑流形之间的保定向的光滑同胚，则对于 N 上任意的光滑 m 次外微分形式 θ，$\int\limits_N\theta=\int\limits_M\mathrm{d}f^*(\theta)$.

证明 只需要在局部上证明，即假定 M,N 都是 $\mathbf{R}^m$ 中的闭区域的条件下证明即可. 不妨设 M,N 上的局部坐标分别用 x,y 表示，$\theta=h(y)\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^m$，则直接计算，上面定理等价于

$$\int\limits_N h(y)\mathrm{d}y^1\wedge\mathrm{d}y^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^m=\int\limits_M h(f(x))Jf\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$$

这恰好是微积分中的换元积分公式.

习题 1.3

1. 证明命题 1.3.2.

2. 证明命题 1.3.6.

3. 证明：S^n 是可定向流形，利用 S^n 上的球坐标，写出 S^n 上的 n 次外微分形式的积分公式.

§1.4 拓扑群

这一节介绍有关拓扑群的一些基础知识.

§1.4.1 拓扑群的定义和例子

首先给出拓扑群的定义.

定义 1.4.1 设 G 是 Hausdorff 拓扑空间,若 G 上存在乘法使得 G 成为一个群,且乘法映射 $G\times G\to G,(a,b)\mapsto a\cdot b$ 和求逆映射 $a\mapsto a^{-1}$ 都连续,则称 G 在乘法"·"下是拓扑群.

上面定义中乘法运算和求逆运算都连续也可换为映射 $G\times G\to G,(a,b)\mapsto a\cdot b^{-1}$ 连续.以后为了方便,$a\cdot b$ 简写为 ab,并且用 e 表示拓扑群 G 的单位元.

下面给出拓扑群的一些例子.

例 1.4.2 (1)n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 和复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 在向量加法下成为拓扑群.

(2)任意群在离散拓扑下成为拓扑群.

(3)令 S^1 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆周,即 $S^1=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$,在复数域 $\mathbf{C}$ 的乘法下 S^1 成为拓扑群.令 S^3 为四元数空间 $\mathbf{H}$ 中的单位球面,即 $S^3=\{u\in\mathbf{H}\mid |u|=1\}$,在四元数 $\mathbf{H}$ 的乘法下 S^3 成为拓扑群.这里 S^1 和 S^3 的拓扑为子空间拓扑.

下面仅对 S^3 的情形予以验证,S^1 的情形完全类似.

作为集合 $\mathbf{H}=\{u=a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in\mathbf{R}\}$,$\mathbf{H}$ 有加法,如下定义

$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)+(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i+(c_1+c_2)j+(d_1+d_2)k$.

在 $\mathbf{H}$ 的基底 $1,i,j,k$ 上定义乘积 $i^2=j^2=k^2=-1,ij=-ji=k,jk=-kj=i,ki=-ik=j$,把它线性的扩充为 $\mathbf{H}$ 上的乘法.

$(a_1+b_1i+c_1j+d_1k)(a_2+b_2i+c_2j+d_2k)=(a_1a_2-b_1b_2-c_1c_2-d_1d_2)+(a_1b_2+a_2b_1+c_1d_2-c_2d_1)i+(a_1c_2+a_2c_1+b_2d_1-b_1d_2)j+(a_1d_2+a_2d_1+b_1c_2-b_2c_1)k$,可以直接验证四元数的乘法满足结合律.

规定 $\bar{u}=a-bi-cj-dk$,$|u|=\sqrt{u\cdot\bar{u}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$,显然在 $\mathbf{H}$ 的自然拓扑下,上述乘法连续.注意到若 $u,v\in S^3$,则 $|u|=|v|=1$,容易验证 $|uv|=|u||v|=1$,从而 $uv\in S^3$,即 $\mathbf{H}$ 的乘法限制在 S^3 上是封闭的.乘法的连续性由 $\mathbf{H}$ 的乘法的连续性限制得到,对于 $u\in S^3$,可知 $u\bar{u}=1$,即 $u^{-1}=\bar{u}$,因此求逆运算也连续.从而 S^3 为拓扑群.

(4)若 G_1,G_2 为拓扑群，则 $G_1\times G_2$ 上赋予乘积拓扑后是拓扑群.

一般来说，若在空间 X 上给定某一结构，则 X 的自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$(即 X 上所有保持这一结构的自同构构成的群)上常常会有自然的拓扑，使得 $\mathrm{Aut}(X)$ 成为拓扑群.

例 1.4.3 (1)设 V 为实(或复)向量空间，令 $\mathrm{GL}(V)=V$ 上的所有线性变换构成的集合，则 $\mathrm{GL}(V)$ 在线性变换的乘法下成为群，它作为 $\mathrm{End}(V)$(V 上的所有线性自映射构成的向量空间)的开子集，在子空间拓扑下成为拓扑群. 若 $V=\mathbf{R}^n$，以 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 记 $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$，称为 n 维实一般线性群. 若 $V=\mathbf{C}^n$，以 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$ 记 $\mathrm{GL}(\mathbf{C}^n)$，称为 n 维复一般线性群.

(2)设 V 为实(或复)内积空间，即 V 上给定了实内积 $(,)$(或复 Hermite 内积)，令 $\mathrm{Aut}(V)=\{A\in\mathrm{GL}(V)\mid(A\boldsymbol{x},A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$，即 V 上的所有保持内积不变的线性变换构成的群，则 $\mathrm{Aut}(V)$ 作为 $\mathrm{GL}(V)$ 的子群，在子空间拓扑下成为拓扑群. 若 V 为实内积空间，则将 $\mathrm{Aut}(V)$ 记为 $\mathrm{O}(V)$，称为 V 上的实正交群. 若 V 为复 Hermite 内积空间，则将 $\mathrm{Aut}(V)$ 记为 $\mathrm{U}(V)$，称为 V 上的酉群. 特别的，若 V 是具有标准实内积的向量空间 $\mathbf{R}^n$，以 $\mathrm{O}(n)$ 记 $\mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$，称为 n 阶实正交群. 若 V 是具有标准复 Hermite 内积的向量空间 $\mathbf{C}^n$，以 $\mathrm{U}(n)$ 记 $\mathrm{U}(\mathbf{C}^n)$，称为 n 阶酉群.

§1.4.2 拓扑群的一些基本性质

在拓扑群上同时存在群结构和拓扑结构，而且二者满足相容性条件，由此可导出拓扑群的一些优良性质.

由拓扑群的定义可知，对任意 $a\in G$，映射 $L_a:G\to G,b\mapsto ab$ 和映射 $R_a:G\to G,b\mapsto ba$ 都是拓扑群 G 的自同胚. 且 $L_a^{-1}=L_{a^{-1}}$，$R_a^{-1}=R_{a^{-1}}$. L_a 和 R_a 分别称为 G 上关于元素 a 的左平移和右平移. 显然取逆映射 $a\mapsto a^{-1}$ 也是 G 的自同胚. 若记 $\mathrm{AD}(a)=L_a\circ R_{a^{-1}}=R_{a^{-1}}\circ L_a$，即 G 上关于元素 a 的共轭，则 $\mathrm{AD}(a)$ 是 G 的自同胚，也是拓扑群 G 的群自同构.

因为左右平移都是自同胚，所以 G 中每点处的拓扑结构都是一样的. 下面主要讨论单位元 e 附近的拓扑.

设元素 $a\in G$，集合 $U,V\subset G$，

以 U^{-1} 记集合 $\{u^{-1}\mid u\in U\}$；

以 UV 记集合 $\{uv\mid u\in U,v\in V\}$；

以 U^n 记集合 $\{u_1u_2\cdots u_n\mid u_1,u_2,\cdots,u_n\in U\}$；

以 aUa^{-1} 记集合 $\{aua^{-1}\mid u\in U\}$.

其他情形类似理解.

引理 1.4.4 令$\mathcal{U}_e$为G中包含单位元e的所有开邻域的集合,则

(1) $\bigcap_{U\in\mathcal{U}_e} U=\{e\}$.

(2)若$U,V\in\mathcal{U}_e$,则$U\cap V\in\mathcal{U}_e$.

(3)若$U_\alpha\in\mathcal{U}_e,\alpha\in\Lambda$,则$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\in\mathcal{U}_e$.

(4)若$U\in\mathcal{U}_e$,则$U^{-1}\in\mathcal{U}_e$.

(5)若$U\in\mathcal{U}_e$,则$aUa^{-1}\in\mathcal{U}_e$.

(6)若$U,V\in\mathcal{U}_e$,则$UV\in\mathcal{U}_e$.

(7)若$U\in\mathcal{U}_e$,则$U^n\in\mathcal{U}_e$.

证明 (1)成立是因为拓扑群的定义中要求G是 Hausdorff 空间;(2)(3)成立是拓扑空间中的开集的一般性质;(4)(5)成立是因为求逆运算和共轭运算都是拓扑群的自同胚;要证明(6)只需注意$UV=\bigcup_{u\in U}(uV)$和uV是开集;(7)是(6)的推论.

$\mathcal{U}_e$包含了拓扑空间在单位元处的拓扑的所有信息,对$a\in G$,定义$\mathcal{U}_a=a\,\mathcal{U}_e=\mathcal{U}_e a$.容易看出$G$的拓扑由$G$的群结构和$\mathcal{U}_e$完全决定.

拓扑群满足下面简单而有用的性质.

引理 1.4.5 (1)任取$U\in\mathcal{U}_e$,则存在$V_1,V_2\in\mathcal{U}_e,V_1V_2\subset U$.

(2)对任意正整数n及$U\in\mathcal{U}_e$,存在$V\in\mathcal{U}_e$,使得$V^{-1}=V,V^n\subset U$.

证明 我们只证明(2).根据拓扑群乘法的连续性可知映射$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mapsto a_1a_2\cdots a_n$在$(e,e,\cdots,e)$处连续,于是对$U\in\mathcal{U}_e$,存在$V_1,V_2,\cdots,V_n\in\mathcal{U}_e$,使得$V_1V_2\cdots V_n\subset U$.令$V_0=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n$,则$V_0\in\mathcal{U}_e$.由逆运算为自同胚可知$V_0^{-1}\in\mathcal{U}_e$,令$V=V_0\cap V_0^{-1}$,则$V^{-1}=V,V^n\subset U$.

定理 1.4.6 设G为连通拓扑群,则对任意$U\in\mathcal{U}_e$,$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$,即$G$可以由$U$中元素通过乘积运算生成.

证明 由$U\in\mathcal{U}_e$,可知对任意n,$U^n\in\mathcal{U}_e$,故$V=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$是$G$中的开集.由于$G$连通,为证$V=G$,只需证明$V$也是$G$中的闭集即可.即证$\bar{V}\subset V$.任取$a\in\bar{V}$,则$aU^{-1}$是包含$a$的开集,故$aU^{-1}\cap V\neq\varnothing$.由$V=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$,可知存在正整数$m$,使得$aU^{-1}\cap U^m\neq\varnothing$.这表明$a\in U^{m+1}\subset V$,因此$\bar{V}\subset V$,这说明$V$是闭集.根据$G$的连通性,$G$中既开又闭的子集只能是空集或者$G$本身,故

$$G=V=\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n.$$

§1.4.3 同态、子群和商群

上面主要考虑 G 的拓扑，下面讨论 G 的群结构.

首先介绍拓扑群之间的同态的概念，因为拓扑群上同时有群结构和拓扑结构，所以同态也应该同时保持这两种结构，即有

定义 1.4.7 拓扑群 G_1 到 G_2 的映射 $f:G_1\to G_2$ 若既是群同态，又是连续映射，则称为拓扑群 G_1 到 G_2 的拓扑群同态，简称同态. 若 f 是拓扑群 G_1 到 G_2 的同态，f 的逆映射存在且是拓扑群 G_2 到 G_1 的同态，则称 f 是 G_1 到 G_2 的同构映射，简称同构，这时称拓扑群 G_1 与 G_2 同构.

容易验证，拓扑群的同构关系是等价关系. 拓扑群在同构下的分类是拓扑群研究的基本问题.

下面讨论拓扑群的子群.

定义 1.4.8 拓扑群 G 的子集 H，若在群 G 的乘法运算下构成子群(或正规子群)，则按 G 的诱导拓扑也是拓扑群，称为拓扑群 G 的子群(或正规子群). 子群 H 称为闭子群，若它作为 G 的子集是闭集.

由定义可以看出拓扑群中的任意抽象子群都是拓扑子群，因此一般的子群并不是很有意思，以后我们关心的子群通常都是闭子群.

一个拓扑群 G，如果不连通，那么可以分别考虑它的连通分支，下面命题给出了拓扑群的连通分支的结构.

命题 1.4.9 设拓扑群 G 不连通，则它的单位元连通分支 G_e(即包含单位元 e 的最大连通子集)为 G 的闭正规子群. 且 G 的任一连通分支可以写成 aG_e，其中 a 是这一连通分支中的任一元素. 若 G 是局部连通的，则 G_e 还是开子群.

证明 根据点集拓扑的结果，拓扑空间的连通分支总是闭子集，可知 G_e 为闭子集.

由左平移是自同胚，它保持 G 的拓扑结构，可知 G 包含 a 的连通分支必形如 aG_e.

再证 G_e 是正规子群. 因为左平移和求逆映射都是自同胚，所以对任意 $a\in G_e$，aG_e^{-1} 是 G 的连通分支. 但 $e\in aG_e^{-1}$，这说明 $aG_e^{-1}=G_e$，由 a 的任意性，可知 $G_eG_e^{-1}=G_e$. 即 G_e 是 G 的子群. 对任意 $a\in G$，$\mathrm{AD}(a)$是 G 的自同胚，故 $\mathrm{AD}(a)(G_e)=aG_ea^{-1}$ 是 G 的连通分支，而它包含单位元. 这说明 $aG_ea^{-1}=G_e$，即 G_e 是 G 的正规子群.

若 G 是局部连通的，则对于 G_e 中任意元素 a，存在 G 的连通开集 U 包含

a. 因为 G_e 是 G 的包含 a 的连通分支，所以是 G 的包含 a 的极大连通子集，故 $U \subset G_e$，从而 G_e 是 G 的开子集.

群 G 的中心 $C(G)$ 定义为子群 $C(G)=\{c\in G \mid ac=ca, \forall a\in G\}$，它是 G 的正规子群. 关于拓扑群的中心，有下面的结果.

命题 1.4.10 (1)拓扑群 G 的中心 $C(G)$ 是 G 的闭正规子群.

(2)连通拓扑群 G 的离散正规子群 Γ 必包含在 G 的中心 $C(G)$ 中.

证明 (1)令 $\phi_a: G\to G, c \mapsto cac^{-1}$，则 $C(G)=\bigcap\limits_{a\in G}\phi_a^{-1}(a)$ 为闭正规子群.

(2)设 Γ 为拓扑群 G 的离散正规子群，任取 $r\in\Gamma$，映射 $\phi_r: G\to\Gamma, a \mapsto ara^{-1}$ 连续. 因为 G 连通，且 Γ 为离散拓扑空间，所以 ϕ_r 为常值映射. 但 $\phi_r(e)=ere^{-1}=r$，所以 ϕ_r 取常值 r，即对任意 $a\in G, ar=ra$，这说明 $r\in C(G)$.

下面引进拓扑群关于闭子群的商空间(陪集空间)的概念.

定义 1.4.11 设 H 是拓扑群 G 的闭子群，则 G 关于子群 H 的商集(或左陪集空间)$\{aH \mid a\in G\}$ 记作 G/H，在其上给予商拓扑后称为 G 关于 H 的商空间. 对应的映射 $\pi: G\to G/H, a \mapsto aH$ 称为自然商映射.

在 G/H 上给予商拓扑，则 π 是连续映射，进一步它还是开映射，即把开集映为开集. 这是因为任取 G 中的开集 U，都有 $\pi^{-1}(\pi(U))=UH$ 为开集.

若 H 不是闭子群，则 G/H 不是 Hausdorff 拓扑空间. 关于具体的结果，读者可以参看本节习题 3.

当 H 是 G 的闭正规子群时，G/H 在商拓扑下成为拓扑群，具体的有

定义 1.4.12 设 H 是拓扑群 G 的闭正规子群，则 G 关于 H 的商空间 G/H 在商拓扑下，对于乘法 $a_1H\cdot a_2H=a_1a_2H$ 成为拓扑群，称为 G 关于 H 的商群. 映射 $\pi: G\to G/H, a \mapsto aH$ 是拓扑群同态，称为自然商同态.

要验证 G/H 为拓扑群，只需说明 G/H 上的乘法和求逆映射都是连续的即可. 详细证明请读者自己完成.

与群论中类似，对于拓扑群的同态 $\phi: G_1\to G_2$，同态核 $\ker\phi$ 是 G_1 的闭正规子群，同态像 $\phi(G_1)$ 为 G_2 的子群. 在一定条件下，类似的同态和同构定理也成立.

命题 1.4.13 设 ϕ 是拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 的满同态，且为开映射. 设 $H_1=\ker\phi$，则存在拓扑群同构 $\tilde{\phi}: G_1/H_1\to G_2$，使得 $\phi=\tilde{\phi}\circ\pi$，这里 $\pi: G_1\to G_1/H_1$ 为自然的商同态.

证明 定义 $\tilde{\phi}: G_1/H_1\to G_2, \tilde{\phi}(aH_1)=\phi(a)$，则 $\tilde{\phi}$ 是良好定义的一一映射且为拓扑群同态，只需证明它的逆映射也连续，而这只要注意到对任意开集 $U\in G_1/H_1$，由 ϕ 为开映射，$\tilde{\phi}(U)=\phi(\pi^{-1}(U))$ 为开集即可.

例 1.4.14　(1)S^3 中的子集$\{e^{i\theta}\mid\theta\in\mathbf{R}\}$构成 S^3 的闭子群 S^1，可以证明 $S^3/S^1\cong\mathbf{C}P^1\cong S^2$. 细节留给读者.

(2)设 V 是实(或复)的向量空间，$\mathrm{GL}(V)$中有子群 $\mathrm{SL}(V)=\{A\in\mathrm{GL}(V)\mid\det A=1\}$，称为特殊线性群，它是闭正规子群，且 $\mathrm{GL}(V)/\mathrm{SL}(V)\cong\mathbf{R}^*$（或 $\mathbf{C}^*$）. 这里 $\mathbf{R}^*=\mathbf{R}-\{0\}$($\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-\{0\}$).

§1.4.4　拓扑群在拓扑空间上的作用

定义 1.4.15　设 G 为拓扑群，X 为拓扑空间，若映射 $\theta:G\times X\to X$ 连续，且满足(1)$\theta(e,x)=x$，$\forall x\in X$；(2)$\theta(a_1,\theta(a_2,x))=\theta(a_1a_2,x)$，$\forall a_1,a_2\in G$，$\forall x\in X$，则称 θ 为群 G 在拓扑空间 X 上的群作用，简称为群作用.

在这里，一般只讨论左作用，对偶的右作用，可以完全类似的去讨论.

定义 1.4.16　(1)$L:G\times G\to G$，$L(a,x)=ax$ 是拓扑群 G 在拓扑空间 G 上的群作用，称为 G 的左平移作用.

(2)$\widetilde{\mathrm{AD}}:G\times G\to G$，$\widetilde{\mathrm{AD}}(a,x)=axa^{-1}$ 是拓扑群 G 在拓扑空间 G 上的群作用，称为 G 的伴随作用.

这两个群作用对于研究拓扑群的性质有重要作用.

以后谈到群作用时，如果不强调具体的作用是什么，往往将 $\theta(a,x)$简写为 ax，这样，上面条件可以简写成 $ex=x$；$a_1(a_2x)=(a_1a_2)x$.

拓扑群在拓扑空间 X 上的作用的等价看法是考虑 X 的自同胚群 $\mathrm{Homeo}(X)$，在其上定义适当的拓扑后使它也成为一个拓扑群，则群作用 θ 可以看作拓扑群同态 $\bar{\theta}:G\to\mathrm{Homeo}(X)$，$\bar{\theta}(a)(x)=\theta(a,x)$. 容易看出群作用的定义中的条件 $\theta(e,x)=x$ 和 $\theta(a_1,\theta(a_2,x))=\theta(a_1a_2,x)$分别等价于 $\bar{\theta}(e)=e$ 和 $\bar{\theta}(a_1a_2)=\bar{\theta}(a_1)\bar{\theta}(a_2)$. 对任意 $a\in G$，$\bar{\theta}(e)=\bar{\theta}(aa^{-1})=\bar{\theta}(a)\bar{\theta}(a^{-1})=\mathrm{id}$，因此 $\bar{\theta}(a):X\to X$ 确实是自同胚，且它的逆映射为 $\bar{\theta}(a^{-1})$.

前面谈到的拓扑群的伴随作用$\widetilde{\mathrm{AD}}$对应的群同态为 $\mathrm{AD}:G\to\mathrm{Homeo}(G)$，即对任意 $a\in G$，$\mathrm{AD}(a)(b)=\widetilde{\mathrm{AD}}(a,b)=aba^{-1}$.

下面给出有关拓扑群作用的一些基本概念.

定义 1.4.17　设拓扑群 G 在拓扑空间 X 上有群作用θ，则对于任意 $x\in X$，子空间$\{ax\mid a\in G\}$称为 x 在群作用下的轨道，记为 O_x. 群作用的所有轨道构成的集合记为 $X/G=\{O_x\mid x\in X\}$，在其上赋予商拓扑所得的拓扑空间称为群作用下的轨道空间. $\{a\in G\mid ax=x\}$称为点 x 在群作用下的迷向子群(或稳定子群)，记为 G_x. 如果 X 是 Hausdorff 空间，则 G_x 是 G 的闭子群.

显然,群作用的两个轨道或者不交,或者相同,且所有轨道的并为 X,群作用 θ 导出了 X 上的等价关系 $\sim$:$x\sim y\Leftrightarrow x,y$ 在群作用下的同一轨道中,即存在 $a\in G$,使得 $y=ax$.

定义 1.4.18 群作用 $\theta:G\times X\to X$ 称为可递的,若对于任意 $x,y\in X$,存在 $a\in G$,使得 $ax=y$. 此时 X 称为 G 的齐性空间.

显然群作用 θ 是可递的当且仅当它只有一条轨道.

设群 G 在拓扑空间 X 上有群作用,Y 是 X 的子空间,若对于任意 $a\in G$,$aY=Y$,则称 Y 为 X 的 G 不变子空间. 若 Y 是 G 不变的,则群作用就可以限制到 Y 上的,得到 G 在 Y 上的群作用. 群作用的轨道是最简单的不变子空间的例子. 不难说明,不变子空间总是 G 的一些轨道的并集,显然将群作用限制到任意轨道上得到的群作用是可递的.

关于可递的群作用有下面的重要定理.

定理 1.4.19 设拓扑群 G 在 X 上有可递的群作用,若 G,X 都是局部紧致的,且 G 可以写成可数个紧集的并,则对任意 $x\in X$,有 $G/G_x\cong X$.

证明可以参考曹锡华翻译的邦德列雅金的《连续群》.

最后,定义群作用之间的等变映射.

定义 1.4.20 设 $\theta_1:G\times X_1\to X_1$ 和 $\theta_2:G\times X_2\to X_2$ 是拓扑群 G 的两个群作用,连续映射 $f:X_1\to X_2$ 称为从 X_1 到 X_2 的等变映射(或称为 θ_1 到 θ_2 的同态)是指对于任意 $a\in G$,$x\in X_1$,$f(\theta_1(a,x))=\theta_2(a,f(x))$. 这等价于对任意 $a\in G$,$f\circ\bar{\theta}_1(a)=\bar{\theta}_2(a)\circ f$. 若 $f:X_1\to X_2$ 是等变映射,而且它的逆映射是从 X_2 到 X_1 的等变映射,则称 f 是 X_1 到 X_2 的等变同胚(或 θ_1 到 θ_2 的同构).

容易看出,等变同胚 $f:X_1\to X_2$ 诱导出轨道空间的同胚 $X_1/G\cong X_2/G$. 我们将在§2.7 用到这一结果.

习题 1.4

1. 证明：拓扑群是正则空间，即对任意 $a\in G$ 和不包含 a 的闭集 F 存在开集 $U,V,a\in U,F\subset V$，且 $U\cap V=\varnothing$.
2. 设 H 是拓扑群 G 的子群（或正规子群），证明：$\overline{H}$ 是 G 的闭子群（或闭正规子群）.
3. 设 H 是拓扑群 G 的子群，证明：商空间 G/H 是 Hausdorff 空间当且仅当 H 是 G 的闭子群.
4. 在 $\mathbf{R}$ 上定义乘法 $\cdot$ 和 $\circ$，使得 $x\cdot y=x+y,x\circ y=(x^3+y^3)^{1/3}$，证明：在 $\mathbf{R}$ 的标准拓扑下，拓扑群 $(\mathbf{R},\cdot)$ 和 $(\mathbf{R},\circ)$ 同构.
5. 证明：拓扑群关于闭正规子群的商空间上有自然的拓扑群结构.
6. 考虑 $G=\mathrm{O}(n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的自然作用 $\theta:\mathrm{O}(n)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,(A,x)\mapsto Ax$. 令 $x_0=(0,0,\cdots,1)$，$\mathbf{R}^{n-1}$ 可以看成与 x_0 正交的子空间，证明：轨道 $O_{x_0}=S^{n-1}$，迷向子群 $G_{x_0}\cong\mathrm{O}(n-1)$. θ 限制在 O_{x_0} 上是可递的，由此证明：
$$S^{n-1}\cong\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1).$$
对 $G=\mathrm{U}(n)$，证明类似的结论.
7. 考虑实（或复）向量空间 V 上的所有实（或复）内积构成的集合 X，则 $\mathrm{GL}(V)$ 在集合 X 上有自然的群作用 $\theta:\mathrm{GL}(V)\times X\to X$，使得对任意 $A\in\mathrm{GL}(V)$，$g\in X,x,y\in V,\theta(A,g)(x,y)=g(A^{-1}x,A^{-1}y)$. 证明这是一个可递的群作用，由此集合 $X\cong\mathrm{GL}(V)/\mathrm{U}_g(V)$，此处 $\mathrm{U}_g(V)=\{A\in GL(V)\mid g(Ax,Ay)=(x,y),\forall\, x,y\in V\}$. 可以利用这一事实给出了 X 上的自然的拓扑，使得定义的群作用成为拓扑群的作用.
8. 利用群作用的结果验证例 1.4.14 的断言.

§1.5 拓扑群的线性表示理论

在对拓扑群,特别是紧致拓扑群的性质的研究中,群的线性表示理论具有重要的意义,这一节介绍与拓扑群的线性表示有关的一些基本概念.

§1.5.1 拓扑群的线性表示的定义

定义 1.5.1 设 G 为拓扑群,V 为实(或复)向量空间,则连续同态 $\phi:G\to \mathrm{GL}(V)$ 称为 G 在向量空间 V 的一个线性表示,简称为表示.其中 V 称为表示 ϕ 的表示空间,$\dim V$ 称为表示 ϕ 的维数.若 V 是实向量空间,称 ϕ 为 G 的实表示.若 V 是复向量空间,称 ϕ 为 G 的复表示.

本书考虑的表示一般都是有限维表示,在表示空间 V 中选取一个基底后,对任意 $a\in G$,$\phi(a)$ 可以在这组基底下表示成矩阵.这将抽象的群 G 中的元素,化为直观的矩阵,这样就可以充分运用线性代数的工具来研究群的性质.

拓扑群的表示是拓扑群的作用的特殊情形.定义 $\tilde{\phi}:G\times V\to V$,$\tilde{\phi}(a,\boldsymbol{v})=\phi(a)(\boldsymbol{v})$,拓扑群在向量空间 V 上的表示 ϕ 就可以看成 G 的线性作用.拓扑群的表示也可以看成是带有群 G 的线性作用的向量空间 V,从这个角度看,在向量空间上可以进行的运算,如直和、张量积、外幂和对偶等都可以用来构造群 G 的新的表示,下面给出具体的构造.

为了方便,以后在表示 ϕ 给定时,$\phi(a)\boldsymbol{v}$ 直接简写为 $a\boldsymbol{v}$.

定义 1.5.2 设 ϕ_1,ϕ_2 是拓扑群 G 的两个线性表示,表示空间为 V_1,V_2.

(1)定义表示 $\phi:G\to \mathrm{GL}(V_1\oplus V_2)$,对于任意 $a\in G$,$\boldsymbol{v}_1\in V_1$,$\boldsymbol{v}_2\in V_2$,$a(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=(a\boldsymbol{v}_1,a\boldsymbol{v}_2)$,称为表示 ϕ_1,ϕ_2 的直和,记为 $\phi_1\oplus\phi_2$,其表示空间为

$$V_1\oplus V_2.$$

(2)定义表示 $\phi:G\to \mathrm{GL}(V_1\otimes V_2)$,对于任意 $a\in G$,$\boldsymbol{v}_1\in V_1$,$\boldsymbol{v}_2\in V_2$,$a(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=a\boldsymbol{v}_1\otimes a\boldsymbol{v}_2$,称为表示 ϕ_1,ϕ_2 的张量积,记为 $\phi_1\otimes\phi_2$,其表示空间为

$$V_1\otimes V_2.$$

上面关于两个表示的直和和张量积的概念可以自然的推广到多个表示的情形.

定义 1.5.3 设 ϕ 是拓扑群 G 的线性表示,表示空间为 V,$0\leqslant k\leqslant \dim V$,定义表示 $\Lambda^k(\phi):G\to \mathrm{GL}(\Lambda^k V)$,对于任意 $a\in G$,$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_k\in V$,$a(\boldsymbol{v}_1\wedge\boldsymbol{v}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_k)=(a\boldsymbol{v}_1\wedge a\boldsymbol{v}_2\wedge\cdots\wedge a\boldsymbol{v}_k)$,称为表示 ϕ 的 k 次外幂,表示空间为 $\Lambda^k(V)$.

定义 1.5.4　设 ϕ 是拓扑群 G 的线性表示，定义表示 $\phi: G \to \mathrm{GL}(V^*)$，对于任意 $a \in G, f \in V^*, \boldsymbol{v} \in V$，使得 $(af, a\boldsymbol{v}) = (f, \boldsymbol{v})$（或 $(af, \boldsymbol{v}) = (f, a^{-1}\boldsymbol{v})$），称为 G 的对偶表示，记为 ϕ^*，它的表示空间为 V 的对偶空间 V^*.

上面的各种构造表示的方法结合起来可以构造新的表示. 原则上向量空间中的自然的运算都可以用来构造表示.

下面定义两个线性表示之间的同态，因为线性表示是带有群作用的向量空间，它们之间的同态既要保持向量空间结构，也要保持群 G 作用，所以如下定义.

定义 1.5.5　设 ϕ_1 和 ϕ_2 是拓扑群 G 的两个线性表示，表示空间为 V_1，V_2，称线性映射 $A: V_1 \to V_2$ 是 ϕ_1 到 ϕ_2 的同态，若对任意 $a \in G$，有下面交换图 1-4 成立.

$$\begin{CD} V_1 @>A>> V_2 \\ @V{\phi_1(a)}VV @VV{\phi_2(a)}V \\ V_1 @>A>> V_2 \end{CD}$$

图 1-4

即 $A\phi_1(a) = \phi_2(a)A$. 若满足上述条件的 A 是同构，则称它是表示 ϕ_1 到 ϕ_2 的同构.

A 是拓扑群 G 的表示 ϕ_1 到表示 ϕ_2 的同态的条件也可以写成对任意 $a \in G, \boldsymbol{v}_1 \in V_1, A(\phi_1(a)\boldsymbol{v}_1) = \phi_2(a)(A(\boldsymbol{v}_1))$，或者简单的写成 $A(a\boldsymbol{v}_1) = aA(\boldsymbol{v}_1)$.

若 A 是拓扑群 G 的表示 ϕ_1, ϕ_2 之间的同构，则对任意 $a \in G, \phi_2(a) = A\phi_1(a)A^{-1}$，因此同构的两个表示也常称为共轭的表示.

§1.5.2　子表示和商表示

定义 1.5.6　设 ϕ 是拓扑群 G 在向量空间 V 上的表示，V_1 是 V 的子空间，若对任意 $a \in G, \phi(a)V_1 \subseteq V_1$. 则称 V_1 是表示 ϕ 的不变子空间.

对任意表示 ϕ，$\{0\}$，V 总是不变子空间，称为平凡的不变子空间.

定义 1.5.7　拓扑群 G 的表示 ϕ 称为不可约表示，若它的表示空间 V 中只有平凡的不变子空间.

下面利用表示的不变子空间来构造新的表示.

定义 1.5.8　设 ϕ 是拓扑群 G 在向量空间 V 上的表示，$V_1 \subseteq V$ 为不变子空间，则将表示 ϕ 限制在 V_1 上所得的同态 $\phi_1: G \to \mathrm{GL}(V_1)$，$a \mapsto \phi(a)|_{V_1}$ 称为表示 ϕ 关于不变子空间 V_1 的子表示. $\phi_2: G \to \mathrm{GL}(V/V_1)$，$\phi_2(a)(\boldsymbol{v} + V_1) = a\boldsymbol{v} + V_1$ 称为表示 ϕ 关于不变子空间 V_1 的商表示.

定义 1.5.9 拓扑群 G 的表示 ϕ 称为完全可约的，如果对于任意不变子空间 V_1，都存在不变子空间 V_2，使得表示空间 V 有直和分解 $V=V_1\oplus V_2$.

根据定义，不可约表示显然是完全可约的. ϕ 是拓扑群 G 的完全可约的表示等价于在 V 中有不变子空间 V_i，$1\leqslant i\leqslant k$，使得 $V=V_1\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ 且 $\phi|V_i$，$1\leqslant i\leqslant k$ 为不可约表示. 设 $\phi_i=\phi|V_i$，则 $\phi=\phi_1\oplus\phi_2\oplus\cdots\oplus\phi_k$.

§1.5.3 Schur 引理

下面给出 Schur 关于不可约表示的一个重要引理. 它对于一般的群都成立，我们只对拓扑群来表述.

引理 1.5.10 （Schur 引理）设 ϕ_1,ϕ_2 是拓扑群 G 的两个不可约表示，表示空间分别为 V_1,V_2，若线性映射 $A:V_1\to V_2$ 是 ϕ_1 到 ϕ_2 的同态，则 A 为同构或者 $A=0$.

证明 首先说明 $\ker A$ 和 $\mathrm{Im}\,A=A(V_1)$ 分别是 V_1 和 V_2 的不变子空间.

设 $\boldsymbol{v}_1\in\ker A$，则 $A\boldsymbol{v}_1=0$，于是 $A\phi_1(a)\boldsymbol{v}_1=\phi_2(a)A\boldsymbol{v}_1=0$，从而 $\phi_1(a)\boldsymbol{v}_1\in\ker A$. 设 $\boldsymbol{v}_2\in\mathrm{Im}\,A$，则存在 $\boldsymbol{v}_1\in V_1$，$\boldsymbol{v}_2=A\boldsymbol{v}_1$，于是

$$\phi_2(a)\boldsymbol{v}_2=\phi_2(a)A\boldsymbol{v}_1=A\phi_1(a)\boldsymbol{v}_1\in\mathrm{Im}\,A.$$

由 ϕ_1 是不可约表示，$\ker A=\{0\}$ 或 V，即 A 为单射或零同态. 由 ϕ_2 是不可约表示，$\mathrm{Im}\,A=\{0\}$ 或 V_2，即 A 为零同态或满射. 综合起来 A 为同构或零同态.

若将表示 ϕ 看成 G 模，则不可约表示可看做单 G 模，故 Schur 引理相当于说单 G 模之间的同态或者是同构或者是零同态.

Schur 引理有下面的重要推论.

推论 1.5.11 交换拓扑群的不可约复表示必是一维的表示.

证明 设 G 是交换拓扑群，ϕ 是 G 的不可约复表示，表示空间为 V，则对任意 $a,b\in G$，有

$$\phi(a)\phi(b)=\phi(b)\phi(a).$$

于是对于任意 $\lambda\in\mathbf{C}$，$b\in G$，

$$(\lambda I-\phi(a))\phi(b)=\phi(b)(\lambda I-\phi(a)).$$

即 $\lambda I-\phi(a)$ 是表示 ϕ 的自同态. 由 Schur 引理，$\lambda I-\phi(a)$ 为同构或零同态. 选取 $\phi(a)$ 在 V 上的一个特征值 λ_a，则有非 0 特征向量 $\boldsymbol{v}_a$ 使得 $\phi(a)\boldsymbol{v}_a=\lambda_a\boldsymbol{v}_a$. 这说明，$\boldsymbol{v}_a\in\ker(\lambda_aI-\phi(a))$，因此 $\lambda_aI-\phi(a)$ 不是同构，故它是零同态，即 $\phi(a)=\lambda_aI$. 这说明对任意 $a\in G$，$\phi(a)$ 在 V 上的作用是乘以一个倍数，因此 V 的任意子空间都是不变子空间. 这只有在 V 是一维时才可能.

习题 1.5

1. 对于向量空间 V_1,V_2，可以定义向量空间 $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$. 设 ϕ_1 和 ϕ_2 是拓扑群 G 的两个表示，表示空间为 V_1,V_2，试定义表示 $\mathrm{Hom}(\phi_1,\phi_2):G\to \mathrm{GL}(\mathrm{Hom}(V_1,V_2))$. 并证明在自然的定义下，表示 $\mathrm{Hom}(\phi_1,\phi_2)$与 $\phi_1^*\otimes\phi_2$ 同构. 当 ϕ_1,ϕ_2 都是 $\mathrm{GL}(V)$在 V 上的自然表示时，表示$\mathrm{Hom}(\phi_1,\phi_2)$是什么表示?
2. 利用 Schur 引理的推论给出拓扑群 S^1 和 $\mathbf{C}^*=\mathbf{C}-\{0\}$的所有不可约复表示.
3. 证明：$\mathrm{U}(n)$在 $\mathbf{C}^n$ 上的自然复表示 $i:\mathrm{U}(n)\subset \mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$是不可约表示，限制到子群 $\mathrm{U}(n-1)$上所得的复表示 $i':\mathrm{U}(n-1)\subset\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$是不可约表示吗? 为什么?
4. 设 V_1 是实(或复)向量空间 V 中的非平凡的子空间，令
$$G=\{A\in \mathrm{GL}(V)\mid AV_1=V_1\},$$
则显然 V_1 是 G 在 V 上的自然表示的不变子空间，证明：G 的这一表示不是完全可约的.
5. 设 ϕ 是交换拓扑群 G 的不可约实表示，探讨关于 ϕ 能否得到与推论 1.5.11 类似的结论(提示：将表示 ϕ 复化，看成 $V\otimes\mathbf{C}$ 上的复表示，再利用 Schur 引理的推论来讨论).
6. 设 ϕ 为群G 的不可约复表示，表示空间为V，若 A 是ϕ 到自身的同态，则存在 $\lambda\in\mathbf{C}$ 使得 $Av=\lambda v$，$\forall\, v\in V$.

第 2 章
李群的基本理论

本章将介绍李群的基本理论. 第 1 节介绍李群和李代数的基本概念和一些简单的例子;第 2 节引进李群的李代数;第 3 节初步的讨论李群和它的李代数之间的关系;第 4 节介绍单参数子群和指数映射,它们对于深入的研究李群的性质是不可缺少的概念;第 5 节介绍有关子群和同态,同构的一些较深入的性质,给出了 Cartan 关于闭子群的著名引理;第 6 节在有了前面的准备工作后,介绍了一些重要的线性李群和李代数的例子;第 7 节讨论与李群的商空间和商群有关的一些重要结果;第 8 节讨论了覆叠群的概念;第 9 节介绍李群和李代数的自同构群及伴随表示. 这些内容将建立起李群和李代数之间的紧密联系.

§2.1　李群和李代数的定义与例子

§2.1.1　李群的定义和例子

定义 2.1.1　设 G 为解析流形，其上有乘法运算，使得 G 在此乘法下成为群且乘法映射 $f:G\times G\to G,(a,b)\mapsto ab$ 和求逆映射 $\tau:G\to G,a\mapsto a^{-1}$ 都是解析映射，则称 G 为李群. G 作为解析流形的维数称为李群 G 的维数.

注 2.1.2　(1)在上面李群的定义中，要求求逆映射解析. 事实上求逆映射解析可以从乘法映射解析利用反函数定理导出. 证明留给读者.

(2)关于上面的定义，读者可能会提出一个自然的问题：如果将解析条件换成 C^k 连续可微的条件，那么结果会如何？事实上可以证明即使是对于 $k=0$，即只要求 G 是拓扑流形，并且乘法和求逆映射是连续的，都可以在 G 上给出唯一的解析结构使得 G 在相应的乘法下成为李群. 因此我们在定义中选取最强的解析性条件，而研究对象的范围不会缩小.

(3)从上面的定义，可知李群是拓扑群，因此前面一章讨论的对拓扑群成立的结果对于李群也成立.

若 G 是实解析流形，则称它为实李群. 若 G 是复解析流形，则称它为复李群. 给定一个复 n 维李群 G，采用它的复局部坐标的实部和虚部来做新的局部坐标，得到一个实李群. 这样只考虑 G 相应的实解析结构，得到的实李群称为 G 对应的实李群，记为 $G_{\mathbf{R}}$.

对于李群中的元素 a，左平移 L_a、右平移 R_a 和共轭 $\mathrm{AD}(a)=R_a^{-1}\circ L_a$ 都是 G 的解析自同胚.

例 2.1.3　(1)$\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^*$，S^1，S^3 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$在它们的乘法和标准解析结构下是实李群.

(2)$\mathbf{C}^n$，$\mathbf{C}^*$，$\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$是复李群.

(3)有限群是李群.

(4)若 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是李群，则它们的乘积 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 也是李群. 特别的 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ 是李群，称为 n 维环面. 若 n 为偶数，它可以看成复李群. 这是因为 $S^1\times S^1$ 可以看成黎曼面 $\mathbf{C}/\Gamma$，

$$\Gamma=\{m+\sqrt{-1}n\mid m,n\in\mathbf{Z}\}.$$

给定一种代数结构，可以考虑它的对称群，即这种结构的自同构群. 在很多情形下，相应的自同构群有自然的解析结构，使它成为李群. 这种例子在代

数,几何和物理中都很常见.比如仿射空间的仿射变换群,欧氏空间的等距变换群,射影空间的射影变换群,物理学中的伽利略变换群和 Poincaré 变换群等都是李群的例子.

引理 2.1.4 连通李群满足第二可数公理,即在 G 中有可数的稠密子集,这等价于 G 有可数的拓扑基.

证明 由 G 的连通性及定理 1.4.6,$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U^n$,$U$ 可以选为 G 在单位元处的任一局部坐标邻域.设 U 中有可数稠密子集 V,则可数集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}V^n$ 是 G 中的可数稠密子集,这表明 G 是第二可数的.

李群是第二可数的当且仅当它有至多可数个连通分支.由上面引理,结合微分流形和拓扑学的基本知识,可知李群 G 是可度量化的拓扑空间,即 G 的拓扑可以通过在 G 上选取某个度量来得到,因此李群的拓扑可以用序列收敛性来表达.

下面讨论李群的李子群.

定义 2.1.5 设 H 是李群 G 的子群,若 H 上可以定义解析结构,使得 H 在此解析结构下成为李群,且 H 成为 G 的解析子流形,则称 H 是 G 的李子群.

注 2.1.6 李群 G 的李子群 H 未必是将 G 看成拓扑群的拓扑子群.例如对于环面 $T^2=S^1\times S^1$,定义 $\sigma:\mathbf{R}\to T^2$,$t\mapsto(\mathrm{e}^{\mathrm{i}pt},\mathrm{e}^{\mathrm{i}qt})$,若 $\frac{p}{q}$ 为无理数,则 σ 的像是 T^2 的李子群,但不是 T^2 的拓扑子群.读者可以参考例 1.1.16.

定义 2.1.7 设 G 为李群,H 是 G 的李子群,若 H 作为 G 的子流形是正则子流形,则称 H 为 G 的正则李子群.这时 H 上的由解析结构给出的拓扑与子空间拓扑一致.

以后谈到李群的子群,如果不做特别说明,那么都是指李子群.下面给出子群的一些例子.

例 2.1.8 (1)设 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上所有线性变换构成的李群,它等同于所有非退化的 $n\times n$ 实矩阵构成的李群.定义子群 $\mathrm{O}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\}$,即实的 $n\times n$ 正交矩阵构成的子群,以后将证明它是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$ 的闭李子群,且为正则李子群.这里 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置.类似的对 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$,可以考虑闭李子群 $\mathrm{U}(n)$.

(2)设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基,令 V_i,$1\leqslant i\leqslant n$ 为由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_i$ 张成的 $\mathbf{R}^n$ 的 i 维子空间,则 $\mathrm{B}(n,\mathbf{R})=\{A\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})\mid AV_i\subseteq V_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 是

$GL(n,\mathbf{R})$的闭子群,$\mathrm{B}(n,\mathbf{R})$等同于非退化上三角矩阵构成的群. 在 $\mathrm{B}(n,\mathbf{R})$ 还有对角线上元素都是 1 的上三角矩阵构成的闭子群 $\mathrm{N}(n,\mathbf{R})$和对角矩阵构成的闭子群 $\mathrm{H}(n,\mathbf{R})$. 对 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$也可做同样的讨论.

在李群 G 中,对于子集 H,H 的中心化子为 $C_G(H)=\{a\in G\mid ab=ba,\forall b\in H\}$,$H$ 的正规化子 $N_G(H)=\{a\in G\mid aHa^{-1}=H\}$. 容易验证 $C_G(H)$是 $N_G(H)$的正规子群.

下面给出李群同态的定义.

定义 2.1.9 设 G_1,G_2 是两个李群,若 $f:G_1\to G_2$ 既是群同态,也是解析映射,则称 f 是李群 G_1 到 G_2 的同态. 若同态 f 可逆且 f^{-1} 也是解析映射,则称 f 为李群 G_1 到 G_2 的同构.

§2.1.2 李代数的定义和例子

对于李群,讨论它的乘法映射在单位元附近的局部性质,可以引进与李群相伴的李代数的概念. 李代数的概念可以脱离李群的概念而单独定义.

定义 2.1.10 设$\mathfrak{g}$是基域 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,若$\mathfrak{g}$上存在双线性映射$[,]$: $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$,满足

(1)$[X,X]=0,\forall X\in\mathfrak{g}$,

(2)Jacobi 恒等式:$[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}$,则称$(\mathfrak{g},[,])$是域 $\mathbf{K}$ 上的李代数,称$[,]$为李括号. $\mathfrak{g}$作为向量空间的维数称为李代数$\mathfrak{g}$的维数.

对于李代数$\mathfrak{g}$,根据条件(1),有$[X+Y,X+Y]=[X,X]+[X,Y]+[Y,X]+[Y,Y]=0$,这可以导出$[X,Y]=-[Y,X]$. 若基域 K 的特征不为 2,则条件(1)可以换成$\forall X,Y\in\mathfrak{g},[X,Y]=-[Y,X]$.

在本书中,仅限于讨论 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,即实或复李代数的情形. 给定实李代数$\mathfrak{g}$,则$\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ 是复李代数,它的复维数和$\mathfrak{g}$的实维数相同,称为$\mathfrak{g}$的复化,后面还将仔细讨论. 给定复李代数$\mathfrak{g}$,则可以把它看成实李代数,此时记为$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$,注意$\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$的实维数是$\mathfrak{g}$的复维数的两倍.

对 n 维李代数$\mathfrak{g}$,选取一个基底 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,则有一组常数 c_{ij}^k,$1\leqslant i,j,k\leqslant n$,称为李代数$\mathfrak{g}$的结构常数,使得$[X_i,X_j]=\sum\limits_{k=1}^{n}c_{ij}^kX_k$,它们满足

$$c_{ij}^k+c_{ji}^k=0,\ \forall i,j,k=1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{l=1}^{n}(c_{ij}^lc_{lk}^q+c_{jk}^lc_{li}^q+c_{ki}^lc_{lj}^q)=0,\ \forall i,j,k,q=1,2,\cdots,n.$$

这只需要把

(1)$[X_i,X_j]=-[X_j,X_i]$

(2)$[[X_i,X_j],X_k]+[[X_j,X_k],X_i]+[[X_k,X_i],X_j]=0$

用基底展开即可看出.

不难看出,结构常数完全决定了李代数的结构.

下面给出李代数的一些例子.

例 2.1.11 设g是域 $\mathbf{K}$ 上的向量空间,g 上的李括号定义为$[X,Y]=0$,$\forall X,Y\in g$,则称g为交换李代数.

例 2.1.12 在欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 上可以定义外积运算 X,满足

(1)$a\times b=-b\times a$, $\forall a,b\in \mathbf{R}^3$.

(2)Jacobi 恒等式:$(a\times b)\times c+(b\times c)\times a+(c\times a)\times b=0$, $\forall a,b,c\in \mathbf{R}^3$.

因此$(\mathbf{R}^3,\times)$是一个三维李代数.

例 2.1.13 设 A 是域 $\mathbf{K}$ 上的结合代数,定义李括号$[x,y]=xy-yx$,则容易验证$(A,[,])$成为李代数. 特别的设 $\mathrm{gl}(V)$是向量空间 V 上所有线性自映射构成的向量空间,在线性映射的复合下成为结合代数. 定义李括号$[A,B]=AB-BA$,则 $\mathrm{gl}(V)$成为李代数,称为向量空间 V 上的一般线性李代数. 若 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$,则有实 n 维一般线性李代数 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})=\mathrm{gl}(\mathbf{R}^n)$和复 n 维一般线性李代数 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})=\mathrm{gl}(\mathbf{C}^n)$.

例 2.1.14 设 A 是域 $\mathbf{K}$ 上的结合代数,定义 A 上的导子构成的向量空间

$$\mathrm{Der}(A)=\{D:A\to A \text{ 为线性映射} \mid D(ab)=Da\cdot b+a\cdot Db\},$$

则容易证明 $\mathrm{Der}(A)$在李括号$[D_1,D_2]=D_1D_2-D_2D_1$ 下成为域 $\mathbf{K}$ 上的李代数,称为 A 的导子李代数.

设 M 是光滑流形(或解析流形),则 M 上的所有光滑(或解析)函数构成一个代数 $A=C^\infty(M)$(或 $C^\omega(M)$),命题 1.2.16 说明 A 的导子李代数就是李代数$\mathcal{X}(M)$,李括号恰为$[X,Y]=XY-YX$.

例 2.1.15 对于李代数$g_1,g_2,\cdots,g_n$,直和$g_1\oplus g_2\oplus\cdots\oplus g_n$ 在李括号

$$[(X_1,X_2,\cdots,X_n),(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)]=([X_1,Y_1],[X_2,Y_2],\cdots,[X_n,Y_n])$$

下成为李代数,称为李代数的直和(或乘积).

下面定义李代数的子代数和理想.

定义 2.1.16 设g是李代数,h 是g的向量子空间,若$[h,h]\subset h$,则 h 关于g的李括号构成李代数,称为g的子代数. 若向量子空间 h 进一步满足$[h,g]\subset h$,则称 h 为 g 的理想.

如果 h_1,h_2 都是g的理想,那么容易看出 h_1+h_2, $h_1\cap h_2$ 都是理想. 利用

Jacobi 恒等式，读者可以自己去证明由 h_1 中的元素和 h_2 中的元素做李括号得到的所有元素张成的子空间$[h_1, h_2]$也是理想.

定义 2.1.17 设g为李代数，对于它的任意子集 h，定义 h 在g中的中心化子为 $c_g(h)=\{X\in g\mid[X,Y]=0, \forall Y\in h\}$，即$g$中与 h 的所有元素都交换的g的元素构成的子代数. 定义 h 在g中的正规化子

$$n_g(h)=\{Y\in g\mid[Y,X]\in h, \forall X\in h\}.$$

容易验证 $c_g(h)$是 $n_g(h)$的理想.

下面给出商代数的概念.

定义 2.1.18 设 h 是李代数g的子代数，则陪集空间$\{X+h\mid X\in g\}$在加法$(X+h)+(Y+h)=(X+Y)+h$ 和数乘$\lambda(X+h)=\lambda X+h$ 下是向量空间，称为李代数g关于子代数 h 的商空间. 若 h 是g的理想，则 g/h 上可以定义李括号$[X+h, Y+h]=[X,Y]+h$，使得g/h 成为李代数，称为李代数g关于理想 h 的商李代数，简称商代数.

最后定义李代数的同态的概念.

定义 2.1.19 设g_1，g_2是基域 $\mathbf{K}$ 上的两个李代数，$f:g_1\to g_2$是线性映射，且 $f[X,Y]=[fX,fY]$，$\forall X,Y\in g_1$，则称 f 是李代数g_1到g_2的同态，简称同态. 若 f 是线性同构，则称 f 是李代数g_1到g_2的同构.

李代数到其商代数的商映射显然是满同态. 对李代数之间的满同态，也有类似的同构定理，这些都不再赘述.

习题 2.1

1. 证明:李群的定义中的乘法运算解析可以导出求逆映射解析.
2. 在 $\mathbf{R}^1$ 上定义乘法 $x\circ y=(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$,证明:在标准的拓扑下,$(\mathbf{R}^1,\circ)$是拓扑群,在 $\mathbf{R}^1$ 的解析结构下它不是李群. 试选取 $\mathbf{R}^1$ 上的其他解析结构使它成为李群.
3. 证明:要验证一个拓扑群 G 是李群,只需要在包含单位元的某个开集 U 上给定局部坐标,并证明乘法映射在单位元附近关于此局部坐标是解析的即可.(提示:可以由单位元处开始给定的局部坐标系出发,利用左平移得到 G 上相容的局部坐标系,于是左平移自动解析. 再设法证明取逆映射和右平移也解析.)
4. 对李代数g,定义它的中心 $c(g)=\{Y\in g\mid[X,Y]=0,\ \forall X\in g\}$,证明:$c(g)$是$g$的理想.
5. 对李代数g,线性映射 D 称为g上的导子,若 $D[X,Y]=[DX,Y]+[X,DY]$ 对任意 $X,Y\in g$ 成立. g 上的所有导子构成一个向量空间 $\mathrm{Der}(g)$,定义李括号$[D_1,D_2]=D_1D_2-D_2D_1$,证明:
   (1)若 D_1,D_2 是g上的导子,则$[D_1,D_2]$也是g上的导子. 从而 $\mathrm{Der}(g)$是一个李代数.
   (2)对 $X\in g$,证明 $\mathrm{ad}(X):g\to g,Y\mapsto[X,Y]$是$g$上的一个导子,称为$g$的内导子.
   (3)证明:g上的所有的内导子构成的向量空间 $\mathrm{ad}(g)=\{\mathrm{ad}(X)\mid X\in g\}$是 $\mathrm{Der}(g)$的理想.
   (4)证明:$\mathrm{ad}(g)\cong g/c(g)$,这里 $c(g)$为g的中心.
6. 证明:在实数域或复数域上,同构的意义下恰有两个二维李代数.

§2.2　李群的李代数

本节引进李群的李代数.

在单位元附近,李群可以近似的用单位元处的切空间来逼近. 当然任意流形都可以在一点附近用切空间来逼近,因此还需要利用李群乘法的性质来建立李群的切空间上进一步的结构.

对于 n 维李群 G,单位元处的切空间 T_eG 是 n 维向量空间. 对任意 $a\in G$,利用李群的左平移 L_a,可以把切向量 $X_e\in T_eG$ 平移为 a 点处的切向量 $\mathrm{d}L_a(X_e)$,其中 $\mathrm{d}L_a$ 表示 L_a 的切映射. 因为李群的乘法是解析的,所以利用左平移可以得到 G 上的向量场 X,$X_a=\mathrm{d}L_a(X_e)$. 这里,向量场 X 在 a 点对应的切向量直接记为 X_a,这样构造出的向量场 X 称为李群 G 上的左不变向量场,显然它满足 $\mathrm{d}L_a(X_b)=\mathrm{d}L_a\mathrm{d}L_b(X_e)=\mathrm{d}L_{ab}(X_e)=X_{ab}$.

定义 2.2.1　李群 G 上的向量场 X 称为左不变向量场,若 $\mathrm{d}L_a(X)=X$,即 $\mathrm{d}L_a(X_b)=X_{ab}$,$\forall\, a,b\in G$.

令 $b=e$,可知左不变向量场 X 满足 $X_a=\mathrm{d}L_a(X_e)$. 因为 L_a 对于 a 是解析的,所以 X 必为解析向量场. 因为

$$\mathrm{d}L_a(X+Y)=\mathrm{d}L_a(X)+\mathrm{d}L_a(Y),\quad \mathrm{d}L_a(\lambda X)=\lambda\mathrm{d}L_a(X)$$

所以有

命题 2.2.2　G 上的所有左不变向量场构成一个向量空间,记为$\mathfrak{g}$.

引理 2.2.3　映射 $f:\mathfrak{g}\to T_eG$,$X\mapsto X_e$ 给出$\mathfrak{g}$到切空间 T_eG 的一个线性同构.

证明　显然映射 f 是线性的. 对任意 $X_e\in T_eG$,定义 G 上的向量场 X,使得对任意 $a\in G$,$X_a=\mathrm{d}L_a(X_e)$. 因为 $X_b=\mathrm{d}L_b(X_e)$,$X_{ab}=\mathrm{d}L_{ab}(X_e)$,所以 $\mathrm{d}L_a(X_b)=\mathrm{d}L_a\mathrm{d}L_b(X_e)=\mathrm{d}L_{ab}(X_e)=X_{ab}$,这说明 X 是左不变向量场,且它在单位元处为 X_e,故映射 f 为满射. 若 X 为左不变向量场,则 $X_a=X_{ae}=\mathrm{d}L_a(X_e)$,即 X 由 X_e 完全确定,所以上面映射为单射.

为了证明$\mathfrak{g}$中的两个左不变向量场的李括号也是左不变向量场,需要下面的

引理 2.2.4　设 $\rho:M\to N$ 是光滑(或解析)同胚,若 X,Y 是 M 上的两个光滑(或解析)向量场,则有 $\mathrm{d}\rho([X,Y])=[\mathrm{d}\rho(X),\mathrm{d}\rho(Y)]$.

证明　设 ρ 为光滑同胚,根据前面对光滑流形的光滑结构、切向量、切映射和向量场的讨论,可以知道对于光滑同胚的两个光滑流形,可以把它们完全等同起来,甚至看成是同一个光滑流形. 因为命题对 $\rho=\mathrm{id}$ 成立,所以对任

意的光滑同胚也成立. 故有 $d\rho([X,Y])=[d\rho(X),d\rho(Y)]$. 读者可以自己检查,所有讨论对解析情形也成立.

对左不变向量场 X,Y,在引理中取 $\rho=L_a$,则得到

$$dL_a([X,Y])=[dL_a(X),dL_a(Y)]=[X,Y].$$

即有

命题 2.2.5 设 X,Y 是 G 上的两个左不变向量场,则它们的李括号$[X,Y]$也是左不变向量场.

于是可以作如下的定义.

定义 2.2.6 设 G 是李群,则 G 上的所有左不变向量场构成的向量空间 $\mathfrak{g}$,在其李括号$[X,Y]=XY-YX$ 下成为李代数,称为李群 G 的李代数.

显然,李群 G 的李代数$\mathfrak{g}$和 G 具有相同的维数. 若 G 为复李群,则切空间上有复向量空间的结构,此时 G 的李代数是复李代数. $\mathfrak{g}$ 是 G 上所有光滑向量场构成的李代数$\mathcal{X}(G)$的子代数.

利用$\mathfrak{g}$与 T_eG 的线性同构可以把$\mathfrak{g}$上的李代数结构搬到 T_eG 上.

命题 2.2.7 李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 与 G 在单位元 e 处的切空间 T_eG 在映射 $X\mapsto X_e$ 下是线性同构的,从而可以定义$[X_e,Y_e]=[X,Y]_e$,使得这一线性同构成为李代数的同构.

对每个元素 $a\in G$,李代数$\mathfrak{g}$也可以通过映射 $X\to X_a$ 等同于 T_aG.

从上面定义可以看出李群 G 的李代数的结构只依赖于李群在单位元附近的乘法性质. 因此为了确定李群的李代数,只需要在单位元处的任一局部坐标邻域内进行计算即可.

选取单位元 e 附近的解析局部坐标系(U,ϕ),不妨设 $\phi(e)=0$,由拓扑群的性质可知存在开集 $V\subseteq U$,使得 $V^2\subseteq U,V^{-1}\subset U$,即对于 $a,b\in V,ab,a^{-1}\in U$. 设 V 中点 a,b 具有坐标 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n),y=(y^1,y^2,\cdots,y^n)$,设$c=ab$ 的坐标为 $z=(z^1,z^2,\cdots,z^n)$,则在局部坐标下,乘法函数可以写成

$$z=f(x,y)=f(x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n),$$

写成分量形式为

$$z^1=f_1(x,y)=f_1(x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n),$$

$$z^2=f_2(x,y)=f_2(x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n),$$

$$\cdots$$

$$z^n=f_n(x,y)=f_n(x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n).$$

为了计算 G 的李代数,在 T_eG 中选取坐标向量$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_e,\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_e,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_e$,利用左平移计算它们对应的左不变向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,这给出$\mathfrak{g}$的一个基

底. 然后计算它们的李括号，就可以得到李代数$\mathfrak{g}$的结构.

引理 2.2.8 李群 G 在单位元处的局部坐标向量$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_e,\left.\frac{\partial}{\partial x^2}\right|_e,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_e$对应的局部左不变向量场为 $X_i(x)=\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y^i}(x,0)\frac{\partial}{\partial x^j}$.

证明 考虑 G 上的局部坐标曲线 $\sigma_i(t)$，$\sigma_i(0)=e$，$\sigma_i(t)$ 在 e 处的切向量恰为$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$. 根据切映射的定义，$\mathrm{d}L_a(X_e)$为曲线 $L_a(\sigma_i(t))=a\sigma_i(t)$在 a 点处的切向量. 在局部坐标下，曲线 $a\sigma_i(t)$的坐标表示为

$$(f_1(x^1,x^2,\cdots,x^n;0,0,\cdots,t,\cdots,0),\cdots,f_n(x^1,x^2,\cdots,x^n;0,0,\cdots,t,\cdots,0)).$$

利用复合函数求导法则，

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_j(x^1,\cdots,x^n;0,0,\cdots,t,\cdots,0)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\frac{\partial f_j}{\partial y^i}(x,0),$$

于是得到 $X_i(x)=\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial y^i}(x,0)\frac{\partial}{\partial x^j}$.

以后记$\frac{\partial f_j(x,0)}{\partial y^i}$为 $l_i^j(x)$，称为辅助函数. $l_i^j(x)$依赖于局部坐标系，没有几何意义，但是对于计算来说，方便有用. 记 $L(x)=(l_j^i(x))_{n\times n}$，它是左平移 L_a 在单位元处关于局部坐标的 Jacobi 矩阵，满足 $L(0)=\boldsymbol{I}_n$.

下面来计算李代数$\mathfrak{g}$在基底 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 下的结构常数 c_{ij}^k，它们由关系$[X_i,X_j]=\sum_k c_{ij}^k X_k$ 确定. 利用引理 2.2.8 中 X_i 的计算公式，可知对 G 上的任意解析函数 h：

$$\begin{aligned}
&[X_i,X_j]h\\
&=\left[l_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k},l_j^q(x)\frac{\partial}{\partial x^q}\right]h\\
&=l_i^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k}\left(l_j^q(x)\frac{\partial h}{\partial x^q}\right)-l_j^q(x)\frac{\partial}{\partial x^q}\left(l_i^k(x)\frac{\partial h}{\partial x^k}\right)\\
&=l_i^k(x)\frac{\partial l_j^q(x)}{\partial x^k}\frac{\partial h}{\partial x^q}+l_i^k(x)l_j^q(x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^k\partial x^q}-l_j^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\frac{\partial h}{\partial x^k}-\\
&\quad l_j^q(x)l_i^k(x)\frac{\partial^2 h}{\partial x^q\partial x^k}\\
&=l_i^k(x)\frac{\partial l_j^q(x)}{\partial x^k}\frac{\partial h}{\partial x^q}-l_j^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\frac{\partial h}{\partial x^k}\\
&=\left(l_i^q(x)\frac{\partial l_j^k(x)}{\partial x^q}-l_j^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}h.
\end{aligned}$$

这说明$[X_i,X_j]=\left(l_i^q(x)\dfrac{\partial l_j^k(x)}{\partial x^q}-l_j^q(x)\dfrac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\right)\dfrac{\partial}{\partial x^k}$.

另一方面

$$[X_i,X_j]=c_{ij}^q X_q=c_{ij}^q l_q^k\frac{\partial}{\partial x^k},$$

比较两式,得到

$$\sum_{q=1}^n\left(l_i^q(x)\frac{\partial l_j^k(x)}{\partial x^q}-l_j^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\right)=\sum_{q=1}^n c_{ij}^q l_q^k(x),\text{其中 } i,j,k=1,2,\cdots,n.$$

为了方便计算常数c_{ij}^k,注意到$l_i^j(0)=\delta_i^j$(根据前面的引理$\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_e=X_i(e)=l_i^j(0)\left.\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right|_e$).在上式中令$x=0$,可得

$$c_{ij}^k=\frac{\partial l_j^k}{\partial x^i}(0)-\frac{\partial l_i^k}{\partial x^j}(0).$$

这给出了在局部坐标下计算结构常数的明确公式.这里的基本过程是:首先从李群G的乘法出发,选取局部坐标系,在局部坐标系下写出乘法函数的坐标表示;然后微分得到辅助函数$l_i^j(x)$;再次微分确定结构常数c_{ij}^k.

下面给出一些具体计算的例子.

例 2.2.9 李群$\mathbf{R}^n$的李代数:$\mathbf{R}^n$上有整体的坐标,$\mathbf{R}^n$每点处的切空间都可以等同于$\mathbf{R}^n$.$\mathbf{R}^n$上有整体的左不变向量场$X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$,它们构成李代数$g$的一个基底,可以看出$l_i^j(x)=\delta_i^j$为常值.因此$\forall i,j,k,c_{ij}^k=0$,从而$\mathbf{R}^n$的李代数是交换李代数,可以把它等同于$\mathbf{R}^n$.同理$\mathbf{C}^n$的李代数为交换李代数$\mathbf{C}^n$.

因为李代数只跟李群在单位元附近的性质有关,所以n维环面T^n的李代数亦为交换李代数$\mathbf{R}^n$.

例 2.2.10 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的李代数:$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$是向量空间$\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$的开子集,其上的解析坐标由包含映射给出,记为$x_{ij}$,$1\leqslant i,j\leqslant n$.$\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的任一点的切空间可以等同于$\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$,取每点的切空间的基底$\boldsymbol{E}_{ij}=\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,$\boldsymbol{E}_{ij}$可以等同于$(i,j)$元素为1,其他元素都为0的$n\times n$矩阵.令$\boldsymbol{A}=(x_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,$\boldsymbol{B}=(y_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,则乘法函数为$f_{ij}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum\limits_{l=1}^n x_{il}y_{lj}$.

将$\boldsymbol{E}_{ij}$利用左平移扩充为左不变向量场$X_{ij}(\boldsymbol{A})=l_{ij}^{st}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_{st}$,其中辅助函数

$$l_{ij}^{st}(\boldsymbol{A})=\frac{\partial f_{st}}{\partial y_{ij}}=x_{sl}\delta_{li}\delta_{tj}.\text{所以 } X_{ij}=l_{ij}^{st}\boldsymbol{E}_{st}=x_{sl}\delta_{li}\delta_{tj}\boldsymbol{E}_{st}=x_{si}\boldsymbol{E}_{sj}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}.$$

直接计算结构常数

$$c_{ij;kl}^{uv}=\frac{\partial l_{kl}^{uv}}{\partial x_{ij}}(\boldsymbol{O})-\frac{\partial l_{ij}^{uv}}{\partial x_{kl}}(\boldsymbol{O})=\delta_{ui}\delta_{sj}\delta_{sk}\delta_{vl}-\delta_{uk}\delta_{sl}\delta_{si}\delta_{vj}.$$

于是可得$[X_{ij},X_{kl}]=c_{ij;kl}^{uv}X_{uv}=\delta_{jk}X_{il}-\delta_{li}X_{kj}$，这里 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵.

矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij},\boldsymbol{E}_{kl}\in \mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$ 满足关系$[\boldsymbol{E}_{ij},\boldsymbol{E}_{kl}]=\delta_{jk}\boldsymbol{E}_{il}-\delta_{li}\boldsymbol{E}_{kj}$，这说明 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的李代数可以自然的等同于 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$. 将 X_{ij} 等同于 $X_{ij}(\boldsymbol{I}_n)=\boldsymbol{E}_{ij}$ 给出了李代数的同构. 以后就直接说 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的李代数为 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$.

例 2.2.11　S^3 的李代数. S^3 是单位四元数做成的乘法群. 它在单位元 1 处的切空间可以看成 $\mathbf{H}$ 中由基底 i,j,k 张成的三维子空间，根据四元数的乘法，通过计算可以验证 S^3 的李代数满足

$$[i,j]=2k,\quad [j,k]=2i,\quad [k,i]=2j.$$

习题 2.2

1. 完成例 2.2.11 中 S^3 的李代数的计算.

2. 计算 SO(3)的李代数.

3. 求复平面上的 Möbius 变换群的李代数.

4. 证明:S^3 和 SO(3)的李代数同构,但是 S^3 与 SO(3)作为李群不同构.

5. 若李群 G_1 的李代数为g_1,G_2 的李代数为g_2,证明:$G_1\times G_2$ 的李代数同构于 $g_1\oplus g_2$.

6. 李群 G 上的外微分形式 w,若满足对任意 $a\in G$,$\mathrm{d}L_a^*(w)=w$,则称 w 为 G 上的左不变外微分形式. 设 $w_1,w_2,\cdots,w_n$ 是与 G 上的左不变向量场 X_1,$X_2,\cdots,X_n$ 对偶的外微分形式,即 $w_i(X_j)=\delta_{ij}$,$\forall\, i,j$,称为对偶的 Maurer-Cartan 形式. 对于由李括号给出的线性映射 $[,]: g\otimes g\to g$,设 $[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^kX_k$,则有对偶的线性映射 $\mathrm{d}:g^*\to g^*\otimes g^*$,证明:$\mathrm{d}(w_i)=-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n}c_{jk}^iw_j\wedge w_k$,恰为 w_i 的外微分.

§2.3 李群的局部性质

李群 G 的李代数的构造只依赖于李群 G 在单位元附近的性质. 若 G 有多个连通分支,则李代数由李群 G 的单位元所在的连通分支完全决定. 因此不能期待李代数能够反映李群的完整信息. 合理的期望是李代数能够确定李群在单位元附近的性质.

下面把上一节关于李群的李代数的局部计算得到的结果整理出来,建立李群和李代数之间的更多的联系.

在李群 G 的单位元处选取解析的局部坐标系(U,ϕ),设 $\phi(e)=0$. 设在局部坐标下,乘法函数为 $f(x,y)$,求逆函数为 $\tau(x)$,则由李群的性质可以知道在单位元附近

(1)$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$.

(2)$f(x,0)=f(0,x)=x$.

(3)存在解析映射 τ,满足 $f(x,\tau(x))=f(\tau(x),x)=0$.

设 $L(x)=(l_j^i(x))_{n\times n}=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y^j}(x,0)\right)_{n\times n}$,其中 $l_j^i(x)$ 为辅助函数. 局部坐标向量$\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$ 对应的左不变向量场为$\sum\limits_{j=1}^n l_i^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x^j}$.

下面叙述 Sophus Lie 的三个基本定理.

定理 2.3.1(Lie) 设 G 为李群,(U,ϕ)为单位元处的解析局部坐标系,设在局部坐标下 $f(x,y)$为乘法函数,$L(x)=(l_j^i(x))_{n\times n}=\left.\left(\dfrac{\partial f_i(x,y)}{\partial y^j}\right)\right|_{(x,0)}$. 则

(1)乘法函数适合偏微分方程组

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=L(f(x,y))L(y)^{-1},L(0)=\boldsymbol{I}_n.$$

(2)辅助函数 $l_j^i(x)$适合偏微分方程组

$$\sum_{k=1}^n\left(l_i^q(x)\frac{\partial l_j^k(x)}{\partial x^q}-l_j^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\right)=\sum_{k=1}^n c_{ij}^q l_q^k(x).$$

其中 $i,j,k=1,2,\cdots,n$.

(3)上面方程中的常数 c_{ij}^k 满足

$$c_{ij}^k+c_{ji}^k=0,\forall i,j,k=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{l=1}^n(c_{ij}^l c_{lk}^q+c_{jk}^l c_{li}^q+c_{ki}^l c_{lj}^q)=0,\forall i,j,k,q=1,2,\cdots,n.$$

证明 (1)由于 $f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$,

$$L(f(x,y))=\frac{\partial f(f(x,y),z)}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{\partial f(x,f(y,z))}{\partial z}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\Big|_{u=f(y,z),z=0}\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}\Big|_{z=0}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}L(y).$$

从而$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=L(f(x,y))L(y)^{-1}$.

(2)令 $X_i=\sum_{j=1}^{n}l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$,则$[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^kX_k$. 上一节的计算已经证明了这一结论.

(3)两个等式分别是李代数的李括号的反交换性和 Jacobi 恒等式的自然结果.

上面定理的逆定理也成立,因为证明涉及偏微分方程组的可积性理论,所以不再给出证明. 定理可以如下表述:

定理 2.3.2(Lie) 任给一个实 n 维李代数g及它的一个基底 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,设关于这组基的结构常数是 $c_{ij}^k,i,j,k=1,2,\cdots,n$,则

(1)结构常数满足

$$c_{ij}^k+c_{ji}^k=0,\forall i,j,k=1,2,\cdots,n.$$

$$\sum_{l=1}^{n}(c_{ij}^lc_{lk}^q+c_{jk}^lc_{li}^q+c_{ki}^lc_{lj}^q)=0,\forall i,j,k,q=1,2,\cdots,n.$$

(2)从结构常数出发构造关于一组函数 $l_j^i(x),1\leqslant i,j\leqslant n$ 的偏微分方程组

$$\sum_{k=1}^{n}\left(l_i^q(x)\frac{\partial l_j^k(x)}{\partial x^q}-l_l^q(x)\frac{\partial l_i^k(x)}{\partial x^q}\right)=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^ql_q^k(x).$$

其中 $i,j,k=1,2,\cdots,n$,则存在 $\varepsilon>0$,使得方程组在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的方体 $\{x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)\parallel x^1|<\varepsilon,|x^2|<\varepsilon,\cdots,|x^n|<\varepsilon\}$上有解 $l_j^i(x)$. 令 $X_i(x)=l_i^j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},L(x)=(l_j^i(x))_{n\times n}$,则对任意 $i,j,[X_i,X_j]=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^kX_k$,且 $L(0)=I_n$.

(3)再利用 $L(x)$构造偏微分方程$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=L(f(x,y))L(y)^{-1}$,它有满足初值条件 $f(x,0)=x$ 的唯一解析解. 这一解还满足 $f(0,x)=x$,当 x,y,z, $f(x,y),f(y,z)$都有意义时,$f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$成立. 且对于给定 x,存在$\tau(x)$,满足 $f(x,\tau(x))=f(\tau(x),x)=0$.

下面引进局部李群的概念.

定义 2.3.3 设 U 是解析流形,若 U 上某些元素可以定义乘法,使得

(1)若对 $a,b,c\in U$,$(ab)c$ 和 $a(bc)$都有定义,则$(ab)c=a(bc)$;

(2)在 U 中存在单位元素 e,使得对任意 $a\in U$,ae,ea 都有定义且为 a;

(3)若 $a,b\in U$ 可以定义乘法,则存在开邻域 $U_a\ni a$,$U_b\ni b$,使得 U_a 中的元素和 U_b 中的元素的乘法有定义,并且是解析的.

(4)若 $a\in U$ 在 U 中有逆元,则存在包含 a 的开集 U_a,使得 U_a 中的元素都有逆元,并且求逆映射是解析的,则称 U 为局部李群.

容易看出李群 G 的单位元的任意开邻域都是局部李群.

综合上面两个定理的结论,可以看出从李群 G 的乘法函数出发经过两次微分的过程可以确定 G 的李代数$\mathfrak{g}$的结构. 反过来从一个李代数$\mathfrak{g}$出发,通过两次积分,即求解两次一阶偏微分方程组得到一个解析的局部定义乘法函数,即一个局部李群. 局部李群可以和李群一样的定义相应的李代数. 读者可以自己去验证满足定理 2.3.2 的局部李群的李代数为$\mathfrak{g}$. 因此从一个李代数$\mathfrak{g}$出发可以构造出一个局部李群 U,使得它的李代数为$\mathfrak{g}$.

实际上,从一个局部李群 U 出发可以构造出一个整体的李群 G_U. 下面利用连通李群的包含单位元的开集生成这个李群这一事实来给出具体构造.

首先给出下面

引理 2.3.4 从一个局部李群 U 出发可以构造出包含 U 的局部李群 U',使得 U 成为 U'解析开子流形,且 U'中的元素都有逆元.

证明 形式上只需要把 U 中没有逆元的元素的逆元加进 U 即可.

从 U 出发做拓扑空间 U':设 $\overline{U}$ 是 U 的拷贝,若 U 中有一点 a,则 $\overline{U}$ 中的对应点记为 $\bar{a}$. 定义映射 $\tau:U\sqcup\overline{U}\to U\sqcup\overline{U}$,$a\mapsto\bar{a}$,$\bar{a}\mapsto a$,称为 $U\sqcup\overline{U}$ 上的求逆映射.

在 $U\sqcup\overline{U}$ 上定义等价关系$\sim$:若 a 在 U 中有逆元 b,则 $a\sim\bar{b}$,这生成一个等价关系,定义 $U'=U\sqcup\overline{U}/\sim$. 不难看出若 $a\sim\bar{b}$,则 $ab=ba=e$,于是 $\tau(a)=\bar{a}\sim b=\tau(\bar{b})$,这意味着求逆映射在等价类上也是良好定义的. 因此 τ 可以自然过渡为 U'上的映射,仍称为求逆映射.

记 $i:U\to U\sqcup\overline{U}$ 为包含映射,$\pi:U\sqcup\overline{U}\to U'$为商映射,则有复合映射 $\pi\circ i:U\to U'$,不难看出它是单射. 在此映射下 U 可以看成 U'的子空间. U'上的求逆映射可以看成 U 上的求逆映射的扩张.

接着在 U'上定义乘法,若 $ab=c$ 在 U 中成立,则约定 $ab=c$,$\bar{c}=\bar{b}\bar{a}$,$b=\bar{a}c$,$a=c\bar{b}$ 在 U'中成立. 读者可以自己去验证 U'是每个元素都有逆的局部李群. 若$\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\mid\alpha\in\Lambda\}$为 U 上的解析结构,则$\{(U_\alpha,\phi_\alpha),(\overline{U}_\alpha,\phi_\alpha\circ\tau),\alpha\in\Lambda\}$为 U'上的解析结构.

下面我们从一个局部李群 U 出发构造一个李群.

利用引理 2.3.4,不妨假设 $U^{-1}=U$,令 $U^m=\underbrace{U\times U\times\cdots\times U}_{m个}$,记 $\widetilde{G}_U=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}U^m$. 在 $\widetilde{G}_U$ 上引进乘法,对元素 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ 和 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_q)$,定义 $uv=(u_1,u_2,\cdots,u_p,v_1,v_2,\cdots,v_q)$,显然 $\widetilde{G}_U$ 在此乘法下满足结合律,并有单位元().

下面定义 $\widetilde{G}_U$ 上的等价关系~,若 $(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ 中存在 $i\leqslant p-1$,使得 u_iu_{i+1} 在 U 中有定义,则约定

$$(u_1,u_2,\cdots,u_i,u_{i+1},\cdots,u_p)\sim(u_1,u_2,\cdots,u_iu_{i+1},\cdots,u_p).$$

若 u 中出现单位元,则约定 u 与删去单位元所得的元素 v 等价. 这生成 $\widetilde{G}_U$ 上的一个等价关系. 令 G_U 为 $\widetilde{G}_U$ 在此等价关系下的商集,记 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_p)$ 对应的等价类为 $[u]=[u_1,u_2,\cdots,u_p]$. 因为有简单的事实:$u\sim u'$,$v\sim v'$,则 $uv\sim u'v'$,所以在 G_U 上乘法 $[u][v]=[uv]$ 是良好定义的,且商映射 $\pi:\widetilde{G}_U\to G_U$ 为乘法同态. 这说明 G_U 也满足结合律. 另外,它有单位元[ ]. 元素 $[u]=[u_1,u_2,\cdots,u_p]$ 的逆元为 $[u]^{-1}=[u_p^{-1},u_{p-1}^{-1},\cdots,u_1^{-1}]$. 这说明 G_U 为群. 对 $u\in U$,定义 $i(u)=[u]$,i 显然是单射. 在映射 i 下,U 可以看成 G_U 的子集.

定理 2.3.5 若 U 是局部李群,则按上面的方法构造出的集合 G_U 上有自然的乘法和解析结构,使它成为李群,且 $G_U=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}U^m$. 若 U 是连通的局部李群,则 G_U 也是连通李群.

注意这里的 U^m 是 G_U 中的开集 U 通过 G_U 中的乘积得到的,不是指 $U\times U\times\cdots\times U$. 定理的证明由以下的两个引理给出.

引理 2.3.6 群 G_U 有自然的拓扑结构,使它成为拓扑群. 若 U 连通,则 G 连通.

证明 G_U 是一个群,还需定义拓扑,证明拓扑与群结构相容.

由于 U 上有拓扑,令 $\mathcal{U}_e=\{V\mid V$ 为 U 中包含单位元的开集$\}$,则 G_U 中所有形如 aV,$a\in G_U$,$V\in\mathcal{U}_e$ 的集合构成 G_U 中的一组拓扑基. 这只需说明若存在 $a_1,a_2\in G_U$,$V_1,V_2\in\mathcal{U}_e$,若 $a_1V_1\cap a_2V_2\neq\varnothing$,则存在 $a\in G_U$ 和 $V_0\in\mathcal{U}_e$,使得 $aV_0\subset a_1V_1\cap a_2V_2$. 选取 $a\in a_1V_1\cap a_2V_2$,可知存在 $a_1'\in V_1$,$a_2'\in V_2$,$a=a_1a_1'=a_2a_2'$,选取 $V_0\in\mathcal{U}_e$ 满足 $a_1'V_0\subseteq V_1$,$a_2'V_0\subseteq V_2$,则 $aV_0\subseteq a_1a_1'V_0\subseteq a_1V_1$,同理 $aV_0\subseteq a_2V_2$,从而 $aV_0\subseteq a_1V_1\cap a_2V_2$.

因为 G_U 的乘法和求逆运算在单位元附近与 U 上的乘法和求逆运算一致,所以它们都是连续的. 又根据定义,左乘运算自动连续. 这保证 G_U 的乘法限制在 $G_U\times U$ 上连续. 再利用 $G_U=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}U^m$,得到乘法在 $G_U\times G_U$ 上连续.

若 U 连通,由 $G_U=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}U^m$,则 G_U 也连通.

引理 2.3.7　G_U 上有自然的解析结构,使它成为李群.

证明　选取 U 的单位元处的一个解析局部坐标系 (V,ϕ),使得 $V=V^{-1}$ 且 $V^2\subset U$,则 $\mathcal{U}=\{(aV,\phi\circ L_a^{-1})\mid a\in G_U\}$ 给出了 G_U 上的一个解析结构. 下面验证在这些局部坐标系是相容的,即局部坐标变换是解析的. 设 $(a_1V,\phi\circ L_{a_1}^{-1})$ 和 $(a_2V,\phi\circ L_{a_2}^{-1})$ 是两个局部坐标系,$a\in a_1V\cap a_2V$,则存在 $a_1',a_2'\in V$,使得 $a=a_1a_1'=a_2a_2'$. a 在两个坐标邻域上的坐标分别为 $\phi\circ L_{a_1}^{-1}(a)=\phi(a_1')$ 和 $\phi\circ L_{a_2}^{-1}(a)=\phi(a_2')$,因此只需证明 $\phi(a_2')$ 是 $\phi(a_1')$ 的解析函数. 因为 $a_2'=(a_2^{-1}a_1)a_1'$,而 $a_2^{-1}a_1=a_2'a_1'^{-1}\in VV^{-1}\subseteq U$,由乘法函数在 U 上是解析的,所以 $\phi(a_2')$ 是 $\phi(a_1')$ 的解析函数.

乘法在 $G_U\times G_U$ 上的解析性的证明与前面类似. 详细证明过程留给读者.

总结起来,对于一个李群可以构造出它的李代数;而从这个李代数出发又可以构造出一个李群,但一般来说这样构造出的李群与原来的李群 G 不一定同构. 后面还将讨论这一问题.

习题 2.3

1. 在 S^1 上选取单位元的邻域 U,U 成为局部李群,讨论对于不同的 U,从 U 出发构造的李群 G_U 可能会有哪些不同的情形.
2. 试定义局部李群的同态的概念,并证明若 $f:U_1\to U_2$ 为局部李群的同态,则 $G(f):G_{U_1}\to G_{U_2}$ 为李群同态.
3. 给定 2 维李代数$\mathfrak{g}$,它有基底 X,Y,且满足$[X,Y]=Y$,构造李群 G,使它的李代数为$\mathfrak{g}$.
4. 证明:$\mathbf{R}^3$ 中的向量场 $x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x},y\dfrac{\partial}{\partial z}-z\dfrac{\partial}{\partial y},z\dfrac{\partial}{\partial x}-x\dfrac{\partial}{\partial z}$张成一个李代数,试计算积分得到的李群.
5. 证明定理 2.3.5 中的 G_U 上的乘法的解析性.

§2.4　单参数子群和指数映射

这一节讨论李群上的单参数子群，并引进指数映射的概念.

§2.4.1　单参数子群

李群 G 的李代数$\mathfrak{g}$中的元素可以等同于李群 G 在单位元处的切向量，也可以等同于李群 G 上的左不变向量场. 根据流形的基本理论，向量场可以积分得到 G 上的局部单参数变换群，对于李群上的左不变向量场，相应的局部单参数变换群具有什么样的性质. 下面进行讨论.

设 $X\in\mathfrak{g}$，由 X 可以构造李群 G 上的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=X(\sigma(t)).\tag{2.4.1}$$

曲线 $\sigma(t)$是方程的解当且仅当对于任意 t，$\sigma(t)$在 t 处的切向量$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}$恰好为向量场 X 在$\sigma(t)$处对应的向量 $X(\sigma(t))$.

根据左不变向量场是在左平移下不变的这一点，可以预料微分方程的解曲线也应该是在左平移下不变的，具体的表述为

引理 2.4.1　设曲线 $\sigma(t)$，$t\in(a,b)$为微分方程 2.4.1 的解曲线，则对任意 $a\in G$，曲线 $a\sigma(t)$也是方程的解曲线.

下面只需讨论初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=X(\sigma(t)),\quad \sigma(0)=e\tag{2.4.2}$$

的积分曲线.

由微分方程的基本理论可知初值问题的解在局部上存在唯一并且是解析的.

先给出以下的定义.

定义 2.4.2　设 G 为李群，解析同态 $\sigma:\mathbf{R}^1\to G$ 称为 G 的一个单参数子群.

因此，$\sigma:\mathbf{R}\to G$ 为单参数子群当且仅当 σ 解析且对于任意 $t,s\in\mathbf{R}^1$，$\sigma(t+s)=\sigma(t)\sigma(s)$，容易看出 $\sigma(0)=e$.

例 2.4.3　(1)$G=\mathbf{R}^n$ 上的单参数子群 $\sigma(t):\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^n$ 满足，$\sigma(t+s)=\sigma(t)+\sigma(s)$，因此是线性的，形如 $\sigma(t)=tX$. $\mathbf{C}^n$ 的情形类似.

(2)对 $G=T^n$，$\sigma:\mathbf{R}^1\to G$，$t\mapsto(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_1 t},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_2 t},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n t})$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\mathbf{R}^1$ 是单参数子群.

(3)在 $\mathrm{GL}(V)$中，设 $X\in\mathrm{gl}(V)$，则

$$\sigma(t)=\mathrm{e}^{tX}=I+tX+\frac{1}{2!}t^2X^2+\cdots+\frac{1}{n!}t^nX^n+\cdots$$

是单参数子群.

引理 2.4.4 初值问题 2.4.2 的解 $\sigma(t)$ 在 $t\in(-\infty,\infty)$ 内存在唯一，且解析，并满足 $\sigma(s+t)=\sigma(s)\sigma(t)$，$\forall s,t\in\mathbf{R}^1$.

证明 由微分方程理论，存在 $\varepsilon>0$，使得方程的解 $\sigma(t)$ 在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上是存在唯一且解析的. 因为 X 是左不变向量场，所以若 $\sigma(t)$ 是方程的解，则

$$\frac{\mathrm{d}(\sigma(s)\sigma(t))}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}L_{\sigma(s)}(X(\sigma(t)))=X(\sigma(s)\sigma(t)),$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sigma(t+s))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma(t+s)}{\mathrm{d}(t+s)}\frac{\mathrm{d}(t+s)}{\mathrm{d}t}=X(\sigma(t+s)).$$

从而 $\sigma(s)\sigma(t)$ 和 $\sigma(s+t)$ 都是方程的解，且在 $t=0$ 时具有相同的初值 $\sigma(s)$，由微分方程解得唯一性可知 $\sigma(s)\sigma(t)=\sigma(s+t)$ 对所有的满足 $s,t,s+t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的 s,t 成立.

下面说明上述初值问题的解 $\sigma(t)$ 是整体存在的，且满足 $\sigma(s+t)=\sigma(s)\sigma(t)$. 选取 t_0，$0<t_0<\varepsilon$，若 $\sigma(t)$ 可以延拓到 (a,b) 上，用 $\sigma(s+t_0)=\sigma(s)\sigma(t_0)$ 和 $\sigma(s-t_0)=\sigma(s)\sigma(-t_0)$，则 $\sigma(t)$ 也可以延拓到 $(a-t_0,b+t_0)$ 上. 这样可以将 $\sigma(t)$ 解析延拓到整个 $\mathbf{R}^1$，且满足 $\sigma(s+t)=\sigma(s)\sigma(t)$. 烦琐的验证工作留给读者.

这表明方程 2.4.2 的解是单参数子群. 当 X 取遍 $\mathfrak{g}$ 时，方程 2.4.2 的解是不是穷尽了所有的 G 上的单参数子群呢? 答案是确实如此，我们有下面的

定理 2.4.5 G 上的单参数子群的集合和 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 中的元素一一对应.

证明 定义从 G 上的单参数子群的集合到 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的映射 Φ，设 σ 为单参数子群，它在 $t=0$ 处的切向量 $\sigma'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$，将 $\sigma'(0)\in T_eG$ 扩充为 G 上的左不变向量场 X，定义 $\Phi(\sigma)=X$. 我们验证映射 Φ 是一一映射.

先证明 Φ 是满射. 给定 $X\in\mathfrak{g}$，则初值问题 2.4.2 的解 σ 给出单参数子群，由引理 2.4.4，显然 $\Phi(\sigma)=X$.

再证明 Φ 是单射. 设 σ,τ 为两个单参数子群，满足 $\Phi(\sigma)=\Phi(\tau)=X$，则它们在原点处的切向量 $\sigma'(0)=\tau'(0)=X_e$. 由单参数子群的性质：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}&=\left.\frac{\mathrm{d}\sigma(t+s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=\left.\frac{\mathrm{d}(\sigma(t)\sigma(s))}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\\&=\mathrm{d}L_{\sigma(t)}\left.\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(s)}{\mathrm{d}s}\right)\right|_{s=0}=\mathrm{d}L_{\sigma(t)}(X_e)=X(\sigma(t)).\end{aligned}$$

同理 $\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}=X(\tau(t))$，由 $\sigma(0)=\tau(0)=e$ 及微分方程初值问题解的唯一性可知 $\sigma(t)=\tau(t)$，即 $\sigma=\tau$.

事实上，设左不变向量场 X 对应的单参数子群为 $\sigma(t)$，则它对应的单参数变换群为 $\phi(a,t)=a\sigma(t)$.

§2.4.2　指数映射

考虑带参数 X 的微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t,X)}{\mathrm{d}t}=X(\sigma(t,X)),\quad \sigma(0,X)=e,X\in\mathfrak{g}. \tag{2.4.3}$$

由微分方程的基本理论，上面方程的解 $\sigma(t,X)$ 关于 t 和 X 是解析映射. 读者可参阅文献[5].

引理 2.4.6　方程 2.4.3 的解 $\sigma(t,X)$ 满足等式 $\sigma(t,sX)=\sigma(ts,X)$.

这一结论的一个直观解释是沿积分曲线以速度 sX 移动时间 t 所到的位置等于以速度 X 移动时间 st 所到的位置. 只要注意到等式两边分别满足

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t,sX)}{\mathrm{d}t}=sX(\sigma(t,sX)),\quad \sigma(0,sX)=e.$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(st,X)}{\mathrm{d}t}=sX(\sigma(st,X)),\quad \sigma(0,X)=e.$$

并利用微分方程解的唯一性即可得证.

利用方程 2.4.3 的解 $\sigma(t,X)$，可以定义下面的指数映射.

定义 2.4.7　设 G 是李群，它的李代数为$\mathfrak{g}$，定义映射 $\exp:\mathfrak{g}\to G,X\mapsto\sigma(1,X)$，称为 G 的指数映射.

左不变向量场 X 对应的单参数子群为 $\sigma_X(t)=\sigma(t,X)=\sigma(1,tX)=\exp(tX)$，以后我们都用指数映射形式表示单参数子群.

命题 2.4.8　设李群 G 的李代数为$\mathfrak{g}$，则存在$\mathfrak{g}$中包含原点的开集 V，使得 $\exp|_V:V\to\exp(V)$是解析同胚.

证明　这只要说明 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 在 $X=0$ 处的切映射是非奇异的即可. $\mathfrak{g}$ 在原点的切空间可以等同于$\mathfrak{g}$，选取 0 处的切向量 $X\in\mathfrak{g}$，则它是$\mathfrak{g}$中曲线 tX 的切向量，而 exp 将此曲线映为单参数子群 $\exp(tX)$，后者在单位元处的切向量恰为 X，这表明切映射为同构. 于是命题得证.

设 $\exp:V\to U=\exp(V)\subseteq G$ 是解析同胚，则$(U,\exp^{-1})$是与李群 G 上已有解析结构相容的局部坐标系. 它通过左平移得到的所有的局部坐标系构成的集合$\mathcal{U}_1=\{(aU,\exp^{-1}\circ L_{a^{-1}})\mid a\in G\}$是 G 的一个等价的解析结构，这样的局部坐标系称为 G 上的第一类局部坐标系. 第一类局部坐标系是直接由李群 G 的结构决定的 G 上的内蕴的坐标系. 它不像别的相容的局部坐标系选取得那么随意. 在单位元附近，采用这组坐标系又特别的方便，比如在第一类局部坐标系下看，单参数子群 $\exp(tX)$的坐标形式恰为 tX，这与 $\mathbf{R}^n$ 上的单参数子群的形式相同.

类似的还可以定义其他的局部坐标系：在 G 的李代数g中选取一个基底 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，考虑映射 $\phi: \mathbf{R}^n \to G$，

$$(x^1, x^2, \cdots, x^n) \mapsto \exp(x^1 X_1)\exp(x^2 X_2)\cdots\exp(x^n X_n),$$

则它在单位元附近也是解析同胚. 设 ϕ 限制在 $\mathbf{R}^n$ 的原点附近的某个开集 V 上是到 $U=\phi(V)$的解析同胚，类似的，利用映射 ϕ 及 G 上的左平移可以做出 G 上一个等价的解析结构$\mathcal{U}_2=\{(aU, \phi^{-1}\circ L_{a^{-1}})\mid a\in G\}$，称为 G 上的第二类局部坐标系. 第二类局部坐标系不完全是内蕴的，因为它们依赖于g中的一个基底的选取.

若在李代数g中选取一个子空间 h 及和它互补的子空间 h'，即$g=h\oplus h'$，设 $X\in g, X=Y+Z, Y\in h, Z\in h'$，定义映射 $\phi(X)=\exp(Y)\exp(Z)$，它在单位元附近也是解析同胚. 类似的选取 G 中单位元附近的开集 U，利用映射 ϕ 可以做出 G 上的一个等价的解析结构$\mathcal{U}_3=\{(aU, \phi^{-1}\circ L_{a^{-1}})\mid a\in G\}$，称为 G 上的第三类局部坐标系. 第三类局部坐标系在处理有关李群的子群和关于子群的商空间时是很方便的.

利用李群 G 上的第一类局部坐标系，可以证明

定理 2.4.9 若 $\sigma: \mathbf{R}^1 \to G$ 是连续单参数子群，即 $\sigma(t)$是群同态，且连续，则 $\sigma(t)$是解析单参数子群.

定理的证明需要下面的引理，它是数学分析中的一个简单习题.

引理 2.4.10 设 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^n$ 是连续映射，若对任意的 $s, t, s+t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$，$\sigma(s+t)=\sigma(s)+\sigma(t)$，则存在 $v\in\mathbf{R}^n$，使得 $\sigma(t)=tv$.

定理的证明 先选取李群 G 在单位元处的第一类局部坐标系$(U, \exp^{-1})$，再选取 ε，使得 $\sigma((-\varepsilon, \varepsilon))\subset U$. 于是 σ 是连续单参数子群，意味着它在第一类局部坐标下的表示函数 $\hat{\sigma}=\exp^{-1}\circ\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon)\to\mathbf{R}^n$ 连续，且满足对任意 $s, t, s+t\in(-\varepsilon, \varepsilon)$，$\hat{\sigma}(s+t)=\hat{\sigma}(s)+\hat{\sigma}(t)$. 于是根据上面的引理，$\hat{\sigma}$ 在$(-\varepsilon, \varepsilon)$上是线性函数，因此是解析函数. 这表明 σ 在$(-\varepsilon, \varepsilon)$上是解析的. 再利用$\sigma(s+t)=\sigma(s)\sigma(t)$，可知 σ 在整个 $\mathbf{R}^1$ 上解析，从而 σ 是解析单参数子群.

下面是指数映射的一些具体例子.

例 2.4.11 (1)$\mathbf{R}^n$ 上的指数映射. 左不变向量场为常值向量 $X\in\mathbf{R}^n$，解方程$\dfrac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=X, \sigma(0)=0$，得 $\sigma(t)=tX$，因此 $\exp(X)=X$.

(2)将 S^1 在单位元处的切空间等同于 $\mathrm{i}\mathbf{R}(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$，则李群 $T^n=S^1\times S^1\times\cdots\times S^1$ 在单位元处的切空间等同于$(\mathrm{i}\mathbf{R})^n$. 选取李代数中的左不变向量场 X，使得它在单位元处对应于向量 $X=(\mathrm{i}x_1, \mathrm{i}x_2, \cdots, \mathrm{i}x_n)\in(\mathrm{i}\mathbf{R})^n$，则它在点

$\sigma=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_n})$处的切向量为$(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_1}x_1,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_2}x_2,\cdots,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_n}x_n)$. 满足初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma_i(t)}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\sigma_i(t)}x_i,\sigma(0)=e$ 的积分曲线 $\sigma(t)=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1t},\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2t},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_nt})$，指数映射为

$$\exp((\mathrm{i}x_1,\mathrm{i}x_2,\cdots,\mathrm{i}x_n))=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_n}).$$

(3)对李群 $\mathrm{GL}(V)$，选取单位元处的切空间中的向量 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{gl}(V)$，它对应的左不变向量场在 $\Phi\in GL(V)$处为 $\Phi\boldsymbol{A}$，则 $\exp(t\boldsymbol{A})$是方程$\dfrac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}=\Phi(t)\boldsymbol{A}$ 的解. 由常系数线性微分方程组的理论，

$$\exp(t\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}(t\boldsymbol{A})^2+\cdots+\frac{1}{n!}(t\boldsymbol{A})^n+\cdots,$$

所以
$$\exp(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n+\cdots.$$

§2.4.3　李群上的 Taylor 公式

通过前面关于指数映射的讨论，可以知道 $\sigma(t)=a\exp(tX)$是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}=X(\sigma(t)),\quad \sigma(0)=a$$

的解.

设 f 是 G 上的解析函数，则对一元实函数 $f(\sigma(t))$，直接计算可知

$$\frac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}f=X(\sigma(t))f=(Xf)(\sigma(t)).$$

这表明，对于 G 上的解析函数 f，$f(\sigma(t))$关于 t 的导数是$(Xf)(\sigma(t))$. 将这一结果用于解析函数 Xf，结合$(Xf)(\sigma(t))=\dfrac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}$，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}((Xf)(\sigma(t)))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t}\right)=(X(Xf))(\sigma(t))=(X^2f)(\sigma(t))$$

继续这一过程，有

引理 2.4.12　设 f 是 G 上的解析函数，$\sigma(t)=a\exp(tX)$，$X\in g$，则

$$\frac{\mathrm{d}^nf(\sigma(t))}{\mathrm{d}t^n}=(X^nf)(\sigma(t)).$$

对 $\sigma(t)=a\exp(tX)$，将解析函数 $f(\sigma(t))$在 $t=0$ 处展开为幂级数，则有

定理 2.4.13　(Taylor 公式)对于 G 上的任意解析函数 f，存在 $\varepsilon>0$，使得当 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$时，$f(a\exp(tX))=(\mathrm{e}^{tX}f)(a)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(X^nf)(a)$.

证明　由上面的引理，可得 $\dfrac{\mathrm{d}^nf(\sigma(t))}{\mathrm{d}t^n}=(X^nf)(\sigma(t))$，令 $t=0$，

$\left.\frac{\mathrm{d}^n f(\sigma(t))}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=0}=(X^n f)(a)$，因此 $f(a\exp(tX))=(\mathrm{e}^{tX}f)(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(X^n f)(a)$.

这里 e^{tX} 可以看成形式的记号，也可以理解为 G 上的光滑自同胚构成的无穷维李群 $\mathrm{Diff}(G)$上的单参数子群. $\mathrm{Diff}(G)$的李代数为$\mathcal{X}(G)$. 映射 $X\mapsto \mathrm{e}^X$ 可以看成群 $\mathrm{Diff}(G)$的指数映射.

上面的 Taylor 展开式把李群上的乘法，指数映射和流形上的几何联系了起来，对于理解 G 的乘法结构非常重要. 直接从公式的形式就可以看出，它能实现 G 上的乘法的信息和 G 上的微分几何信息之间的相互传递. 读者可以通过下面定理来体会.

定理 2.4.14 设$\mathfrak{g}$是李群 G 的李代数，则对于任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$，有

(1) $\exp(tX)\exp(tY)=\exp\left(t(X+Y)+\frac{t^2}{2}[X,Y]+o(t^2)\right)$.

(2) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)=\exp(tY+t^2[X,Y]+o(t^2))$.

(3) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY)=\exp(t^2[X,Y]+o(t^2))$.

证明 只证明(3)，其他情形类似.

设 $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY)=\exp(Z(t))$，对于 G 上任意解析函数 f，利用 Taylor 展开式，有

$$\begin{aligned}
f(\exp(Z(t)))&=f(\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY))\\
&=(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}f)(e)\\
&=\Big[\Big(I+tX+\frac{t^2}{2}X^2+o(t^2)\Big)\Big(I+tY+\frac{t^2}{2}Y^2+o(t^2)\Big)\\
&\quad\Big(I-tX+\frac{t^2}{2}X^2+o(t^2)\Big)\Big(I-tY+\frac{t^2}{2}Y^2+o(t^2)\Big)f\Big](e)\\
&=[(I+t^2(XY-YX)+o(t^2))f](e)\\
&=(\mathrm{e}^{t^2[X,Y]+o(t^2)}f)(e)\\
&=f(\exp(t^2[X,Y]+o(t^2))).
\end{aligned}$$

比较前后的结果可得 $\exp(Z(t))=\exp(t^2[X,Y]+o(t^2))$，这证明了命题.

注 2.4.15 设 $\exp(tX)\exp(tY)=\exp(Z(t))$，则有著名的 Campbell-Baker-Hausdorff 公式，将 $Z(t)$明确的局部展开为 t,X,Y 的幂级数. 相应的幂级数可以直接利用 Taylor 公式来进行计算，读者可参考本节习题 4.

利用上面定理中的(3)式，可以直接从李群上的乘法来定义李括号的运算.

命题 2.4.16 设 X,Y 是$\mathfrak{g}$上的两个左不变向量场，则它们的李括号

$$[X,Y]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y)\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)\right)\Big|_{t=0}.$$

从这个意义上来说李括号是李群中的交换子的线性化.

习题 2.4

1. 证明：对李群 $SL(2,\mathbf{R})$，指数映射 exp 既不是单射也不是满射.

2. 设对李代数$\mathfrak{g}$及 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$[X,Y]=0$，证明：

$$\exp(t(X+Y))=\exp(tX)\exp(tY)=\exp(tY)\exp(tX).$$

由此可知连通李群 G 是交换李群当且仅当它的李代数$\mathfrak{g}$是交换李代数.

3. 证明：

(1) $\exp(tX)\exp(tY)=\exp\left(t(X+Y)+\dfrac{t^2}{2}[X,Y]+o(t^2)\right)$.

(2) $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)=\exp(tY+t^2[X,Y]+o(t^2))$.

4. 设$\mathfrak{g}$是李群 G 的李代数，$X,Y\in\mathfrak{g}$，

$$\begin{aligned}&\exp(tX)\exp(tY)\\=&\exp(tF_1+t^2F_2+t^3F_3+o(t^3)),\end{aligned}$$

证明：$F_3=\dfrac{1}{12}\{[X,[X,Y]]+[Y,[Y,X]]\}$.

§2.5 子群、同态和同构

本节利用前面关于李群的单参数子群和指数映射的结果，讨论有关李群同态和同构的一些重要结果，并建立李群的子群和李代数的子代数之间的密切联系.

§2.5.1 同态和同构的进一步性质

设 f 是李群 G_1 到 G_2 的同态，相应的李代数为$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$，将李代数等同于李群在单位元处的切空间，则 f 在单位元处的切映射 $\mathrm{d}f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$是李代数$\mathfrak{g}_1$到$\mathfrak{g}_2$的线性映射. 我们有下面的重要结果.

命题 2.5.1 设 f 是李群 G_1 到 G_2 的同态，$\mathrm{d}f$ 是 f 诱导的$\mathfrak{g}_1$到$\mathfrak{g}_2$的线性映射，则有交换图 2-1，即对 $\forall X\in\mathfrak{g}_1$，$\exp(\mathrm{d}f(X))=f(\exp(X))$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\mathrm{d}f"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\
G_1 \arrow[r, "f"] & G_2
\end{tikzcd}$$

图 2-1

证明 设 $X\in\mathfrak{g}_1$，则单参数子群 $\exp(tX)$在 $t=0$ 处的切向量为 X. 由于 f 是同态，显然$f(\exp(tX))$也是单参数子群，它在原点处的切向量为$\mathrm{d}f(X)$. 因为单参数子群 $\exp(t\mathrm{d}f(X))$在原点处的切向量也是 $\mathrm{d}f(X)$，所以

$$\exp(t\mathrm{d}f(X))=f(\exp(tX)).$$

令 $t=1$ 得到命题中的结论.

上节我们证明了连续单参数子群必为解析单参数子群，实际上有下面更一般的定理.

定理 2.5.2 设 $f:G_1\to G_2$ 是李群之间的连续同态，则 f 是解析同态.

证明 下面借助李群 G 上的第二类局部坐标系来证明. 在$\mathfrak{g}$中选取基底 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 及 $\varepsilon>0$，使得在 G 中的包含单位元的开集

$$U=\{\exp(t_1X_1)\exp(t_2X_2)\cdots\exp(t_nX_n)\mid |t_i|<\varepsilon,|t_2|<\varepsilon,\cdots,|t_n|<\varepsilon\}$$

上，第二类局部坐标有良好定义. 此时点 $a=\exp(t_1X_1)\exp(t_2X_2)\cdots\exp(t_nX_n)$的局部坐标为$(t_1,t_2,\cdots,t_n)$. 由 f 为同态，

$$\begin{aligned}f(a)&=f(\exp(t_1X_1)\cdots\exp(t_nX_n))\\&=f(\exp(t_1X_1))f(\exp(t_2X_2))\cdots f(\exp(t_nX_n)).\end{aligned}$$

因为 f 是连续的同态，所以 $f(\exp(t_1X_1))$，$f(\exp(t_2X_2))$，$\cdots$，$f(\exp(t_nX_n))$都是连续单参数子群，根据定理 2.4.9，它们是解析单参数子群. 这说明 f 在局部坐标 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 下是解析映射，因此 f 在 U 上是解析的. 利用 f 是同态及左平移是解析同胚可将 f 的解析性推广到整个 G 上.

推论 2.5.3 设拓扑群 G 上有两种解析结构，都使 G 构成李群，则它们是等价的解析结构. 因此拓扑群 G 上如果有李群的结构，那么本质上是唯一的.

证明 应用上面定理到 G 上的恒同映射即可.

利用上节的结果，我们还有

定理 2.5.4 设 $f:G_1\to G_2$ 是李群的同态，则 f 导出的线性映射 $\mathrm{d}f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 是李代数的同态.

证明 对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}_1$，

$$
\begin{aligned}
&f(\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y)\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y))\\
&=f(\exp(\sqrt{t}X))f(\exp(\sqrt{t}Y))f(\exp(-\sqrt{t}X))f(\exp(-\sqrt{t}Y))\\
&=\exp(\sqrt{t}\mathrm{d}f(X))\exp(\sqrt{t}\mathrm{d}f(Y))\exp(-\sqrt{t}\mathrm{d}f(X))\exp(-\sqrt{t}\mathrm{d}f(Y)).
\end{aligned}
$$

由上节定理 2.4.14 的(3)式：$\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y)\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)=\exp(t[X,Y]+o(t))$，可知曲线 $\exp(\sqrt{t}X)\exp(\sqrt{t}Y)\exp(-\sqrt{t}X)\exp(-\sqrt{t}Y)$ 在 $t=0$ 处的切向量为 $[X,Y]$，同样的，曲线

$$\exp(\sqrt{t}\mathrm{d}f(X))\exp(\sqrt{t}\mathrm{d}f(Y))\exp(-\sqrt{t}\mathrm{d}f(X))\exp(-\sqrt{t}\mathrm{d}f(Y))$$

在 $t=0$ 处的切向量为 $[\mathrm{d}f(X),\mathrm{d}f(Y)]$，由切映射的定义可知

$$\mathrm{d}f[X,Y]=[\mathrm{d}f(X),\mathrm{d}f(Y)].$$

由前面结果还有以下的

命题 2.5.5 设 $f_1,f_2:G_1\to G_2$ 是李群的同态，若 G_1 连通，$\mathrm{d}f_1=\mathrm{d}f_2$，则

$$f_1=f_2.$$

证明 选取 G_1 的李代数 $\mathfrak{g}_1$ 在原点处的开邻域 V，使得指数映射 $\exp:V\to U=\exp(V)$ 为解析同胚，对 $a\in U$，存在 $X\in\mathfrak{g}_1$，$a=\exp(X)$. 于是若 $\mathrm{d}f_1=\mathrm{d}f_2$，则 $f_1(a)=f_1(\exp(X))=\exp(\mathrm{d}f_1(X))=\exp(\mathrm{d}f_2(X))=f_2(\exp(X))=f_2(a)$，因此 f_1,f_2 在 U 上相等. 利用 G_1 的连通性，可知 U 生成 G_1. 即对任意 $a\in G_1$，存在 $a_1,\cdots,a_k\in U$，使得 $a=a_1a_2\cdots a_k$，因此

$$f_1(a)=f_1(a_1)f_1(a_2)\cdots f_1(a_k)=f_2(a_1)f_2(a_2)\cdots f_2(a_k)=f_2(a).$$

读者可能会猜想，定理 2.5.4 的逆定理成立，但下面将会看到，一般来说这是不对的. 我们将在后面进一步讨论.

§2.5.2 李群的子群和李代数的子代数

从上面的讨论，可以看到，对于李群 G，有和它对应的李代数 $\mathfrak{g}$；对于李群 G_1 到 G_2 的同态 ϕ，也有对应的李代数的同态 $\mathrm{d}\phi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$. 若 H 是 G 的李子群，相应的包含同态记为 $i:H\to G$，设 H 的李代数为 $\mathfrak{h}$，则 $\mathrm{d}i:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ 为李代数

同态，这表明 $\mathfrak{h}$ 可以看做李代数$\mathfrak{g}$的子代数. 关于子群 H 对应的子代数，有下面的简单结果.

命题 2.5.6 设李群 G 的李代数为$\mathfrak{g}$，H 是 G 的李子群，则 H 的李代数

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\mid\exp(tX)\in H,\ \forall t\in\mathbf{R}\}.$$

证明 将$\mathfrak{g}$ 等同于 T_eG，$\mathfrak{h}$ 等同于 T_eH. 若对于任意 $t\in\mathbf{R}$，$X\in\mathfrak{g}$，$\exp(tX)\in H$，则 $\exp(tX)$ 在单位元处的切向量 $X\in\mathfrak{h}$，这说明 $\{X\in\mathfrak{g}\mid\exp(tX)\in H,\ \forall t\in\mathbf{R}\}\subset\mathfrak{h}$；反过来若 $X\in\mathfrak{h}$，在 H 中有单参数子群 $\exp_H(tX)$，它也是 X 在$\mathfrak{g}$中的单参数子群，因此对任意 $t\in\mathbf{R}$，$\exp(tX)=\exp_H(tX)\in H$. 这说明$\{X\in\mathfrak{g}\mid\exp(tX)\in H,\ \forall t\in\mathbf{R}\}\supset\mathfrak{h}$.

如果在李代数$\mathfrak{g}$中有子代数 $\mathfrak{h}$，那么是否在 G 中能找到子群 H，使得它的李代数正好是 $\mathfrak{h}$，这样的子群是否唯一，等，下面将给出解答. 为此首先引入一些概念.

定义 2.5.7 设 M 为解析流形，TM 为它的切丛. D 称为 M 上的一个 k 维分布，若对于 M 中的任意一点 p，D 定义了 p 点的切空间 T_pM 中的一个 k 维子空间 $D(p)$. 分布 D 称为解析分布，若在 M 的每一点，存在局部定义的开邻域 U，使得在 U 上存在 k 个线性无关的解析向量场 $X_1,X_2,\cdots,X_k$，且 $X_1(p),X_2(p),\cdots,X_k(p)$张成 $D(p)$. M 的开子集 U 上定义的向量场 X 称为从属于分布 D，若对于任意 $p\in U$，$X(p)\in D_p$. 分布 D 称为对合的，是指对于任意从属于 D 的向量场 X,Y，$[X,Y]$也从属于 D.

定义 2.5.8 设 D 是 M 上的一个分布，D 的一个积分子流形是指 M 的子流形 N，它在每点 $p\in N$ 的切空间 T_pN 看做 T_pM 的子空间，恰好为 $D(p)$. 积分子流形称为分布 D 的极大积分子流形，是指 N 连通，且若有 D 的其他连通积分子流形 N'与 N 相交，则必有 $N'\subseteq N$.

不是所有的分布都存在积分子流形. 积分子流形不存在的分布称为不可积分布. 关于分布的可积性，有下面著名的定理.

定理 2.5.9(Frobenius) 设 D 是解析流形 M 上的一个解析分布，则 D 是对合分布当且仅当对于M 中任意一点 p，存在唯一的包含 p 点的解析的极大积分子流形.

根据 Frobenius 定理，对合分布也称为可积分布.

分布是向量场概念的自然推广，分布的积分子流形是向量场的积分曲线的自然推广. 若李群上的左不变向量场非 0，它张成 G 上的一个一维分布，它的积分子流形就是相应的单参数子群及其所有的左平移子流形.

现在可以回答前面的问题了，实际上有

定理 2.5.10 设李群 G 的李代数为$\mathfrak{g}$，则任给$\mathfrak{g}$的子代数 $\mathfrak{h}$，则

(1)存在 G 的连通李子群 H,它的李代数恰为 h.

(2)H 是由 $\exp(h)$生成的 G 的连通子群.

对于这一定理的证明,不做详细讨论,只是大概介绍一下,让读者有一点直观感受,能够相信这一重要事实.

设李群 G 的李代数为g,h 是g的子代数.选取 h 的一个基底 $X_1,X_2,\cdots,X_k$,则它们在 G 中的每一点 p 处张成 T_pG 的一个 k 维子空间,这给出 G 上的一个 k 维分布 D.它实际上还是一个左不变分布 D,即在 G 上的左平移下保持不变.利用 h 是g的子代数,可以验证 h 生成的分布是对合分布,于是根据 Frobenius 定理,存在包含 G 的单位元的极大积分子流形,设为 H,它是 G 的连通的解析子流形.与左不变向量场的积分曲线的情形类似,子集 $aH,a\in G$ 就是 D 的所有极大积分子流形了.

还需要验证 H 是李子群.考虑到 D 的左不变性,对任意 $a\in H$,$a^{-1}H$ 也是G 的极大积分子流形,但是 $a^{-1}H\ni e$,因此 $a^{-1}H=H$.这表明 $H^{-1}H=H$,故 H 为G 的子群.

因为任意 $X\in h$ 从属于分布 D,所以 X 的积分曲线 $\exp(tX)$位于 H 中,即 H 包含 $\exp(h)$生成的子群.简单的讨论可以说明 H 恰由 $\exp(h)$生成.

定理 2.5.10 及本节前面的结果保证,在李群 G 的连通李子群和李代数g的子代数之间存在一一对应的关系.

§2.5.3 李群之间的局部同态

首先给出下面的定义.

定义 2.5.11 设 G_1,G_2 是李群,若在 G_1 中有包含单位元的开集 U 及局部李群的同态 $f:U\to G_2$,则称 f 是李群 G_1 到 G_2 的局部同态.若 f 是李群 G_1 到 G_2 的局部同态,且 $f(U)$是 G_2 中的包含单位元的开集,使得 $f:U\to f(U)$ 是局部李群的同构,则称 f 是 G_1 到 G_2 的局部同构,此时称 G_1 和 G_2 是局部同构的.

检查定理 2.5.4 的证明过程,容易看出下面命题成立.

命题 2.5.12 设 $f:U\to G_2$ 是李群 G_1 到 G_2 的局部同态,则 f 导出李代数的同态 $\mathrm{d}f:g_1\to g_2$.

命题 2.5.12 的逆命题也成立,即

定理 2.5.13 设 G_1,G_2 是李群,它们的李代数为g_1,g_2,若 $\phi:g_1\to g_2$是李代数同态,则存在李群 G_1 到 G_2 的局部同态 f,使得 $\mathrm{d}f=\phi$.

证明 在李群 $G_1\times G_2$ 的李代数$g_1\oplus g_2$中有子空间 $h=\{(X,Y)\in g_1\oplus g_2|$

$Y=\phi(X)\}$，这是同态 ϕ 的图像. 因为 ϕ 为李代数同态，所以 h 为子代数，它的维数与 G_1 相同. 根据定理 2.5.10 可知，存在 $G_1\times G_2$ 的连通李子群 $H\subset G_1\times G_2$，它的李代数恰为 h. 考虑下面交换图 2-2.

$$\begin{tikzcd}
g_1 & h \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\exp"'] & g_1\oplus g_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\exp"'] & g_2 \arrow[d, "\exp"'] \\
G_1 & H \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "i"] & G_1\times G_2 \arrow[r, "p_2"] & G_2
\end{tikzcd}$$

图 2-2

其中 i 是包含同态，p_1 和 p_2 分别是到第一个和第二个乘积因子的投影同态. 注意到 $p_1:h\to g_1,(X,\phi(X))\mapsto X$ 为李代数同构，因此根据命题 2.5.1 及指数映射在原点附近是解析同胚可知：存在 H 中单位元处的开邻域 $V\subset H$，G_1 中的开邻域 $U\subset G_1$，使得 $p_1:V\to U$ 为局部李群的同构. 令 f 为复合映射

$$U\xrightarrow{p_1^{-1}|_U}V\xrightarrow{\subseteq}H\xrightarrow{i}G_1\times G_2\xrightarrow{p_2}G_2,$$

则不难验证对 $X\in g_1$，$\mathrm{d}f(X)=\phi(X)$，因此 f 满足定理的要求.

命题 2.5.14 设李群 G_1,G_2 的李代数为 g_1,g_2，则 G_1 与 G_2 是局部同构的当且仅当它们的李代数 g_1 与 g_2 同构.

证明 若 f 是 G_1 到 G_2 的局部同构，则 $\mathrm{d}f$ 是 g_1 到 g_2 的同构.

若 $\phi:g_1\to g_2$ 是同构，则根据定理 2.5.13，存在 G_1 的包含单位元的开集 U，和局部李群的同态 $f:U\to G_2$，不妨设 U 上的第一类局部坐标是良好定义的，即 $\exp^{-1}:U\to\exp^{-1}U$ 是解析同胚（否则选取更小的 U）. 考虑交换图 2-3

$$\begin{tikzcd}
\exp^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\exp"'] & g_2 \arrow[d, "\exp"'] \\
U \arrow[r, "f"] & G_2
\end{tikzcd}$$

图 2-3

因为 exp 和 ϕ 在单位元和原点附近都是局部同胚，所以 f 也是局部同胚.

§2.5.4 Cartan 的闭子群引理

下面证明李群理论中的一个重要结果，Cartan 的闭子群引理.

命题 2.5.15(Cartan 引理) 李群 G 的闭子群 H 必为正则李子群.

证明 设 H 是 G 的闭子群，为了说明 H 是李子群，我们试着去构造 H 的李代数. 定义集合 $V=\{X\in g\mid\exp(tX)\in H,\forall t\in\mathbf{R}\}$，下面证明它是 g 的子空间. 由于对 $t\in\mathbf{R},X\in V$ 可以保证 $tX\in V$，所以只需要再证明：若 $X,Y\in V$，$X+Y\neq0$，则 $X+Y\in V$.

先给出下面的引理.

引理 2.5.16　在$\mathfrak{g}$上选取一个内积，设 $0\neq X_n\in\mathfrak{g}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$，且$\exp(X_n)\in H$. 若 $X_n/|X_n|$ 收敛到 X，则 $X\in V$.

证明　不难看出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{t}{|X_n|}X_n=tX$，选取整数 m_n，使得 $m_n|X_n|$ 收敛到 t，于是 $\exp(m_nX_n)$ 收敛到 $\exp(tX)$. 由 H 闭和 $\exp(m_nX_n)=\exp(X_n)^{m_n}\in H$，可得 $\exp(tX)\in H$，$\forall t$，即 $X\in V$.

下面继续命题 2.5.15 的证明.

对 $X,Y\in V$，设 $\exp(tX)\exp(tY)=\exp(Z(t))$，根据定理 2.4.14 的(1)式，$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{Z(t)}{t}=X+Y$. 令 $X_n=Z\left(\dfrac{1}{n}\right)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}X_n/|X_n|\to X+Y/|X+Y|$. 由上面的引理 2.5.16，$X+Y\in V$，因此 V 是$\mathfrak{g}$的线性子空间.

取 V 在$\mathfrak{g}$中的补空间 V'，即 $V\oplus V'=\mathfrak{g}$，则存在$\mathfrak{g}$在原点处的一个开集 W 使得映射 $\phi:W\to G$，$(X,Y)\mapsto\exp(X)\exp(Y)$是解析同胚. 我们断言 $\exp(V)$ 必包含 H 在单位元处的一个开集 U(注意在证明中 H 上的拓扑始终是指子空间拓扑). 假设结论不成立. 此时必存在(X_n,Y_n)，$X_n\in V$，$Y_n\in V'$，且$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=0$，但是 $Y_n\neq0$，使得 $\exp(X_n)\exp(Y_n)\in H$. 由 $\exp(X_n)\in H$，可知 $\exp(Y_n)\in H$. 由于 $Y_n/|Y_n|$ 有界，选取其中的收敛子列，仍记为$Y_n/|Y_n|$. 设 $Y_n/|Y_n|$ 收敛到 Y，则由引理 2.5.16，$Y\in V$，且$|Y|=1$，这给出矛盾. 因为元素 $Y_n/|Y_n|$ 在 V'的单位球上，不可能收敛到 $Y\in V$.

注意到 V 在$\mathfrak{g}$中的嵌入 i 是标准的正则嵌入. 选取 G 在单位元处的第三类局部坐标系$(\phi(W),\phi^{-1})$，则 $\phi^{-1}(\phi(W)\cap H)=W\cap i(V)$，这说明 H 到 G 中的嵌入在单位元处满足正则嵌入的特征. 利用左平移可以说明对 H 中的任意一点正则嵌入的条件都满足，至此证明了 H 是 G 的正则子流形. 于是由微分流形的理论，H 上的解析结构是由 G 上的解析结构诱导出的. G 上的乘法限制到 H 上后使 H 成立正则李子群.

这个证明引自附录中列出的 Adams 的书中，证明异常精巧，希望读者能够仔细体会其中的妙处.

根据 Cartan 引理，对于李群 G 中的闭子群 H，可以断定它是正则李子群，而其上的李群结构也唯一决定了. 以后一旦遇到李群的某个闭子群，则自动假设其上有了给定的李群结构.

这一节建立了李群的同态和李代数的同态之间的联系及李群的连通子群和李代数的子代数之间的一一对应，使得在李群和李代数之间可以更好地实现信息沟通. 这在以后对李群性质的深入研究中非常重要. 比如 Cartan 引理，它的陈述完全没有牵涉到李代数，但它的证明却需要渡过李代数这座桥梁才能得以完成.

习题 2.5

1. 设 $B(n,\mathbf{R})$ 是 $GL(n,\mathbf{R})$ 中的上三角矩阵构成的李子群,求它的李代数.

2. 设 H_n 是 $gl(n+2,\mathbf{R})$ 中的形如 $\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵构成的子空间,证明它是李代数,称为 Heisenberg 代数,计算它对应的 $GL(n+2,\mathbf{R})$ 的李子群.

3. 计算环面 T^n 到 S^1 的所有解析同态.

4. 证明 Cartan 引理的逆命题,即若 H 是李群 G 的正则李子群,则 H 也是 G 的闭子群.

§ 2.6 线性李群和线性李代数

在进一步讨论之前，我们介绍常见的一些重要的李群和李代数的例子，首先给出下面定义.

定义 2.6.1 一般线性群 $GL(n,\mathbf{R})$（或 $GL(n,\mathbf{C})$）的李子群称为线性李群.

一般线性李代数 $gl(n,\mathbf{R})$（或 $gl(n,\mathbf{C})$）的子代数称为线性李代数.

前面将一般线性群 $GL(n,\mathbf{R})$（或 $GL(n,\mathbf{C})$）的李代数直接等同于一般线性李代数 $gl(n,\mathbf{R})$（或 $gl(n,\mathbf{C})$），从而任意线性李群 G 的李代数可以等同于一般线性李代数的子代数. 为了决定线性李群 G 的李代数，只要求出它在单位元处的切空间对应的 $gl(n,\mathbf{R})$（或 $gl(n,\mathbf{C})$）的子空间，李括号则由一般线性李代数的李括号限制而来.

在本节后面的讨论中，出现的群都是一般线性群的闭子群.

令 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$，下面 $\mathbf{K}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 都写成列向量，如 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，线性变换 X 作用在 $\boldsymbol{u}$ 上记为 $X\boldsymbol{u}=X(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$，其中 T 表示转置.

(1)特殊线性群为 $SL(n,\mathbf{K})=\{A\in GL(n,\mathbf{K})\mid \det A=1\}$，相应的有特殊线性李代数 $sl(n,\mathbf{K})=\{X\in gl(n,K)\mid \mathrm{Tr}X=0\}$.

(2)在 $\mathbf{K}^n$ 上给定对称双线性型$(,)$，

对 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{K}^n$，

定义$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=u_1v_1+u_2v_2+\cdots+u_nv_n$，则

记 $O(n,\mathbf{K})=\{A\in GL(n,\mathbf{K})\mid (A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{K}^n\}$，称为正交群. $SO(n,\mathbf{K})=O(n,\mathbf{K})\cap SL(n,\mathbf{K})$称为特殊正交群.

若 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$，$O(n,\mathbf{R})$也记为 $O(n)$. $SO(n,\mathbf{R})$也记为 $SO(n)$. 它们的李代数分别记为 $o(n)$，$so(n)$.

下面证明

命题 2.6.2 李群 $O(n,\mathbf{K})$的李代数是

$$o(n,\mathbf{K})=\{X\in gl(n,\mathbf{K})\mid (X\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},X\boldsymbol{v})=0,\ \forall\,\boldsymbol{u},v\in\mathbf{K}^n\}.$$

证明 根据命题 2.5.6，$X\in gl(n,\mathbf{K})$在 $O(n,\mathbf{K})$的李代数中，当且仅当对任意 t，$\exp(tX)\in O(n,\mathbf{K})$. 即对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$，

$$(\exp(tX)\boldsymbol{u},\exp(tX)\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

将上式两边同时对 t 求微分，令 $t=0$，得到对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$，

$$(X\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},X\boldsymbol{v})=0.$$

反过来,若对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{K}^n$,$(X\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},X\boldsymbol{v})=0$,去证明

$$(\exp(tX)\boldsymbol{u},\exp(tX)\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

由$(X\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},X\boldsymbol{v})=0$,类似于二项式定理的证明,可以得到对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 及 $n>0$,$\displaystyle\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}(X^i\boldsymbol{u},X^j\boldsymbol{v})=0$. 于是

$$\begin{aligned}&(\exp(tX)\boldsymbol{u},\exp(tX)\boldsymbol{v})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n}\frac{1}{i!j!}(t^iX^i\boldsymbol{u},t^jX^j\boldsymbol{v})\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{i+j=n}\binom{n}{i}(X^i\boldsymbol{u},X^j\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

这说明 X 在 $\mathrm{O}(n,\mathbf{K})$的李代数中当且仅当对任意 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$,$(X\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},X\boldsymbol{v})=0$,于是命题得证.

在 $\mathbf{K}^n$ 的标准基底下,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$,$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$,则容易看出

$\mathrm{O}(n,\mathbf{K})=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n\}$.

$\mathrm{SO}(n,\mathbf{K})=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n,\det\boldsymbol{A}=1\}$.

以后将 $\mathrm{O}(n,\mathbf{K})$和 $\mathrm{SO}(n,\mathbf{K})$的李代数记为 $\mathrm{o}(n,\mathbf{K})$和 $\mathrm{so}(n,\mathbf{K})$,称为正交李代数和特殊正交李代数,则

$\mathrm{o}(n,\mathbf{K})=\{X\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

$\mathrm{so}(n,\mathbf{K})=\{X\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\mathrm{Tr}\boldsymbol{X}=0\}$.

对后面的各种情形,不再推导相应的李群和李代数的关系,留给读者完成.

(3)在 $\mathbf{C}^n$ 上,有标准的 Hermite 内积,对 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\bar{u}_1v_1+\cdots+\bar{u}_nv_n$.

定义酉群 $\boldsymbol{U}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})\mid(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{C}^n\}$. 则

$\boldsymbol{U}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n\}$,它的李代数为酉李代数 $u(n)=\{X\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

特殊酉群 $\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$,

特殊酉李代数 $\mathrm{su}(n)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{sl}(n,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

(4)在 $\mathbf{K}^{2n}$ 上,有标准的辛形式,对 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{2n})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_{2n})^{\mathrm{T}}$,$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=u_1v_{n+1}+u_2v_{n+2}+\cdots+u_nv_{2n}-u_{n+1}v_1-u_{n+2}v_2-\cdots-u_{2n}v_n$.

辛群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbf{K})=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbf{K})\mid(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\forall\,u,v\in\mathbf{K}^n\}$.

考虑到$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{v}$,其中 $\boldsymbol{J}_n=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_n\\-\boldsymbol{I}_n&0\end{pmatrix}$,有

$\mathrm{Sp}(n,\mathbf{K})=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n\}$，相应的辛李代数 $\mathrm{sp}(n,\mathbf{K})=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{gl}(2n,\mathbf{K})\mid\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n+\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

(5)在 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上，有 (p,q) 型的双线性型，满足对

$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{p+q})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_{p+q})^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-u_1v_1-u_2v_2-\cdots-u_pv_p+u_{p+1}v_{p+1}+\cdots+u_{p+q}v_{p+q}$.

洛伦兹群 $\mathrm{O}(p,q)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(p+q,\mathbf{R})\mid(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{p+q}\}$.

由于 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{I}_{p,q}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}_p & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_q\end{pmatrix}$，有

$\mathrm{O}(p,q)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(p+q,\mathbf{R})\mid\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{p,q}\}$，洛伦兹李代数 $\mathrm{o}(p,q)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{gl}(p+q,\mathbf{R})\mid\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}+\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{X}=0\}$.

显然 $\mathrm{O}(n,0)\cong\mathrm{O}(0,n)\cong\mathrm{O}(n)$. 特别的当 $p=1,q=3$ 时，$\mathrm{O}(1,3)$ 是狭义相对论中的经典的洛伦兹群.

(6)和洛伦兹群完全类似的，可以考虑 $\mathbf{C}^{p+q}$ 上，(p,q) 型的共轭双线性型，满足对 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{p+q})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,u_{p+q})^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=-\bar{u}_1v_1-\bar{u}_2v_2-\cdots-\bar{u}_pv_p+\bar{u}_{p+1}v_{p+1}+\cdots+\bar{u}_{p+q}v_{p+q}$.

(p,q) 型酉群

$$\mathrm{U}(p,q)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(p+q,\mathbf{C})\mid(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{C}^{p+q}\}.$$

类似的得到

$$\mathrm{U}(p,q)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(p+q,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{p,q}\}\text{，}(p,q)\text{型酉李代数}$$

$$u(p,q)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{gl}(p+q,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}+\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}.$$

特殊 (p,q) 型酉群 $\mathrm{SU}(p,q)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{SL}(p+q,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{A}=I_{p,q}\}$，特殊 (p,q) 型酉李代数 $\mathrm{su}(p,q)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{sl}(p+q,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{p,q}+\boldsymbol{I}_{p,q}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

显然 $\mathrm{SU}(p,q)=\mathrm{U}(p,q)\cap\mathrm{SL}(p+q,\mathbf{C})$.

(7)最后介绍在后面要用到的重要的一类李群 $\mathrm{Sp}(n)$.

令 $\mathbf{H}^n$ 为 n 维的四元数向量空间，在这里加法是普通的向量加法，数乘为 $\boldsymbol{u}\lambda=(u_1\lambda,u_2\lambda,\cdots,u_n\lambda)^{\mathrm{T}}$，这里 $\lambda\in\mathbf{H},\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{H}^n$. 在 $\mathbf{H}^n$ 上定义 Hamilton 内积 $(\,,\,)$，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{u}_iv_i$，$u,v\in\mathbf{H}^n$. 定义 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{H})$ 为所有的四元数矩阵构成的空间. 注意在这里为了保证线性性，数乘是在右边做的，这样才能保证线性 $\boldsymbol{A}(u\lambda)=(\boldsymbol{A}u)\lambda$. 定义 $\mathrm{Sp}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{H})\mid(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbf{H}^n\}$，则 $\mathrm{Sp}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{H})\mid\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n\}$. $\mathrm{Sp}(n)$ 的李代数为

$$\mathrm{sp}(n)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{H})\mid\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}.$$

为了更好地理解这一李群，将 $\mathbf{H}^n$ 等同于 $\mathbf{C}^{2n}$，具体的等同映射为 T: $\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{H}^n$，元素 $(a,b)\in\mathbf{C}^{2n}=\mathbf{C}^n\oplus\mathbf{C}^n$ 等同于 $a+jb$. 注意这里等同 T 是复线性的，这是因为对于复数 λ, $T(\lambda(a,b))=\lambda a+j\lambda b=a\lambda+jb\lambda=T(a,b)\lambda$，此时 Hamilton 内积 $\mathbf{H}^n\times\mathbf{H}^n\to\mathbf{H}$ 可以看成映射 $\mathbf{C}^{2n}\times\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^2$，因此可以看成 $\mathbf{C}^{2n}$ 上的两个复值的双线性函数. 令 $x=(a,b)$, $y=(c,d)\in\mathbf{C}^{2n}$，则

$$
\begin{aligned}
(Tx,Ty) &= \sum_{i=1}^{n}\overline{(a_i+jb_i)}(c_i+jd_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_i-jb_i)(c_i+jd_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_ic_i-jb_ijd_i+\bar{a}_ijd_i-jb_ic_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(\bar{a}_ic_i+b_id_i)+\sum_{i=1}^{n}j(\bar{a}_id_i-b_ic_i).
\end{aligned}
$$

上面的计算用到性质 $\overline{jz}=-jz$, $jz=\bar{z}j$, $\forall\, z\in\mathbf{C}$.

将上述表达式与 $\mathbf{C}^{2n}$ 上的标准的 Hermite 内积和标准辛形式比较，可以看到 Hamilton 内积的两部分恰好与后者等同起来.

这相当于断言，若把 $\mathrm{Sp}(n)$ 中元素 A 看做 $\mathbf{C}^{2n}$ 上的复线性变换，则 A 恰好保持 Hermite 内积和复辛形式. 因此 $\mathrm{Sp}(n)\cong\mathrm{Sp}(n,\mathbf{C})\cap\mathrm{U}(2n)$. 具体的有

$\mathrm{Sp}(n)=\{\boldsymbol{A}\in\mathrm{GL}(2n,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_{2n},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}_n\}$. 与前面类似的计算，可知它的李代数 $\mathrm{sp}(n)=\{\boldsymbol{X}\in\mathrm{gl}(2n,\mathbf{C})\mid\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_n+\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}\}$.

设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \boldsymbol{X}_{21} & \boldsymbol{X}_{22}\end{pmatrix}\in\mathrm{sp}(n)$, $\boldsymbol{X}_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant 2$ 为 $n\times n$ 的复矩阵，直接计算可知：

$$
\begin{gathered}
\overline{\boldsymbol{X}}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{0},\quad \overline{\boldsymbol{X}}_{22}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{X}_{12}+\overline{\boldsymbol{X}}_{21}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{X}_{12}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}_{12},\quad \overline{\boldsymbol{X}}_{21}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}_{21},\quad \boldsymbol{X}_{11}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{0}.
\end{gathered}
$$

因此：$\boldsymbol{X}_{11}$ 是反 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{X}_{12}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{X}_{21}=-\overline{\boldsymbol{X}}_{12}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{X}_{22}=-\boldsymbol{X}_{11}^{\mathrm{T}}$，直接计算可知

$$\dim\,\mathrm{sp}(n)=n^2+n(n+1)=2n^2+n.$$

习题 2.6

1. 证明：$\mathrm{Sp}(n,\mathbf{R})\cap \mathrm{SO}(2n)\cong \mathrm{U}(n)$.

2. 通过考察连续同态 $\det: \mathrm{O}(p,q)\to\mathbf{R}$，说明 $\mathrm{O}(p,q)$不连通.

3. 计算本节所有提到的李群和李代数的维数.

4. 设 V 为实(或复)向量空间，证明：李群同态 $\det: \mathrm{GL}(V)\to\mathbf{R}^*$ (或 $\mathbf{C}^*$)诱导的李代数同态为 $\mathrm{Tr}: \mathrm{gl}(V)\to\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)，即有

$$\det\exp(X)=\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}(X)},\ \forall X\in \mathrm{gl}(V).$$

5. 证明：$\mathrm{O}(n)$，$\mathrm{U}(n)$，$\mathrm{Sp}(n)$是紧致李群.

6. 设 A 是实数域(或复数域)上的结合代数，设 G 是 A 中可逆元素构成的李群，证明：G 在单位元处的切空间可以等同于 A 的某个子空间g，且g上的李括号由 A 中的交换子给出，即若 $u,v\in g$，$[u,v]=uv-vu$(由此可以无需计算直接得到 $\mathrm{GL}(V)$的李代数).

§ 2.7 商空间和商群

设 H 是李群 G 的闭子群，则商空间 G/H 称为李群 G 的齐性空间，本节主要证明下面的重要定理.

定理 2.7.1 李群 G 关于闭子群 H 的商空间 G/H 上有自然的解析结构，使它成为解析流形，使自然的商映射 $\pi: G\to G/H$ 成为解析映射，且使得群作用 $\theta: G\times G/H\to G/H, (a,bH)\mapsto abH$ 是解析的群作用.

证明 因为过程比较复杂，所以我们一步一步来完成证明.

第一步：设 G 和 H 的李代数是$\mathfrak{g},\mathfrak{h}$，选取 $\mathfrak{h}$ 在$\mathfrak{g}$中的补空间 $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$. 在 $\mathfrak{k},\mathfrak{h}$ 中选取原点处的开集 W,V，使得 $\exp(W)^{-1}\exp(W)\cap H\subset\exp(V)$，且映射 $\phi: W\times V\to G, (X,Y)\mapsto\exp(X)\exp(Y)$ 为到它的像的解析同胚. $\phi(W\times V)$为 G 中的开集（注意这里能够选取到满足条件的 W 是因为根据 Cartan 引理，H 是正则李子群，所以 $\exp(V)$包含 H 中单位元处的某个开集，必要时只要把 W 选得小一些就可以）.

后面在 G 的单位元附近使用 ϕ^{-1}给出的第三类局部坐标，在上面的条件下，有

引理 2.7.2 映射 $l: W\times H\to\exp(W)H, (X,a)\mapsto\exp(X)a$ 是解析的一一映射.

证明 设对于 $X,X'\in W, a,a'\in H$，$\exp(X)a=\exp(X')a'$，则 $a'a^{-1}=\exp(X')^{-1}\exp(X)$. 这说明 $a'a^{-1}$ 在集合 $\exp(W)^{-1}\exp(W)\cap H$ 中，因此 $a'a^{-1}$在 $\exp(V)$ 中，于是存在 $Y\in V$，$a'a^{-1}=\exp(Y)$，$\exp(X)=\exp(X')\exp(Y)$，$X,X'\in W, Y\in V$. 这表明 $\phi(X,0)=\phi(X',Y)$，由 ϕ 为解析同胚，知 $X=X', Y=0$，这等价于 $X=X', a=a'$. 于是映射 l 是解析的单映射，而根据定义它也是满射，于是引理得证.

第二步：定义李群 H 在解析流形 $W\times H$ 上的右作用$(X,a)b\mapsto(X,ab)$，及 H 在 $\exp(W)H$ 上的右作用$(\exp(X)a)b=\exp(X)(ab)$，于是 l 是在上面的右作用下的 H 等变的映射.

因为 l 的切映射在$(0,e)$处显然是同构，所以在其附近也都是同构，于是存在 W 中的开子集 W'，使得 l 的切映射在 $W'\times H$ 的子集 $W'\times\{e\}$中的点处是同构. 利用 l 是 H 等变的，可以说明 l 的切映射在 $W'\times H$ 中的任意点处是同构. 根据反函数定理，$l': W'\times H\to\exp(W')H$ 为解析同胚，必要时选取 W 为更小的开集 W'，可以保证映射 l 为解析同胚. W'不妨仍然记为 W，于是以后可以假定 l 为解析同胚.

第三步：根据前面两步，还可以证明

引理 2.7.3 在 G/H 上赋予商拓扑后，映射 $\psi: W \to G/H, X \mapsto \exp(X)H$ 是到它的像空间的同胚映射，且 $\psi(W)=\exp(W)H/H$ 为 G/H 中的开集.

证明 稍微观察一下就可以看出 ψ 到它的像空间的映射，就是等变同胚映射 l 在轨道空间上诱导出的映射，由 l 是同胚，马上得到 $\psi: W \to \psi(W)$, $X \mapsto \exp(X)H$ 是到它的像空间的同胚映射.

要证明 $\psi(W)$ 是 G/H 中的开集，只需要验证 $\pi^{-1}(\psi(W))$ 为开集. 注意

$$\pi^{-1}(\psi(W))=\exp(W)H=\exp(W)\exp(V)H.$$

由于 $\exp(W)\exp(V)$ 是 G 中开集，可知 $\exp(W)H$ 为 G 中开集，这说明 $\psi(W)=\exp(W)H/H$ 为 G/H 中的开集，记为 U.

记同胚映射 $\psi: W \to U, X \mapsto \exp(X)H$ 的逆映射为 φ，以后就用 (U,φ) 来做 G/H 在 eH 处的局部坐标系.

第四步：利用 G 在 G/H 上的左平移作用 θ，对于任意 $a \in G$，有 aH 附近的局部坐标系 (aU, φ_a)，这里 $\varphi_a=\varphi \circ L_a^{-1}$. 下面证明 $\{(aU,\varphi_a) \mid a \in G\}$ 给出 G/H上的一个解析结构.

设一点 $bH \in aU \cap a'U$ 在两个局部坐标系 (aU,φ_a) 和 $(a'U,\varphi_{a'})$ 下的坐标记为 $X, X' \in k$，则 $a\exp(X)H=a'\exp(X')H$，于是存在 $c \in H$，

$$a'^{-1}a\exp(X)=\exp(X')c.$$

坐标变换映射可以分解为以下映射的合成：

$$X \xrightarrow{L_{a'^{-1}a}\circ\exp} a'^{-1}a\exp(X)=\exp(X')c \xrightarrow{l^{-1}} (\exp(X'),c) \xrightarrow{p_1} \exp X' \xrightarrow{\exp^{-1}} X'.$$

$$W \xrightarrow{L_{a'^{-1}a}\circ\exp} a'^{-1}a\exp(W) \subset \exp(W)H \xrightarrow{l^{-1}} \exp(W)\times H \xrightarrow{p_1} \exp W \xrightarrow{\exp^{-1}} W.$$

映射 p_1 是到第一个因子的投射，且每一步的映射都解析映射，它们的复合恰为坐标变换映射，因此坐标变换映射解析. 这给出 G/H 上的解析结构. 在此定义下，显然 G/H 上的群作用给出的左平移 $L_a^{G/H}: G/H \to G/H, bH \mapsto abH$ 是解析同胚.

第五步：证明 $\pi: G \to G/H$ 解析，我们只证明映射在单位元附近解析，在 G 上选取第三类局部坐标系 $(\phi(W\times V), \phi^{-1})$，$G/H$ 上选取局部坐标系 (U, ψ^{-1})，则下面交换图 2-4 左侧给出局部坐标系下 π 的表达式.

$$\begin{tikzcd}
W\times V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p_1"'] & \exp(W)\exp(V) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[d, "\pi"] \\
W \arrow[r, "\psi"] & \exp(W)H/H \arrow[r, "i"] & G/H
\end{tikzcd}$$

图 2-4

这表明π在$\exp(W)\exp(V)$上解析，对任意一点$a\in G$，利用G上的左平移L_a和G/H上的左平移$L_a^{G/H}$都解析可以得到$\pi:G\to G/H$在任意$a\in G$处解析.

第六步：最后验证G在G/H上的自然的左作用$\theta:G\times G/H\to G/H$是解析的，实际上只需证明它在$(e,H)$点处解析.

令$s=\exp\circ\varphi$，则根据前面的讨论，s是商映射π在开子集U上的一个解析的局部截面，即映射$s:U\to G$，满足$\pi\circ s=\mathrm{id}$.

θ限制在$G\times U$上是解析的可以从交换图 2-5 看出，其中m为乘法.θ在$G\times U$上的解析性不难推广到整个$G\times G/H$上.

注 2.7.4 实际上还可以进一步证明G/H上的解析结构，若使得商映射$\pi:G\to G/H$是解析映射，且自然的作用$\theta:G\times G/H\to G/H,(a,bH)\mapsto abH$是解析的群作用，则它是唯一的.

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[d, "m"'] & G\times U \arrow[l, "\mathrm{id}\times s"'] \arrow[d, "\theta"] \\
G \arrow[r, "\pi"] & G/H
\end{tikzcd}$$

图 2-5

$$\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[d, "m"'] & U\times U \arrow[l, "s\times s"'] \arrow[d, "m_{G/H}"] \\
G \arrow[r, "\pi"] & G/H
\end{tikzcd}$$

图 2-6

特别的还有

定理 2.7.5 若H是李群G的闭正规子群，则商群G/H是李群，称为G关于H的商群，且G/H的李代数是$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

证明 先证明G/H为李群，设m和$m_{G/H}$分别为G和G/H上的乘法映射. 利用G/H上的开集U上的局部解析截面s，根据交换图 2-6，可以证明乘法$m_{G/H}:U\times U\to G/H$解析. 由此不难得出G/H的乘法解析，从而G/H为李群.

因为$\pi:G\to G/H$为解析同态，所以G的李代数$\mathfrak{g}$到G/H的李代数有同态$\mathrm{d}\pi$，显然$\mathfrak{h}\subset\ker\mathrm{d}\pi$，比较维数，知$\mathfrak{h}=\ker\mathrm{d}\pi$，即$G/H$的李代数同构于$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

利用前面讨论的结果，容易证明下面的定理，细节留给读者去验证.

定理 2.7.6 （同态基本定理）设$f:G_1\to G_2$是李群的满同态，则$H=\ker f$是G_1的闭正规子群，且$G_1/H\cong G_2$是李群的同构.

习题 2.7

1. 设 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$，$H$ 是闭子群 $\mathrm{O}(n)$，则 $\mathrm{O}(n)$的李代数是 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$中的所有反对称矩阵构成子代数，选取互补的由对称矩阵构成的子空间，记为 k，则与本节中类似的可以定义映射 $l:k\times\mathrm{O}(n)\to\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$，$(X,A)\mapsto\exp(X)A$，证明：$l$ 是解析同胚. 由此可得：作为解析流形 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$解析同胚于 $\mathrm{O}(n)$与欧氏空间的乘积. 对于 $G=\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$和 $\mathrm{U}(n)$也有类似的结果.

§ 2.8 覆叠群

前面知道若两个李群的李代数同构,则两个李群未必同构,但是它们局部同构,即可以分别选取它们在单位元处的开邻域,使得这两个开邻域作为局部李群是同构的. 一个进一步的问题是给定一个李代数,决定所有以这个李代数为其李代数的局部同构的李群. 这一节将借助覆叠群的概念进行讨论.

为了方便,本节假定所讨论的李群都是连通的,首先给出下面的定义.

定义 2.8.1 设 f 是连通李群 G_1 到 G_2 的满同态,若 f 是局部同构,则称 f 是李群 G_1 到 G_2 的覆叠同态,也称在 f 下 G_1 是 G_2 的覆叠群,简称 G_1 是 G_2 的覆叠群. 对覆叠同态 f,$\Gamma=\ker f$ 称为 f 的 Poincaré 群,其阶称为覆叠的层数.

由 G_2 的连通性,满射的条件也可以去掉,从上面的定义不难看出覆叠同态是开映射,且若 G_1 连通,则 $\Gamma=\ker f$ 是 G_1 的中心 $C(G_1)$ 中的离散子群.

例 2.8.2 (1)李群同态 $p:\mathrm{SU}(n)\times S^1\to\mathrm{U}(n),(A,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A$ 是满射,可以直接验证 p 为覆叠同态,且 $\ker p\cong\mathbf{Z}_n$,

(2)设 G 为李群,Γ 为 G 的离散正规子群,则 $p:G\to G/\Gamma$ 是覆叠同态. 特别的 $p:\mathbf{R}\to S^1,t\mapsto\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}$ 是覆叠同态. $\mathbf{R}^n$ 是 T^n 和 $\mathbf{R}^k\times T^{n-k}$ 的覆叠群.

关于覆叠同态有下面的简单事实.

命题 2.8.3 设 $f:G_1\to G_2$ 是李群的覆叠同态,则 $G_1/\ker f\cong G_2$.

证明 因为 $\ker f$ 为 G_1 的闭子群,所以 $G_1/\ker f$ 和 G_2 在拓扑群意义下同构,因此也是李群同构.

命题 2.8.4 设 $f:G_1\to G_2$ 是连通李群的同态,则下面条件等价:

(1)f 是覆叠同态.

(2)f 是局部同构.

(3)$\mathrm{d}f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 是同构.

(4)G_1 和 G_2 维数相同,且 f 是满射.

(5)f 为满射,且 $\Gamma=\ker f$ 是 G_1 的离散子群.

证明 (1)(2)(3)等价是显然的. 根据定义,(1)⇒(4)也显然.

(4)⇒(1),考虑到交换图 2-7 及指数映射在单位元附近为局部同胚,要说

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\mathrm{d}f"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\ G_1 \arrow[r, "f"] & G_2 \end{tikzcd}$$

图 2-7

明 f 在单位元附近为局部同胚，只需要说明 $\mathrm{d}f$ 为同构，而 $\mathrm{d}f$ 是维数相同的李代数之间的线性映射，要说明它是同构只需说明它是满射. 若 $\mathrm{d}f$ 不是满射，则存在$\mathfrak{g}_2$的真子代数 $\mathfrak{h}_2$，使得 $\mathrm{d}f(\mathfrak{g}_1)\subseteq\mathfrak{h}_2$，设 G_2 中对应于子代数 $\mathfrak{h}_2$ 的连通真子群为 H_2. $\mathrm{d}f(\mathfrak{g}_1)\subseteq\mathfrak{h}_2$ 意味着存在 G_1 在单位元 e_1 处的某个开邻域 U，f 将 U 映入 H_2，从而$f(G_1)\subseteq H_2$，这与 f 为满射矛盾.

(1)⇒(5)若 f 是局部同构，则存在 G_1 中包含单位元 e_1 的开集 U，$f|_U$ 是解析同胚，可知 $U\cap\Gamma=\{e_1\}$. 对于 U，存在包含单位元 e_1 的开集 V，$VV^{-1}\subset U$. 我们证明对任意 $r\neq r'\in\Gamma$，$(rV)\cap(r'V)=\varnothing$. 否则，设存在 $v,v'\in V$，$rv=r'v'$，于是 $rr'^{-1}=v'v^{-1}\in U\cap\Gamma$，因此 $rr'^{-1}=e_1$，即 $r=r'$. 这说明 Γ 是离散子群. 又利用 G_2 的连通性可知 f 是满射.

(5)⇒(1)，由 Γ 离散，可知 $\ker\mathrm{d}f=0$，即 $\mathrm{d}f$ 单. 由 f 满，可知 $\mathrm{d}f$ 满，即 $\mathrm{d}f$ 是同构.

定义 2.8.5　如果连通李群 G 的任意覆叠同态 $p:G'\to G$ 都是李群的同构映射，那么称 G 为单连通李群. 换句话说，G 是单连通的当且仅当它的任意覆叠群都与自己同构.

连通李群 G 的单连通覆叠群称为它的万有覆叠群.

在代数拓扑中李群是单连通可以利用它的基本群平凡来定义，这和此处的定义是等价的，我们不加证明的给出下面定理，它是代数拓扑中的基本结果.

定理 2.8.6　任意连通李群 G 都存在连通的万有覆叠群 $\widetilde{G}$.

注 2.8.7　局部同构的李群，其中一个不见得能成为另一个的覆叠群. 读者容易找到简单的反例.

关于单连通李群有下面的重要定理.

定理 2.8.8　设$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$是连通李群 G_1，G_2 的李代数，若 G_1 是单连通的，则对任意李代数同态 $\phi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$，存在唯一的李群的同态 $f:G_1\to G_2$，使得 $\phi=\mathrm{d}f$，且下面的交换图 2-8.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}_1 \arrow[r, "\mathrm{d}f"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{g}_2 \arrow[d, "\exp"] \\
G_1 \arrow[r, "f"] & G_2
\end{tikzcd}
$$

图 2-8

证明 读者可以检查定理 2.5.13 的证明,完全照搬过来.只是注意在交换图 2-9

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{g}_1 & \xleftarrow{p_1} & \mathfrak{h} & \xrightarrow{i} & \mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathfrak{g}_2 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\exp} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\exp} \\ G_1 & \xleftarrow{p_1} & H & \xrightarrow{i} & G_1\times G_2 & \xrightarrow{p_1} & G_2 \end{array}$$

图 2-9

中 $p_1:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}_1,(X,\phi(X))\mapsto X$ 为李代数同构,则映射 $p_1:H\to G_1$ 是覆叠同态,而由于 G_1 是单连通的,p_1 为同构,令 f 为复合映射

$$G_1\xrightarrow{p_1^{-1}}H\xrightarrow{i}G_1\times G_2\xrightarrow{p_2}G_2$$

则它满足定理的要求.唯一性根据命题 2.5.5 显然成立.

下面给出李群 G 上的覆叠同态之间的映射的概念.

定义 2.8.9 设 $f_1:G_1\to G$ 和 $f_2:G_2\to G$ 为到 G 的两个覆叠同态,若存在李群同态 $h:G_1\to G_2$,使得 $f_1=f_2\circ h$,则 h 称为覆叠同态 f_1 到 f_2 的映射.

若 h 是李群同构,则称 f_1 和 f_2 是同构的覆叠同态.

命题 2.8.10 设连通李群 G 有两个单连通覆叠群 $\widetilde{G},\widetilde{G}'$,则 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{G}'$ 作为 G 的覆叠群是同构的.

证明 设 $f:\widetilde{G}\to G,f':\widetilde{G}'\to G$ 是 G 的两个单连通覆叠同态,$G,\widetilde{G},\widetilde{G}'$ 的李代数记为 $\mathfrak{g},\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mathfrak{g}}'$,则 $\mathrm{d}f:\tilde{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{g},\mathrm{d}f':\tilde{\mathfrak{g}}'\to\mathfrak{g}$ 都是同构,于是由定理 2.8.8,存在李群同态 $k:\widetilde{G}\to\widetilde{G}'$,使得 $\mathrm{d}k=\mathrm{d}f'^{-1}\circ\mathrm{d}f$.同样地存在 $l:\widetilde{G}'\to\widetilde{G}$,使得 $\mathrm{d}l=\mathrm{d}f^{-1}\circ\mathrm{d}f'$.显然 $\mathrm{d}(l\circ k)=\mathrm{d}(\mathrm{id})$,由命题 2.5.5,可知 $l\circ k=\mathrm{id}$.同理 $k\circ l=\mathrm{id}$,这表明 k,l 是 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{G}'$ 之间的同构.又显然由 $\mathrm{d}(f'\circ k)=\mathrm{d}f'\circ\mathrm{d}k=\mathrm{d}f$,可知 $f'\circ k=f$.这说明 k 是覆叠同态 f 和 f' 之间的同构.于是命题得证.

定理 2.8.8 结合前面的定理 2.5.4 和命题 2.5.5,可以说明单连通的李群的范畴和李代数的范畴是等价的.后面我们利用这一结论将李群的分类问题转化为李代数的分类问题.

对于李代数为 $\mathfrak{g}$ 的李群 G 的分类,可以分几步来讨论:

(1)首先找到以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的单连通李群 $\widetilde{G}$,在同构意义下它是唯一的.

(2)若 G 连通,则根据定理 2.8.8,存在覆叠映射 $\pi:\widetilde{G}\to G$,于是 $G\cong\widetilde{G}/\ker\pi$,其中 $\ker\pi\subset C(\widetilde{G})$ 为离散子群.

(3)若 G 不连通,则考虑它的包含单位元连通分支 G_0,则 G/G_0 为离散群.

可以看出对于以$\mathfrak{g}$为李代数的连通李群的分类问题完全归结为 $C(\widetilde{G})$中的离散子群的分类.

例 2.8.11　具有李代数 $\mathrm{u}(n)$的单连通李群为 $\widetilde{G}=\mathrm{SU}(n)\times\mathbf{R}$,所有具有李代数 $\mathrm{u}(n)$的连通李群 G 都可以写成 $\mathrm{SU}(n)\times\mathbf{R}/\Gamma$,其中 Γ 是 $C(\widetilde{G})\cong\mathbf{Z}_n\times\mathbf{R}$ 的离散子群.

利用覆叠群的概念可以给出连通交换李群的分类结果.

定理 2.8.12　设 G 是 n 维连通交换李群,则存在非负整数 k,G 同构于

$$T^k\times\mathbf{R}^{n-k}.$$

证明　考虑 G 上的指数映射 $\exp:\mathfrak{g}\to G$,由第 2 章第 4 节的习题 2,可知 $\exp(X+Y)=\exp(X)\exp(Y)$. 这表明若将向量空间$\mathfrak{g}$看成加法李群,则映射 $\exp$ 为同态. 由 $\exp$ 为局部同构,可知它是覆叠同态,于是 $G\cong\mathfrak{g}/\Gamma$,这里 $\Gamma=\ker\exp$. Γ 的结构可以由下面熟知的引理给出.

引理 2.8.13　设 V 为 n 维实向量空间,Γ 为 V 中的离散加法子群,则存在线性无关的向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_k,k\leqslant n$ 使得 Γ 是由 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_k$ 生成的 V 的子群.

于是在$\mathfrak{g}$中存在线性无关的向量 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_k,k\leqslant n$,使得

$$\Gamma=\mathbf{Z}\boldsymbol{X}_1+\mathbf{Z}\boldsymbol{X}_2+\cdots+\mathbf{Z}\boldsymbol{X}_k.$$

令 $\mathfrak{h}$ 为$\mathfrak{g}$中由 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_k$ 张成的子空间

$$\mathbf{R}\boldsymbol{X}_1\oplus\mathbf{R}\boldsymbol{X}_2\oplus\cdots\oplus\mathbf{R}\boldsymbol{X}_k,$$

$\mathfrak{h}'$为它的一个补空间,则

$$G\cong\mathfrak{g}/\Gamma\cong(\mathfrak{h}/\Gamma)\times\mathfrak{h}'\cong T^k\times\mathbf{R}^{n-k}.$$

由此,容易得到如下的推论

推论 2.8.14　设 G 是连通的紧致交换李群,则 G 同构于 T^n,这里 n 为 G 的维数.

命题 2.8.15　设 G 是连通且单连通的李群,则 G 的连通正规李子群必为闭子群.

证明　设 H 是 G 的连通正规李子群,$\mathfrak{h},\mathfrak{g}$ 分别为它们的李代数,则 $\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$的理想,从而$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为李代数. 令 G_1 为以$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 为李代数的李群,则对同态 $\pi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$,由 G 单连通,存在同态 $\phi:G\to G_1$. 易知 H 是 $\phi^{-1}(e_1)$的单位元分支,因此 H 是闭子群.

习题 2.8

1. 利用 SU(2)在 $\mathbf{C}^2$ 上的自然作用,证明:$SU(2)\cong S^3$,因此它是单连通李群.

2. 证明:不存在李群 SO(3)到李群 S^3 的非平凡解析同态.

3. 设 G 是李群,它的李代数同构于 so(n),试确定 G 可能是哪些李群.

4. 设 $p:G_1\to G_2$ 是连通拓扑群的满同态,且 $\ker f=\Gamma$ 是 G_1 的离散子群,若 G_2 是李群,则 G_1 上有唯一的李群结构,使得 p 为李群的覆叠同态.

5. 证明:连通李群的同态 f 是满射当且仅当 $\mathrm{d}f$ 是满射. 并讨论对单射的情形结果如何.

6. 设 G_1,G_2 是连通李群,它们的李代数为$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\pi:\widetilde{G}_1\to G_1$ 是 G_1 的万有覆叠同态,令 $\Gamma=\ker\pi$,则对李代数的同态 $\phi:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$,存在唯一的李群同态$\widetilde{f}:\widetilde{G}_1\to G_2$. 证明:存在李群同态 $f:G_1\to G_2$,使得 $\mathrm{d}f=\phi$,当且仅当 $\Gamma\subset\ker\widetilde{f}$.

7. 设 G_1,G_2 为连通李群,$p_1:\widetilde{G}_1\to G_1,p_2:\widetilde{G}_2\to G_2$ 是它们的万有覆叠同态,设 $\Gamma_1=\ker p_1,\Gamma_2=\ker p_2$,证明:$G_1$ 到 G_2 的同态与 $\widetilde{G}_1$ 到 $\widetilde{G}_2$ 的把 Γ_1 映入 Γ_2 的同态之间是一一对应的.

§2.9　李群及李代数的自同构群和伴随表示

§2.9.1　李群和李代数的自同构群

在群论中,通过研究群 G 的自同构有助于群 G 的性质的研究. 对于李群可以做类似的讨论.

定义 2.9.1　李群 G 的所有自同构构成的群,称为 G 的自同构群,记为 $\mathrm{Aut}(G)$. 李代数$\mathfrak{g}$的所有自同构构成的群,称为$\mathfrak{g}$的自同构群,记为$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

下面将建立李群和李代数的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$和 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$上的李群结构.

命题 2.9.2　$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$是李群 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$的闭子群,因此是李群.

证明　因为李代数$\mathfrak{g}$的自同构是向量空间$\mathfrak{g}$的线性自同构,所以 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})\subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$. 根据 Cartan 的闭子群引理,只需证明 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$的闭子群即可.

选取$\mathfrak{g}$中的一个基底 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,则$\mathfrak{g}$的线性自同构 $A\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$当且仅当对任意 i,j,$A[X_i,X_j]=[AX_i,AX_j]$. 若 A_n 是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$中的收敛子列,它的极限为 A,则由 $A_n[X_i,X_j]=[A_nX_i,A_nX_j]$,马上可以导出 $A[X_i,X_j]=[AX_i,AX_j]$,这说明 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$是 $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$的闭子群. 于是 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$是李群.

根据上述命题,马上得到

命题 2.9.3　若 G 是单连通李群,则 $\mathrm{Aut}(G)$是李群.

证明　根据命题 2.5.5 和定理 2.8.8,可以知道对单连通李群 G,同态 $d:\mathrm{Aut}(G)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$,$f\to \mathrm{d}f$ 是群同构. 从而只需要利用此同构把李群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$上的李群结构照搬到 $\mathrm{Aut}(G)$上即可.

下面命题可以让我们在任意连通李群的自同构群上建立李群的结构.

命题 2.9.4　设连通李群 G 的万有覆叠群是 $\widetilde{G}$,$\pi:\widetilde{G}\to G$ 为覆叠映射,$\Gamma=\ker\pi$,则 $\mathrm{Aut}(G)$同构于 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$中的闭子群$\{\tilde{f}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{G})\mid\tilde{f}(\Gamma)\subset\Gamma\}$,从而 $\mathrm{Aut}(G)$是李群.

证明　首先建立同态 $i:\mathrm{Aut}(\mathrm{G})\to\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$,设 $f\in\mathrm{Aut}(G)$,根据定理 2.8.8,则李代数同态 $\mathrm{d}\pi^{-1}\circ\mathrm{d}f\circ\mathrm{d}\pi:\tilde{\mathfrak{g}}\to\tilde{\mathfrak{g}}$对应唯一的同态$\tilde{f}:\widetilde{G}\to\widetilde{G}$ 的同态$\tilde{f}$. 由 f 是自同构,容易说明$\tilde{f}$是自同构. 定义 $i(f)=\tilde{f}$,称$\tilde{f}$为 f 的提升. 由提升的唯一性,可知 i 是单同态. 请读者可以自己去验证 $\mathrm{Im}\ i=\{\tilde{f}\in\mathrm{Aut}(\widetilde{G})\mid\tilde{f}(\Gamma)\subset\Gamma\}$. 为了证明命题,还需要验证 $\mathrm{Im}\ i$ 是 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$的闭子群.

这可以利用下面引理得到.

引理 2.9.5 设 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$中的序列$\widetilde{f}_n$的极限为$\widetilde{f}$,则$\widetilde{f}_n$逐点收敛到$\widetilde{f}$,于是对任意 $r\in\widetilde{G}$,$\widetilde{f}_n(r)$的极限是$\widetilde{f}(r)$.

这只需要回忆 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$上的拓扑的定义,$\widetilde{f}_n$的极限为$\widetilde{f}$意味着同态序列$\mathrm{d}\widetilde{f}_n$在 $\mathrm{GL}(\widetilde{g})$中的极限为 $\mathrm{d}\widetilde{f}$,于是对于 $\widetilde{G}$ 中的能被指数映射映满的单位元的开邻域 U 中的任意元素 $a=\exp(X)$, $X\in\widetilde{g}$, $\widetilde{f}_n(a)=\widetilde{f}_n(\exp(X))=\exp(\mathrm{d}\widetilde{f}_n(X))$的极限为 $\exp(\mathrm{d}\widetilde{f}(X))=\widetilde{f}(\exp(X))=\widetilde{f}(a)$. 由 $\widetilde{G}$ 的连通性在 U 上的逐点收敛性可以容易的推广到整个$\widetilde{G}$ 上.

下面继续命题的证明,设收敛序列 $\widetilde{f}_n\in\mathrm{Im}\ i$,则 $\widetilde{f}_n(\Gamma)\subset\Gamma$,设 $\widetilde{f}_n$在 $\mathrm{Aut}(\widetilde{G})$中的极限为$\widetilde{f}$,则引理 2.9.5 断言的逐点收敛性保证$\widetilde{f}(\Gamma)\subset\Gamma$,即$\widetilde{f}\in\mathrm{Im}\ i$,这表明 $\mathrm{Im}\ i$ 是闭子群.

这样连通李群和李代数的自同构群都是李群. 下面讨论它们的李代数.

命题 2.9.6 $\mathrm{Aut}(g)$的李代数为 $\mathrm{Der}(g)$.

证明 因为李群 $\mathrm{Aut}(g)\subset\mathrm{GL}(g)$,所以 $\mathrm{Aut}(g)$的李代数可以看成 $\mathrm{gl}(g)$的子代数. D 在 $\mathrm{Aut}(g)$的李代数中等价于 $\exp(tD)\in\mathrm{Aut}(g)$,即对任意 $X,Y\in g$,

$$[\exp(tD)X,\exp(tD)Y]=\exp(tD)([X,Y]).$$

对等式两边微分并在 $t=0$ 处取值得到$[DX,Y]+[X,DY]=D[X,Y]$,即 $D\in\mathrm{Der}(g)$. 这证明了命题.

定义 2.9.7 对李群 G 的元素 a,定义 G 的自同构 $\mathrm{AD}(a):G\to G$, $b\to aba^{-1}$,称为 G 中元素 a 对应的内自同构. $\mathrm{AD}(G)=\{\mathrm{AD}(a)\mid a\in G\}$称为 G 的内自同构群,也记作 $\mathrm{Inn}(G)$. 对李群 G 的元素 a,定义它对应的李代数g的自同构 $\mathrm{Ad}(a)=\mathrm{d}(\mathrm{AD}(a)):g\to g$,称为$g$的内自同构,$\mathrm{Ad}(G)=\{\mathrm{Ad}(a)\mid a\in G\}$称为$g$的内自同构群,$\mathrm{Ad}(G)$也记作 $\mathrm{Inn}(g)$.

设 ϕ 为李群 G 的自同构,$a\in G$,则对任意 $b\in G$,

$$\phi\mathrm{AD}(a)\phi^{-1}(b)=\phi(a\phi^{-1}(b)a^{-1})=\phi(a)b\phi(a)^{-1}=\mathrm{AD}(\phi(a))(b),$$

即 $\phi\mathrm{AD}(a)\phi^{-1}=\mathrm{AD}(\phi(a))$,于是 $\mathrm{AD}(G)$为 $\mathrm{Aut}(G)$的正规子群.

群同态 $\mathrm{AD}:G\to\mathrm{AD}(G)$, $a\to\mathrm{AD}(a)$是满同态,它的核为 G 的中心 $C(G)$,由同构定理,$G/C(G)\cong\mathrm{AD}(G)$. 容易看出,若 G 为连通李群,则 $\mathrm{AD}(G)$也连通.

§2.9.2 李群和李代数的表示

下面给出李群和李代数表示的一些基本概念.

定义 2.9.8 设 G 为李群,V 是有限维向量空间,李群同态 $f:G\to GL(V)$称为 G 在 V 上的线性表示,简称为表示.其中 V 称为表示空间,$\dim V$ 称为表示 f 的维数.

定义 2.9.9 设$\mathfrak{g}$为李代数,V 是有限维向量空间,李代数同态 $\phi:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(V)$称为$\mathfrak{g}$在 V 上的一个线性表示,简称为表示.与李群的表示类似,V 称为表示 ϕ 的表示空间,$\dim V$ 称为表示 ϕ 的维数.

从上面定义可以看出对李群 G 在向量空间 V 上的表示 $f:G\to GL(V)$微分,则得到李代数$\mathfrak{g}$在向量空间 V 上的表示 $df:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(V)$,且有

$$f(\exp(tX))=\exp(t\,df(X)).$$

对于李代数表示的不变子空间,只需要将李群情形的定义进行微分就可以得到,具体的有

定义 2.9.10 设李代数$\mathfrak{g}$在向量空间 V 上有表示 ϕ,$V_1\subseteq V$,若对于任意 $X\in \mathfrak{g}$,$\phi(X)V_1\subseteq V_1$,则称 V_1 是表示 ϕ 的不变子空间.

前面讨论的关于拓扑群的表示的一些基本概念和构造,除了需要把拓扑群换为李群,连续性换为解析性以外都可以照搬到李群的情形,读者可以自己去考察.对于李代数的情形,也可以由李群的相应的定义确定.

以后$\phi(X)V$简记为 XV.

关于李代数表示的直和及张量积有

定义 2.9.11 设 ϕ_1,ϕ_2 是李代数$\mathfrak{g}$的两个线性表示,表示空间为 V_1,V_2.

(1)定义表示 $\phi:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(V_1\oplus V_2)$,对于任意 $X\in \mathfrak{g}$,$\boldsymbol{v}_1\in V_1$,$\boldsymbol{v}_2\in V_2$,$X(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=(X\boldsymbol{v}_1,X\boldsymbol{v}_2)$,称为表示 ϕ_1,ϕ_2 的直和,记为 $\phi_1\oplus\phi_2$,其表示空间为 $V_1\oplus V_2$.

(2)定义表示 $\phi:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(V_1\otimes V_2)$,对于任意 $X\in \mathfrak{g}$,$\boldsymbol{v}_1\in V_1$,$\boldsymbol{v}_2\in V_2$,$X(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=X\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\otimes X\boldsymbol{v}_2$,称为表示 ϕ_1,ϕ_2 的张量积,记为 $\phi_1\otimes\phi_2$,其表示空间为 $V_1\otimes V_2$.

李代数表示的张量积,和李群的情形有些不同之处,这里的原因是,对于李群定义 $a(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=a\boldsymbol{v}_1\otimes a\boldsymbol{v}_2$,令 $a=\exp(tX)$,$X\in \mathfrak{g}$,则

$$\exp(tX)(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=\exp(tX)\boldsymbol{v}_1\otimes\exp(tX)\boldsymbol{v}_2,$$

两边对 t 微分并令 $t=0$,则得到李代数时的定义

$$X(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=X\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\otimes X\boldsymbol{v}_2.$$

对于外幂表示和对偶表示等情形留给读者自己去定义.

上面关于两个表示的直和和张量积的概念可以自然的推广到多个表示的情形,关于拓扑群的表示所证明的一些普遍结果也可以迁移到李群和李代数的情形,比如有

命题 2.9.12 (1)交换李群的不可约复表示是一维的.

(2)交换李代数的不可约复表示是一维的.

证明 对于李群和李代数,读者可以模仿拓扑群 Schur 引理的证明,先去定义李群和李代数表示的同态,然后证明类似的 Schur 引理,最后得到上面的结果.

注 2.9.13 交换李群 G 的实不可约表示是一维平凡表示或 2 维的非平凡表示.

§ 2.9.3 李群和李代数的伴随表示

前面称群作用 $\widetilde{\mathrm{AD}}:G\times G\to G,(a,b)\mapsto aba^{-1}$ 为李群 G 上的伴随作用,它也可以用另一种形式表示为同态 $\mathrm{AD}:G\to\mathrm{Aut}(G)$,对于任意 $a\in G$,$\mathrm{AD}(a):G\to G$ 诱导出李代数的同态 $\mathrm{d}(\mathrm{AD}(a)):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$. 因为 $\mathrm{AD}(a)$ 是李群的同构,所以 $\mathrm{d}(\mathrm{AD}(a))$ 是李代数的同构,以后记 $\mathrm{d}(\mathrm{AD}(a))$ 为 $\mathrm{Ad}(a)$. 由 $\mathrm{AD}(ab)=\mathrm{AD}(a)\mathrm{AD}(b)$,微分马上得到 $\mathrm{Ad}(ab)=\mathrm{Ad}(a)\mathrm{Ad}(b)$,这表明映射 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g}),a\to\mathrm{Ad}(a)$ 为李群的同态,称为李群 G 在它的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示,简称为 G 的伴随表示. 对伴随表示 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 进行微分,马上得到李代数的同态 $\mathrm{d}(\mathrm{Ad}):\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$,称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示,以后记 $\mathrm{d}(\mathrm{Ad})$ 为 ad. 李群和李代数的伴随表示对于理解李群和李代数的性质具有重要的作用,在随后的讨论中读者会逐渐体会到.

结合指数映射的性质,容易得到下面的命题.

命题 2.9.14 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数,$a\in G,X\in\mathfrak{g},t\in\mathbf{R}$,则

(1) $\mathrm{AD}(a)(\exp tX)=\exp(t\mathrm{Ad}(a)X)$.

(2) $\mathrm{Ad}(\exp(tX))=\exp(t\mathrm{ad}(X))$.

证明 分别对李群同态 $\mathrm{AD}(a):G\to G$ 和 $\mathrm{Ad}:G\to\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ 应用命题 2.5.1 即可得到.

前面知道李群的乘法运算经过两次微分就得到李代数的结构,利用命题 2.9.14 的两个等式也可以把从李群经过微分得到李代数的过程完整地实现.

对于 $X,Y\in\mathfrak{g},t\in\mathbf{R}$,由命题 2.9.14 可知

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)=\mathrm{AD}(\exp(tX))\exp(tY)$$
$$=\exp(t\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y)=\exp(t\exp(t\mathrm{ad}(X))Y).$$
$$=\exp(tY+t^2\mathrm{ad}(X)Y+o(t^2))$$

由定理 2.4.14 的(2)式，上面表达式可以展开为 $\exp(tY+t^2[X,Y]+o(t^2))$，直接比较，可得

命题 2.9.15　若 $X,Y\in g$，则 $\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$.

前面知道李群的连通李子群和李代数的子代数一一对应，这一结果对于正规子群也成立.

命题 2.9.16　连通李群 G 的连通李子群 H 是正规子群，当且仅当 H 的李代数 h 是 G 的李代数 g 的理想.

证明　H 是 G 的正规子群 $\Rightarrow$ 对于任意 $X\in g, Y\in h, s,t\in\mathbf{R}$，$\mathrm{AD}(\exp(sX))\exp(tY)\in H\Rightarrow\exp(t\exp(s\mathrm{ad}(X))Y)\in H\Rightarrow\exp(s\mathrm{ad}(X))Y\in h\Rightarrow\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]\in h$，于是 h 是 g 的理想.

相反方向的结论可以利用连通性依次倒推回去得到，请读者自己验证.

习题 2.9

1. 设g是李代数,G是以g为其李代数的连通李群,令 $\mathrm{Inn}(g)=\mathrm{Ad}(G)$,证明:所有元素 $e^{\mathrm{ad}(X)}$,$X\in g$生成的群恰为 $\mathrm{Inn}(g)$. 利用这一事实可以给出李代数的内自同构群的不依赖于李群的定义.

2. 设 f 是连通李群G 在向量空间V 上的表示,$\mathrm{d}f$ 是它诱导出的李代数g在V上的表示,证明:V_1 是表示 f 的不变子空间当且仅当它是 $\mathrm{d}f$ 的不变子空间.

3. 设 G_1 和 G_2 是李群,$\phi:G_2\to\mathrm{Aut}(G_1)$是李群的同态,在 $G_1\times G_2$ 上给予乘积解析结构乘法$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1\phi(y_1)x_2,y_1y_2)$,证明:$G_1\times G_2$ 在此乘法下成为李群,记为 $G_1\times_{\phi}G_2$,称为 G_1 与 G_2 的半直积. 进一步证明:G_1 和 G_2 都可以看成 $G_1\times_{\phi}G_2$ 的李子群,实际上 G_1 还是正规子群.

4. 对李代数定义半直积的概念,并求上面的半直积 $G_1\times_{\phi}G_2$ 的李代数.

第 3 章

可解李代数、幂零李代数、约化李代数和半单李代数

本章介绍可解李代数、幂零李代数、约化李代数和半单李代数的概念,并讨论它们之间的关系.为进一步探讨李群和李代数的性质做准备.

§3.1 可解李代数和幂零李代数

本节介绍可解李代数和幂零李代数.虽然这跟本书后续的讨论关系不大,但是鉴于它们都是李代数中的一类基本的例子,而且对于深入的讨论李代数的性质来说,这些概念也是不可缺少的,因此用一节的篇幅来介绍它们.

设 G 为一个李群,则 G 中所有的形如 $aba^{-1}b^{-1}, a, b\in G$ 的元素生成 G 的一个正规子群,称为 G 的导出子群,将它记为 DG.可以归纳地定义 n 次导出子群 D^nG 使得 $D^0G=G$ 并且 $D^nG=D(D^{n-1}G)$.

对于一个李代数g ,g 中所有的形如$[X,Y]$,$X,Y\in g$ 的元素张成的g 的向量子空间为g 的理想,称为g 的导出代数,将它记为 Dg.类似的可以定义 n 次导出代数 D^ng 使得 $D^0g=g$ 并且 $D^ng=D(D^{n-1}g)$.

下面给出可解李群和可解李代数的定义:

定义 3.1.1 (1)设g 为李代数,若存在正整数 n,使得 n 次导出代数 $D^ng=\{0\}$,则称g 为可解李代数.

(2)若李群 G 的李代数g 是可解李代数,则称 G 为可解李群.

命题 3.1.2 (1)若g 为可解李代数,则g 的任意子代数 h 是可解李代数.若 h 为g 的理想,则商代数g/h 也是可解李代数.

(2)若李代数g 中有可解理想 h,使得g/h 也是可解李代数,则g 是可解李代数.

(3)在可解李代数g 中,总存在非$\{0\}$的交换理想.

证明 (1)根据定义直接验证.

(2)由g/h 可解,可知存在正整数 k,$D^k(g/h)=\{0\}$,这等价于 $D^kg\subset h$,而由 h 可解,存在 l,$D^lh=0$,于是 $D^{k+l}g=D^l(D^kg)=\{0\}$.

(3)由于g 是可解李代数,存在 $n\geqslant 1$,使得 $D^{n-1}g\neq\{0\}$,但是 $D^ng=\{0\}$,显然 $D^{n-1}g$ 是g 的交换理想.

可以证明所有实或复的上三角矩阵构成的李代数g 是可解的.从而任意的由上三角矩阵构成的李代数 $h\subset g$ 也是可解的.

根据上面的结论,还可以给出下面的定义.

定义 3.1.3 设g 为李代数,g 中的可解理想的和还是可解理想.于是g 中存在唯一的极大可解理想,称为g 的根,记为 $\mathrm{Rad}(g)$.

下面继续可解李代数性质的讨论.

定义 3.1.4 李代数g 称为满足链条件,若对于g 的任意子代数 $h\neq\{0\}$,存在 h 的余维数为 1 的理想.

引理 3.1.5 李代数g是可解李代数当且仅当g满足链条件.

证明 首先证明必要性. 为此先证明任意可解李代数g中有余维数是 1 的可解理想.

设g为可解李代数,则 $Dg\neq g$ 为g中的理想,而且商李代数g/Dg为交换李代数. 设商同态为 $\pi:g\rightarrow g/Dg$,选取g/Dg中的余维数为 1 的子代数 h',则 $\pi^{-1}(h')$为g中余维数为 1 的理想. 对g中任意子代数 h,由命题 3.1.2 可知 h 是可解李代数. 因此 h 中也存在余维数为 1 的理想.

再证明充分性. 设g满足链条件,则可以在g中找到子代数的序列

$$g=g_0\supset g_1\supset\cdots\supset g_{n-1}\supset g_n=\{0\},$$

其中g_i是g_{i-1}的余维数为 1 的理想,$1\leqslant i\leqslant n$. 显然 $D(g_{i-1})\subset g_i$,于是 $D^n g=\{0\}$,从而g可解.

关于可解李代数的有限维复表示,有下面的 Lie 的定理:

定理 3.1.6(Lie) 设g为可解李代数,$\phi:g\rightarrow \mathrm{gl}(V)$为$g$的有限维复表示,则存在 V 中的非 0 向量 $\boldsymbol{v}$,使得对于任意 $X\in g$,$\boldsymbol{v}$ 是 $\phi(X)$的特征向量.

证明 利用归纳法来证明,对g的维数进行归纳.

若g的维数为 1,根据 Schur 引理及其推论,命题显然成立.

假设命题对于维数小于 $\dim g$ 的可解李代数成立. 设 h 是g中余维数为 1 的理想,则 h 是可解的. 根据归纳假设,存在非零向量 $\boldsymbol{v}_0$,及线性函数 $\lambda:h\rightarrow\mathbf{C}$,使得 $\phi(X)\boldsymbol{v}_0=\lambda(X)\boldsymbol{v}_0$. 选取 $Y\notin h$,定义 $\boldsymbol{v}_k=\phi(Y)^k\boldsymbol{v}_0$,设 $\boldsymbol{v}_k$,$k\geqslant 0$ 张成的 V 的子空间为 W. 则可以归纳地证明:

引理 3.1.7 对任意 $X\in h$,$\phi(X)\boldsymbol{v}_k\equiv\lambda(X)\boldsymbol{v}_k \quad \mathrm{mod}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1})$. 从而 W 是 $\phi(h)$作用下的不变子空间.

证明 当 $k=0$ 时,命题成立. 设

$$\phi(X)\boldsymbol{v}_k=\lambda(X)\boldsymbol{v}_k \quad \mathrm{mod}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1}),$$

则有

$$\begin{aligned}
\phi(X)\boldsymbol{v}_{k+1}&=\phi(X)\phi(Y)\boldsymbol{v}_k\\
&=\phi([X,Y])\boldsymbol{v}_k+\phi(Y)\phi(X)\boldsymbol{v}_k\\
&\equiv\lambda([X,Y])\boldsymbol{v}_k+\phi(Y)\lambda(X)\boldsymbol{v}_k \quad \mathrm{mod}(\boldsymbol{v}_0,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1},\phi(Y)\boldsymbol{v}_0,\cdots,\phi(Y)\boldsymbol{v}_{k-1})
\end{aligned}$$

从而 $\phi(X)\boldsymbol{v}_{k+1}\equiv\lambda(X)\boldsymbol{v}_{k+1} \quad \mathrm{mod}(\boldsymbol{v}_0,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{k-1},\boldsymbol{v}_k)$.

引理 3.1.8 对任意 $X\in h$,$\phi(X)$在 W 上的作用是乘以常数 $\lambda(X)$.

证明 由前面的结论,不难看出 $\mathrm{Tr}_W(\phi(X))=\lambda(X)\dim W$. 因为 $\phi([X,Y])=\phi(X)\phi(Y)-\phi(Y)\phi(X)$,所以 $\mathrm{Tr}_W(\phi([X,Y]))=0$,而 $\dim W>0$,这表明 $\lambda([X,Y])=0$. 由

$$\begin{aligned}\phi(X)v_{k+1} &= \phi(X)\phi(Y)v_k \\ &= \phi([X,Y])v_k + \phi(Y)\phi(X)v_k \\ &= \lambda([X,Y])v_k + \phi(Y)\phi(X)v_k \\ &= \phi(Y)\phi(X)v_k,\end{aligned}$$

利用条件 $\phi(X)v_0=\lambda(X)v_0$，可以归纳地证明 $\phi(X)v_k=\lambda(X)v_k$，$k\geqslant 0$，这证明了引理.

在 W 中选取 $\phi(Y)$ 的特征向量 $v\neq \mathbf{0}$，则显然它满足定理的要求，于是定理得证.

推论 3.1.9 设g是可解李代数，$\phi:g\to \mathrm{gl}(V)$为g的 n 维复表示，以 V 为表示空间，则存在 V 中的一个基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，使得对任意 $X\in g$，$\phi(X)$在这组基底下可以写成上三角矩阵.

证明 在 V 中利用定理 3.1.6，选取非零向量 e_1 使得它是所有的 $\phi(X)$，$X\in g$ 的特征向量，考虑 e_1 张成的不变子空间 V_1，ϕ 诱导出 V/V_1 上的商表示 ϕ_1，再次利用定理，存在 $e_2\in V$，使得 e_2+V_1 是所有的 $\phi_1(X)$，$X\in g$ 的特征向量. 依次进行这一过程，得到向量 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，在这个基底下，容易看出 $\phi(X)e_i\equiv 0 \mod(e_1,e_2,\cdots,e_i)$，这表明在基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下，$\phi(X)$成为上三角矩阵.

类似于可解李代数的概念，可以定义幂零李代数的概念.

定义 3.1.10

(1)对于李代数g，定义 $C^0(g)=g$，$C^{n+1}(g)=[g,C^n(g)]$，则序列

$$g=C^0(g)\supset C^1(g)\supset\cdots\supset C^n(g)\supset\cdots$$

称为g的下中心序列.

(2)设g为李代数，若存在正整数 n，使得 $C^n(g)=0$，则称g为幂零李代数.

(3)李代数g中的元素 X 若满足 $\mathrm{ad}(X)$在g上的作用是幂零的，即存在正整数 n，使得$(\mathrm{ad}(X))^n=0$，则称 X 是g中的幂零元素，或称 X 是 ad 幂零的.

关于幂零李代数，有以下的命题.

命题 3.1.11 (1)设g为幂零李代数，则g的任意子代数 h 是幂零李代数. 若 h 为g的理想，则商代数g/h 也是幂零李代数.

(2)若李代数$g/c(g)$是幂零李代数，则g是幂零李代数.

(3)幂零李代数有非平凡的中心 $c(g)$.

证明 (1)证明与可解情形类似.

(2)若$g/c(g)$是幂零李代数，则存在 $n>0$，$C^n(g/c(g))=\{0\}$，这等价于 $C^n g\subset c(g)$，因此 $C^{n+1}g=\{0\}$，即g是幂零的.

(3)由于$\mathfrak{g}$是幂零李代数，存在 $n\geqslant 1$，$C^{n-1}\mathfrak{g}\neq\{0\}$，但是 $C^n\mathfrak{g}=\{0\}$. 于是$[\mathfrak{g},C^{n-1}\mathfrak{g}]=\{0\}$，这表明 $C^{n-1}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{c}(\mathfrak{g})$.

可以证明实或复的严格上三角矩阵(对角线上元素为零)构成的李代数$\mathfrak{g}$是幂零的. 因此它的任意子代数 $\mathfrak{h}$ 也是幂零的.

$\mathfrak{g}$是幂零李代数的等价说法是，存在 n，对于任意元素 $X_1,X_2,\cdots,X_n\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}(X_1)\mathrm{ad}(X_2)\cdots\mathrm{ad}(X_n)=0$. 特别的，对任意 $X\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{ad}(X)^n=0$. 也就是说若李代数$\mathfrak{g}$是幂零的，则$\mathfrak{g}$中的任意元素是 ad 幂零的. 这一命题的逆命题是著名的 Engel 定理.

定理 3.1.12(Engel)　设李代数$\mathfrak{g}$中的任意元素都是 ad 幂零的，则$\mathfrak{g}$是幂零李代数.

Engel 的定理可以从下面结果导出.

定理 3.1.13　设李代数$\mathfrak{g}$是 $\mathrm{gl}(V)$的子代数，$V\neq\{0\}$是有限维向量空间，若$\mathfrak{g}$中元素都是 V 上幂零的线性映射，则存在 V 中的非零向量 $\boldsymbol{v}$，使得对于任意$X\in\mathfrak{g}$，$X\boldsymbol{v}=0$.

定理的证明需要下面的引理.

引理 3.1.14　若 $X\in\mathrm{gl}(V)$是线性幂零的，则 X 是 ad 幂零的.

证明　定义 $\mathrm{gl}(V)$上的线性映射 $L_X:Y\mapsto XY$，$R_X:Y\mapsto YX$，因为 X 是线性幂零的，所以存在 n，$X^n=0$. L_X，R_X 是交换的线性幂零映射，实际上$L_X^n=R_X^n=0$. 而 $\mathrm{ad}(X)=L_X-R_X$，于是 $\mathrm{ad}(X)^{2n}=\sum\limits_{i+j=2n}\binom{2n}{i}(-1)^jL_X^iR_X^j$. 因为 $i+j=2n$ 所以总有 $i\geqslant n$ 或 $j\geqslant n$，这表明上面和式中的每一项都是 0. 于是$\mathrm{ad}(X)$是幂零的.

定理 3.1.13 的证明　用归纳法进行证明，对$\mathfrak{g}$的维数进行归纳. 显然$\dim\mathfrak{g}=1$ 时定理成立. 设定理对维数小于 $\dim\mathfrak{g}$的情形成立，选取$\mathfrak{g}$中的极大真子代数 $\mathfrak{h}$，因为任意 $Y\in\mathfrak{h}$ 都是线性幂零的，所以根据引理 3.1.14，$\mathrm{ad}(Y)$幂零的作用在$\mathfrak{g}$上，因此 $\mathrm{ad}(Y)$也幂零的作用在向量空间$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上. 根据归纳假设，可知在$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中存在非零向量 $X+\mathfrak{h}\neq\mathfrak{h}$，它在任意 $\mathrm{ad}(Y)$作用下为零. 这等价于 $\mathrm{ad}(Y)X\in\mathfrak{h}$，于是 $X\in\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. 由于 $\mathfrak{h}$ 是极大的真子代数，而 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$，于是只可能 $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})=\mathfrak{g}$.

下面证明 $\mathfrak{h}$ 在$\mathfrak{g}$中的余维数必为 1. 否则由于$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$，$\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$的理想，$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$是维数大于 1 的李代数. 在$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中选取维数是 1 的子代数，则其在商映射下的原象为包含 $\mathfrak{h}$ 的真子代数，这与假设矛盾. 至此，可知$\mathfrak{g}$由 X，$\mathfrak{h}$ 线性张成.

令 $W=\{\boldsymbol{u}\in V\mid Y\boldsymbol{u}=0,\ \forall Y\in\mathfrak{h}\}$. 根据归纳假设 $W\neq\{0\}$，而且对于 $Y\in$

h,$\boldsymbol{u}\in W$,$YX\boldsymbol{u}=[Y,X]\boldsymbol{u}+XY\boldsymbol{u}=0$,这表明 $XW\subset W$,即 W 是 X 作用下的不变子空间. X 在 W 上的限制作用显然是幂零的,即存在 $\boldsymbol{v}\in W$,$\boldsymbol{v}\neq 0$,使得 $X\boldsymbol{v}=0$,则 $\boldsymbol{v}$ 满足定理的要求.

下面的推论的叙述和证明与可解情形完全类似.

推论 3.1.15 设 $\phi:\mathfrak{g}\to\mathrm{gl}(V)$ 为李代数$\mathfrak{g}$ 的 n 维表示,若对于任意 $X\in\mathfrak{g}$,$\phi(X)$是线性幂零的,则存在 V 中的一个基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$,使得对任意 $X\in\mathfrak{g}$,在这组基底下 $\phi(X)$可以写成严格上三角矩阵,即对角线及对角线以下的元素都为零.

定理 3.1.12 的证明 设$\mathfrak{g}$是李代数,其中的元素 X 都是 ad 幂零的. 考虑$\mathfrak{g}$的伴随表示,则 $\mathrm{ad}(X)$在$\mathfrak{g}$上是幂零线性映射. 由上面的推论 3.1.15,存在 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,使得对任意 $X\in\mathfrak{g}$,$\mathrm{ad}(X)X_i\equiv 0 \mod (X_1,X_2,\cdots,X_{i-1})$. 令$\mathfrak{g}_i$为$\mathfrak{g}$中由 $X_1,X_2,\cdots,X_i$ 张成的子空间,则$\mathfrak{g}_n=\mathfrak{g}$,且$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_{i+1}]\subset\mathfrak{g}_i$,由此可以看出 $C^n\mathfrak{g}=\{0\}$,所以$\mathfrak{g}$是幂零李代数.

习题 3.1

1. 设李群 G 的李代数为$\mathfrak{g}$，证明：G 的导出子群 $DG=[G,G]$对应的$\mathfrak{g}$的子代数恰为 $D\mathfrak{g}$. 利用这一结论证明：连通李群 G 是可解的当且仅当存在正整数 n，使得 $D^nG=\{e\}$.

2. 证明：实或复的上三角矩阵构成的李代数是可解的. 实或复的严格上三角矩阵构成的李代数是幂零的.

3. 证明：李代数$\mathfrak{g}$是可解的当且仅当 $D\mathfrak{g}$ 是幂零的.

4. 若李代数$\mathfrak{g}$中包含幂零李代数 $\mathfrak{h}$，使得商代数$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是幂零的，则$\mathfrak{g}$本身未必是幂零的，试举出反例.

5. 设 G 是由 $\mathrm{GL}(4,\mathbf{R})$中的形如$\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & \alpha \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ 的矩阵构成的李群，计算 G 的李代数，证明：G 是可解的，它的指数映射既不是单射也不是满射.

6. 设 G 是连通的可解李群，它的李代数为$\mathfrak{g}$.

(1) 证明：在$\mathfrak{g}$中可以找到余维数为 1 的理想 $\mathfrak{h}$ 和一维理想 $\mathfrak{k}$，使得$\mathfrak{g}$同构于 $\mathfrak{h}$，$\mathfrak{k}$ 的半直积.

(2) 根据(1)中结果，对李群 G 可以得到什么结论？

(3) 对一维的实和复李群进行分类，由此对连通可解李群 G 的解析结构和拓扑可以得到哪些结论？

§3.2 约化李代数

前面讨论了李群和李代数的表示的基本概念，下面主要讨论李群和李代数的伴随表示，伴随表示对于理解李群和李代数的结构具有基本的重要性.

首先我们有下面的简单事实.

命题 3.2.1 设 G 为连通李群，它的李代数为g，下面三条性质等价：

(1)$h\subset g$ 是李群 G 的伴随表示 $\mathrm{Ad}:G\to \mathrm{GL}(g)$ 的不变子空间.

(2)$h\subset g$ 是李代数g 的伴随表示 $\mathrm{ad}:g\to \mathrm{gl}(g)$ 的不变子空间.

(3)h 为g 的理想.

证明 (1)⇒(2)，设 $h\subset g$ 是李群 G 的伴随表示 $\mathrm{Ad}:G\to \mathrm{GL}(g)$ 的不变子空间，则对于任意 $X\in g$，$Y\in h$，$\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\in h$，即 $\exp(t\mathrm{ad}(X))Y\in h$，微分得 $\mathrm{ad}(X)Y\in h$，从而 $h\subset g$ 是李代数g 的伴随表示 $\mathrm{ad}:g\to \mathrm{gl}(g)$ 的不变子空间.

(2)⇒(1)，若 $h\subset g$ 是李代数g 的伴随表示 $\mathrm{ad}:g\to \mathrm{gl}(g)$ 的不变子空间，则对于任意 $X\in g$，$Y\in h$，$\mathrm{ad}(X)Y\in h$，因此 $\exp(t\mathrm{ad}(X))Y\in h$，即 $\mathrm{Ad}(\exp(tX))Y\in h$. 由指数映射的性质知道，至少对于 G 的单位元的某个开邻域 U 中元素 a，$\mathrm{Ad}(a)Y\in h$. 由 G 连通，容易得出这对任意 $a\in G$ 成立，于是 $h\subset g$ 是李群 G 的伴随表示 $\mathrm{Ad}:G\to \mathrm{GL}(g)$ 的不变子空间.

(2)⇔(3)，由 $\mathrm{ad}(X)Y=[X,Y]$，显然成立.

李群和李代数中研究得比较清楚的是约化李群和约化李代数，下面给出它们的定义.

定义 3.2.2 若李代数g 的伴随表示是完全可约的，则称李代数g 为约化李代数. 若李代数g 的伴随表示是不可约的，则称g 为单李代数.

李代数g 是约化李代数当且仅当对g 的任意理想g_1，存在g 的另一理想g_2，使得$g=g_1\oplus g_2$. 李代数g 是单李代数当且仅当其中没有非平凡的理想.

约化李群和单李群的定义完全与相应的李代数的定义一致，即

定义 3.2.3 (1)若李群 G 的李代数是约化李代数，则称 G 为约化李群.

(2)若李群 G 的李代数是单李代数，则称 G 为单李群.

根据这一定义，S^3 是单李群，尽管它有 2 阶的正规子群$\{\pm 1\}$. 李群 G 是单李群的另一种说法是它的任意正规子群是离散的. 一维的交换李代数g 显然是单李代数，维数大于 1 的单李代数g，显然不可能是交换李代数，而且容易看出它的导出代数 $Dg=[g,g]=g$.

例 3.2.4 李群 $\mathrm{SU}(n)$，$\mathrm{SO}(n)$，$n\neq 4$，$\mathrm{Sp}(n)$都是单李群，但 $\mathrm{U}(n)$不是单

李群.

定理 3.2.5　设$\mathfrak{g}$是约化李代数,则

(1)有李代数的理想的直和分解$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$,这里$\mathfrak{g}_i$,$1\leqslant i\leqslant k$ 是$\mathfrak{g}$的单理想. 令$\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$,则$\mathfrak{g}^*=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$.

(2)设$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$和$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1'\oplus\mathfrak{g}_2'\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_l'$是$\mathfrak{g}$的满足上述条件的两个分解,则 $k=l$,且在不计理想的排列次序的情况下,二者完全相同.

证明　(1)因为$\mathfrak{g}$的伴随表示是完全可约的,所以$\mathfrak{g}$可以表示成不可约表示的直和. 设表示空间的分解为$\mathfrak{g}=h_1\oplus h_2\oplus\cdots\oplus h_r$,由于 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(h_i)\subset h_i$,于是 h_i,$1\leqslant i\leqslant r$,为$\mathfrak{g}$的单理想. 在上面的分解中挑出所有维数为 1 的单理想,设它们的直和为 h,剩下的维数大于 1 的单理想设为$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_k$. 则上述分解可以写为$\mathfrak{g}=h\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$,下面证明 $h=c(\mathfrak{g})$.

首先给出一个引理

引理 3.2.6　设$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$是李代数$\mathfrak{g}$的单理想,若$\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=\{0\}$,则

$$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]=\{0\}.$$

根据理想的定义$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]\subset\mathfrak{g}_1$,$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]\subset\mathfrak{g}_2$,因此$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]\subset\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=\{0\}$.

下面继续定理的证明. 由上述引理,h 与$\mathfrak{g}_i$都交换,于是 $h\subset c(\mathfrak{g})$.

直接计算可知 $D\mathfrak{g}=\mathfrak{g}^*$,因此 $\dim h=\dim\mathfrak{g}-\dim D\mathfrak{g}$ 只由$\mathfrak{g}$本身决定,不依赖于具体的分解的选取. 要证明 $h=c(\mathfrak{g})$,只需证明 $\dim h\geqslant\dim c(\mathfrak{g})$即可. 将$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus D\mathfrak{g}$进一步分解成单理想直和$\mathfrak{g}=h'\oplus\mathfrak{g}_1'\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_l'$,显然 $\dim h=\dim h'\geqslant\dim c(\mathfrak{g})$. 这证明了 $h=c(\mathfrak{g})$.

(2)下面证明$\mathfrak{g}$的分解在不考虑单理想的排列次序时是唯一的. 设$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$和$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1'\oplus\mathfrak{g}_2'\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_l'$是$\mathfrak{g}$的两个分解. 我们要证明 $k=l$,且$\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_2',\cdots,\mathfrak{g}_l'$是$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_k$的一个排列. 首先对于$\mathfrak{g}_1'$,要在$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_k$中找到和它相等的一个. 设$\mathfrak{g}$到$\mathfrak{g}_i$上的投影同态为 p_i,h_i 为$\mathfrak{g}_1'$在$\mathfrak{g}_i$上的投影,即 $h_i=p_i(\mathfrak{g}_1')$,则 h_i 是$\mathfrak{g}$的子代数. 下面证明

引理 3.2.7　h_i 是$\mathfrak{g}_i$的理想,且$[h_i,\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_1'$. 这是因为

$$[h_i,\mathfrak{g}_i]=[p_i(\mathfrak{g}_1'),p_i(\mathfrak{g}_i)]=p_i[\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_1'.$$

所以
$$[h_i,\mathfrak{g}_i]=[p_i(h_i),p_i(\mathfrak{g}_i)]=p_i[h_i,\mathfrak{g}_i]\subset p_i(\mathfrak{g}_1')=h_i.$$

因为$\mathfrak{g}_i$是单理想,所以 $h_i=0$ 或者 $h_i=\mathfrak{g}_i$,但是不可能所有的 h_i,$1\leqslant i\leqslant k$ 都是 0,否则$\mathfrak{g}_1'\subset c(\mathfrak{g})$,而这不可能. 故存在 i_1,使得 $h_{i_1}=\mathfrak{g}_{i_1}$,此时$\mathfrak{g}_{i_1}=[\mathfrak{g}_{i_1},\mathfrak{g}_{i_1}]=[h_{i_1},\mathfrak{g}_{i_1}]\subset\mathfrak{g}_{i_1}\cap\mathfrak{g}_1'\subset\mathfrak{g}_1'$. 因此只可能$\mathfrak{g}_{i_1}=\mathfrak{g}_1'$.

继续讨论下去,可得 $k=l$,且$\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_2',\cdots,\mathfrak{g}_l'$是$\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_k$的一个排列.

将上述结果过渡到李群情形，则有

定理 3.2.8 设 G 是连通约化李群，$\mathfrak{g}$ 是它的李代数，则

(1) $\mathfrak{g}$ 有分解 $\mathfrak{c}(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$，其中 $\mathfrak{g}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的维数大于 1 的单理想.

(2) $G=C(G)G_1G_2\cdots G_k$，其中 G_i，$1\leqslant i\leqslant k$ 是 G 对应于 $\mathfrak{g}_i$ 的连通单正规子群，且彼此交换. 子群 $C(G)$，G_1，G_2，$\cdots$，G_k 在不计次序的情形下，完全由 G 决定.

这是定理 3.2.5 的自然推论，请读者自行验证.

容易看出同态 $\pi: C(G)\times G_1\times G_2\times\cdots\times G_k\to G$，$(c, a_1, a_2, \cdots, a_k)\to ca_1a_2\cdots a_k$ 是覆叠同态. 设 $\pi_0: \widetilde{C}(G)\to C(G)$，$\pi_i: \widetilde{G}_i\to G_i$，$1\leqslant i\leqslant k$ 是万有覆叠同态，则 $\tilde{\pi}: \widetilde{C}(G)\times\widetilde{G}_1\times\widetilde{G}_2\times\cdots\times\widetilde{G}_k\to G$，$(\tilde{c}, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_k)\to\pi_0(\tilde{c})\pi_1(\tilde{a}_1)\pi_2(\tilde{a}_2)\cdots\pi_k(\tilde{a}_k)$ 也是覆叠同态，于是令 $\Gamma=\ker\tilde{\pi}$，则 $G\cong\widetilde{C}(G)\times\widetilde{G}_1\times\widetilde{G}_2\times\cdots\times\widetilde{G}_k/\Gamma$. 这说明任意连通约化李群 G 同构于单连通的单李群的乘积关于其中的某个离散子群 Γ 的商群.

习题 3.2

1. 证明：李代数 $\mathrm{sl}(n,\mathbf{K})$，$K=\mathbf{R},\mathbf{C}$ 是单李代数.

2. 证明：单连通的约化李群同构于单连通的单李群的乘积.

3. 设$\mathfrak{g}$是约化李代数，$\mathfrak{g}$有分解$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$，证明：$\mathfrak{g}$的任意理想 $\mathfrak{h}=c(\mathfrak{h})\oplus\mathfrak{g}_{i_1}\oplus\mathfrak{g}_{i_2}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_{i_l}$，这里 $c(\mathfrak{h})=c(\mathfrak{g})\cap\mathfrak{h}$，且集合$\{i_1,i_2,\cdots,i_l\}$是集合$\{1,2,\cdots,k\}$的子集.

§3.3 半单李代数

下面讨论半单李群和半单李代数. 为此先定义李代数g的 Killing 型.

定义 3.3.1 设g是域 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)上的李代数,定义g上的双线性函数 K: $g\times g\to\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),使得 $K(X,Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))$,$K$ 称为李代数g的Killing型.

g的 Killing 型自然的诱导出向量空间g到它的对偶空间的同态:$\widetilde{K}:g\to g^*$,$X\mapsto K(X,-)$. 定义 K 的核为 $\ker K=\ker\widetilde{K}$,即g在 Killing 型下的正交补空间$g^\perp$.

下面给出一个例子.

例 3.3.2 计算 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$的 Killing 型.

为了方便计算,采用爱因斯坦求和约定,即在单项计算表达式中,出现两次的指标表示关于这一指标从 1 到 n 求和. 令 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

选取 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{R})$的标准基底 $\boldsymbol{E}_{ij}$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,设在这组基底下,$\boldsymbol{X}=x_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$,$\boldsymbol{Y}=y_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$,则矩阵$\mathrm{ad}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{Y}$ 的(k,l)元素为 $y_{ks}\delta_{si}\delta_{lj}-\delta_{ki}\delta_{sj}y_{sl}$. 从而矩阵 $\mathrm{ad}(\boldsymbol{X})\mathrm{ad}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{E}_{ij}$ 的(p,q)元素为 $x_{pt}(y_{ts}\delta_{si}\delta_{qj}-\delta_{ti}\delta_{sj}y_{sq})-(y_{ps}\delta_{si}\delta_{tj}-\delta_{pi}\delta_{sj}y_{st})x_{tq}$. 而 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\boldsymbol{X})\mathrm{ad}(\boldsymbol{Y}))$可由$(\mathrm{ad}(\boldsymbol{X})\mathrm{ad}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{E}_{ij})$的$(i,j)$元素对于所有$i,j$ 求和得到. 直接化简得到

$$
\begin{aligned}
&K(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\\
&=x_{it}(y_{ts}\delta_{si}\delta_{jj}-\delta_{ti}\delta_{sj}y_{sj})-(y_{is}\delta_{si}\delta_{tj}-\delta_{ii}\delta_{sj}y_{st})x_{tj}\\
&=nx_{it}y_{ti}-x_{ii}y_{jj}-y_{ii}x_{jj}+ny_{jt}x_{tj}\\
&=2nx_{it}y_{ti}-2x_{ii}y_{jj}\\
&=2n\mathrm{Tr}(\boldsymbol{XY})-2\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X})\mathrm{Tr}(\boldsymbol{Y}).
\end{aligned}
$$

这里的计算用到 $\delta_{ii}=n$,$\mathrm{Tr}\boldsymbol{X}=x_{ii}$,$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{XY})=x_{ij}y_{ji}$.

命题 3.3.3 李代数g上的 Killing 型 K 具有以下性质.

(1)对称性:$K(X,Y)=K(Y,X)$,$\forall X,Y\in g$.

(2)伴随不变性:$K(\mathrm{ad}(Z)X,Y)+K(X,\mathrm{ad}(Z)Y)=0$,$\forall X,Y,Z\in g$.

证明 (1)由线性代数中的结果,对线性算子 A,B,$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$,结论(1)由此得证.

(2)直接计算

$$
\begin{aligned}
&K(\mathrm{ad}(Z)X,Y)+K(X,\mathrm{ad}(Z)Y)\\
&=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}([Z,X])\mathrm{ad}(Y))+\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}([Z,Y]))
\end{aligned}
$$

$$=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))-\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y))+\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Z)\mathrm{ad}(Y))-\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mathrm{ad}(Z))$$
$$=0.$$

注 3.3.4 设$\mathfrak{g}$是李群 G 的李代数,则可以验证

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(a)X)Y&=[\mathrm{Ad}(a)X,Y]\\&=\mathrm{Ad}(a)[X,\mathrm{Ad}(a^{-1})Y]\\&=\mathrm{Ad}(a)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(a^{-1})Y.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(a)X)=\mathrm{Ad}(a)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(a^{-1})$.

从而

$$\begin{aligned}&K(\mathrm{Ad}(a)X,\mathrm{Ad}(a)Y)\\=&\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(a)X)\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(a)Y))\\=&\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(a)\mathrm{ad}(X)\mathrm{Ad}(a^{-1})\mathrm{Ad}(a)\mathrm{ad}(Y)\mathrm{Ad}(a^{-1}))\\=&\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(a)\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mathrm{Ad}(a^{-1}))\\=&\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))\\=&K(X,Y).\end{aligned}$$

这说明 Killing 型在李群 G 的伴随表示下是不变的. 令 $a=\exp(tZ)$,对 t 微分,即得到$K(\mathrm{ad}(Z)X,Y)+K(X,\mathrm{ad}(Z)Y)=0$.

下面给出半单李代数的定义.

定义 3.3.5 若李代数$\mathfrak{g}$的 Killing 型是非退化的,则称$\mathfrak{g}$为半单李代数. 若李群 G 的李代数为半单李代数,则称 G 为半单李群.

关于半单李代数有下面重要的定理.

定理 3.3.6 半单李代数$\mathfrak{g}$的伴随表示是完全可约的. 实际上设$\mathfrak{g}_1$为$\mathfrak{g}$的理想,则$\mathfrak{g}_2=\mathfrak{g}_1^{\perp}$也是$\mathfrak{g}$的理想,并且$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$是半单理想的直和分解.

证明 我们分三步来完成证明.

第一步:设$\mathfrak{g}$是半单的,则它的 Killing 型 K 非退化,设$\mathfrak{g}_1$是$\mathfrak{g}$的伴随表示的不变子空间,令$\mathfrak{g}_1^{\perp}=\{X\in\mathfrak{g}\mid K(X,Y)=0,\forall Y\in\mathfrak{g}_1\}$. 由 Killing 型的伴随不变性 $K([\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1^{\perp}],\mathfrak{g}_1)=-K(\mathfrak{g}_1^{\perp},[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1])=0$,可知$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1^{\perp}]\subset\mathfrak{g}_1^{\perp}$,因此$\mathfrak{g}_1^{\perp}$也是不变子空间. 下面记$\mathfrak{g}_1^{\perp}$为$\mathfrak{g}_2$.

第二步:证明 $\dim\mathfrak{g}_1+\dim\mathfrak{g}_2=\dim\mathfrak{g}$.

我们需要下面的线性代数的结果.

引理 3.3.7 设 K 是向量空间$\mathfrak{g}$上的双线性型,则 K 定义了线性映射 $\widetilde{K}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$, $X\mapsto K(X,-)$, K 的核定义为 $\ker\widetilde{K}$,对于$\mathfrak{g}$的任意子空间 h,令 $h^{\perp}$为 h 在$\mathfrak{g}$中关于 K 的正交补空间,则

$$\dim h+\dim h^{\perp}=\dim g+\dim h\cap\ker\widetilde{K}.$$

证明 设 h 为g中的子空间,考虑线性映射 $\widetilde{K}|_h:h\to g^*$ 和它的核空间与余核空间,则有正合序列

$$0\to\ker\widetilde{K}|_h\to h\to g^*\to\mathrm{Coker}\widetilde{K}|_h\to 0,$$

由此 $\dim h+\dim\mathrm{Coker}\widetilde{K}|_h=\dim g+\dim\ker\widetilde{K}|_h$. 而 $\mathrm{Coker}(\widetilde{K}|_h)\cong\ker(\widetilde{K}|_h)^*$,这里$(\widetilde{K}|_h)^*:g\to h^*$,$X\mapsto K(X,-)|_h$ 是$\widetilde{K}|_h$ 的对偶映射,显然 $\ker(\widetilde{K}|_h)^*=h^{\perp}$,而 $\ker\widetilde{K}|_h=h\cap\ker\widetilde{K}$. 代入整理得到引理中的等式.

令 $h=g_1$,$g_2=g_1^{\perp}$,由于 $\ker\widetilde{K}=\{0\}$,可知 $\dim g_1+\dim g_2=\dim g$.

第三步:证明$g_1\cap g_2=\{0\}$.

首先证明$g_1\cap g_2$是g的交换理想. 对 $\forall X\in g$,$Y,Z\in g_1\cap g_2$,则由于g_1与g_2正交. $K(X,[Y,Z])=K([X,Y],Z)=0$. 由 K 非退化,这表明$[Y,Z]=\{0\}$,即$g_1\cap g_2$是交换理想.

对于 $X\in g$,$Y\in g_1\cap g_2$,则线性同态 $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)$将$g$映入$g_1\cap g_2$,将$g_1\cap g_2$映为$\{0\}$. 因此 $K(X,Y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))=0$,这说明$g_1\cap g_2\subset\ker K=\{0\}$. 从而$g_1\cap g_2=\{0\}$. 这证明了$g=g_1\oplus g_2$是直和.

g_1和g_2的半单性的证明作为习题留给读者.

推论 3.3.8 半单李代数g的中心为$\{0\}$.

这只需要注意到 $c(g)\subset\ker K=\{0\}$.

根据推论 3.3.8,定理 3.3.6 及定理 3.2.5,半单李代数g可以分解为维数大于 1 的单理想的直和.

命题 3.3.9 设g是半单李代数,则 $\mathrm{Der}(g)=\mathrm{ad}(g)$,即$g$的任何导子都是内导子.

证明 由于g是半单李代数,g的中心 $c(g)=\{0\}$. 因为此时同态 $\mathrm{ad}:g\to\mathrm{ad}(g):X\mapsto\mathrm{ad}(X)$是同构,所以 $\mathrm{ad}(g)$也是半单的. 再由于 $\mathrm{ad}(g)$是 $\mathrm{Der}(g)$的理想,根据本节习题 4,$\mathrm{Der}(g)$的 Killing 型限制在 $\mathrm{ad}(g)$上是 $\mathrm{ad}(g)$的Killing 型. 设 n 为 $\mathrm{ad}(g)$在 $\mathrm{Der}(g)$中关于 Killing 型的正交补,它也是 $\mathrm{Der}(g)$的理想. 容易看出 $n\cap\mathrm{ad}(g)=\{0\}$,否则这与 $\mathrm{ad}(g)$半单矛盾. 设 $D\in n$,$X\in g$,则$[D,\mathrm{ad}(X)]\in n\cap\mathrm{ad}(g)=\{0\}$. 而$[D,\mathrm{ad}(X)]=\mathrm{ad}(DX)=0$,由于 ad 为同构,这说明 $DX=0$ 对于任意 X 成立,即 $D=0$,故有 $n=\{0\}$. 从而

$$\mathrm{Der}(g)=\mathrm{ad}(g).$$

推论 3.3.10 (1)设g是半单李代数,则 $\mathrm{Inn}(g)$是 $\mathrm{Aut}(g)$的单位元连通分支.

(2)设 G 是连通半单李群,则 $\mathrm{Inn}(G)$是 $\mathrm{Aut}(G)$的单位元连通分支.

习题 3.3

1. 证明：若李代数$\mathfrak{g}$中无非$\{0\}$的交换理想，则$\mathfrak{g}$是半单李代数.

2. 计算 $\mathfrak{u}(n)$的 Killing 型，它是否非退化.

3. 证明：李代数$\mathfrak{g}$的 Killing 型是在 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$下不变的. 即对任意 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$，及 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$K(\sigma(X),\sigma(Y))=K(X,Y)$.

4. 证明：

(1)设$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$，它们的 Killing 型分别为 K,K_1,K_2，则 $K=K_1\oplus K_2$，即对 $X=(X_1,X_2)$，$Y=(Y_1,Y_2)$，$X_1,Y_1\in\mathfrak{g}_1$，$X_2,Y_2\in\mathfrak{g}_2$，

$$K(X,Y)=K_1(X_1,Y_1)+K_2(X_2,Y_2).$$

(2)若 $\mathfrak{h}$ 是李代数$\mathfrak{g}$的理想，设它们的 Killing 型分别为 $K_{\mathfrak{h}}$，K，则有 $K_{\mathfrak{h}}=K|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$，即对任意 $X,Y\in\mathfrak{h}$，$K_{\mathfrak{h}}(X,Y)=K(X,Y)$.

(3)证明：若$\mathfrak{g}$是李代数，且$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$，则$\mathfrak{g}$是半单李代数当且仅当$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$都是半单李代数.

5. 通过建立李代数$\mathfrak{g}$和它的复化$\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ 的 Killing 型之间的关系，证明：$\mathfrak{g}$是半单李代数等价于$\mathfrak{g}\otimes\mathbf{C}$ 是半单李代数.

6. 设$\mathfrak{g}$为半单李代数，$\mathfrak{h}$ 为$\mathfrak{g}$的理想，$\mathfrak{n}$ 为$\mathfrak{h}$ 的理想，证明：$\mathfrak{n}$ 是$\mathfrak{g}$的理想，举例说明同样的结果对一般的情形并不成立.

7. 设$\mathfrak{g}$是半单李代数，K 是$\mathfrak{g}$的 Killing 型，$\mathfrak{g}_1$，$\mathfrak{g}_2$是$\mathfrak{g}$的理想，证明以下三个条件彼此等价.

(1)$\mathfrak{g}_1\cap\mathfrak{g}_2=\{0\}$.

(2)$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]=\{0\}$.

(3)$K(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2)=0$.

§ 3.4 Cartan 的可解性判别法

这一节证明 Cartan 关于李代数可解性的判别法，并由此搞清楚半单李代数的结构.

§ 3.4.1 Cartan 的可解性判别法

首先做一些准备工作.

定义 3.4.1 设 A 是实(或复)向量空间 V 上的线性自映射，

(1)若 A 在复数域中可以对角化，即在 $V\otimes\mathbf{C}$ 中存在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 使得 $A(\boldsymbol{e}_i)=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，其中 $\lambda_i\in\mathbf{C}$，则称 A 是半单的.

(2)若存在正整数 n，使得 $A^n=0$，则称 A 是幂零的.

定义 3.4.2 设 X 是实(或复)李代数$\mathfrak{g}$中的元素，

(1)若 $\mathrm{ad}(X)$是半单的，则称 X 是$\mathfrak{g}$中的半单元素，或 X 是半单的.

(2)若 $\mathrm{ad}(X)$是幂零的，则称 X 是$\mathfrak{g}$中的幂零元素，或 X 是幂零的.

对于李代数 $\mathrm{gl}(V)$中的元素 X，可以把两种半单(幂零)的概念分别称为线性半单(幂零)和 ad 半单(幂零).

命题 3.4.3 设 A 是复向量空间 V 上的线性自映射，则存在半单线性映射 S 和幂零线性映射 N，使得 $A=S+N$，$SN=NS$，称为 A 的 Jordan-Chevalley 分解，而且存在不包含常数项的复系数多项式 $s(x)$，$n(x)$，使得 $S=s(A)$，$N=n(A)$. S 称为 A 的半单部分，N 称为 A 的幂零部分.

证明 上面的分解本质上是线性代数中的 Jordan 分解.

设 A 的特征多项式为 $F(x)=\det(xI-A)=(x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_n)^{k_n}$，令 $F_i(x)=\dfrac{F(x)}{(x-\lambda_i)^{k_i}}$，$1\leqslant i\leqslant n$. 因为 $F_i(x)$，$1\leqslant i\leqslant n$ 是互素的，所以存在多项式 $G_i(x)$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}F_i(x)G_i(x)=1,\text{于是}\sum_{i=1}^{n}F_i(A)G_i(A)=I.$$

这给出分解 $V=IV=\bigoplus\limits_{i=1}^{n}F_i(A)G_i(A)V$，令 $V_i=F_i(A)G_i(A)V$，容易证明 $V_i=\{\boldsymbol{v}\in V\mid(A-\lambda_iI)^{k_i}\boldsymbol{v}=0\}$.

定义 S，使得对任意 $\boldsymbol{v}\in V_i$，$S(\boldsymbol{v})=\lambda_i\boldsymbol{v}$，令 $N=A-S$，则显然 S 是半单的，N 是幂零的.

若 A 是可逆的，则 $\lambda_i\neq0$，$1\leqslant i\leqslant n$. 在多项式环 $\mathbf{C}[x]$中，对 $n+1$ 个互素

的多项式$(x-\lambda_i)^{k_i}$，$1\leqslant i\leqslant n$ 和 x，应用中国剩余定理，得到多项式 $s(x)\equiv\lambda_i \mod (x-\lambda_i)^{k_i}$，且 $s(x)\equiv 0 \mod x$，直接计算可知 $S=s(A)$，且 $s(x)$不包含常数项. 若 A 不可逆，则存在 i，$\lambda_i=0$，此时 $s(x)\equiv\lambda_i \mod (x-\lambda_i)^{k_i}$ 自动导出 $s(x)\equiv 0 \mod x$. 令 $n(x)=x-s(x)$，则 $N=n(A)$，$n(x)$也不包含常数项.

引理 3.4.4 设 V 是有限维向量空间，$A\subset B$ 是 $\mathrm{gl}(V)$的子空间，令

$$W=\{X\in \mathrm{gl}(V)\mid \mathrm{ad}(X)B\subset A\}$$

是 $\mathrm{gl}(V)$中的子空间，证明：$X\in W$ 若满足对任意 $Y\in W$，$\mathrm{Tr}(XY)=0$，则 X 是线性幂零的.

证明 先对 V 是复向量空间的情形证明，设 X 的 Jordan-Chevalley 分解为 $X=S+N$，只需要证明 $S=0$ 即可.

由 S 半单，在 V 中可以找到 S 的一组特征向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$，使得

$$S\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i,1\leqslant i\leqslant n.$$

于是在这个基底下，有 $\mathrm{gl}(V)$的一个基底 e_{ij}，$1\leqslant i,j\leqslant n$，其中 e_{ij}，是将 $\boldsymbol{e}_i$ 映为 $\boldsymbol{e}_j$，将其他基底向量映为 0 的线性映射. 直接计算可得

$$\mathrm{ad}(S)(e_{ij})=(\lambda_i-\lambda_j)e_{ij}.$$

设 $\dim A=r$，$\dim B=s$，则 $r\leqslant s\leqslant n^2$. 由于 $\mathrm{ad}(X)(B)\subset A$，根据本节习题 1 和习题 2 的结论，可知 $\mathrm{ad}(S)(B)\subset A$，于是 $\mathrm{ad}(S)(A)\subset A$，$\mathrm{ad}(S)B\subset B$，这表明 A,B 是 $\mathrm{ad}(S)$不变子空间. 因此 e_{ij}，$1\leqslant i\leqslant n$，可以重新排列后记为 X_1，$X_2,\cdots,X_{n^2}$，使得 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 张成 A，$X_1,X_2,\cdots,X_s$ 张成 B，$X_1,X_2,\cdots,X_{n^2}$ 张成 $\mathrm{gl}(V)$. 定义一一映射 σ：$[1,n^2]\to[1,n]\times[1,n]$及映射 σ_1,σ_2：$[1,n^2]\to[1,n]$，在重排中，若 $X_k=e_{ij}$，则定义 $\sigma(k)=(i,j)=(\sigma_1(k),\sigma_2(k))$. 由 $\mathrm{ad}(S)(B)\subset A$，可知当 $r+1\leqslant k\leqslant s$ 时，$\mathrm{ad}(S)(X_k)=(\lambda_{\sigma_1(k)}-\lambda_{\sigma_2(k)})X_k=0$，此时必有 $\lambda_{\sigma_1(k)}=\lambda_{\sigma_2(k)}$. 令 Y 为 $\mathrm{gl}(V)$中的元素，满足 $Y(\boldsymbol{e}_i)=\mu_i\boldsymbol{e}_i$，且当 $r+1\leqslant k\leqslant s$ 时，$\mu_{\sigma_1(k)}=\mu_{\sigma_2(k)}$，则显然 $Y\in W$. 直接计算 $\mathrm{Tr}(XY)=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i\mu_i=0$，由 μ_i，$1\leqslant i\leqslant n$ 除了满足当 $r+1\leqslant k\leqslant s$ 时，$\mu_{\sigma_1(k)}=\mu_{\sigma_2(k)}$ 外，可以任意选取，可知对任意 i，$\lambda_i=0$，这说明 $S=0$. 于是引理得证.

实的情形通过复化可以类似的证明.

下面来证明 Cartan 关于李代数可解性的判别法.

定理 3.4.5 设$\mathfrak{g}$为李代数 $\mathrm{gl}(V)$的子代数，若对于任意 $X\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，$Y\in\mathfrak{g}$，都有 $\mathrm{Tr}(XY)=0$，则$\mathfrak{g}$是可解李代数.

证明 根据§3.1 的习题 3，要证明$\mathfrak{g}$是可解李代数，只需证明 $D\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$是幂零李代数. 再根据 Engel 定理，只需证明对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$[X,Y]$是幂零元素.

令 $A=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，$B=\mathfrak{g}$，$W=\{Z\in\mathrm{gl}(V)\mid\mathrm{ad}(Z)(\mathfrak{g})\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\}$，显然$\mathfrak{g}\subset W$.

下面利用引理 3.4.4 来证明，已知对于任意 $Z\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{Tr}([X,Y]Z)=0$，而引理要求更强的条件：对于任意 $Z\in W$，$\mathrm{Tr}([X,Y]Z)=0$.

注意到对任意 $Z\in W$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}([X,Y]Z)&=\mathrm{Tr}(XYZ-YXZ)=\mathrm{Tr}(XYZ-XZY)\\&=\mathrm{Tr}(X[Y,Z])=\mathrm{Tr}([Y,Z]X).\end{aligned}$$

由 W 的定义$[Y,Z]\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，因此 $\mathrm{Tr}([Y,Z]X)=0$，于是引理的条件满足，这证明了对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$[X,Y]$是幂零元素. 于是定理得证.

把定理的结果应用到李代数$\mathfrak{g}$的伴随表示，则有下面的重要推论.

推论 3.4.6(Cartan 判别法)　设$\mathfrak{g}$为李代数，若对任意 $X\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，$Y\in\mathfrak{g}$，$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y))=0$，则$\mathfrak{g}$是可解的.

证明　考虑李代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\subseteq\mathrm{gl}(\mathfrak{g})$，对 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$应用定理 3.4.5 可知 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$是可解李代数. 又 $c(\mathfrak{g})$为可解李代数，$\mathfrak{g}/c(\mathfrak{g})\cong\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$，于是$\mathfrak{g}$为可解李代数.

§3.4.2　可解李代数和半单李代数的关系

下面讨论可解李代数和半单李代数的联系.

命题 3.4.7　维数大于 1 的单李代数是半单李代数.

证明　设$\mathfrak{g}$是维数大于 1 的单李代数，则 $D\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$. 若$\mathfrak{g}$不是半单的，记$\mathfrak{g}$上的 Killing 型为$(,)$，则$\mathfrak{g}$在 Killing 型下的正交补$\mathfrak{g}^{\perp}$非$\{0\}$，于是由$\mathfrak{g}$是单李代数必有$\mathfrak{g}^{\perp}=\mathfrak{g}$，即对任意 $X,Y\in\mathfrak{g}$，$(X,Y)=0$，由 Cartan 判别法可知$\mathfrak{g}$是可解的，从而$\mathrm{D}\mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}$. 这导出矛盾.

利用 Cartan 关于可解李代数的判别法，可以证明下面的重要定理.

定理 3.4.8　设$\mathfrak{g}$是李代数，则下面各条性质是等价的.

(1)$\mathfrak{g}$是半单的.

(2)$\mathfrak{g}$中没有非$\{0\}$的交换理想.

(3)$\mathfrak{g}$中没有非$\{0\}$的可解理想.

(4)$\mathfrak{g}$的根 $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})=\{0\}$.

(5)$\mathfrak{g}$可以写成维数大于 1 的单理想的直和$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$.

(6)$\mathfrak{g}$是中心为零的约化李代数.

证明　用$(,)$表示$\mathfrak{g}$的 Killing 型.

(1)⇒(2)，设$\mathfrak{g}$是半单的，若 $\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$中的非$\{0\}$交换理想，则对于任意 $X\in\mathfrak{h}$，$Y\in\mathfrak{g}$，显然 $\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{h}$，$\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)\mathfrak{h}=\{0\}$，这表明$(\mathfrak{h},\mathfrak{g})=0$，与$(,)$非退化矛盾.

(2)⇒(3)，若$\mathfrak{g}$中存在非 0 可解理想 $\mathfrak{h}$，若 $\mathfrak{h}$ 交换，则与(2)矛盾. 否则，存在 $n\geqslant 1$，使得 $D^n\mathfrak{h}=\{0\}$，但是 $D^{n-1}\mathfrak{h}\neq\{0\}$，于是 $D^{n-1}\mathfrak{h}$ 为$\mathfrak{g}$的非零交换理想，与(2)矛盾.

(3)⇒(4)，实际上(3)和(4)等价.

(4)⇒(1)，设 $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})=\{0\}$，令 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^{\perp}$，则对任意 $X\in\mathfrak{g}$，$Y\in\mathfrak{h}$，$(X,Y)=0$. 特别的对任意 $X\in[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]$，$Y\in\mathfrak{h}$，$(X,Y)=0$，这说明 $\mathfrak{h}$ 是可解理想，因此 $\mathfrak{h}\subset\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$，于是 $\mathfrak{h}=0$，即 Killing 型非退化. 故$\mathfrak{g}$是半单的.

(1)⇒(5)，是上节的结论. (5)⇒(1). 这是命题 3.4.7 的自然结果. (5)和(6)显然等价.

可以证明，对于任意李代数$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$是半单李代数. 从这一意义上看，可以说可解李代数和半单李代数是李代数的两种极端情形. 下面的定理在把关于可解李代数和半单李代数的性质推广到一般李代数时非常重要. 我们只叙述结论，不给出证明.

定理 3.4.9(Levi)　设$\mathfrak{g}$是李代数，在$\mathfrak{g}$中有可解理想 $\mathfrak{h}$，使得$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是半单李代数，则存在$\mathfrak{g}$的半单子代数 $\mathfrak{k}\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，且$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{k}$，这里的直和是指子空间的直和，不是李代数的直和.

习题 3.4

1. 证明：

(1)命题 3.4.3 中的分解是唯一的，即若

$$A=S+N, SN=NS \text{ 和 } A=S'+N', S'N'=N'S'$$

是 A 的两个 Jordan-Chevalley 分解，则 $S=S'$，$N=N'$.

(2)对于 V 中的任何子空间 V_1, V_2，若 $AV_1\subset V_2$，则 $SV_1\subset V_2$，$NV_1\subset V_2$.

2. 证明：(1)若 $X\in \mathrm{gl}(V)$是线性半单的，则 $\mathrm{ad}(X)$是 ad 半单的.

(2)若 $X\in \mathrm{gl}(V)$是线性幂零的，则 $\mathrm{ad}(X)$是 ad 幂零的.

(3)若 $X=S+N$ 是 X 的 Jordan-Chevalley 分解，则

$$\mathrm{ad}(X)=\mathrm{ad}(S)+\mathrm{ad}(N)$$

是 $\mathrm{ad}(X)$的 Jordan-Chevalley 分解.

3. 证明：g 是可解李代数，当且仅当 Killing 型的核为 $Dg=[g, g]$.

4. 证明：幂零李代数的 Killing 型平凡(即恒为 0). 但命题反过来不对，试找出一个李代数g，它的 Killing 型平凡，但却不是幂零李代数.

第 4 章 紧李代数的结构和分类

本章将主要给出一类特殊的约化李代数,即紧李代数的分类.紧李代数的结构、表示都较为简单.而一般的实或复约化李代数的分类问题,也可以归结为紧李代数的情形.

在本章第 1 节中,介绍了紧李群上的不变积分,证明紧李群是约化李群;在第 2 节和第 3 节讨论了紧李代数的 Cartan 子代数,引进了根系和 Cartan 分解并讨论了它们的性质;第 4 节和第 5 节对根系进行了一般的讨论,引进了与之紧密相关的素根系、Weyl 群、Weyl 房、Cartan 矩阵和 Dynkin 图等概念;第 6 节给出了根系对应的所有可能的 Dynkin 图;第 7 节给出了 Cartan 子代数的共轭性定理,由此可知 Dynkin 图是李代数的不变量;第 8 节和第 9 节利用前面的讨论结果分别给出了紧半单李代数和复半单李代数的分类.

§4.1 紧李群上的不变积分

这一节给出紧李群上与不变积分有关的一些重要结果.

定义 4.1.1 李群 G 称为紧李群,若它对应的拓扑空间是紧致的.

由定义容易知道紧李群仅有有限个连通分支. 以下为了方便,假定所讨论的李群都是连通李群.

下面的体积形式和不变积分在研究紧李群的结构中起着重要作用.

引理 4.1.2 设 G 是紧李群,选取 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个基底 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,设它们对偶的 Maurer-Cartan 形式是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$,即 $\langle w_i, X_j\rangle=\delta_{ij}$,则 n 次外微分形式 $w=w_1\wedge w_2\wedge\cdots\wedge w_n$ 是 G 上的左不变的体积形式,且对于不同的基底的选取,w 在相差一个常数倍数的意义下是唯一的.

证明很容易,请读者自己去验证.

G 的切丛是平凡的,G 上的体积形式给出了 G 的一个定向. 由于 G 的紧致性和 w 是体积形式,可知积分 $\int_G w$ 存在,且不为 0. 令 $\sigma=\dfrac{w}{\int_G w}$,则 $\int_G \sigma=1$.

下面在 G 上定义不变积分. 以 $C(G)$ 记 G 上所有实值或复值的连续函数构成的向量空间,定义积分 $\int_G: C(G)\to\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),使得 $f\mapsto\int_G f\sigma$.

σ 给出了 G 上的一个左不变测度,所以积分 $\int_G f\sigma$ 也可写成 $\int_G f d\sigma$,为强调积分变量,也可写成 $\int_G f(a)\sigma(a)$ 或 $\int_G f(a)\mathrm{d}\sigma(a)$. 注意这里 $\mathrm{d}\sigma$ 表示体积元,而不是外微分.

上面的积分满足一些重要的性质.

定理 4.1.3 设 f, g 是 G 上的连续函数,则有

(1)对任意 $\lambda, \mu\in\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$, $\int_G(\lambda f+\mu g)\sigma=\lambda\int_G f\sigma+\mu\int_G g\sigma$.

(2)对任意 $c\in G$, $\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f(ca)\sigma(a)$.

(3)对任意 $c\in G$, $\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f(ac)\sigma(a)$.

(4) $\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f(a^{-1})\sigma(a)$.

证明 (1)由积分的线性性显然.

(2)首先证明 $\int_G f(a)\mathrm{d}\sigma(a)=\int_G f(ca)\mathrm{d}\sigma(a)$,令 $\varphi=L_c:G\to G,b\mapsto a=cb$,应用命题 1.3.10,则

$$\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f\sigma=\int_G \mathrm{d}\varphi^*(f\sigma)=\int_G f(cb)\mathrm{d}L_c{}^*(\sigma(cb))$$
$$=\int_G f(cb)\sigma(b)=\int_G f(ca)\sigma(a).$$

(3)考虑到在李群上左、右乘法的可交换性,即 $L_a\circ R_c=R_c\circ L_a$,可得 $\mathrm{d}L_a^*\circ\mathrm{d}R_c^*=\mathrm{d}R_c^*\circ\mathrm{d}L_a^*$,把它作用到 σ 上得到 $\mathrm{d}L_a^*(\mathrm{d}R_c^*(\sigma))=\mathrm{d}R_c^*(\sigma)$,即 $\mathrm{d}R_c^*(\sigma)$是左不变的,从而存在实数 $\lambda(c)$,使得 $\mathrm{d}R_c^*(\sigma)=\lambda(c)\sigma$.

对映射 $\varphi=R_c:G\to G$ 应用命题 1.3.10,类似的可以得到 $\int_G f(a)\sigma(a)=\lambda(c)\int_G f(ac)\sigma(a)$. 在上式中取 $f=1$,得到 $\lambda(c)=1$. 这表明 $\mathrm{d}R_c^*(\sigma)=\sigma$,即 σ 也是右不变的. 这证明了 $\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f(ac)\sigma(a)$.

(4)设 τ 为取逆映射,则 $\tau\circ L_a=R_{a^{-1}}\circ\tau$,因此 $\mathrm{d}L_a^*(\mathrm{d}\tau^*(\sigma))=\mathrm{d}\tau^*(\sigma)$,类似的可以证明 $\mathrm{d}\tau^*(\sigma)=\sigma$,即 σ 是 τ 不变的及 $\int_G f(a)\sigma(a)=\int_G f(a^{-1})\sigma(a)$.

紧李群上的如上的测度也称为 Haar 测度,它同时是左右不变的,且关于求逆映射也不变,存在不变测度是紧李群的本质特征. 不变测度或者称为不变积分在代数和几何上有很多重要的应用.

为了刻画紧李群的李代数,引进下面的概念.

定义 4.1.4 (1)设李群 G 有表示 $\phi:G\to\mathrm{GL}(V)$,若在 V 上有内积(,)满足对所有的 $a\in G,v_1,v_2\in V,(\phi(a)v_1,\phi(a)v_2)=(v_1,v_2)$,则称(,)为表示 ϕ 的不变内积.

(2)设李代数g有表示 $\rho:g\to\mathrm{gl}(V)$,若在 V 上有内积(,)满足对所有的 $a\in G,v_1,v_2\in V,(\rho(X)v_1,v_2)+(v_1,\rho(X)v_2)=0$,则称(,)为表示 ρ 的不变内积.

(3)若李代数g的伴随表示有不变内积,即存在g上的内积,使得对任意 $X,Y,Z\in g,([Z,X],Y)+(X,[Z,Y])=0$,则称$g$是紧李代数.

关于不变内积有下面的事实,证明留给读者.

引理 4.1.5 设连通李群 G 在向量空间 V 上有表示 ϕ,设它诱导出的李代数的表示为 $\mathrm{d}\phi$,则(,)是 V 上的 ϕ 不变内积当且仅当它是 V 上的 $\mathrm{d}\phi$ 不变内积.

下面定理断言紧李群的任意表示存在不变内积.

定理 4.1.6 设 G 是紧李群，则 G 的任意表示 ϕ 的表示空间 V 上存在不变内积.

证明 任取 V 上的一个内积 $\langle\,,\rangle$，定义 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_G \langle b\boldsymbol{u},b\boldsymbol{v}\rangle\sigma(b)$，则对任意 $a\in G$，$(a\boldsymbol{u},a\boldsymbol{v})=\int_G \langle ab\boldsymbol{u},ab\boldsymbol{v}\rangle\sigma(b)$，利用定理 4.1.3 中的性质(2)，可知 $\int_G \langle ab\boldsymbol{u},ab\boldsymbol{v}\rangle\sigma(b)=\int_G \langle b\boldsymbol{u},b\boldsymbol{v}\rangle\sigma(b)=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$，即$(\,,)$是 V 上的不变内积.

注意在这里，如果 V 是实向量空间，任给其上的一个实内积，那么得到一个 G 不变的实内积，如果 V 是复向量空间，任给其上的一个 Hermite 内积，那么得到一个不变的 Hermite 内积.

定理 4.1.7 紧李群 G 的任意表示都是完全可约的.

证明 设 ϕ 为 G 的一个表示，V 为表示空间，由定理 4.1.6，V 上有不变内积$(\,,)$. 设 V_1 为表示 ϕ 的不变子空间，则令 $V_2=V_1^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in V\mid \boldsymbol{v}\perp V_1\}$，则容易验证 $V=V_1\oplus V_2$，由内积的不变性 V_2 也是表示 ϕ 的不变子空间. 这表明 ϕ 是完全可约的.

根据前面关于约化李群和约化李代数的讨论，有

定理 4.1.8 设 G 是紧李群，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，则

(1)G 是约化李群.

(2)G 的任意有限维表示是完全可约的.

(3)G 有分解 $G=C(G)G_1G_2\cdots G_k$，其中 G_i 是 G 的连通单正规子群.

(4)$\mathfrak{g}$ 有分解$\mathfrak{g}=c(\mathfrak{g})\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$，其中$\mathfrak{g}_i$是$\mathfrak{g}$的单理想.

由定理 4.1.6 紧李群的伴随表示上也有不变内积，即存在$(\,,)$使得对任意 $a\in G,X,Y\in\mathfrak{g}$，$(\mathrm{Ad}(a)X,\mathrm{Ad}(a)Y)=(X,Y)$. 令 $a=\exp(tZ)$，对 t 微分，得到

$$([Z,X],Y)+(X,[Z,Y])=0,$$

于是有

推论 4.1.9 紧李群 G 的李代数$\mathfrak{g}$是紧李代数.

事实上还可以说明对于任意的紧李代数，总存在某个紧李群，以它为李代数.

习题 4.1

1. 证明:李群 $\mathrm{O}(p,q)$,$\mathrm{U}(p,q)$,$\mathrm{Sp}(p,q)$,当 $p,q\geqslant 1$ 时都不是紧李群.
2. $\mathrm{sl}(2,\mathbf{R})$是不是紧李代数,为什么?
3. 试给出 $\mathrm{u}(n)$上的一个不变内积.
4. 计算 $\mathbf{R}$ 上的仿射变换群 $Aff(1)=\{f(x)=ax+b\,|\,a,b\in\mathbf{R}\}$的左不变体积形式和右不变体积形式,它们是否相同?
5. 计算 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$上的左不变体积形式.
6. 利用紧李群的表示空间上的不变内积,证明:对 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的任意紧子群 G,存在 $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$,使得 $AGA^{-1}\subset\mathrm{O}(n)$,这表明 $\mathrm{O}(n)$是 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$的极大紧子群.对 $\mathrm{GL}(n,\mathbf{C})$,进行类似的讨论.

§ 4.2 紧李代数的 Cartan 子代数和 Cartan 分解

这一节开始研究紧李代数的结构.

以后为了方便，以g_0记一个紧李代数. 用g表示g_0复化之后得到的复李代数，即$g=g_0\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$，作为集合$g=g_0\oplus\sqrt{-1}g_0=\{X+\sqrt{-1}Y\mid X,Y\in g_0\}$. 其上的加法和数乘定义为

$$(X_1+\sqrt{-1}Y_1)+(X_2+\sqrt{-1}Y_2)=(X_1+X_2)+\sqrt{-1}(Y_1+Y_2).$$

$$(\lambda+\sqrt{-1}\mu)(X+\sqrt{-1}Y)=(\lambda X-\mu Y)+\sqrt{-1}(\lambda Y+\mu X).$$

g_0上的李代数结构自然诱导出g上的李代数结构，即对

$$X_1+\sqrt{-1}Y_1,X_2+\sqrt{-1}Y_2\in g,$$

$$\begin{aligned}&[X_1+\sqrt{-1}Y_1,X_2+\sqrt{-1}Y_2]\\&=([X_1,X_2]-[Y_1,Y_2])+\sqrt{-1}([X_1,Y_2]+[Y_1,X_2]).\end{aligned}$$

这样得到的复李代数g的复维数与g_0的实维数相同，且若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为g_0的一个基底，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 也构成g的一个基底. 若将g看成实李代数，记为$g_{\mathbf{R}}$，它的基底可以选为

$$X_1,X_2,\cdots,X_n,\sqrt{-1}X_1,\sqrt{-1}X_2,\cdots,\sqrt{-1}X_n.$$

在g上有自然的复共轭映射 $X+\sqrt{-1}Y\mapsto X-\sqrt{-1}Y$，它是实李代数$g_{\mathbf{R}}$的自同构，$g_0$恰为这一自同构的不变子代数.

g_0上的不变内积(,)也可以诱导出g上的不变的复对称双线性型(,)，它是g_0的不变内积的复化. 即

$$\begin{aligned}&(X_1+\sqrt{-1}Y_1,X_2+\sqrt{-1}Y_2)\\&=((X_1,X_2)-(Y_1,Y_2))+\sqrt{-1}((X_1,Y_2)+(Y_1,X_2)).\end{aligned}$$

注意对 $X,Y\in g$，(X,Y)是复数，$(X,X)\geqslant 0$ 不一定成立，但是总有$(X,\overline{X})\geqslant 0$，且等号成立当且仅当 $X=0$.

引理 4.2.1 设g_0是紧李代数，它有不变内积(,)，则在g_0的复化g上有不变双线性型，仍记为(,)，使得对任意 $X_1,X_2,Y_1,Y_2\in g_0$，$(X_1+\sqrt{-1}X_2,Y_1+\sqrt{-1}Y_2)=((X_1,Y_1)-(X_2,Y_2))+\sqrt{-1}((X_2,Y_1)+(X_1,Y_2))$. 且

(1)(,)是不变双线性型，即对任意 $X,Y,Z\in g$，

$$([Z,X],Y)+(X,[Z,Y])=0.$$

(2)(,)是非退化的，即若 $X\in g$满足$(X,g)=0$，则必有 $X=0$.

证明 由原来的实内积的不变性，显然双线性型(X,Y)是不变的. 下面

说明它非退化，设存在 $X=A+\sqrt{-1}B\in g$，使得 $(X,g)=0$，则 $(X,g_0)=0$. 考虑 X 的实部和虚部，则显然 $(A,g_0)=0$，$(B,g_0)=0$，于是 $A=B=0$，即 $X=0$.

下面的概念是理解紧李代数的结构时的一个基本概念.

定义 4.2.2 紧李代数 g_0 中的极大交换子代数 h_0 称为 g_0 的 Cartan 子代数.

不难说明 Cartan 子代数是存在的. 对选定的 Cartan 子代数 h_0，h_0 的复化 $h=h_0\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\subseteq g$，则有 h_0 是 g_0 的 Cartan 子代数当且仅当 h 是 g 的极大交换子代数，这时也称 h 是 g 的 Cartan 子代数. 证明留给读者.

下面通过考虑 g_0 的伴随表示 ad 来揭示 g_0 的结构. 通过将 g_0 复化，得到 g_0 在 g 上的表示 $\mathrm{ad}: g_0\to \mathrm{gl}(g_0)\to \mathrm{gl}(g)$，这是 g_0 的伴随表示的复化.

下面将 g_0 在 g 上的复表示 ad 限制在 h_0 上来讨论.

引理 4.2.3 (1)设紧李代数 g_0 的伴随表示复化得到的 g_0 在 g 上的复表示为 $\mathrm{ad}:\mathrm{ad}(X_0)Y=[X_0,Y]$，把它限制在 h_0 上得到的 h_0 的复表示记为 $\mathrm{ad}|_{h_0}$，则 $\mathrm{ad}|_{h_0}$ 可以分解为一维不可约复表示的直和，即存在 g 的一个基底 X_1，$X_2,\cdots,X_n$，使得每个 X_i 张成一维的 $\mathrm{ad}(h_0)$ 不变子空间.

(2)对任意 $X_0\in h_0$，存在纯虚数 $\lambda_i(X_0)$（包括 0），$1\leqslant i\leqslant n$，使得

$$\mathrm{ad}(X_0)X_i=\lambda_i(X_0)X_i.$$

证明 (1)这是因为 h_0 是交换李代数，所以它的复表示可以分解为一维不可约表示的直和.

(2)由(1)，可知存在函数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n: h_0\to \mathrm{gl}(1,\mathbf{C})\cong\mathbf{C}$，使得 $\mathrm{ad}(X_0)X_i=\lambda_i(X_0)X_i$. 注意 $\lambda_i(X_0)$，$1\leqslant i\leqslant n$，恰好是 $\mathrm{ad}(X_0)$ 的 n 个特征值. 对表达式 $\mathrm{ad}(X_0)X_i=\lambda_i(X_0)X_i$ 取共轭，可知 $\mathrm{ad}(X_0)\overline{X}_i=\overline{\lambda_i(X_0)}\overline{X}_i$，由伴随不变性 $(\mathrm{ad}(X_0)X_i,\overline{X}_i)+(X_i,\mathrm{ad}(X_0)\overline{X}_i)=0$，可得 $(\lambda_i(X_0)+\overline{\lambda_i(X_0)})(X_i,\overline{X}_i)=0$. 由于 $(X_i,\overline{X}_i)>0$，可知 $\lambda_i(X_0)+\overline{\lambda_i(X_0)}=0$，即 $\lambda_i(X_0)$ 为纯虚数.

实际上伴随不变性表明 $\mathrm{ad}(X_0)$ 是实反对称的算子，所以它的特征值为 0 或者是纯虚数，于是 λ_i，$1\leqslant i\leqslant n$ 可以看成 h_0 上的纯虚值的函数，由

$$\mathrm{ad}(X_0+Y_0)=\mathrm{ad}(X_0)+\mathrm{ad}(Y_0)\text{ 和 }\mathrm{ad}(kX_0)=k\mathrm{ad}(X_0),k\in\mathbf{R}$$

容易看出 λ_i 是 $\sqrt{-1}h_0^*$ 中的元素，这里 $\sqrt{-1}h_0^*$ 表示 h_0 上的纯虚值的线性函数构成的实向量空间.

利用 g 的不变对称双线性型，还可以把 λ_i 看成 $\sqrt{-1}h_0$ 中的元素.

定义 4.2.4 g_0 上的不变内积限制在 h_0 上给出 h_0 的内积，利用它定义向量空间的同构 $\varphi:\sqrt{-1}h_0\to\sqrt{-1}h_0^*: Y_0\to\varphi(Y_0)$，其中

$$\varphi(Y_0)(X_0)=(Y_0,X_0).$$

设 $\alpha_i=\varphi^{-1}(\lambda_i)$，即对任意 $X_0\in h_0$，$\lambda_i(X_0)=(\alpha_i,X_0)$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中的非 0 元素称为g_0关于 Cartan 子代数 h_0 和不变内积(,)的根，简称为根. 所有的根构成的集合称为g_0的根系，记为 Δ.

注意根系不仅跟 Cartan 子代数 h_0 的选取有关，也跟不变内积的选取有关. 由于 $\alpha\in\Delta$ 在 $\sqrt{-1}h_0$ 中，容易看出 $\bar{\alpha}=-\alpha$，且$(\alpha,\alpha)<0$.

到这里可以把前面的一些结果和线性代数中的结果做一些比较. 在线性代数中，对于一个线性算子 $A:V\to V$，可以讨论它的特征值和特征子空间，若 A 是半单的(即可以对角化)，则特征子空间可以分解成一维的不变子空间的直和. 在这里我们讨论的不是一个算子，而是可交换的一族半单的算子 $\mathrm{ad}(X_0):g\to g$，$X_0\in h_0$，我们知道交换的半单算子可以同时对角化，也就是g可以分解为这族算子的公共的一维特征子空间的直和. 原来的单个特征值在这里变为一族特征值 $\lambda_i(X_0)$，$X_0\in h_0$，它可以看成 h_0 上的线性函数. 从这个角度来看，下面的特征子空间的分解也就很自然了.

令g中的向量 X_i 张成的一维线性子空间为g_i，首先把所有对应于 $\alpha_i=0$ 的g_i直和起来，记为 $\tilde{h}$，后面将证明它就是 h. 再考虑 $\alpha_i\neq0$ 的g_i，这些g_i恰好是 Δ 中元素对应的g_i. 若 $\alpha_{i_1}=\alpha_{i_2}=\cdots=\alpha_{i_k}=\alpha$，则将它们对应的$g_i$也都直和起来，记为$g_\alpha$. 换句话说，就是把具有公共特征根的那些一维特征子空间归并起来. 则有下面的结果.

定理 4.2.5 设g_0为紧李代数，具有不变内积(,)，h_0 是g_0的一个 Cartan 子代数，g_0的复化为g，则$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$，称为$g$关于 Cartan 子代数 h 的Cartan 分解，其中$h=\tilde{h}=\{X\in g\mid \mathrm{ad}(X_0)(X)=0,\forall X_0\in h_0\}$，

$$g_\alpha=\{X\in g\mid \mathrm{ad}(X_0)(X)=(\alpha,X_0)X,\forall X_0\in h_0\}.$$

证明 由特征子空间分解等式$g=\tilde{h}\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$ 显然成立.

唯一需要证明的是 $\tilde{h}=h$. 因为$[h_0,h]=0$，所以 $h\subseteq\tilde{h}$. 对任意 $X\in\tilde{h}$，根据 $\tilde{h}$ 的定义，X,h 可交换，于是 X,h 张成g的一个交换子代数 h'. 由于 h 是极大交换子代数，只能有 $h'=h$，这说明 $X\in h$，即 $\tilde{h}\subseteq h$，于是 $\tilde{h}=h$.

下面利用 Cartan 分解来讨论紧李代数的一些性质.

定理 4.2.6 紧李代数g_0的 Killing 型是半负定的，它的核为g_0的中心 $c(g_0)$.

证明 对于任意 $X_0\in g_0$，由本节习题 3，$\mathrm{ad}(X_0)$是半单的，它在对角化之后对角线上的元素为纯虚数，设为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，则

$$K(X_0,X_0)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X_0)\mathrm{ad}(X_0))=\sum_i a_i^2\leqslant0,$$

这表明 Killing 型是半负定的. 对于半负定的双线性型 K, 不难说明 $\operatorname{Ker} K=\{X_0\in g_0 \mid K(X_0,X_0)=0\}$, 而 $K(X_0,X_0)=0$ 当且仅当对任意 $1\leqslant i\leqslant n, a_i=0$, 即 $\operatorname{ad}(X_0)=0$, 这表明 $X_0\in c(g_0)$.

推论 4.2.7　若g_0是紧李代数, 且 $c(g_0)=0$, 则 $-K$ 是g_0上的伴随不变内积.

下面计算 h 在g中的正规化子.

引理 4.2.8　条件如上, 则 $n_g(h)=h$.

证明　设 $X\in n_g(h)$, 根据 Cartan 分解, $X=X_0+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}X_\alpha$, 其中 $X_0\in h$, $X_\alpha\in g_\alpha$. 于是对任意 $Y\in h$, $[Y,X]\in h$, 但

$$[Y,X]=[Y,X_0]+\sum_{\alpha\in\Delta}[Y,X_\alpha]=\sum_{\alpha\in\Delta}(\alpha,Y)X_\alpha.$$

这说明对任意 $Y\in h$, $\alpha\in\Delta$, $(\alpha,Y)X_\alpha=0$, 特别取 $Y=\alpha$, 由 $(\alpha,\alpha)\neq 0$, 知 $X_\alpha=0$, 这证明了 $X\in h$.

从上面结果马上可以得到

推论 4.2.9　(1) $n_{g_0}(h_0)=h_0$.　　(2) $c_g(h)=h$, $c_{g_0}(h_0)=h_0$.

证明留给读者.

最后, 用一个例子来结束这一节.

例 4.2.10　$g_0=\mathrm{u}(n)$的根系

$\mathrm{u}(n)$中有 Cartan 子代数 h_0, 其中元素形如

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{-1}x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{-1}x_n \end{pmatrix},$$

$\mathrm{u}(n)$的伴随表示为 $\operatorname{ad}: \mathrm{u}(n)\times\mathrm{u}(n)\to\mathrm{u}(n)$, $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\mapsto[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$. $\mathrm{u}(n)\subset\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$包含所有反 Hermite 矩阵, 而$\sqrt{-1}\mathrm{u}(n)$包含所有 Hermite 矩阵, 它们的交为$\{0\}$, 于是 $\mathrm{u}(n)\otimes\mathbf{C}=\mathrm{u}(n)\oplus\sqrt{-1}\mathrm{u}(n)$可以自然等同于 $\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$. 在此等同下, 对 $\boldsymbol{X}\in\mathrm{u}(n)$, $\boldsymbol{Y}\in\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})$, 伴随表示形式上仍为

$$\operatorname{ad}(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{Y})=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}].$$

将伴随表示限制到 Cartan 子代数上, 直接计算可知对

$$X=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{-1}x_2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{-1}x_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{-1}x_n\end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix}y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1,n-1} & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2,n-1} & y_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n-1} & y_{n-1,n}\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n,n-1} & y_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)Y &= XY-YX\\ &=\begin{pmatrix}\lambda_{11}y_{11} & \lambda_{12}y_{12} & \cdots & \lambda_{1,n-1}y_{1,n-1} & \lambda_{1n}y_{1n}\\ \lambda_{21}y_{21} & \lambda_{22}y_{22} & \cdots & \lambda_{2,n-1}y_{2,n-1} & \lambda_{2n}y_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_{n-1,1}y_{n-1,1} & \lambda_{n-1,2}y_{n-1,2} & \cdots & \lambda_{n-1,n-1}y_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n}y_{n-1,n}\\ \lambda_{n1}y_{n1} & \lambda_{n2}y_{n2} & \cdots & \lambda_{n,n-1}y_{n,n-1} & \lambda_{nn}y_{nn}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这里对任意 $1\leqslant i,j\leqslant n$,$\lambda_{ij}(X)=\sqrt{-1}(x_i-x_j)$. 令 E_{ij} ,$1\leqslant i,j\leqslant n$ 为 i 行 j 列的元素为 1,其他元素均为 0 的矩阵,g_{ij} 为 E_{ij} 张成的一维子空间,则 g_{ij} 是 $\mathrm{ad}(h_0)$不变的子空间.

$$\mathrm{ad}(X)E_{ij}=\sqrt{-1}(x_i-x_j)E_{ij}.$$

于是得到 Cartan 分解:$\mathrm{gl}(n,\mathbf{C})=h\oplus\sum\limits_{i\neq j}g_{ij}$.

在g_0上给定不变内积$(X,Y)=-\mathrm{Tr}(XY)$, $\forall\, X,Y\in g_0$. 在 h_0 上对

$$X=\sqrt{-1}\mathrm{diag}[x_1,x_2,\cdots,x_n],Y=\sqrt{-1}\mathrm{diag}[y_1,y_2,\cdots,y_n],$$

$$(X,Y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

设 $e_1=\mathrm{diag}[1,0,\cdots,0]$,$e_2=\mathrm{diag}[0,1,\cdots,0]$,$\cdots$,$e_n=\mathrm{diag}[0,0,\cdots,1]$,则根系 $\Delta=\{e_i-e_j\mid 1\leqslant i\neq j\leqslant n\}$.

对于 $\mathrm{su}(n)$的根系,除了在上面加上条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 及$\mathrm{su}(n)\otimes\mathbf{C}=\mathrm{sl}(n,\mathbf{C})$外,计算完全类似.

习题 4.2

1. 设紧李代数$\mathfrak{g}_0$的复化为$\mathfrak{g}$，证明：$\mathfrak{h}_0$ 是$\mathfrak{g}_0$的 Cartan 子代数当且仅当 $\mathfrak{h}_0$ 的复化 $\mathfrak{h}$ 是$\mathfrak{g}$的 Cartan 子代数.

2. 设 $\mathfrak{h}_0$ 是紧李代数$\mathfrak{g}_0$的 Cartan 子代数，证明：$\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0)=\mathfrak{h}_0$.

3. 李代数$\mathfrak{g}$中的一个元素 X 称为半单的，若 $\mathrm{ad}(X)$在复数域上可以对角化. 利用不变内积的存在性，证明：紧李代数中的任意元素都是半单的.

4. 证明推论 4.2.9.

5. 计算紧李群 $\mathrm{SO}(n)$和 $\mathrm{Sp}(n)$的根系和 Cartan 分解.

§4.3 紧李代数的根系和结构

这一节将在上节的基础上对紧李代数的根系进行详尽的讨论. 记号和约定同上节.

命题 4.3.1 根系 Δ 满足下列性质.

(1)设 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$,则$g_\alpha,g_\beta$互相正交.

(2)$[g_\alpha,g_\beta]\subseteq g_{\alpha+\beta}$. 若 $\alpha=0$,约定$g_\alpha=\{X\in g\mid[X_0,X]=0,\forall X_0\in h_0\}=h$ 若 $\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$,约定$g_\alpha=\{0\}$.

(3)设 $\alpha\in\Delta$,则$-\alpha\in\Delta$,且$\bar{g}_\alpha=g_{-\alpha}$. 对任取 $X_\alpha\in g_\alpha,X_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$,则

$$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=(X_\alpha,X_{-\alpha})\alpha.$$

证明 (1)设 $X_\alpha\in g_\alpha,X_\beta\in g_\beta$,对任意 $X_0\in h_0$,由(,)的伴随不变性,

$$(\mathrm{ad}(X_0)X_\alpha,X_\beta)+(X_\alpha,\mathrm{ad}(X_0)X_\beta)=0,$$

可得$(\alpha+\beta,X_0)(X_\alpha,Y_\beta)=0$. 若 $\alpha+\beta\neq0$,则可选取 X_0 使$(\alpha+\beta,X_0)\neq0$,所以

$$(X_\alpha,X_\beta)=0.$$

(2)设 $X\in g_\alpha,Y\in g_\beta$,则 $\mathrm{ad}(X_0)([X,Y])=[\mathrm{ad}(X_0)X,Y]+[X,\mathrm{ad}(X_0)Y]=[(\alpha,X_0)X,Y]+[X,(\beta,X_0)Y]=(\alpha+\beta,X_0)[X,Y]$,从而$[X,Y]\in g_{\alpha+\beta}$.

(3)设 $\alpha\in\Delta$,则存在非 0 向量 $X_\alpha\in g_\alpha$,对 $\forall X_0\in h$,$\mathrm{ad}(X_0)(X_\alpha)=(\alpha,X_0)X_\alpha$. 两边取复共轭得到 $\mathrm{ad}(X_0)(\overline{X}_\alpha)=(\bar{\alpha},X_0)\overline{X}_\alpha$,但 α 是纯虚的,故$-\alpha=\bar{\alpha}\in\Delta$. 显然共轭将$g_\alpha$映为$g_{-\alpha}$.

对 $X_\alpha\in g_\alpha,X_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$,由(2)$[X_\alpha,X_{-\alpha}]\in h$. 对任意 $X\in h$,

$$([X_\alpha,X_{-\alpha}],X)=-(X_{-\alpha},[X_\alpha,X])=(X_{-\alpha},[X,X_\alpha])$$
$$=(X_{-\alpha},(\alpha,X)X_\alpha)=(\alpha,X)(X_{-\alpha},X_\alpha)=((X_\alpha,X_{-\alpha})\alpha,X).$$

由于(,)限制在 h 上是非退化的,可知$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=(X_\alpha,X_{-\alpha})\alpha$.

命题 4.3.2 根系 Δ 满足下列性质.

(1)设 $\alpha\in\Delta$,则 $\dim g_\alpha=1$.

(2)任取 $\alpha\in\Delta$,则在g_α中可以找到基底 e_α,使得

$$\bar{e}_\alpha=e_{-\alpha},且(e_\alpha,e_{-\alpha})=1,[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha.$$

证明 (1)选取 $X_\alpha\in g_\alpha,X_\alpha\neq0$,则$(X_\alpha,\overline{X}_\alpha)>0$,不妨设$(X_\alpha,\overline{X}_\alpha)=1$. 用反证法,设 $\dim g_\alpha>1$,则在g_α中可以选取与 X_α 线性无关的向量 Y_α,使得$(Y_\alpha,\overline{X}_\alpha)=0$. 这是因为若$(Y_\alpha,\overline{X}_\alpha)=s\neq0$,则以 $Y_\alpha-sX_\alpha$ 替换即可.

记 $Y_k=(\mathrm{ad}X_\alpha)^kY_\alpha$,则 $Y_k\in g_{(k+1)\alpha}$. 下面利用归纳法证明

$$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)Y_{k+1}=-\frac{(k+1)(k+2)}{2}(\alpha,\alpha)Y_k.$$

当 $k=0$ 时，$\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)Y_1$

$$\begin{aligned}&=[\overline{X}_\alpha,[X_\alpha,Y_\alpha]]\\&=-[X_\alpha,[Y_\alpha,\overline{X}_\alpha]]-[Y_\alpha,[\overline{X}_\alpha,X_\alpha]]，\text{这里利用了 Jacobi 恒等式.}\\&=-(\alpha,\alpha)Y_0.\end{aligned}$$

设 $\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)Y_k=-\dfrac{k(k+1)}{2}(\alpha,\alpha)Y_{k-1}$ 成立，则

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(\overline{X}_\alpha)Y_{k+1}&=[\overline{X}_\alpha,[X_\alpha,Y_k]]\\&=-[X_\alpha,[Y_k,\overline{X}_\alpha]]-[Y_k,[\overline{X}_\alpha,X_\alpha]]\\&=-\left[X_\alpha,\frac{k(k+1)}{2}(\alpha,\alpha)Y_{k-1}\right]+[Y_k,\alpha]\\&=-\frac{(k+1)(k+2)}{2}(\alpha,\alpha)Y_k.\end{aligned}$$

下面继续命题的证明，由于 $Y_0\neq 0$，利用上式，当 $k\geqslant 0$ 时，由 $Y_k\neq 0$ 可以得到 $Y_{k+1}\neq 0$，这说明对任意 $k\geqslant 0$，$Y_k\neq 0$. $Y_k\in g_{(k+1)\alpha}$ 意味着 $(k+1)\alpha$，$k>0$ 都在根系 Δ 中，这显然和根的个数有限矛盾. 于是命题得证.

(2) 由 (1)，$\dim g_\alpha=\dim g_{-\alpha}=1$，可以选取向量 $X_\alpha\in g_\alpha$，令 $X_{-\alpha}=\overline{X}_\alpha\in g_{-\alpha}$，则 $(X_\alpha,X_{-\alpha})>0$，令 $e_\alpha=\dfrac{X_\alpha}{\sqrt{(X_\alpha,X_{-\alpha})}}$，$e_{-\alpha}=\dfrac{X_{-\alpha}}{\sqrt{(X_\alpha,X_{-\alpha})}}$，则

$$\bar{e}_\alpha=e_{-\alpha}，(e_\alpha,e_{-\alpha})=1，\text{此时}[e_\alpha,e_{-\alpha}]=(e_\alpha,e_{-\alpha})\alpha=\alpha.$$

注 4.3.3　上面的 $e_\alpha,e_{-\alpha},\alpha$ 构成 g 的复三维子代数，它同构于 $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$. 上面的命题中，结论 (1) 的证明本质上是用这个三维子代数在 Y_α 的作用下生成的表示的性质来完成的. 下面类似的讨论还会多次遇到，希望读者仔细体会.

为了进一步讨论根系的性质，引进以下的概念.

定义 4.3.4　在根系 Δ 中任取两个根 α,β，如果序列

$$\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$$

中的元素都包含在集合 $\Delta\cup\{0\}$ 中，其中 $p,q\geqslant 0$，而 $\beta-(p+1)\alpha,\beta+(q+1)\alpha\notin\Delta\cup\{0\}$，那么称这个序列为过根 β 的 α 根链.

命题 4.3.5　根系 Δ 有下列性质：

(1) 设 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$ 是过 β 的 α 根链，则

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q\ \text{为整数.}$$

(2) 设 $\alpha\in\Delta$，则对任意复数 k，$k\alpha\in\Delta$，当且仅当 $k=\pm 1$.

证明　下面通过考虑 $e_\alpha,e_{-\alpha},\alpha$ 构成的 g 的三维子代数的表示来理解根系的性质.

(1)考虑$\mathfrak{g}$的子空间 $V=\bigoplus\limits_{k=-p}^{q}\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$,容易验证它在 $\mathrm{ad}(e_\alpha)$,$\mathrm{ad}(e_{-\alpha})$,$\mathrm{ad}(\alpha)$ 的作用下是不变子空间,因此它们给出了三维子代数在 V 上的自然的表示. 由于 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha))=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}([e_\alpha,e_{-\alpha}]))=\mathrm{Tr}([\mathrm{ad}e_\alpha,\mathrm{ad}e_{-\alpha}])$,显然 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha))=0$.

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha))=\sum_{k=-p}^{q}(\beta+k\alpha,\alpha)\\&=(p+q+1)(\beta,\alpha)+\frac{1}{2}(p+q+1)(q-p)(\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

由于 $p+q+1\neq 0$,于是$\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$.

(2)若 $\alpha\in\Delta$,则$\pm\alpha\in\Delta$,设有复数 k,使得 $k\alpha\in\Delta$,作过 $k\alpha$ 的 α 根链

$$k\alpha-p\alpha,\cdots,k\alpha-\alpha,k\alpha,k\alpha+\alpha,\cdots,k\alpha+q\alpha.$$

由(1)$2(k\alpha,\alpha)/(\alpha,\alpha)=p-q$,即 $k=\dfrac{1}{2}(p-q)$为半整数,这时有两种情形,

情形 1:$p-q$ 为偶数,此时 $p+q$ 也是偶数,令 $m=\dfrac{1}{2}(p+q)$,则上面根链化成

$$-m\alpha,\cdots,-\alpha,0,\alpha,\cdots,m\alpha.$$

情形 2:若 $p-q$ 为奇数,此时 $p+q$ 也是奇数,则上面的根链化为

$$-m\alpha,\cdots,-\frac{1}{2}\alpha,+\frac{1}{2}\alpha,\cdots,m\alpha,$$

其中的根都是 α 的半整数倍.

因为 $p+q$ 为正奇数,所以 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$,这说明 $\beta=\dfrac{\alpha}{2}\in\Delta$. 考虑过 β 的 β 根链,则必有正整数 m',使得根链有与情形 1 类似的形式

$$-m'\beta,\cdots,-\beta,0,\beta,\cdots,m'\beta.$$

我们证明如下的

引理 4.3.6 设$-m\alpha,\cdots,-\alpha,0,\alpha,\cdots,m\alpha$ 是过根 α 的 α 根链,则 $m=1$.

证明 构造$\mathfrak{g}$的子空间 $V=\sum\limits_{k=-1}^{m}\mathfrak{g}_{k\alpha}$,$V$ 在 $\mathrm{ad}(e_\alpha)$,$\mathrm{ad}(e_{-\alpha})$,$\mathrm{ad}(\alpha)$作用下不变,所以

$$\begin{aligned}0&=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}([e_\alpha,e_{-\alpha}]))=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha))\\&=\sum_{k=-1}^{m}k(\alpha,\alpha)=\left(\frac{(m-1)(m+2)}{2}\right)(\alpha,\alpha),\end{aligned}$$
这使得 m 只能为 1.

注意在上面情形 2 中,$\alpha=2\beta$ 也是根,因此根链中至少包括$\pm\beta$,$\pm 2\beta$,于是 $m'\geqslant 2$,这与引理矛盾,所以此种情形实际上不会出现. 下面只讨论情形 1,由 $m=1$ 可知 $k\alpha$ 在根链$-\alpha,0,\alpha$ 中,这只可能是 $k=\pm 1$.

我们把前面的讨论总结一下:

设g_0为紧李代数，(,)为不变内积，h_0 为g_0的 Cartan 子代数，$g=g_0\otimes\mathbf{C}$ 关于 $\mathrm{ad}(h_0)$的 Cartan 分解为

$$g=h\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$$

对$\forall\alpha\in\Delta$，在g_α和$g_{-\alpha}$中存在基底 $e_\alpha,e_{-\alpha},\bar{e}_\alpha=e_{-\alpha},(e_\alpha,e_{-\alpha})=1$. 且它们之间的李括号运算满足

$[h,h]=0.$

$[X,e_\alpha]=(\alpha,X)e_\alpha,\ \forall X\in h,\alpha\in\Delta.$

$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha,\ \forall\alpha\in\Delta.$

$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta},\ \forall\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\in\Delta.$

$[e_\alpha,e_\beta]=0,\ \forall\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\notin\Delta\cup\{0\}.$

$e_\alpha,\alpha\in\Delta$ 称为g的 Weyl 基. 利用 Weyl 基，g_0有如下的分解：

$$g_0=h_0\oplus\sum_{\pm\alpha\in\Delta}\mathbf{R}(e_\alpha+e_{-\alpha})\oplus\sum_{\pm\alpha\in\Delta}\sqrt{-1}\mathbf{R}(e_\alpha-e_{-\alpha})$$

于是，到目前为止我们看到要完全决定李代数g的结构，还需要计算结构常数 $N_{\alpha\beta},\alpha,\beta\in\Delta$，下面进行讨论.

命题 4.3.7 任取 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$，则有

(1) $N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}$.

(2) $N_{-\alpha,-\beta}=\overline{N}_{\alpha\beta}$.

(3) $|N_{\alpha\beta}|^2=\dfrac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)$，其中 p,q 由过β的α根链确定.

(4) 设 $\alpha,\beta\in\Delta$，若 $\alpha+\beta\in\Delta$，则 $N_{\alpha\beta}\neq0$，即$[g_\alpha,g_\beta]=g_{\alpha+\beta}$.

证明 (1) 设$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$，$[e_\beta,e_\alpha]=N_{\beta\alpha}e_{\beta+\alpha}$，由李括号的反交换性得到所要结果.

(2) 设$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$，两边同时取共轭有$[e_{-\alpha},e_{-\beta}]=\overline{N}_{\alpha\beta}e_{-\alpha-\beta}$，与等式$[e_{-\alpha},e_{-\beta}]=N_{-\alpha,-\beta}e_{-\alpha-\beta}$比较，可得 $N_{-\alpha,-\beta}=\overline{N}_{\alpha\beta}$.

(3) 令 $Y_k=(\mathrm{ad}(e_\alpha))^k e_{\beta-p\alpha}\in g_{\beta+(k-p)\alpha},k=0,1,\cdots,p+q$，当 $k>p+q$ 时，$Y_k=0$. 与命题 4.3.2 的(1)中的计算一样，归纳地可以证明

$$\mathrm{ad}(e_{-\alpha})\mathrm{ad}(e_\alpha)Y_k=\frac{1}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\alpha)Y_k \tag{4.3.1}$$

这说明，当 $0\leqslant k\leqslant p+q$ 时，$Y_k\neq0$. 由于$g_{\beta+(k-p)\alpha}$的维数是 1，因此这也证明了

$$\mathrm{ad}(e_{-\alpha})\mathrm{ad}(e_\alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha}=\frac{1}{2}(k+1)(p+q-k)(\alpha,\alpha)e_{\beta+(k-p)\alpha},$$

取 $k=p$ 即得 $N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha-\beta}=\dfrac{q(1+p)}{2}(\alpha,\alpha)$. 利用关系

$$([e_{-\alpha}, e_{-\beta}], e_{\alpha+\beta}) + (e_{-\beta}, [e_{-\alpha}, e_{\alpha+\beta}]) = 0,$$

有 $N_{-\alpha,-\beta} + N_{-\alpha,\alpha+\beta} = 0$. 因此 $|N_{\alpha\beta}|^2 = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta} = \frac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha, \sqrt{-1}\alpha)$.

(4)用反证法. 若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$, $N_{\alpha\beta}=0$, 则有 $\frac{1}{2}q(p+1)=0$, 但由 $\alpha+\beta\in\Delta$, 可知 $q>0$, 则必有 $p=-1$, 这导出了矛盾.

在上面的公式中, 只计算了复数 $N_{\alpha\beta}$ 的模长, 这是因为 Weyl 基的选取不唯一, 将其中的任一个 e_α 换为相差一个单位复数倍数的其他任何向量, 都是一组新的 Weyl 基. 在 Weyl 基的变换下, $N_{\alpha\beta}$ 会变化, 但是模长始终不变. 因此这已经是能够期望的最好的结果. 在后面会看到, 结合下面的命题 4.3.8, $|N_{\alpha\beta}|$, $\alpha,\beta\in\Delta$ 已经包含了关于李代数结构的完整的信息.

命题 4.3.8 上面的结构常数 $N_{\alpha\beta}$ 还满足下面的性质

(1)若 $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, 且 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 则 $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$.

(2)若 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是根, 其中没有正负成对的根(即其中任意两个之和不是 0), 且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$, 则 $N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}=0$.

证明 (1) $([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma) = (N_{\alpha\beta}e_{-\gamma}, e_\gamma) = N_{\alpha\beta}$. 而由不变双线性型的性质

$$([e_\alpha, e_\beta], e_\gamma) = -(e_\beta, [e_\alpha, e_\gamma]) = (e_\beta, N_{\gamma\alpha}e_{-\beta}) = N_{\gamma\alpha}.$$

于是 $N_{\alpha\beta}=N_{\gamma\alpha}$.

(2)直接计算: $[[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] = N_{\alpha\beta}N_{\alpha+\beta,\gamma}e_{\alpha+\beta+\gamma}$. 对 $(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=0$ 若 $\alpha+\beta\in\Delta$, 应用(1)中的结论 $N_{\alpha+\beta,\gamma}=N_{\gamma\delta}$, 于是, $[[e_\alpha, e_\beta], e_\gamma] = N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}e_{\alpha+\beta+\gamma}$.

若 $\alpha+\beta\notin\Delta$, 则 $N_{\alpha\beta}=0$, 上式也成立.

类似的计算 $[[e_\beta, e_\gamma], e_\alpha]$ 和 $[[e_\gamma, e_\alpha], e_\beta]$, 利用 Jacobi 恒等式, 计算可得

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}=0.$$

命题 4.3.9 设 Δ 在 $\sqrt{-1}h_0$ 中张成的实向量子空间为 $h_{\mathbf{R}}$, 则 $h_{\mathbf{R}}$ 在 $\sqrt{-1}h_0$ 中的正交补 $h_{\mathbf{R}}^{\perp}$ 恰为 $\sqrt{-1}c(g_0)$, 因此 $\sqrt{-1}h_0 = h_{\mathbf{R}} \oplus \sqrt{-1}c(g_0)$.

证明 显然 $h_{\mathbf{R}}^{\perp} = \{X_0\in\sqrt{-1}h_0 \mid (\alpha, X_0)=0, \alpha\in\Delta\}$.

下面证明它就是 $\sqrt{-1}c(g_0)$. 设 $X_0\in\sqrt{-1}h_0$, 且对任意 $\alpha\in\Delta$, $(\alpha, X_0)=0$. 由于任意 $Y\in g$ 可以利用 Cartan 分解为 $Y=Y_0+\sum\limits_{\alpha\in\Delta}Y_\alpha$, 从而 $\mathrm{ad}(X_0)Y = \mathrm{ad}(X_0)Y_0 + \sum\limits_{\alpha\in\Delta}\mathrm{ad}(X_0)(Y_\alpha) = 0 + \sum\limits_{\alpha\in\Delta}(\alpha, X_0)Y_\alpha = 0$. 即在 g 上, $\mathrm{ad}(X_0)=0$, 从而 $X_0\in\sqrt{-1}c(g_0)$. 反之若 $X_0\in\sqrt{-1}c(g_0)$, 则 $X_0\in\sqrt{-1}h_0$, 且对任意 $\alpha\in\Delta$, $(\alpha, X_0)=0$, 即 X_0 与 $h_{\mathbf{R}}$ 正交. 这证明了命题.

推论 4.3.10 若 g_0 是紧半单李代数, 则 Δ 张成 $\sqrt{-1}h_0$.

习题 4.3

1. 设 $X_0\in h_0$，试计算 X_0 在 g 中的中心化子.
2. 证明：对任意 $\alpha\in\Delta$，本节中提到的由 $e_\alpha, e_{-\alpha}, \alpha$ 生成的三维复李代数同构于 $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$.
3. 证明：命题 4.3.7 中的等式 4.3.1.
4. 设 $\alpha,\beta\in\Delta$，过 β 的 α 根链为 $\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$；过 α 的 β 根链为 $\alpha-p'\beta,\cdots,\alpha-\beta,\alpha,\alpha+\beta,\cdots,\alpha+q'\beta$，则 $\dfrac{q(p+1)}{(\beta,\beta)}=\dfrac{q'(p'+1)}{(\alpha,\alpha)}$.

§4.4 抽象根系和素根系

§4.4.1 根系

上一节讨论了根系的很多性质，但根系的结构还比较复杂，这一节将在前面的基础上做进一步的简化，引进素根系的概念. 在下面的讨论中我们希望能把根系的概念，脱离紧李代数g_0，抽象的定义出来.

首先定义欧氏空间 V 上关于给定的非零向量的反射.

定义 4.4.1 设 α 是欧氏空间 V 中的非零向量，V 上关于向量 α 的反射是指线性映射 $w_\alpha: V\to V, \beta\mapsto\beta-\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，这里$(\,,\,)$表示欧氏空间的内积.

引理 4.4.2 w_α 满足下面的一些简单性质：

(1) $w_\alpha^2=\mathrm{id}$.

(2) $(w_\alpha(X),w_\alpha(Y))=(X,Y),\ \forall X,Y\in V$.

(3) 令 $V_\alpha=\{X\in V\mid(\alpha,X)=0\}$，则 $w_\alpha|_{V_\alpha}=\mathrm{id}, w_\alpha(\alpha)=-\alpha$.

(4) 设 $A:V\to V$ 为线性等距，则 $w_{A(\alpha)}=Aw_\alpha A^{-1}$.

前面 3 条性质是显然的，第 4 条请读者自己验证.

下面定义抽象的根系的概念：

定义 4.4.3 设 Δ 是欧氏空间 V 中的子集，Δ 称为 V 中的一个根系，是指

(1) Δ 是 V 的不包含零向量的有限子集，且张成 V.

(2) 对任意 $\alpha\in\Delta$，若 $k\alpha\in\Delta$，则 $k=\pm1$.

(3) 对任意 $\alpha\in\Delta$，V 上关于 α 的反射 w_α 保持 Δ 不变，即 $w_\alpha(\Delta)=\Delta$.

(4) 对任意 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}$.

欧式空间 V 的维数称为根系 Δ 的秩.

容易看出若 Δ 是 V 中的根系，则对任意 $\lambda\in\mathbf{R}^*$，$\lambda\Delta$ 也是 V 中的根系.

定义 4.4.4 设 Δ_1 是 V_1 中的根系，Δ_2 是 V_2 中的根系，根系 Δ_1 称为与根系 Δ_2 同构，若存在保持内积的线性同构 $A:V_1\to V_2$，使得 $A(\Delta_1)=\Delta_2$.

在上面定义中，Δ 张成 V 不是本质的，因为可以选取 V 为 Δ 张成的子空间.

沿用上节的符号，紧李代数的根系 Δ 张成子空间 $h_{\mathbf{R}}$. 因为由g_0的不变内积得到的 $h_{\mathbf{R}}$ 上的双线性型是负定的，所以它限制在 $\sqrt{-1}h_{\mathbf{R}}$ 上是正定的. 后面将证明 $\sqrt{-1}\Delta\subset\sqrt{-1}h_{\mathbf{R}}$ 是根系. 以后凡是将紧李代数的根系看成抽象的根系时，都约定是指 $\sqrt{-1}\Delta$.

命题 4.4.5　紧李代数的根系是满足定义 4.4.3 的根系.

证明　实际上,只有(3)需要证明. 若 $\alpha,\beta\in\Delta$,则 $w_\alpha(\beta)=\beta-\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$,恰好出现在过 β 的 α 根链

$$\beta-p\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta-\alpha,\cdots,\beta+q\alpha$$

中. 这是因为 $-p\leqslant-\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=q-p\leqslant q$. 于是命题得证.

对于任意两根 $\alpha,\beta\in\Delta$,由于 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 和 $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 都是整数,设 α,β 的夹角记为 $\angle(\alpha,\beta)$,则有

$$4\cos^2\angle(\alpha,\beta)=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

为非负整数. 由 Cauchy-Schwarz 不等式,它只能取得 0,1,2,3,4 五种可能情形. 而取值为 4 的时候,α,β 成比例,这时必有 $\alpha=\pm\beta$.

对于不成比例的两个根 α,β,$\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3\}$. 它们对应各种可能性,如表 4-1:

表 4-1

$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$	$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$	$\frac{4(\alpha,\beta)(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)(\alpha,\alpha)}$	$\cos\angle(\alpha,\beta)$	$\angle(\alpha,\beta)$	$\lvert\beta\rvert/\lvert\alpha\rvert$
0	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$	不确定
1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
-1	-2	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
2	1	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
-2	-1	2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
1	3	3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
-1	-3	3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
3	1	3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
-3	-1	3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

可以看出 α,β 的夹角可能的情形非常有限，而当它们不垂直的时候，二者的长度比值的情形也非常有限.

利用这些数据，可以证明关于抽象根系有下面的

引理 4.4.6 设 α,β 是根系 Δ 中的两个向量，$\alpha\neq\pm\beta$，若 $(\alpha,\beta)>0$，则 $\alpha-\beta\in\Delta$；若 $(\alpha,\beta)<0$，则 $\alpha+\beta\in\Delta$.

证明 若 $(\alpha,\beta)>0$，则 α,β 不垂直，由上面的表格，可知 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 和 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 中必有一个为 1. 若 $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=1$，则 $w_\beta(\alpha)=\alpha-\beta\in\Delta$；若 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=1$，则 $w_\alpha(\beta)=\beta-\alpha\in\Delta$，此时 $\alpha-\beta=-(\beta-\alpha)$ 也在 Δ 中.

引理中的第二个断言是前一个的推论，这只要在前一个中将 β 换做 $-\beta$ 即可得证.

由此，我们有下面重要的结论.

命题 4.4.7 设 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\alpha\neq\pm\beta$，考虑所有 Δ 中的形如 $\beta+k\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$ 的根，设 p 为最大的整数使得 $\beta-p\alpha\in\Delta$，q 为最大整数使得 $\beta+q\alpha\in\Delta$，则 $p,q\geqslant 0$，满足 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$，且所有形如 $\beta+k\alpha$，$-p\leqslant k\leqslant q$ 的元素都是根.

证明 首先因为 $\beta=\beta+0\alpha\in\Delta$，所以 $p,q\geqslant 0$. 其次证明所有形如 $\beta+k\alpha$，$-p\leqslant k\leqslant q$ 的元素都是根，否则设 r 为最小的 k，使得 $\beta+k\alpha$ 为根，但是 $\beta+(k+1)\alpha$ 不是根，设 s 为最大的 k，使得 $\beta+(k-1)\alpha$ 不是根，但是 $\beta+k\alpha$ 是根，则 $r<s$. 应用上面引理 4.4.6，可以知道 $(\beta+r\alpha,\alpha)\geqslant 0$，并且 $(\beta+s\alpha,\alpha)\leqslant 0$，由于 $(\alpha,\alpha)>0$，这说明 $r\geqslant s$，于是导出矛盾.

最后证明 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$. 注意到 Δ 中任何形如 $\beta+k\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$ 的根经过反射 w_α 作用后仍在 Δ 中，而且还具有同样的形式，于是马上可以知道，$w_\alpha(\beta-p\alpha)=\beta+q\alpha$. 将此式展开，可得 $\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$.

有了这一命题，对于抽象根系也可以完全相同的定义根链的概念，并且满足与紧李代数的根系类似的性质.

§4.4.2 素根系

在 V 中选取一个过原点的超平面 L，使得任意根 $\alpha\in\Delta$ 都不在 L 中，L 将 V 分割为两部分，将其中一侧规定为 L 的正侧，另一部分规定为 L 的负侧，容易看出，正侧中的两个向量的和还是正侧中的向量；同样的负侧中的两个向量的和还是负侧的向量. 选取 L 及其正侧后，给出了 V 上的一个偏序 $<$，$\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta$ 在 L 的负侧.

位于 L 的正侧的根称为正根，负侧的根称为负根. 正根构成的集合称为正根系，记为 Δ^+，类似的有负根系 Δ^-. 因为若 $\alpha\in\Delta$，则 $-\alpha\in\Delta$，所以

$$\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-,\quad \Delta^+\cap\Delta^-=\varnothing,\quad \Delta^-=-\Delta^+.$$

有了正根系和负根系后，可以进一步定义素根系.

定义 4.4.8 正根系中的正根 α 称为素根，若它不能分解成两个正根之和. 素根全体构成的 Δ^+ 的子集 Π，称为素根系，

由定义素根系 Π 由正根系 Δ^+ 决定，因此它依赖于 L 及其正侧的选取.

定义 4.4.9 设素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}\subset\Delta$，若 $\alpha\in V$，$\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$，定义 $ht(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i$，称为 α 的高度.

显然，$ht(X+Y)=ht(X)+ht(Y)$，且对于正根 $ht(\alpha)>0$，而素根的高度为 1. 实际上由后面的讨论可知 α 的高度正比于 α 到超平面 L 的有向距离.

利用这一定义，可以证明

引理 4.4.10 任取 $\alpha\in\Delta^+$，则存在非负整数 $m_1,m_2,\cdots,m_l$，使得

$$\alpha=\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i.$$

证明 对于任意正根 α，若它不是素根，则它可以分解为两个正根 β,γ 的和，对 β,γ 中不是素根者继续做类似的讨论. 将这一过程一直进行下去，只需要说明有限步内就可以在素根处结束即可，这只需要注意到每个正根分解出来的两个正根的高度都比原来的正根的高度小.

下面给出素根系的一些性质.

命题 4.4.11 设 Δ 为欧氏空间 V 中的根系，在 V 中选定过原点的超平面 L 及其正侧和负侧后，设相应的素根系为 Π，则有

(1)任取 $\alpha,\beta\in\Pi$，则 $\alpha-\beta\notin\Delta$.

(2)任取 $\alpha,\beta\in\Pi$，$\alpha\neq\beta$，则 $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ 为非正整数.

证明 (1)用反证法，设 $\alpha-\beta\in\Delta$，则它属于 Δ^+ 或 Δ^-. 若 $\alpha-\beta\in\Delta^+$，则 $\alpha-\beta=\gamma$，$\gamma\in\Delta^+$，于是 $\alpha=\beta+\gamma$，这与 α 为素根矛盾. 若 $\alpha-\beta\in\Delta^-$，则存在 $\gamma\in\Delta^+$，满足 $\alpha-\beta=-\gamma$，于是 $\beta=\alpha+\gamma$，这与 β 为素根矛盾，于是结论得证.

(2)根据(1)中的结论，$\alpha-\beta\notin\Delta$，由命题条件 $\alpha-\beta\neq0$，因此过 α 的 β 根链形如 $\alpha,\alpha+\beta,\cdots,\alpha+q\beta$. 由命题 4.4.7，$\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=0-q$ 为非正整数.

由命题 4.4.11 可以知道，两个素根之间的夹角只可能是 $\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{6}$.

命题 4.4.12 条件如上，设 Δ 中有一个素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，则它构成 V 的一个基底，$l=\dim V$.

证明 先证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 是线性无关的. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 线性相关，则存在不全为 0 的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$，使得 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_l\alpha_l=0$. 不难看出，$\lambda_i$ 不可能全部非负或全部非正. 令 $\mu_i=\frac{1}{2}(|\lambda_i|+\lambda_i)$，$\nu_i=\frac{1}{2}(|\lambda_i|-\lambda_i)$，则 $\mu_i,\nu_i\geqslant 0$，$\lambda_i=\mu_i-\nu_i$，$\mu_i\nu_i=0$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{l}\mu_i\alpha_i=\sum\limits_{j=1}^{l}\nu_j\alpha_j$，将两边相等的向量记为 α，则 $\alpha\neq 0$，所以 $(\alpha,\alpha)>0$.

但是 $(\alpha,\alpha)=\left(\sum\limits_{i=1}^{l}\mu_i\alpha_i,\sum\limits_{j=1}^{l}\nu_j\alpha_j\right)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant l}\mu_i\nu_j(\alpha_i,\alpha_j)$，由上面命题 4.4.11 的结论(2). 若 $i\neq j$，则 $\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\leqslant 0$；而若 $i=j$，$\mu_i\nu_i=0$. 故 $u_i\nu_j(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0$，因此 $(\alpha,\alpha)\leqslant 0$，这与 $(\alpha,\alpha)>0$ 矛盾. 从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 线性无关.

由引理 4.4.10 可知 Π 生成 Δ，而 Δ 张成 V，因此 Π 张成 V. 这说明 Π 是 V 的一个基底.

根据命题 4.4.12，任意的根 α 都可以唯一的写成素根的线性组合，由引理 4.4.10，这些组合中的系数都是整数，如果 α 是正根，那么组合系数都是非负整数；若 α 是负根，则组合系数都是非正整数. 所以不可能出现一个根写成素根的线性组合后，组合系数中即有正整数又有负整数的情形.

定义 4.4.13 设根系 Δ 的一个素根系为 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，则整数矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\right)_{l\times l}$ 称为 Δ 的一个 Cartan 矩阵.

Cartan 矩阵中任意元素都是整数，对角元素都是 2，非对角元素只能为 $0,-1,-2,-3$，而且对任意 i,j，(i,j) 元素为 0 当且仅当 (j,i) 元素为 0.

定义 4.4.14 设 Δ 是欧氏空间 V 中的根系，设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 是 Δ 中一个素根系，对 Π 中的每个素根 α_i 对应一个顶点 α_i；对两个素根 α_i,α_j，若其夹角为 $\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，则分别不连线、连单线、连双线或连三重线；当 $|\alpha_i|<|\alpha_j|$ 时，从顶点 α_i 到 α_j 为连线加上箭头；这样得到一个图，称为 Δ 关于素根系 Π 的 Dynkin 图.

注意 Dynkin 图中的连线条数为 $4\cos^2\angle(\alpha_i,\alpha_j)$. Dynkin 图保存了Cartan 矩阵的所有信息.

命题 4.4.15 任取 $\alpha\in\Delta^+-\Pi$，则存在 $\alpha_i\in\Pi$，使得 $\alpha-\alpha_i\in\Delta^+$.

证明 用反证法. 设 $\alpha\in\Delta^+-\Pi$，且对任意 $\alpha_i\in\Pi$，$\alpha-\alpha_i\notin\Delta^+$，则也有 $\alpha-\alpha_i\notin\Delta^-$，否则与 α_i 为素根矛盾. 于是 $\alpha-\alpha_i\notin\Delta$. 作根链 $\alpha,\alpha+\alpha_i,\cdots,\alpha+q_i\alpha_i$，则有 $\frac{2(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=-q_i$，于是 $(\alpha,\alpha_i)=-\frac{q_i}{2}(\alpha_i,\alpha_i)\leqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant l$.

由引理 4.4.10,存在非负整数 $m_1,m_2,\cdots,m_l$,使得 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i$. 于是

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{l}m_i(\alpha,\alpha_i)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}m_iq_i(\alpha_i,\alpha_i)\leqslant 0.$$

显然这与$(\alpha,\alpha)>0$ 矛盾.

推论 4.4.16 对任意正根 α,存在 $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant l$,使得 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$ 都是素根,且有正根的序列 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}=\alpha$.

这说明任意正根 α 可以从素根开始,每次加一个素根,经过有限步得到.

从正根系 Δ^+ 出发可以构造出某一个素根系 Π,实际上从素根系出发利用 Cartan 矩阵也可以构造出正根系. 具体做法是利用上述推论,先确定高度为 1 的正根集合,即Π,再从Π出发构造高度为 2 的根,这需要考虑过素根 α_i 的 α_j 根链来判断 $\alpha_i+\alpha_j$ 是不是根. 这样依次做下去可以得到正根系 Δ^+,而

$$\Delta=\Delta^+\cup-\Delta^+.$$

很多的描述,不如一个具体的例子.

例 4.4.17 设有根系 Δ,它的 Cartan 矩阵为 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$,试从素根系$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2\}$出发,求出正根系 Δ^+.

解 高度为 1 的根有 α_1,α_2.

由上面推论,高度为 2 的根可能有 $\alpha_i+\alpha_j$,$1\leqslant i,j\leqslant 2$. 但其中 $2\alpha_1,2\alpha_2$ 显然不是根. 唯一的可能是 $\alpha_1+\alpha_2$. 由于 $\alpha_1-\alpha_2$ 不是根,过 α_1 的 α_2 根链为 α_1, $\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+q\alpha_2$,由命题 4.4.7,$0-q=\dfrac{2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=-3$,故 $\alpha_1+\alpha_2$ 是根. 而 $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2$ 也是根.

高度为 3 的根可能有$(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2$ 和$(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2=\alpha_1+2\alpha_2$. 由上面结果 $\alpha_1+2\alpha_2$ 是根. 考虑过 α_2 的 α_1 根链为 $\alpha_2,\alpha_2+\alpha_1,\cdots,\alpha_2+q\alpha_1$,此时 $0-q=\dfrac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-1$,故 $2\alpha_1+\alpha_2$ 不是根. 于是高度为 3 的根只有 $\alpha_1+2\alpha_2$.

高度为 4 的根,只可能有$(\alpha_1+2\alpha_2)+\alpha_1=2(\alpha_1+\alpha_2)$和$(\alpha_1+2\alpha_2)+\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$,前者不是根,而后者是根.

高度为 5 的根,只可能有$(\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_1=2\alpha_1+3\alpha_2$ 和$(\alpha_1+3\alpha_2)+\alpha_2=\alpha_1+4\alpha_2$,后者不是根. 考虑过 $\alpha_1+3\alpha_2$ 的 α_1 根链,由 $\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_1$ 不是根,知根链形如 $\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2,\cdots,(q+1)\alpha_1+3\alpha_2$,由 $0-q=\dfrac{2(\alpha_1+3\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-1$,因此$2\alpha_1+3\alpha_2$ 是根.

高度为 6 的根可能有 $2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_1=3(\alpha_1+\alpha_2)$或 $2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_2=2(\alpha_1+2\alpha_2)$,它们都不可能是根,所以没有高度更高的正根了.

由此可知 $\Delta^+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1+3\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2\}$.

习题 4.4

1. 设 Δ 是欧氏空间 V 中的根系,令 $\Delta^{\vee}=\{\alpha^{\vee}=\frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)},\alpha\in\Delta\}$. 证明:

$\Delta^{\vee}$ 也是 V 中的一个根系,且对任意 $\alpha,\beta\in\Delta$, $\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=\frac{2(\beta^{\vee},\alpha^{\vee})}{(\alpha^{\vee},\alpha^{\vee})}$.

$\Delta^{\vee}$ 称为 Δ 的对偶根系.

2. 在根系 Δ 的定义中,去掉条件(2),证明:若 $\alpha=k\beta$,则只可能是 $\alpha=\pm\frac{1}{2}\beta$, $\pm\beta$, $\pm 2\beta$. 举出这样的不满足条件(2)的一个根系的例子.

3. 在等价的意义下对秩为 1 和 2 的根系进行分类.

4, 设 Δ 是 V 中的根系,若 Π 是根系 Δ 中的一个素根系, Π 中的子集 Π_1 张成子空间 V_1,证明: $\Delta\cap V_1$ 是 V_1 中的根系,且 Π_1 是它的一个素根系.

§4.5　Weyl 群和 Weyl 房

下面讨论与根系紧密相关的 Weyl 群和 Weyl 房.

定义 4.5.1　设 Δ 是欧氏空间 V 中的一个根系，如果对任意 $\alpha\in\Delta$，$(\alpha,X)\neq 0$，则 $X\in V$ 称为正则元素. 若 X 不是正则元素，则称为非正则元素.

V 中的非正则元素是一些超平面 $V_\alpha=\{X\in V\mid(\alpha,X)=0\}$，$\alpha\in\Delta^+$ 的并，所以是闭集. 从而正则元素构成的 V 的子空间是开集，它被这些超平面分隔成一些连通的开子集，因为分割出的每个连通开子集都可以看成某些开的半空间的交集，所以它们是开凸锥.

定义 4.5.2　设 Δ 是欧氏空间 V 中的一个根系，则正则元素全体构成的开集 $V-\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta^+}V_\alpha$ 的每一个连通分支称为根系 Δ 的一个 Weyl 房.

例 4.5.3　对于上节例子中 Cartan 矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ 对应的根系，可以看出非正则元素由六个超平面（实际上是直线）构成，共有 12 个 Weyl 房，它们的形状都相同.

具体的示意图参看图 4-1.

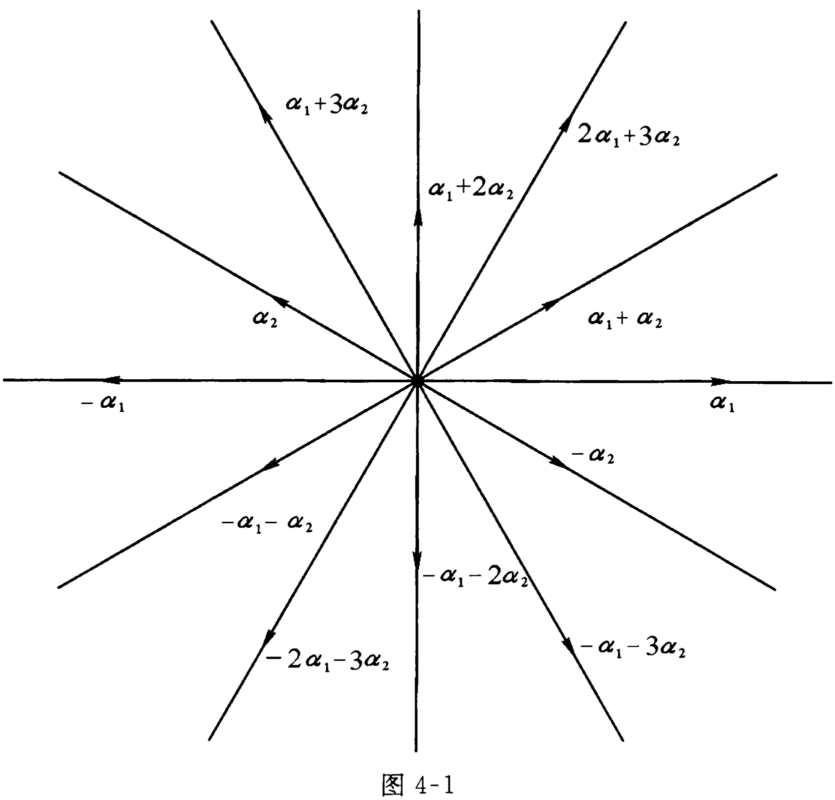

图 4-1

从下面的引理可以看出 Δ 中的任何一个素根系对应一个 Weyl 房.

引理 4.5.4 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 是根系 Δ 中的一个素根系,则

$$C_0=\{X\in V\mid(\alpha_i,X)>0,1\leqslant i\leqslant l\}$$

是一个 Weyl 房. 以后称 $V_{\alpha_1},V_{\alpha_2},\cdots,V_{\alpha_l}$ 为 Weyl 房 C_0 的墙.

证明 因为向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$ 线性无关,且张成 V,所以 C_0 是 V 中非空开凸集,其中的点都是正则点,而它的边界点都是非正则点. 这表明它是正则点构成的开集的一个连通分支,因此是一个 Weyl 房.

引理 4.5.5 设 Δ 是欧氏空间 V 中的一个根系,则

(1)任意正则元素 $X_0\in V$ 决定 V 中的超平面 $L:(X,X_0)=0$,显然 L 不经过任何 Δ 中的元素. 约定 L 的正侧为 $\{X\mid(X,X_0)>0\}$,负侧为 $\{X\mid(X,X_0)<0\}$,则 L 及其正侧和负侧确定了 Δ 中的一个正根系,因此也给出了一个对应的素根系 Π.

(2)若 X_0,X_1 是同一个 Weyl 房中的两个元素,则它们按上述方法给出相同的素根系.

证明 因为(1)中的结论是显然的,所以只证明(2). 设 X_0,X_1 是同一 Weyl 房 C 中的元素,则由于 Weyl 房是凸集,它们在 C 中所连的线段位于 C 中. 当从点 X_0 沿线段上变化到 X_1 时,这些点对应的过原点的超平面也在相应变化. 由于线段上的点都是正则点,超平面在变化中没有经过任何 Δ 中的根. 这表明初始点 X_0 对应的超平面 L_0 的正侧包含的 Δ 中的根和终点 X_1 对应的超平面 L_1 的正侧包含的 Δ 中的根完全相同,因此它们给出同样的正根系. 从而 X_0 和 X_1 也给出相同的素根系.

于是给定一个素根系,可以定义一个 Weyl 房. 给定一个 Weyl 房,选取其中的一个正则元素,则可以定义出一个素根系. 因此有下面的

定理 4.5.6 设 Δ 是欧氏空间 V 中的一个根系,则 Δ 的 Weyl 房的集合与 Δ 中的素根系的集合之间有一一对应.

证明 记上面约定的从素根系的集合到 Weyl 房的集合的对应为 F,从 Weyl 房的集合到素根系的集合的对应为 G,只需要证明 $G\circ F$,$F\circ G$ 都是恒同映射.

(1)先证明 $G\circ F=\mathrm{id}$,即从给定的素根系 Π,按前面的方法做出一个 Weyl 房 C_0,然后由此 Weyl 房做出的素根系就是 Π.

设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$,作 Weyl 房 $C_0=\{X\in V\mid(\alpha_i,X)>0,1\leqslant i\leqslant l\}$. 设

X_0 在 C_0 中，则 $(\alpha_i, X_0)>0, 1\leqslant i\leqslant l$. 显然由 C_0 决定的素根系 Π 就是正则点 X_0 定义的素根系. $(\alpha_i, X_0)>0$ 表明 $\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant l$ 是 Π 中的正根，而素根系 Π 对应的正根 α 都可以由素根的和表出，因此有 $(\alpha, X_0)>0$，即 X_0 决定的正根系和素根系 Π 的正根系相同，X_0 决定的素根系就是 Π. 这说明 $G\circ F=\mathrm{id}$.

(2)再证明. $F\circ G=\mathrm{id}$，即从给定的 Weyl 房 C_0 出发，按前面的方法做出一个素根系 Π，然后由此素根系做出的 Weyl 房就是 C_0.

在 Weyl 房 C_0 中选取元素 X_0. 它决定一个素根系 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$，并且 $(\alpha_i, X_0)>0, 1\leqslant i\leqslant l$. 再由 Π 做 Weyl 房，$(\alpha_i, X_0)>0, 1\leqslant i\leqslant l$ 表明 X_0 在由 Π 做出的 Weyl 房中，此 Weyl 房就是 C_0.

下面定义根系 Δ 的 Weyl 群的概念.

定义 4.5.7 $w_\alpha, \alpha\in\Delta^+$ 生成的 $O(V)$ 的子群称为 Δ 的 Weyl 群，记为 W.

下面给出 Weyl 群在素根系和 Weyl 房上的作用.

引理 4.5.8 (1)设 Π 是根系 Δ 的一个素根系，$w\in W$，则 $w(\Pi)$ 也是 Δ 的一个素根系.

(2)设 C 是根系 Δ 的一个 Weyl 房，$w\in W$，则 $w(C)$ 也是 Δ 的一个 Weyl 房.

(3)Weyl 群 W 在 Weyl 房的集合和素根系的集合上有自然的群作用.

(4)F, G 是互逆的 W 等变映射.

证明留给读者.

命题 4.5.9 设 Δ 是欧氏空间 V 中的根系，则

(1)Weyl 群 W 在 Δ 中的所有素根系的集合上的作用是传递的.

(2)Weyl 群 W 在 Δ 的所有 Weyl 房的集合上的作用是传递的.

证明 由于映射 F, G 是互逆的 W 等变映射，所以(1)和(2)是等价的，下面只证明(2).

设 C_0, C_1 是两个 Weyl 房，可以在它们中分别选取点 $X_0\in C_0$ 和 $X_1\in C_1$，使得所连的线段 X_0X_1 与每个超平面 $V_\alpha, \alpha\in\Delta^+$ 最多只交于一点. 设从 X_0 到 X_1 方向的交点依次为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$，它们对应于超平面 $V_{\beta_1}, V_{\beta_2}, \cdots, V_{\beta_k}$，则 $w_{\beta_k}w_{\beta_{k-1}}\cdots w_{\beta_1}(X_0)$ 与 X_1 位于同一个 Weyl 房，这意味着 $w_{\beta_k}w_{\beta_{k-1}}\cdots w_{\beta_1}(C_0)=C_1$，而 $w_{\beta_k}w_{\beta_{k-1}}\cdots w_{\beta_1}\in W$，于是命题得证.

引理 4.5.10 设 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$ 为 Δ 中的一个素根系，记由 w_{α_i}，$1\leqslant i\leqslant l$ 生成的 W 的子群为 W_Π，则有：

(1)设素根系 Π 对应的 Weyl 房为 C_0，则对于任意 Weyl 房 C_1，存在 $w\in$

W_{Π},使得 $w(C_0)=C_1$.

(2)对任意 $\alpha\in\Delta$,存在 $\alpha_i\in\Pi$ 及 $w\in W_{\Pi}$,使得 $w(\alpha_i)=\alpha$.

证明 选取两点 $X_0\in C_0$ 和 $X_1\in C_1$,使得所连的线段 X_0X_1 与每个超平面 $V_\alpha,\alpha\in\Delta^+$ 最多交于一点. 记从 X_0 到 X_1 方向的交点依次为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$,它们对应于超平面 $V_{\beta_1},V_{\beta_2},\cdots,V_{\beta_k}$.

(1)利用归纳法来证明,对 C_0 和 C_1 之间的隔墙的个数 k 进行归纳. 显然 $k=1$ 时,C_0 和 C_1 隔墙相望,设它们隔着的墙为 V_{α_j},则 $w_{\alpha_j}(C_0)=C_1$,因此 $k=1$时断言成立.

设命题在隔墙个数小于 k 时成立. 对于隔墙个数为 k 时,令 Weyl 房 $C=w_{\beta_{k-1}}w_{\beta_{k-2}}\cdots w_{\beta_1}(C_0)$,$C$ 和 C_0 之间的隔墙为 $k-1$ 个,则根据归纳假设存在 $w'\in W_{\Pi},w'(C_0)=C$. 注意 Weyl 房 C 和 C_1 隔墙 V_{β_k} 相望. C_0 的墙在 w' 下映为 C 的墙,于是存在 $i,1\leqslant i\leqslant l,w'(\alpha_i)=\beta_k$. 根据引理 4.4.2 中的结论(4),$w_{\beta_k}=w_{w'(\alpha_i)}=w'w_{\alpha_i}w'^{-1}$,可知 $w_{\beta_k}\in W_{\Pi}$,因此 $w=w_{\beta_k}w'\in W_{\Pi}$,并且 $w(C_0)=w_{\beta_k}w'(C_0)=w_{\beta_k}(C)=C_1$. 于是结论得证.

(2)选取 Weyl 房 C_1,使得它以 V_α 为它的墙,由(1)的结论,存在 $w\in W_{\Pi},w(C_0)=C_1$,由于 w 把 C_0 的墙映为 C_1 的墙,所以存在某个 $i,1\leqslant i\leqslant l$,$w(\alpha_i)=\alpha$.

由这一引理,对任意 $\alpha\in\Delta$,存在 $w\in W_{\Pi},w(\alpha_i)=\alpha$. 于是 $w_\alpha=ww_{\alpha_i}w^{-1}$,这表明 $w_\alpha\in W_{\Pi}$,从而 $W\subseteq W_{\Pi}$,又显然 $W_{\Pi}\subset W$,于是有

命题 4.5.11 $W_{\Pi}=W$.

引理 4.5.10 还有如下的推论,它给出另一种从Π构造 Δ 的方法.

推论 4.5.12 对于根系 Δ 中的任意素根系Π,$\Delta=W\Pi$,这里 $W\Pi=\{w\alpha\mid w\in W,\alpha\in\Pi\}$.

最后来证明 Weyl 群在素根系或者 Weyl 房的集合上的作用是单传递的,即若 C_1,C_2 是两个 Weyl 房,则存在唯一的 $w\in W$,使得 $w(C_1)=C_2$. 这等价于若 $w\in W$,使得 $w(C)=C$,则 $w=\mathrm{id}$. 为此先做一些准备工作.

引理 4.5.13 设Π是根系 Δ 中的一个素根系,$\alpha_i\in\Pi$,则 w_{α_i} 除了将 α_i 映为负根$-\alpha_i$ 以外,把其他正根都映为正根.

证明 设 $\beta\in\Delta^+-\{\alpha_i\}$,则 β 可以写成素根的组合,即存在 $m_i\geqslant 0$,使得 $\beta=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant l}m_i\alpha_i$. 由于 $\beta\neq\pm\alpha_i$,β 与 α_i 不成比例,故存在 $j\neq i,m_j\neq 0$. 由于 β 为正根,$m_j>0$. 注意到 $w_{\alpha_i}(\beta)=\beta-\dfrac{2(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$,因此除了 w_{α_i} 中的 α_i 的系数外,其他的系数如 α_j 系数 m_j 仍然不变. $m_j>0$ 意味着 $w_{\alpha_i}(\beta)$只能是正根.

定义 4.5.14 对于给定的素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，将关于素根 α_i 的反射 w_{α_i}，简单的写成 w_i，则任意元素 $w\in W$ 都可以写成 w_i，$1\leqslant i\leqslant l$ 中的元素的乘积. 若 $w=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}$，且 w 不能写成 w_i，$1\leqslant i\leqslant l$ 中小于 k 个（包括重数）元素的乘积，则称 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}$ 是 w 的一个约化分解. k 称为 w 的长度，记为 $l(w)$.

对于紧李代数 $\mathrm{u}(n)$ 的根系 Δ，相应的 Weyl 群恰好同构于 n 元置换群 S_n，选取标准的素根系，可以知道置换 $w\in S_n$ 的长度恰好是 w 写成对换（即交换两个元素而其他元素不变的置换）$(1,2),(2,3),\cdots,(n-1,n)$ 的乘积的最小个数，也就是置换 w 中的逆序数.

下面引理给出 w 的约化分解的一些特征，并说明怎样可以从一个非约化的分解得到一个约化分解.

引理 4.5.15 设 Δ 是欧氏空间 V 中的根系，在 V 中选取过原点的不包含 Δ 中元素的超平面 L 及其正侧和负侧，得到正根系 Δ^+ 和负根系 Δ^-，设正根系决定的素根系为 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}\subset\Delta^+$，设

$$w=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}$$

是 w 的一个乘积分解.

(1) 若 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ 是负根，则上面的分解不是约化分解，且此时存在 s，$1\leqslant s<k$ 使得 $w=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_{s-1}}w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}$. 即同时删去 w_{i_s} 和 w_{i_k} 得到 w 的长度更短的一个分解.

(2) 若 $w=w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}$ 是约化分解，则 $w(\alpha_{i_k})$ 是负根.

证明 (1) 设 $\beta_r=w_{i_{r+1}}\cdots w_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$，$0\leqslant r\leqslant k-2$，$\beta_{k-1}=\alpha_{i_k}$，因为 β_0 是负根，而 β_{k-1} 是正根，所以存在最小的 s，使得 β_s 是正根. 根据定义 w_{i_s} 将正根 β_s 映为负根 β_{s-1}，引理 4.5.13 断定必有 $\beta_s=\alpha_{i_s}$. 再由引理 4.4.2 中的(4)，

$$\begin{aligned}w_{i_s}&=w_{\beta_s}\\&=w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}(w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}})^{-1}\\&=w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}w_{i_{k-1}}\cdots w_{i_{s+1}},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}w&=w_{i_1}\cdots w_{i_{s-1}}[w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}w_{i_{k-1}}\cdots w_{i_{s+1}}]w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}\\&=w_{i_1}\cdots w_{i_{s-1}}w_{i_{s+1}}\cdots w_{i_{k-1}}.\end{aligned}$$

(2)是(1)的直接推论.

有了前面的准备，可以证明下面重要的

定理 4.5.16 设 Δ 是欧氏空间 V 中的根系，则下面等价的命题成立.

(1) 设 Π 是 Δ 中的一个素根系，若 $w\in W$ 使得 $w(\Pi)=\Pi$，则 $w=\mathrm{id}$.

(2)设 C 是 Δ 的一个 Weyl 房,若 $w\in W$ 使得 $w(C)=C$,则 $w=\mathrm{id}$.

(3)Weyl 群 W 在 Weyl 房的集合上的作用是单传递的.

(4)Weyl 群 W 在素根系的集合上的作用是单传递的.

证明 因为上面各条性质彼此等价,所以只证明(1).设对于 Weyl 群中的元素 w 和素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$,$w(\Pi)=\Pi$.设 $w\neq\mathrm{id}$,则将 w 写成约化分解 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_{k-1}}w_{i_k}$ 后,$k\geqslant1$.由引理 4.5.15 的结论(2),$w(\alpha_{i_k})$是负根,但 $\alpha_{i_k}\in\Pi$,这与$w(\Pi)=\Pi$矛盾.于是定理得证.

从这一节的讨论,还可以得到下面的定理.

定理 4.5.17 Cartan 矩阵是根系 Δ 在等价下的不变量.

证明 设 Δ_1 和 Δ_2 分别是欧氏空间 V_1 和 V_2 中的根系,它们等价,则存在保持内积的线性同构 $A:V_1\to V_2$,使得 $A(\Delta_1)=\Delta_2$.设Π_1,Π_2 分别是 Δ_1,Δ_2 中的素根系,不难看出 $A(\Pi_1)$是 Δ_2 中的素根系,因此存在 Δ_2 的 Weyl 群 W_2 中的元素 w,使得 $w\circ A(\Pi_1)=\Pi_2$.因为 $w\circ A$ 保持内积,所以Π_1 和Π_2 决定相同的 Cartan 矩阵.

习题 4.5

1. 设 Δ 是欧式空间 V 中的根系，$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$是其中的一个素根系，令

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha,$$

证明：对任意 $\alpha_i\in\Pi$，$\dfrac{2(\delta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=1.$

2. 设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$是根系 Δ 中的一个素根系，

证明：V 中的元素 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$ 是一个根或者根的倍数，当且仅当对于 Weyl 群中的任意元素 w，$w(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{l}k_i'\alpha$ 满足 $k_i'>0,\forall i$ 或者 $k_i'\leqslant 0,\forall i$.

3. 在 Weyl 群 W 中存在唯一的元素 w，它把正根系映为负根系.

证明：它的长度为正根的个数，且它是 Weyl 群中长度最大的元素.

4. 计算紧李代数 u(n)，so(n)和 sp(n)的 Weyl 群.

§4.6 Dynkin 图的分类

为了对 Dynkin 图进行分类，这一节首先忽略素根的长度信息，引进下面的概念.

定义 4.6.1 设 V 为 l 维实内积空间，若 V 中有限子集 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 满足

(1) α_i, $1\leqslant i\leqslant l$ 都是单位向量，

(2) α_i 和 α_j 的夹角只能是 $\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$.

则称 Π 为一个几何素根系，α_i 仍称为素根. l 称为 Π 的秩.

根据定义，将前面的抽象根系 Δ 中的一个素根系中的向量单位化后则得到一个几何素根系. 用与命题 4.4.12 相同的方法，可以证明几何素根系中的素根也是线性无关的，并且构成 V 的一个基底.

定义 4.6.2 设 Π_1 和 Π_2 分别是实内积空间 V_1 和 V_2 中的几何素根系，若存在保持内积的同构 $A:V_1\to V_2$，使得 $A(\Pi_1)=\Pi_2$，则称 Π_1 和 Π_2 是同构的几何素根系.

容易看出，对于 $\alpha_i,\alpha_j\in\Pi$, $i\neq j$, $2\cos(\angle(\alpha_i,\alpha_j))=0,-1,-\sqrt{2},-\sqrt{3}$, $4\cos^2(\angle(\alpha_i,\alpha_j))=0,1,2,3$.

定义 4.6.3 几何素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 按如下规则对应一个图 Γ, Π 中的每个素根对应图 Γ 的一个顶点，若两个素根 α_i,α_j, $i\neq j$ 的夹角分别为 $\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}$，则对应的图 Γ 上，顶点 α_i,α_j 之间分别不连线，连单线，双线和三重线，这样得到的 Γ 称为几何素根系 Π 的 Coxeter 图.

注意从 Coxeter 图可以完全恢复出 α_i,α_j 的夹角的信息，因此 Coxeter 图包含了几何素根系在同构下的所有信息.

定义 4.6.4 设 Π 是几何素根系，若它的 Coxeter 图是连通图，则称 Π 为约化的几何素根系. 这等价于 Π 不能分解为非空子集 Π_1 和 Π_2 的不交并，使得 Π_1 与 Π_2 正交.

关于几何素根系还有下面简单但有用的事实.

引理 4.6.5 设 Π 为几何素根系，则其中的任意子集 Π_1 是其中向量张成的向量子空间中的一个几何素根系. Π_1 的 Coxeter 图 Γ_1 是由 Π 的 Coxeter 图 Γ 删去不在其中的素根对应的顶点及与其连线得到的子图.

下面利用 V 上的初等欧氏几何来讨论几何素根系的性质及其分类. 在讨

论中，将 Coxeter 图的顶点和素根系中的素根不加区分，并且随意在图和素根系之间跳跃. 讨论中用到的一个基本的事实是：对 $\alpha=\sum_{i=1}^{l}k_i\alpha_i$，$(\alpha,\alpha)=\sum_{i,j=1}^{l}(\alpha_i,\alpha_j)k_ik_j\geqslant 0$，即二次型 $\sum_{i,j=1}^{l}(\alpha_i,\alpha_j)k_ik_j$ 是正定二次型.

引理 4.6.6　设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ 是一个几何素根系，则它的 Coxeter 图中所有连线的点对数目不超过 $l-1$.

证明　令 $\alpha=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i$，则 $(\alpha,\alpha)>0$. 即

$$\sum_{i=1}^{l}(\alpha_i,\alpha_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant l}2(\alpha_i,\alpha_j)>0.$$

于是 $\sum_{i<j}-2(\alpha_i,\alpha_j)<l$，注意到若 α_i 与 α_j 连线，则 $-2(\alpha_i,\alpha_j)\geqslant 1$，由此可知连线的点对数目小于 l.

这一引理有下面的自然的推论：

推论 4.6.7　在几何素根系 Π 的 Coxeter 图中没有环路，即不存在 Π 中的元素 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k,k\geqslant 3$，使得 $(\beta_1,\beta_2)\neq 0,\cdots,(\beta_{k-1},\beta_k)\neq 0,(\beta_k,\beta_1)\neq 0$.

这是因为，环路中包含的顶点做成的几何素根系会违背引理 4.6.6.

引理 4.6.8　设 $\alpha\in\Pi$，则 Π 中元素与 α 连线的总条数(包括重数)不超过 3 条.

证明　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 与 α 之间有连线，则由 Coxeter 图中没有环路，可知对 $1\leqslant i\neq j\leqslant k$，$\alpha_i$ 与 α_j 之间不能连线，否则会构成环路. 因此 $\alpha_i,1\leqslant i\leqslant k$ 中的向量彼此正交，它们可以扩充称为 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 张成的子空间的一组单位正交基 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$. 在这组基下 α 正交展开为 $\sum_{i=0}^{k}(\alpha,\alpha_i)\alpha_i$，且 $\sum_{i=0}^{k}(\alpha,\alpha_i)^2=1$. 因为 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，$(\alpha,\alpha_0)\neq 0$，所以

$$\sum_{i=1}^{k}4(\alpha,\alpha_i)^2<4.$$

而 $4(\alpha,\alpha_i)^2$ 恰为 α 与 α_i 的连线条数，于是引理得证.

定义 4.6.9　设几何素根系 Π 的 Coxeter 图 Γ 中的一组顶点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，满足 $2(\alpha_i,\alpha_{i+1})=-1,1\leqslant i\leqslant k-1$，则称这些顶点及其连线构成的子图为单链. 单链对应的子图形如图 4-2.

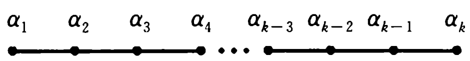

图 4-2

引理 4.6.10　设 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$ 为一个几何素根系，它的 Coxeter 图为 Γ，若 Γ 中素根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 及其连线构成单链，则将此单链

在图中缩成一个顶点 α 后仍是一个 Coxeter 图，它对应于将 Π 中的 k 个元素 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 替换为 $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$ 所得的几何素根系.

证明 需要验证将 Π 中的素根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 替换为 α 所得到的向量组仍是几何素根系. 因为

(1) $(\alpha,\alpha)=\sum_{i,j=1}^{k}(\alpha_i,\alpha_j)=k-(k-1)=1$;

(2)若 β_j 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中的素根无连线，β_j 与 α 的夹角为 $\pi/2$. 若 β_j 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 中的素根有连线，则最多与一个有连线，否则会产生环路. 设此素根为 α_t，则 β_j 和 α 的夹角与 β_j 和 α_t 的夹角相等，因此 $\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$ 为一个几何素根系.

引理 4.6.11 设 Π 是约化的几何素根系，则它的 Coxeter 图 Γ 中不能包含如图 4-3 中的子图.

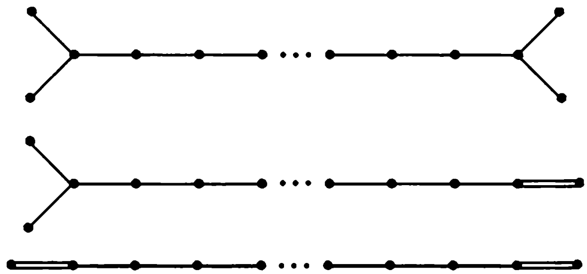

图 4-3

证明 容易看出若 Π 包含如上的子图，则利用引理 4.6.10，将中间的单链缩为顶点，得到的图包含连线条数大于 3 的顶点，从而导出矛盾.

下面对约化几何素根系的 Coxeter 图进行分类.

若 Γ 包含三重线，则由引理 4.6.8，三重线的顶点都不能再和其他顶点相连，于是不再有其他顶点，否则与连通性矛盾. 因此 Γ 只能是如图 4-4.

图 4-4

若 Γ 包含两重线，则只能有唯一一个两重线，否则与引理 4.6.11 矛盾. 而其他连线都是一重的，根据两重线的位置结合连通性可以有以下情形，如图 4-5：

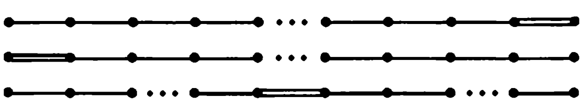

图 4-5

显然前面两种是同构的图.

若 Γ 只包含一重线,且包含有指数为 3 的顶点,则 Coxeter 图只能形如图 4-6.

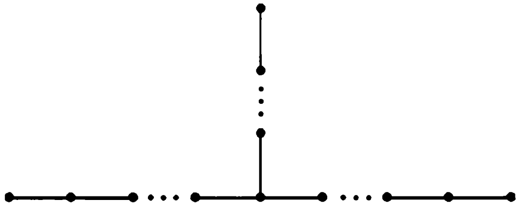

图 4-6

若 Γ 只包含一重线,且不包含指数为 3 的顶点,则 Coxeter 图只能是单链.

上面的图包括了所有可能的约化几何素根系的 Coxeter 图,是不是每个图都确实是几何素根系的图呢? 下面将仔细讨论.

命题 4.6.12　设图 4-7Γ 是几何素根系对应的 Coxeter 图,不妨设 $1 \leqslant s \leqslant t$,则必有 $s=2, t=2$ 或者 $s=1$,t 取任意大于 1 的正整数.

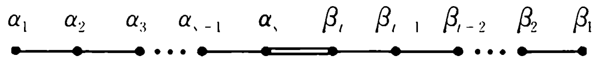

图 4-7

证明　实际上只需证明图 4-8 不是几何素根系的 Coxeter 图即可.

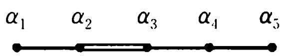

图 4-8

用反证法. 令 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2$, $\gamma=3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5$,直接计算可得

$$(\beta,\gamma)^2=18, (\beta,\beta)=3, (\gamma,\gamma)=6.$$

这说明 $(\beta,\gamma)^2=(\beta,\beta)(\gamma,\gamma)$,由 Cauchy-Schwarz 不等式,可知 β,γ 平行,这是不可能的,因此 Γ 不是几何素根系的 Coxeter 图.

命题 4.6.13　设图 4-9Γ 是几何素根系的 Coxeter 图,不妨设 $2 \leqslant r \leqslant s \leqslant t$,则只可能是 $r=2, s=2$, t 为不小于 2 的整数,或者 $r=2, s=3, t=3, 4$ 或 5.

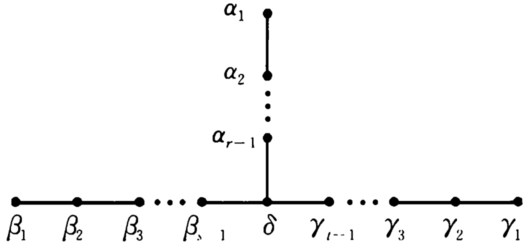

图 4-9

证明 首先证明 $r<3$,这只需要证明图 4-10 不是几何素根系的 Coxeter 图.

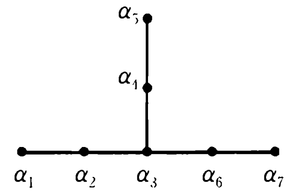

图 4-10

令 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$,直接计算 $(\beta,\beta)\leqslant 0$,这给出矛盾.

再证明 $s<4$,这只需要证明图 4-11 不是几何素根系的 Coxeter 图.

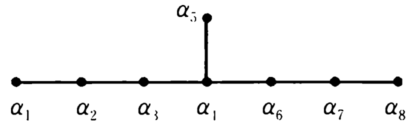

图 4-11

令 $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_1+2\alpha_5+3\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8$,直接计算 $(\beta,\beta)\leqslant 0$,这给出矛盾.

最后证明当 $\gamma=2,s=3$ 时,t 只能是 3,4,5,只需要证明图 4-12 不是几何素根系的 Coxeter 图.

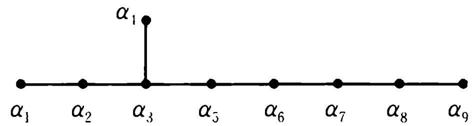

图 4-12

令 $\beta=2\alpha_1+4\alpha_2+6\alpha_3+3\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8+\alpha_9$,直接计算 $(\beta,\beta)\leqslant 0$,这给出矛盾.

综合上面结果,就得到了所有可能的 Coxeter 图.

考虑到紧李代数的素根系中素根的长度信息导致 Dynkin 图中的方向箭头,我们得到:

定理 4.6.14 紧李代数的 Dynkin 图只可能是以下情形之一:

(1) $A_l(l\geqslant 1)$

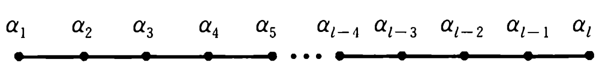

图 4-13

(2) $B_l(l\geqslant 2)$

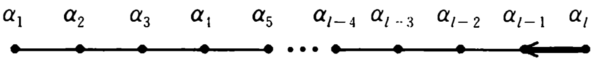

图 4-14

(3) $C_l(l\geqslant 3)$

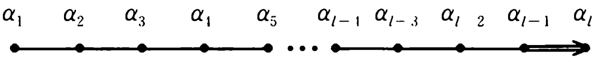

图 4-15

(4) $D_l(l\geqslant 4)$

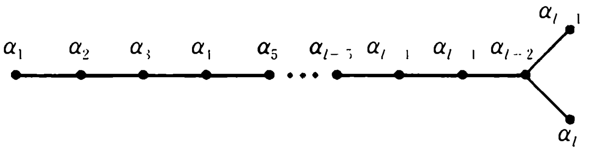

图 4-16

(5) G_2

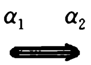

图 4-17

(6) F_4

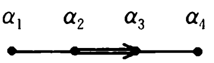

图 4-18

(7) E_6

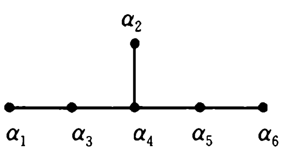

图 4-19

(8) E_7

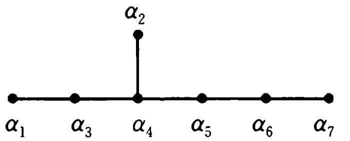

图 4-20

(9) E_8

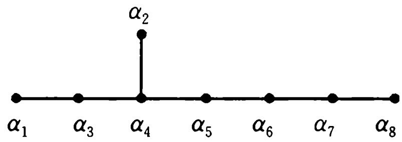

图 4-21

证明 注意到 $A_1 \cong B_1 \cong C_1$，$C_2 \cong B_2$，$D_2 \cong A_1 \oplus A_1$，$D_3 \cong A_3$，因此在(1)(2)(3)(4)中假定在 A_l, B_l, C_l, D_l 四种情形分别要求 $l \geqslant 1,2,3,4$. 上述的 Dynkin 图对应的素根系彼此都不同构，请读者自己去验证.

下面说明上面的每个 Dynkin 图都对应某个素根系. 实际上，A_l, B_l, C_l, D_l 恰好对应到经典李代数 $\mathrm{su}(l+1)$，$\mathrm{so}(2l+1)$，$\mathrm{sp}(l)$，$\mathrm{so}(2l)$的素根系. 对于其他五种 Dynkin 图，也有对应的例外单李代数g_2, f_4, e_6, e_7, e_8，相应的单连通李群记为 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

下面给出这些根系的实现：

对于 G_2，相应的向量空间为 $\mathbf{R}^3$ 的二维线性子空间，素根系为$\{\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2, -2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\}$.

对于 F_4，相应的向量空间为 $\mathbf{R}^4$，素根系为$\left\{\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4, \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4)\right\}$.

对于 E_8，相应的向量空间为 $\mathbf{R}^8$，素根系为$\left\{\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\cdots+\boldsymbol{e}_7-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_8), -\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_5, \boldsymbol{e}_5-\boldsymbol{e}_6, \boldsymbol{e}_6-\boldsymbol{e}_7\right\}$. E_6, E_7 的素根系可以实现为 E_8 的子系.

这里 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_l$ 为单位正交基.

习题 4.6

1. 不利用本节的引理，直接证明图 4-22 不是几何素根系的 Coxeter 图(提示：设法在图中的三个素根张成的三维空间上中找到一个非零向量 X，使得$(X,X)\leqslant 0$).

图 4-22

2. 根据约化素根系的分类，给出所有的秩为 3 的素根系的分类.
3. 验证：$su(l+1)$，$\mathrm{so}(2l+1)$，$\mathrm{sp}(l)$，$\mathrm{so}(2l)$的 Dynkin 图恰好是 A_l，B_l，C_l，D_l.
4. 设 Δ 是欧式空间 V 中的根系，显然 $\omega: V\to V, v\to -v$ 是根系的自同构，对于定理 4.6.14 中列出的哪些 Dynkin 图，ω 在 Weyl 群中.

§4.7 紧李群的 Cartan 子群的共轭性

首先做一些准备工作，先给出下面的定义.

定义 4.7.1 紧李群 G_0 中的极大的连通交换子群 H_0 称为 G_0 的 Cartan 子群.

显然连通子群 H_0 是 G_0 的 Cartan 子群当且仅当它的李代数是 G_0 的李代数的 Cartan 子代数.

引理 4.7.2 紧李群 G_0 的 Cartan 子群是紧致的交换李群，因此是一个环面.

证明 设 H_0 是 G_0 的 Cartan 子群，由点集拓扑学的基本知识，它的闭包 $\overline{H}_0$ 显然连通且交换. 由 H_0 是极大的连通交换子群，及 $H_0\subset\overline{H}_0$，可知 $\overline{H}_0=H_0$，即 H_0 是 G_0 的闭子群. 由于 G_0 紧致，H_0 也紧致. 根据紧致连通交换李群的分类，可知 H_0 是环面.

对 Cartan 子群 H_0，从李代数 h_0 到 H_0 的指数映射 $\exp: h_0\to H_0$ 为覆叠同态.

命题 4.7.3 设 H_0 为紧李群 G_0 的 Cartan 子群，则 H_0 的正规化子 $N_{G_0}(H_0)$ 的单位元连通分支是 H_0.

证明 显然 $N_{G_0}(H_0)$ 是闭子群，故为李子群，通过考虑它的李代数，容易知道 $N_{G_0}(H_0)$ 的李代数是 $n_{g_0}(h_0)$. 命题的结论由推论 4.2.9 的结果，$n_{g_0}(h_0)=h_0$ 得证.

下面先给出一些定义.

定义 4.7.4 对李群 G_0 中的元素 b_1,b_2，若存在 $a\in G_0$，使得 $\mathrm{AD}(a)b_1=b_2$，则称 b_1,b_2 是共轭的. 对李群 G_0 的李代数 g_0 中的元素 X_1,X_2，若存在 $a\in G_0$，使得 $\mathrm{Ad}(a)X_1=X_2$，则称 X_1,X_2 是共轭的. 李群 G_0 中的子群和李代数 g_0 的子代数的共轭性可类似定义.

共轭显然是等价关系.

定义 4.7.5 紧李群 G_0 中的元素 a 称为正则元素，若 a 的中心化子 $C_{G_0}(a)$ 的单位元连通分支是 G_0 的 Cartan 子群. 否则称为非正则元素. 紧李代数 g_0 中的元素 X_0 称为正则元素，若 X_0 的中心化子 $c_{g_0}(X_0)$ 是 g_0 的 Cartan 子代数. 否则称为非正则元素.

引理 4.7.6 设李群 G_0 的李代数为 g_0，则 $a\in G_0$ 的中心化子 $C_{G_0}(a)$ 是 G_0 的闭子群，且它的李代数为 $\{X\in g_0\mid \mathrm{Ad}(a)X=X\}$，即 $\mathrm{Ad}(a)$ 的以 1 为特征值的特征子空间.

证明 a 的中心化子 $C_{G_0}(a)=\{b\in G_0\mid \mathrm{AD}(b)a=a\}$. 显然若 X 在 $C_{G_0}(a)$ 的李代数中，则 $\exp(tX)\in C_{G_0}(a)$，则有 $\exp(tX)a\exp(-tX)=a$，即 $a\exp(tX)a^{-1}=\exp(tX)$，对 t 微分得到 $\mathrm{Ad}(a)X=X$，即 X 是 $\mathrm{Ad}(a)$ 的以 1 为特征值的特征向量.

倒推回去不难看出，若 X 是 $\mathrm{Ad}(a)$ 的以 1 为特征值的特征向量，则 $\exp(tX)\in C_{G_0}(a)$. 于是引理得证.

推论 4.7.7 设 G_0 为紧李群，H_0 是 G_0 的 Cartan 子群，G_0，H_0 的李代数为 $\mathfrak{g}_0$，$\mathfrak{h}_0$，则 $a\in H_0$ 是正则元素当且仅当 $\mathfrak{h}_0=\{X\in\mathfrak{g}_0\mid \mathrm{Ad}(a)X=X\}$.

推论 4.7.8 设 H_0 是紧李群 G_0 的 Gartan 子群，它们的李代数为 $\mathfrak{h}_0$，$\mathfrak{g}_0$. 设 $\mathfrak{g}_0$ 上由不变内积 $(,)$ 和 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 决定的根系为 Δ，则对任取 $X_0\in H_0$，$a=\exp(X_0)\in H_0$ 是正则元素当且仅当对任意 $\alpha\in\Delta$，$\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}\neq 1$.

证明 显然 a 是正则元素当且仅当 $\mathrm{Ad}(a)$ 的特征根 1 的重数为 $\dim H_0$. 由 $\mathrm{Ad}(a)=\exp(\mathrm{ad}(X_0))$，及 $\mathrm{ad}(X_0)$ 的特征值为 0(重数为 $\dim H_0$)和 (α,X_0)，$\alpha\in\Delta$，可知 $\mathrm{Ad}(a)$ 的特征值为 1(重数为 $\dim H_0$)和 $\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}$，$\alpha\in\Delta$，因此 a 为正则元素当且仅当对任意 $\alpha\in\Delta$，$\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}\neq 1$.

对 $\alpha\in\Delta$，$k\in\mathbf{Z}$，定义 $\mathfrak{h}_0$ 中的超平面 $\mathfrak{h}_{\alpha,k}=\{X_0\in\mathfrak{h}_0\mid(\alpha,X_0)=2\sqrt{-1}k\pi\}$. 令 $H_\alpha=\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\exp(\mathfrak{h}_{\alpha,k})$，则它是 H_0 的子群，且其中元素全是非正则元素.

推论 4.7.9 任取 $\alpha\in\Delta$，$H_\alpha=\{a=\exp(X_0)\mid X_0\in\mathfrak{h}_0,\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}=1\}$ 是 G_0 中非正则元素构成的闭子群，它的李代数为 $\mathfrak{h}_\alpha=\{X_0\in\mathfrak{h}_0\mid(\alpha,X_0)=0\}$.

推论 4.7.10 Cartan 子群 H_0 中的所有非正则元素的子集 $H'_0=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\exp(\mathfrak{h}_{\alpha,k})$ 是 H_0 中的余维数为 1 的闭子集. 因此 H_0 中所有的正则元素构成 H_0 的稠密开子集. Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$ 中的非正则元素的子集 $\mathfrak{h}'_0=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}\mathfrak{h}_{\alpha,0}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 中的余维数为 1 的闭子集.

对于紧李代数的 Cartan 子代数，有下面重要的

定理 4.7.11 设 $\mathfrak{g}_0$ 为紧李代数，它对应的连通紧李群为 G_0，$\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Cartan 子代数，则对任意 $X\in\mathfrak{g}_0$，存在 $a_0\in G_0$，使得 $\mathrm{Ad}(a_0)X\in\mathfrak{h}_0$.

证明 选取 $\mathfrak{h}_0$ 中的正则元 X_0，于是若 $X\in\mathfrak{g}_0$ 满足 $[X,X_0]=0$，则 $X\in\mathfrak{h}_0$. 考虑解析函数 $h:G_0\to\mathbf{R}$，$a\mapsto(X_0,\mathrm{Ad}(a)X)$，因为 G_0 是紧致的，所以函数 h 存在最大值. 设最大值在 a_0 处取得，因为对于任意 $Z\in\mathfrak{g}_0$，函数 $h(t)=(X_0,\mathrm{Ad}(\exp(tZ))\mathrm{Ad}(a_0)X)$ 在 $t=0$ 处取得最大值，所以

$$h'(0)=(X_0,[Z,\mathrm{Ad}(a_0)X])=([\mathrm{Ad}(a_0)X,X_0],Z)=0.$$

这说明 $[\mathrm{Ad}(a_0)X,X_0]=0$，即 $\mathrm{Ad}(a_0)X\in\mathfrak{h}_0$.

利用定理 4.7.11,可以证明紧李代数g_0的 Cartan 子代数彼此共轭,而且还可以进一步证明紧李群的 Cartan 子群彼此共轭.但是用它无法直接证明更强的定理 4.7.16,因此,我们采用另一种方法来证明.具体过程可参考文献[13].

引理 4.7.12 设 G_0 为 n 维李群,它的 Cartan 子群 H_0 中的非正则元素构成的子集为 $H_0'=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}H_\alpha$,记 $S=\bigcup\limits_{a\in G_0}\mathrm{AD}(a)H_0'$,则 S 是 G_0 中所有非正则元素的子集,它是维数不超过 $n-3$ 的解析流形的解析映像,于是G_0-S 在 G_0 中连通.

证明 任取 $\alpha\in\Delta$,因为 H_α 的中心化子 $C_{G_0}(H_\alpha)$是闭子群,所以 $G_0/C_{G_0}(H_\alpha)$是解析流形.定义映射

$$\phi_\alpha:G_0\times H_\alpha\to G_0,(a,t)\to ata^{-1},$$

若 a,a'在 $C_{G_0}(H_\alpha)$的同一左陪集中,即存在 $c\in C_{G_0}(H_\alpha)$,$a'=ac$,则 $a'ta'^{-1}=actc^{-1}a^{-1}=ata^{-1}$.这说明映射 ϕ_α 诱导出映射

$$\phi_\alpha':G_0/C_{G_0}(H_\alpha)\times H_\alpha\to G_0,(aC_{G_0}(H_\alpha),t)\to ata^{-1},$$

ϕ_α'显然是解析映射.

直接计算可得

引理 4.7.13 $\dim G_0/C_{G_0}(H_\alpha)\times H_\alpha$ 的维数小于$n-3$.

由于 $S=\bigcup\limits_{\alpha\in\Delta}\mathrm{Im}\phi_\alpha'$,可知结论成立.

引理 4.7.14 设 H_0 是紧李群 G_0 的 Cartan 子群,定义映射 $\phi:G_0\times H_0\to G_0,(a_0,t_0)\to a_0t_0a_0^{-1}=\mathrm{AD}(a_0)t_0$.设 X,Y 分别表示 G_0 和 H_0 上的左不变向量场,即 $X\in g_0,Y\in h_0$,则 $\mathrm{d}\phi$ 将点(a_0,t_0)的切空间 $T_{(a_0,t_0)}(G_0\times H_0)=T_{a_0}G_0\times T_{t_0}H_0$ 中的切向量(X_{a_0},Y_{t_0})映为 $a_0t_0a_0^{-1}$ 处的切空间 $T_{\mathrm{AD}(a_0)t_0}G_0$ 中的切向量

$$\mathrm{Ad}(a_0)\circ(\mathrm{d}L_{t_0})[\mathrm{Ad}(t_0^{-1})X_e-X_e+Y_e].$$

证明 因为 $d\phi$ 是线性的,所以只需要计算向量 $\mathrm{d}\phi(X_{a_0},0)$和 $\mathrm{d}\phi(0,Y_{t_0})$的像即可.设 $X\in g_0,Y\in h_0$,则 X_{a_0}是曲线 $a_0\exp(tX)$在 a_0 点的切向量,Y_{t_0}是曲线 $t_0\exp(tY)$在 t_0 点的切向量.显然当 a_0 固定的时候,$a_0t_0\exp(tY)a_0^{-1}$ 在 $t=0$ 处的切向量为 $\mathrm{Ad}(a_0)\circ\mathrm{d}L_{t_0}(Y_e)$;若 t_0 固定时,则

$a_0\exp(tX)t_0\exp(-tX)a_0^{-1}$在 $t=0$ 处的切向量为

$$\mathrm{Ad}(a_0)[\mathrm{d}R_{t_0}(X_e)-\mathrm{d}L_{t_0}(X_e)]=\mathrm{Ad}(a_0)\circ\mathrm{d}L_{t_0}[\mathrm{Ad}(t_0^{-1})(X_e)-X_e],$$

将两部分合起来得到所需结论.

因为 $\mathrm{Ad}(a_0)\circ\mathrm{d}L_{t_0}$在切空间上是同构,所以有

推论 4.7.15 $\mathrm{d}\phi$ 是满射,当且仅当对任意 $X_e\in T_eG_0,Y_e\in T_eH_0$,所有

元素 $\mathrm{Ad}(t_0^{-1})(X_e)-X_e+Y_e$ 张满$\mathfrak{g}_0$，当且仅当 t_0 是 H_0 中的正则点.

定理 4.7.16(Cartan)　在紧连通李群 G_0 中取定 Cartan 子群 H_0，则 G_0 中的任意元素 a_0 共轭于 H_0 中的某个元素.

证明　考虑乘法映射 $\phi':G_0/H_0\times H_0\to G_0,(a_0H_0,t_0)\mapsto a_0ta_0^{-1}$，为了证明定理，只要说明 ϕ'映满 G_0. 由于若 t_0 为 H_0 中的正则点，则 $\mathrm{d}\phi$ 在点(a_0,t_0)处是满射，可知 $\mathrm{d}\phi'$在(a_0H_0,t_0)也是满射.

已知 H_0 中的非正则元素构成集合 H_0'，将所有的正则元素构成的集合记为 $H_0''=H_0-H_0'$. 作 $S=\bigcup\limits_{a\in G_0}\mathrm{AD}(a)H_0'$，$T=\bigcup\limits_{a\in G_0}\mathrm{AD}(a)H_0''$，要证明定理只要说明 $G_0=S\cup T$ 即可.

(1)显然 $S\cap T=\varnothing$.

(2)由(1)，$T\subset G_0-S$. 下证 T 是 G_0-S 的闭子集.

在 T 中选取收敛序列$\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$，极限为 $t_0\in G_0-S$. 设 $t_i=\mathrm{AD}(a_i)h_i,a_i\in G_0,h_i\in H_0''$，则由 G_0 紧致，可知$\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$存在子序列收敛到 a_0，不妨直接假定 a_i 收敛至 a_0. 这样 $h_i=\mathrm{AD}(a_i^{-1})t_i$ 收敛到 $\mathrm{AD}(a_0^{-1})t_0$，这说明 h_i 的极限 $\mathrm{AD}(a_0^{-1})t_0$在 $S\cup T$ 中.

若 $\mathrm{AD}(a_0^{-1})t_0\in S$，则 $t_0\in \mathrm{AD}(a_0)S=S$，但是这与假设 $t_0\in G_0-S$ 矛盾. 因此 $\mathrm{AD}(a_0^{-1})t_0\in T$，即 $t_0\in T$. 这证明了 T 是 G_0-S 的闭子集.

(3)再证 T 是 G_0-S 的开子集.

利用前面引理 4.7.14 和推论 4.7.15，可知在 ϕ'在$(G_0/H_0)\times H_0''$的每点处的切映射都是满射，从而它将开集映为开集. 由$(G_0/H_0)\times H_0''$是开集，可知 $T=\phi'((G_0/H_0)\times H_0'')$为 G_0-S 中的开集.

(4)综合(2)(3)并结合 G_0-S 的连通性，可得 $T=G_0-S$.

于是定理得证.

推论 4.7.17　紧连通李群 G_0 的 Cartan 子群彼此共轭.

证明　设 H_0,H_1 是 G_0 的两个 Cartan 子群，选取 H_1 中的正则元素 t_1，由定理 4.7.16，存在 $a\in G_0$，$\mathrm{AD}(a)t_1=t_0\in H_0$. 由正则元素的定义，$t_0$ 也是正则元素，且 $C_{G_0}(t_1)^0=H_1,C_{G_0}(t_0)^0=H_0$，这里 $C_{G_0}(t_1)^0$ 表示 $C_{G_0}(t_1)$的单位元连通分支. 于是 $\mathrm{AD}(a)(H_1)=\mathrm{AD}(a)(C_{G_0}(t_1)^0)=C_{G_0}(\mathrm{AD}(a)t_1)^0=H_0$.

紧李群 G_0 的 Cartan 子群都彼此共轭，它们具有相同的维数，因此有下面的

定义 4.7.18　紧李群 G_0 的 Cartan 子群的维数称为 G_0 的秩. 对于紧李代数$\mathfrak{g}_0$，它的 Cartan 子代数的维数称为$\mathfrak{g}_0$的秩.

显然连通紧李群 G_0 是其中的所有 Cartan 子群的并，我们还有

命题 4.7.19　连通紧李群 G_0 的中心是其中的所有 Cartan 子群的交.

证明　对任意 $c\in C(G_0)$和 Cartan 子群 H_0，存在 $a\in G_0$，使得$aca^{-1}\in H_0$，但 $aca^{-1}=c$. 这说明 $C(G_0)$包含在 Cartan 子群的交中.

反过来，若 c 在所有 Cartan 子群的交中，则对任意 $a\in G_0$，a 位于某一 Cartan 子群中. 但 c 也在这一 Cartan 子群中，因此 a，c 可交换，从而

$$c\in C(G_0).$$

例 4.7.20　$SO(l)$，$l\geqslant 2$ 的极大环面.

在 $SO(l)$中，当 $l=2n$ 为偶数时，其中的所有形如

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_n & \sin\theta_n\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_n & \cos\theta_n
\end{pmatrix}$$

的矩阵构成了 Cartan 子群. 而当 $l=2n+1$ 为奇数时，其中的所有形如

$$\begin{pmatrix}
\cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\theta_n & \sin\theta_n & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sin\theta_n & \cos\theta_n & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

的矩阵构成了 Cartan 子群.

习题 4.7

1. (1)设 G_0 为李群,称 $a\in G_0$ 为生成元,若 $\langle a\rangle=\{a^n\mid n\geqslant 0\}$ 在 G_0 中是稠密的,即 $\langle a\rangle$ 的闭包为 G_0. 证明:T^n 中的生成元存在,且在 T^n 中是稠密的.

(2)设 H_0 是紧李群 G_0 的 Cartan 子群,证明:H_0 的生成元是正则元素.

2. 证明:(1)紧李群 G_0 中的元素是正则元素当且仅当它只属于唯一的一个 Cartan 子群.

(2)紧李代数 $\mathfrak{g}_0$ 中的元素是正则元素当且仅当它只属于唯一的一个Cartan子代数.

3. 证明:$A\in U(n)$ 是正则元素当且仅当它的特征根彼此不同. 对紧李群 $\mathrm{SO}(n)$ 和 $\mathrm{Sp}(n)$ 给出类似的结果.

4. 利用定理 4.7.16 证明:连通紧李群的指数映射是满射.

5. 设 G_0 是连通紧李群,证明:对任意 $k\neq 0$,映射 $f:G_0\to G_0, a\mapsto a^k$ 都是满映射.

6. 设 H 是紧李群 G_0 的闭交换子群,若 H 的单位元连通分支 H_e 同构于某个环面 $T^k, k>0$,按下面步骤,证明:H 是连通的,即 H 本身就同构于 T^k.

(1)若 H/H_e 是循环群,则存在 $x\in H, x^m\in H_e$,使得 H 由 x, H_e 生成. 选取 H_e 的生成元 a,则 $x^{-m}a\in H_e$,设 $x^{-m}a=\exp(X)$,这里 X 在 H_e 的李代数 $\mathfrak{h}_e$ 中. 令 $b=x\exp\left(\dfrac{X}{m}\right)$,则 $b^m=a$,证明:b 是 H 的生成元.

(2)若 H/H_e 是有限群,并利用(1)中的结果证明:H 中存在生成元.

(3)利用(2),证明 H 是连通的紧李群,故为环面 T^k.

7. 设 H_0 是紧李群 G_0 的闭子群,同构于某个环面 T^k(也称 H_0 为 G_0 的环子群),利用习题 6 的结论,证明:H_0 在 G_0 中的中心化子 $C_{G_0}(H_0)=$所有包含 H_0 的 Cartan 子群的并,从而 $C_{G_0}(H_0)$ 是连通的. 特别的,设 H_0 为 Cartan子群时,$C_{G_0}(H_0)=H_0$.

8. 证明:复李群是紧致的,当且仅当它是偶数维环面(提示:利用复解析函数的极大模原理).

9. 设 $\mathfrak{g}_0$ 是紧李代数,它的 Killing 型为 K,在 $\mathfrak{g}_0$ 中选取不变内积 $(\,,\,)$ 和 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_0$,得到根系 Δ,则可以按如下步骤计算 K:

(1)对 $X_0\in\mathfrak{h}_0$,利用 $K(X_0,X_0)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X_0)^2)$,计算 $K(X_0,X_0)$.

(2)对任意 $X\in\mathfrak{g}_0$,利用 Cartan 的定理,可知存在 $\mathfrak{g}_0$ 的内自同构 σ,使得 $\sigma(X)=X_0\in\mathfrak{h}_0$. 由 Killing 型是伴随不变的,$K(X,X)=K(X_0,X_0)$,从而得到 $K(X,X)$.

(3)利用极化恒等式 $K(X,Y)=\dfrac{1}{2}(K(X+Y,X+Y)-K(X,X)-K(Y,Y))$ 计算 Killing 型.

利用上述方法计算紧李代数 $\mathrm{u}(n)$, $\mathrm{so}(n)$ 和 $\mathrm{sp}(n)$ 的 Killing 型.

§4.8 紧李代数的分类

前面从紧李代数g_0，它的一个 Cartan 子代数 h_0 和伴随不变内积出发得到了根系，并且通过在根系所在的实向量空间 $\sqrt{-1}h_0$ 中选取一个过原点且与根系不相交的超平面及其正侧和负侧得到了一个素根系，素根系有相应的 Cartan 矩阵和 Dynkin 图. 但素根系不唯一，它依赖于g_0的 Cartan 子代数 h_0 的选取，还依赖于伴随不变内积和正根系的选取，本节将说明对于紧半单李代数g_0，虽然它的素根系不唯一，不是李代数g_0的不变量，但是由它构造的 Cartan矩阵和 Dynkin 图确实是g_0的不变量. 而且，对于紧半单李代数，它们还是完全的不变量. 即两个紧半单李代数同构，当且仅当它们具有相同的 Cartan 矩阵或 Dynkin 图.

由前面的结果，已知紧李代数可以分解为中心与紧单理想的直和，且若不计次序则分解唯一，因此对紧李代数的分类归结为紧单李代数的分类. 下面假定g_0是紧单李代数，且维数大于 1，这时g_0的 Killing 型负定，于是可以取 $-K_0$ 为不变内积. 设g_0关于 Cartan 子代数 h_0 及不变内积$(,)$的根系为 Δ，则有$g=g_0\otimes\mathbf{C}$ 的根子空间分解$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$ 及 Weyl 基 $e_\alpha,\alpha\in\Delta$.

引理 4.8.1 设g_0为紧半单李代数，维数大于 1，$g=g_0\otimes\mathbf{C}$，在 Cartan 子代数 h_0 决定的根系 Δ 中选取素根系Π，则$\bigoplus\limits_{\alpha\in\pm\Pi}g_\alpha$生成的李代数为$g$.

证明 设$\bigoplus\limits_{\alpha\in\pm\Pi}g_\alpha$生成的子代数为$g'$.

首先由于g_0为紧半单李代数，可知 h 由素根 α_i，$1\leqslant i\leqslant l$ 张成，但是 $\alpha_i=[e_{\alpha_i},e_{-\alpha_i}]$，可知 $h\subset g'$.

再由推论 4.4.16，对于任意 $\alpha\in\Delta^+$，存在 $i_1,i_2,\cdots,i_k$，使得 $\alpha=\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_k}$，且对任意 t，$1\leqslant t\leqslant k$，有 $\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\cdots+\alpha_{i_t}\in\Delta^+$. 于是，由命题 4.3.7 的结论(4)，$g_\alpha=[\cdots[[g_{\alpha_{i_1}},g_{\alpha_{i_2}}],g_{\alpha_{i_3}}],\cdots,g_{\alpha_{i_k}}]$，因此$g_\alpha\subset g'$. 类似的$g_{-\alpha}\subset g'$. 这表明$g\subseteq g'$，从而$g'=g$.

引理 4.8.2 设g_0为紧单李代数，维数大于 1. 任取素根系Π，则Π不能分解为两个不交的非空子集Π_1,Π_2 的并，使得$(\Pi_1,\Pi_2)=0$.

证明 如若不然，设Π分解为两个非空子集Π_1,Π_2 的并，使得$(\Pi_1,\Pi_2)=0$. 任取 $\alpha_1\in\Pi_1$，$\alpha_2\in\Pi_2$，考虑过 α_1 的 α_2 根链，$\alpha_1-p\alpha_2,\cdots,\alpha_1,\cdots,\alpha_1+q\alpha_2$. 由于$\dfrac{2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=p-q=0$，可知 $p=q$，但是 $\alpha_1-\alpha_2$ 不是根，从而 $\alpha_1+\alpha_2$ 也不是根，于是 $\alpha_1\pm\alpha_2\notin\Delta$，这说明$[g_{\pm\alpha_1},g_{\pm\alpha_2}]=0$.

记$\bigoplus\limits_{\alpha\in\pm\Pi_1}g_\alpha$和$\bigoplus\limits_{\alpha\in\pm\Pi_2}g_\alpha$生成的$g$的子代数分别为$g_1,g_2$，则$[g_1,g_2]=0$. 利用

引理 4.8.1 $\bigoplus_{\alpha\in\pm\Pi} g_\alpha$生成的子代数为$g$，显然$\forall\alpha\in\pm\Pi$，$g_\alpha\subset g_1\oplus g_2$，这说明$g\subset g_1\oplus g_2\subset g$. 从而$g=g_1\oplus g_2$，$g_1$，$g_2$都是$g$的理想，这与假设矛盾. 于是命题得证.

这一引理说明

推论 4.8.3 紧单李代数的 Dynkin 图是连通图.

下面证明 Cartan 矩阵或 Dynkin 图是紧李代数g_0的不变量. 分三步来说明:

(1)在根系确定后，Cartan 矩阵不依赖于素根系的选取，这一步比较显然，因为我们知道不同的两个素根系之间只差一个 Weyl 群中元素 w 的作用，设两个素根系Π_1，Π_2满足$w(\Pi_1)=\Pi_2$，则$\dfrac{2(w(\alpha_i),w(\alpha_j))}{(w(\alpha_j),w(\alpha_j))}=\dfrac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$. 这说明二者的 Cartan 矩阵相同.

(2)说明在伴随不变内积(,)给确定的情况下，不同的 Cartan 子代数给出等价的根系. 这可以利用下面的引理证明.

引理 4.8.4 设 h_0 和 h_1 为紧李代数g_0的两个 Cartan 子代数，则存在g_0的内自同构 σ，使得 $h_1=\sigma(h_0)$，设g，h 为g_0，h_0 的复化，则 σ 可以扩充为g的复线性自同构. 设g_0关于 h_0 的根系为 Δ，Cartan 分解为$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$，则$g_0$关于 h_1 的根系为 $\Delta_1=\sigma(\Delta)$，相应的 Cartan 分解为$g=\sigma(h)\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta_1}g_\alpha=\sigma(h)\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_{\sigma(\alpha)}$.

证明 这只需要将自同构 σ 作用在 Cartan 分解$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$上就可以看出.

这一引理对一般的自同构也成立.

由不变内积的性质，可知对任意 $X,Y\in g$，$(\sigma(X),\sigma(Y))=(X,Y)$. 于是 σ 给出了 Δ 与 $\sigma(\Delta)$之间的等价.

(3)最后说明，在给定 h_0 的情形下，选取不同的不变内积得到的根系 Δ 虽然不同，但是它们对应的 Cartan 矩阵相同.

首先证明下面的定理.

定理 4.8.5 设g_0是紧李代数，它可以分解为$g_0=c(g_0)\oplus\bigoplus_{i=1}^{r}g_i$，其中 $c(g_0)$ 为g_0的中心，g_i是紧单理想. 设g_i的 Killing 型为 K_i，则g_0上的任意不变内积 L:$g\times g\to\mathbf{R}$，形如 $K_0\oplus k_1K_1\oplus\cdots\oplus k_rK_r$. 即对任意 $X,Y\in g_0$，$X=X_0+X_1+\cdots+X_r$，$Y=Y_0+Y_1+\cdots+Y_r$，$L(X,Y)=K_0(X_0,Y_0)+k_1K_1(X_1,Y_1)+\cdots+k_rK_r(X_r,Y_r)$. 这里 K_0 为 $c(g_0)$上的任意内积，k_i，$1\leqslant i\leqslant r$，为负实数.

证明 设 L 是g_0上的不变内积，对于任意 $i\neq j$，$1\leqslant i\leqslant j$，可知g_i，g_j满足$[g_i,g_j]=\{0\}$. 利用内积的不变性，可知 $L(g_i,g_j)=L(g_i,[g_j,g_j])=-L([g_j,g_i],g_j)=0$. 这表明$g_i$和$g_j$在不变内积 L 下是正交的.

接下来可以直接验证对任意 $X,Y\in g$，$X=X_0+X_1+\cdots+X_r$，$Y=Y_0+

$Y_1+\cdots+Y_r, L(X,Y)=L(X_0,Y_0)+L(X_1,Y_1)+\cdots+L(X_r,Y_r)$. 设 L_i 为 L 在$\mathfrak{g}_i$上的限制,则容易验证 L_i 是$\mathfrak{g}_i$上的不变内积,且 $L=L_0\oplus L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_r$.

定理接下来的证明只要把下面引理应用到$\mathfrak{g}_i$和 L_i 上即可.

引理 4.8.6 设$\mathfrak{g}_0$是维数大于 1 的紧单李代数,L 是$\mathfrak{g}_0$上的一个不变内积,则 L 与$\mathfrak{g}_0$上的 Killing 型相差一个负实数倍数 k,即对于任意 $X,Y\in\mathfrak{g}_0$,

$$L(X,Y)=kK(X,Y).$$

证明 首先证明$\mathfrak{g}_0$上的不变内积 L 给出了$\mathfrak{g}_0$的伴随表示到它的对偶表示的一个同构 ϕ. 对 $X\in\mathfrak{g}_0$,令 $\phi(X)=L(X,-)$,即证明对任意 $X\in\mathfrak{g}_0$,有 $\phi\circ\mathrm{ad}(X)=\mathrm{ad}^*(X)\circ\phi$. 这里 ad^* 是 ad 的对偶表示,即对任意 $\theta\in\mathfrak{g}_0^*,Y\in\mathfrak{g}_0$,

$$\langle\mathrm{ad}^*(X)\theta,Y\rangle=-\langle\theta,\mathrm{ad}(X)Y\rangle.$$

由于

$$\begin{aligned}\langle\phi(\mathrm{ad}(X)Y),Z\rangle&=L(\mathrm{ad}(X)Y,Z)=-L(Y,\mathrm{ad}(X)Z)\\&=-\langle\phi(Y),\mathrm{ad}(X)Z\rangle=\langle\mathrm{ad}^*(X)(\phi(Y)),Z\rangle.\end{aligned}$$

这表明 $\phi(\mathrm{ad}(X)Y)=\mathrm{ad}^*(X)(\phi(Y))$,于是有 $\phi\circ\mathrm{ad}(X)=\mathrm{ad}^*(X)\circ\phi$.

类似的$\mathfrak{g}_0$的 Killing 型 K 也给出伴随表示到它的对偶表示之间的一个同构 ψ,于是 $\psi^{-1}\circ\phi$ 是伴随表示到自身的同构. 由 Schur 引理的推论,可以知道复化之后的映射 $\psi^{-1}\circ\phi$ 为乘以常数倍的线性映射,于是 ϕ 和 ψ 相差一倍数,由 K 负定,L 正定,倍数必为负数. 引理得证.

请读者利用定理 4.8.5 去验证. Cartan 矩阵与不变内积的选取无关. 这样综合前面的讨论,就有

定理 4.8.7 Cartan 矩阵或者 Dynkin 图是紧单李代数的不变量.

证明 前面知道 Cartan 矩阵或者 Dynkin 图的定义依赖于 Cartan 子代数,不变内积和素根系的选取,而上面的定理,命题和引理保证这些不同的选取不会改变 Cartan 矩阵或者 Dynkin 图,因此它们是紧李代数的不变量. 细节留给读者自己去验证.

接下来说明 Cartan 矩阵或者 Dynkin 图实际上是紧半单李代数的完全不变量. 先给出下面的

命题 4.8.8 通过选取适当的 Weyl 基 $e_\alpha,\alpha\in\Delta$,可以使得对任意 $\alpha,\beta\in\Delta$,结构常数 $N_{\alpha\beta}$为实数,实际上可以使得

$$N_{\alpha\beta}=\sqrt{\frac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)}\quad\text{或}\quad-\sqrt{\frac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)}.$$

这里各个符号的含义参考命题 4.3.7.

证明 假设选定了 Δ 中的一个素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$,它们给出了 Δ 上的一个字典序 $\prec$. 设 $\alpha-\beta=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i\alpha_i$, $\alpha\prec\beta\Leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 中的第一个非 0 元

素是负数.

下面归纳地对 $\alpha\in\Delta$ 选取 $e_\alpha\in g_\alpha, e_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$，使其满足 $\bar{e}_\alpha=e_{-\alpha}, (e_\alpha, e_{-\alpha})=1$.

首先对于 $\alpha_i\in\Pi$，在满足上面的条件下任意选定 $e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}, 1\leqslant i\leqslant l$.

对于 $\rho\in\Delta^+-\Pi$，令 $\Delta_\rho=\{\alpha\in\Delta\mid -\rho\prec\alpha\prec\rho\}$，假设对任意的 $\alpha\in\Delta_\rho$ 都已经选定好 $e_\alpha, e_{-\alpha}$，且当 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta_\rho$ 时，$N_{\alpha\beta}$ 是实数. 设 $\rho=\alpha+\beta, \alpha,\beta\in\Delta^+$，其中 α 取所有 ρ 的分解中之最小者，设过 β 的 α 根链为 $\beta-p\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\beta+q\alpha$，令 $e_\rho=\sqrt{\dfrac{2}{q(1+p)(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)}}[e_\alpha, e_\beta], e_{-\rho}=\bar{e}_\rho$，利用命题 4.3.7 的结论(3)，容易验证 $(e_\rho, e_{-\rho})=1$，而且

$$N_{\alpha\beta}=\pm\sqrt{\frac{q(1+p)(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)}{2}}$$

是实数(注意这里 $N_{\alpha\beta}$ 的符号取正负皆可，要点是在整个证明过程中一旦选定则不能再变化).

下面验证对于任意 $\gamma,\delta,\gamma+\delta\in\Delta_\rho\cup\{\rho,-\rho\}$，$N_{\gamma\delta}$ 是实数.

先对 $\gamma,\delta\in\Delta^+$ 的情形予以证明. 若 $\gamma+\delta\prec\rho$，这由假设保证，若 $\gamma+\delta=\rho$，则 $\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$. 此时，根据命题 4.3.8 的结论(2)，

$$N_{\alpha\beta}N_{-\gamma,-\delta}+N_{\beta,-\gamma}N_{\alpha,-\delta}+N_{-\gamma,\alpha}N_{\beta,-\delta}=0.$$

注意到若 $\beta-\gamma, \alpha-\delta, -\gamma+\alpha, \beta-\delta$ 是根，则位于 Δ_ρ 中，所以 $N_{\beta,-\gamma}$，$N_{\alpha,-\delta}$，$N_{-\gamma,\alpha}$ 和 $N_{\beta,-\delta}$ 都是实数，若它们中某个不是根，则相应结构常数为 0，也是实数. 于是总有 $N_{-\gamma,-\delta}$ 为实数，这说明 $N_{\gamma\delta}$ 为实数.

对于 γ,δ 的其他情形，由于 $\gamma+\delta+(-(\gamma+\delta))=0$，$\gamma,\delta,-(\gamma+\delta)$ 中必有两个正根或者两个负根. 不妨设有两个正根，为 $\gamma,-(\gamma+\delta)$，利用命题 4.3.8 的结论(1)可知 $N_{\gamma,\delta}=N_{-(\gamma+\delta),\gamma}$，从而 $N_{\gamma\delta}$ 为实数. 否则若有两个负根 γ，$-(\gamma+\delta)$，此时 $-\gamma,\gamma+\delta$ 为正根，且 $-\gamma-\delta+(\gamma+\delta)=0$，于是 $N_{-\gamma,-\delta}=N_{\gamma+\delta,-\gamma}$ 为实数，因此 $N_{\gamma,\delta}$ 也是实数.

经过如上选取，有限步内，我们归纳的定义了 $e_\alpha, e_{-\alpha}, \alpha\in\Delta^+$，且对于任意 α，$\beta\in\Delta$，$N_{\alpha\beta}$ 为实数. 由 $N_{\alpha\beta}$ 为实数，且 $|N_{\alpha\beta}|^2=\dfrac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)$，可知

$$N_{\alpha\beta}=\pm\sqrt{\frac{q(1+p)}{2}(\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\alpha)}.$$

读者不难从上面的证明过程中看出 $N_{\alpha\beta}$ 的表达式前面的正负号完全可以根据根系 Δ 和素根系 Π 的信息确定下来.

利用上面的定理，可以证明下面的

定理 4.8.9　(Weyl)设 g_0, g_0' 是两个紧半单李代数，分别选取它们的不变内积和 Cartan 子代数 h_0 和 h_0'，设相应的根系为 Δ 和 Δ'. 设 g_0 和 g_0' 的复化为 g

和g'，h_0 和 h'_0的复化为 h,h'，则g和g'有 Cartan 分解$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$，$g'=h'\oplus\sum\limits_{\alpha'\in\Delta'}g_{\alpha'}$. 在 h_0 和 h_1 中选取过原点的超平面及其正侧和负侧，设相应的素根系为Π和Π'，则Π和Π'之间的任意同构 ϕ 可以扩充为g到g'之间的同构，并且限制在g_0上为g_0到g'_0的同构.

这一定理的证明比较啰唆，在此不仔细介绍了，下面只给出证明的大意，细节留给读者来完成.

首先 ϕ 可以扩充为同构 $\phi:\Delta\to\Delta'$，在这里为了方便，扩张后的映射仍用原来的符号表示. 假设$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，$\Pi=\{\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_l\}$，且$\phi(\alpha_i)=\alpha'_i$，$1\leqslant i\leqslant l$，记 $\alpha'=\phi(\alpha)$. 因为Π和Π'分别张成h_0 和 h'_0，所以 ϕ 还可以扩充为同构 $\phi:h_0\to h'_0$，并进一步扩充为同构 $\phi:h\to h'$.

其次将 ϕ 扩充为复李代数的同构 $\phi:g\to g'$. 利用 Cartan 分解，分别选取g和g'的满足上面定理的适当的 Weyl 基 e_α，$\alpha\in\Delta$ 和 $e_{\alpha'}$，$\alpha'\in\Delta'$，定义 $\phi(e_\alpha)=e_{\alpha'}=e_{\phi(\alpha)}$，则由于在这两组基底下的结构常数相同，$\phi$ 为同构.

最后容易说明将 $\phi:g\to g'$限制在g_0上得到 $\phi:g_0\to g'_0$.

一旦这些步骤都完成了，也就证明了

定理 4.8.10 两个紧半单李代数同构当且仅当它们具有相同的 Cartan 矩阵或者 Dynkin 图.

要完成紧单李代数的分类，还需要解决给出的根系的分类中，哪些情形真正的对应于紧李代数. 实际上有下面的

定理 4.8.11 对于定理 4.6.14 中的每个图 Γ，在同构意义下存在唯一的紧单李代数g_0，它的 Dynkin 图为 Γ.

定理 4.8.10 和定理 4.8.11 合起来给出了紧单李代数的完全的分类.

g的 Weyl 基可以经过简单的调整，得到一组更加优雅的 Chevalley 基，我们只叙述这一结果，不再给予证明.

定理 4.8.12(Chevalley) 在$g=g_0\otimes\mathbf{C}$中存在一个基底 $x_\alpha:\alpha\in\Delta,h_i,1\leqslant i\leqslant l$，称为 Chevalley 基，使得结构常数为整数，具体的

(1)$[h_i,h_j]=0,1\leqslant i,j\leqslant l$.

(2)$[h_i,x_\alpha]=\dfrac{2(\alpha,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}x_\alpha,1\leqslant i\leqslant l,\alpha\in\Delta$.

(3)$[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$，这里 h_α 是 h_i 的整系数线性组合.

(4)若 $\alpha,\beta\in\Delta,\alpha\neq-\beta$，则如果 $\alpha+\beta\notin\Delta$(即 $q=0$)，那么$[x_\alpha,x_\beta]=0$；如果 $\alpha+\beta\in\Delta$，设过 β 的 α 根链为$\beta-p\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\beta+q\alpha$，那么

$$[x_\alpha,x_\beta]=\pm(p+1)x_{\alpha+\beta}.$$

习题 4.8

1. 完成定理 4.8.9 的证明.

2. 根据命题 4.8.8 的证明过程,建立例外的复单李代数$g_2\otimes\mathbf{C}$ 的 Weyl 基及结构常数.

§4.9 复半单李代数的分类

这一节,我们在前面讨论的基础上,介绍复半单李代数的分类.

对于任意的紧半单李代数g_0,$g=g_0\otimes\mathbf{C}$是复半单李代数.本节将证明实际上这样的构造恰好包含了所有的复半单李代数.在前面对紧李代数的结构的探讨中,g_0中的Cartan子代数起着非常重要的作用,对于复半单李代数,如果能找到类似的Cartan子代数,那么问题也可以顺利地解决.

定义 4.9.1 复半单李代数中的极大交换复子代数称为它的Cartan子代数.

因为g是半单的,所以Killing型$K:g\times g\to\mathbf{C}$非退化.为了与前面的讨论形式上一致,Killing型仍记为$(,)$.完全类似的,利用g上的Cartan子代数h和Killing型$(,)$,有Cartan分解$g=h\oplus\sum\limits_{\alpha\in\Delta}g_\alpha$,这里根系$\Delta$和根子空间$g_\alpha$,$\alpha\in\Delta$可以完全类似的定义,只是$\Delta\subset h$,$g_\alpha=\{Y\in g\mid \mathrm{ad}(X)Y=(\alpha,X)Y,\ \forall X\in h\}$.由此可以证明后面的一系列引理.

引理 4.9.2 根系Δ满足下列性质:

(1)对$\alpha,\beta\in\Delta$,$[g_\alpha,g_\beta]\subseteq g_{\alpha+\beta}$,这里约定$g_0=h$.

(2)设$\alpha,\beta\in\Delta$,$\alpha+\beta\neq0$,则g_α与g_β正交.

(3)设$\alpha\in\Delta$,则$-\alpha\in\Delta$,且Killing型限制在$g_\alpha\oplus g_{-\alpha}$上是非退化的.即不存在非0元素$X_\alpha\in g_\alpha$,使得$(X_\alpha,g_{-\alpha})=0$,等价的也不存在非0元素$X_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$,使得$(g_\alpha,X_{-\alpha})=0$.

证明 (1)证明与以前紧李代数的情形完全一样.

(2)对于$X_\alpha\in g_\alpha$,$X_\beta\in g_\beta$,由(1)中的结论,可得$\mathrm{ad}(X_\alpha)\mathrm{ad}(X_\beta)(g_\gamma)\in g_{\alpha+\beta+\gamma}$.由于$\alpha+\beta\neq0$,这表明$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X_\alpha)\mathrm{ad}(X_\beta))=0$,即$(X_\alpha,X_\beta)=0$.

(3)若$\alpha\in\Delta$,但是$-\alpha\notin\Delta$,则任意$\beta\in\Delta$,$\alpha+\beta\neq0$,这表明对任意$\beta\in\Delta\cup\{0\}$,g_α与g_β是正交的,即g_α与g正交,这与Killing型非退化矛盾.

对于任意$X_\alpha\in g_\alpha$,必须存在$X_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$,使得$(X_\alpha,X_{-\alpha})\neq0$,否则也会导致Killing型退化.

下面证明

引理 4.9.3 Killing型在h上的限制非退化,且对于$X,Y\in h$,

$$(X,Y)=\sum_{\alpha\in\Delta}\dim g_\alpha(\alpha,X)(\alpha,Y).$$

证明 若Killing型限制在h上退化,则存在$0\neq X\in h$,它与h正交,显然X也与任意的g_α,$\alpha\in\Delta$正交,从而X与g正交,这与Killing型非退化矛盾.

对于 $X,Y\in h$，由于 $\mathrm{ad}(X)$，$\mathrm{ad}(Y)$ 可以同时对角化，且非 0 特征根只可能是 (α,X)，(α,Y)，$\alpha\in\Delta$，据此直接计算即得.

引理 4.9.4　Δ 张成 h.

证明　设 $X\in h$ 是与所有的 $\alpha\in\Delta$ 正交的向量，即 $(\alpha,X)=0$，$\forall\alpha\in\Delta$，则对任意 $Y\in h$，

$$(X,Y)=\sum_{\alpha\in\Delta}\dim g_\alpha(\alpha,X)(\alpha,Y)=0.$$

由 Killing 型限制在 h 上非退化，可知 $X=0$，这表明 Δ 张成 h.

和以前紧李代数的情形一样，可以证明

引理 4.9.5　对于 $X_\alpha\in g_\alpha$，$X_{-\alpha}\in g_{-\alpha}$，$[X_\alpha,X_{-\alpha}]=(X_\alpha,X_{-\alpha})\alpha$.

结合引理 4.9.2 的结论(3)，和引理 4.9.5 可知

引理 4.9.6　对于任意 $\alpha\in\Delta$，存在 $X_\alpha\in g_\alpha$，$X_{-\alpha}\in g_\alpha$，使得 X_α，$X_{-\alpha}$，α 张成 g 的三维子代数.

最后还需要一个关键的事实来保证上面的三维子代数同构于 $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$.

引理 4.9.7　对任意 $\alpha\in\Delta$，$(\alpha,\alpha)\neq 0$.

证明　用反证法，假设 $(\alpha,\alpha)=0$. 对任意 $\beta\in\Delta$，考虑 X_α，$X_{-\alpha}$，α 构成的 g 的三维子代数在向量空间 $V=\bigoplus\limits_{i\in\mathbf{Z}}g_{\beta+i\alpha}$ 上的表示，由于 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\alpha))=0$，可知

$$\sum_{i\in\mathbf{Z}}\dim g_{\beta+i\alpha}(\beta+i\alpha,\alpha)=0.$$

于是

$$(\beta,\alpha)\sum_{i\in\mathbf{Z}}\dim g_{\beta+i\alpha}=-(\alpha,\alpha)\sum_{i\in\mathbf{Z}}i\dim g_{\beta+i\alpha}.$$

由于等式右侧为 0，而 $\sum\limits_{i\in\mathbf{Z}}\dim g_{\beta+i\alpha}\neq 0$，得到 $(\beta,\alpha)=0$. 由 $\beta\in\Delta$ 的任意性及引理 4.9.4，可知 α 与 h 正交，这导出矛盾，于是命题得证.

一旦这一引理得证，则与命题 4.3.5 类似的结果都能和以前一样顺理成章地得到了证明. 即有

(1) $\dim g_\alpha=1$，且 α，X_α，$X_{-\alpha}$ 构成的三维李代数同构于 $\mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$.

(2) 关于根链的定义和结论也成立，设过 β 的 α 根链为 $\beta-p\alpha,\cdots,\beta,\cdots,\beta+q\alpha$，则 $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$ 为整数.

(3) 设 $\alpha\in\Delta$，则 $k\alpha\in\Delta$ 当且仅当 $k=\pm 1$.

顺便还得到

推论 4.9.8　对任意 $X,Y\in h$，$(X,Y)=\sum\limits_{\alpha\in\Delta}(\alpha,X)(\alpha,Y)$.

为了说明从 g 构造的根系 Δ 满足抽象根系的定义，还需要证明下面的

引理 4.9.9　对于 $\alpha,\beta\in\Delta$，$(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}$，且 $(\alpha,\alpha)>0$，这表明 Killing 型限

制在 Δ 张成的实向量子空间 V 上是正定的内积.

证明 因为对于任意 $\alpha,\beta\in\Delta$, $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha}$ 为实数,所以只需要证明对 α, $(\alpha,\alpha)>0$ 即可. 注意这里的记号 $p_{\beta\alpha}$, $q_{\beta\alpha}$ 是为了区分不同的根链对应的 p, q.

根据公式 $(\alpha,\alpha)=\sum\limits_{\beta\in\Delta}(\beta,\alpha)^2$,利用 $(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}(p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha})(\alpha,\alpha)^2$. 代入计算得到 $(\alpha,\alpha)=\dfrac{4}{\sum\limits_{\beta\in\Delta}(p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha})^2}$,这说明 $(\alpha,\alpha)>0$.

再次利用公式 $(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}(p_{\beta\alpha}-q_{\beta\alpha})(\alpha,\alpha)$,可计算得到 (β,α),并进一步通过计算证明 $(,)$ 在 Δ 张成的实向量子空间 V 上是正定的,于是引理得证.

有了引理的结论,Δ 满足前面的抽象的根系定义中的所有性质. 于是对于抽象根系的结果对 Δ 完全适用,可以接着定义素根系、Weyl 群、Weyl 房、Cartan 矩阵和 Dynkin 图等概念.

由于 $\mathfrak{g}_\alpha$ 和 $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ 是一维的,选取它们的基底 e_α, $e_{-\alpha}$,使得 $[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha$. 通过将 e_α, $\alpha\in\Delta$ 乘以适当的复数倍数,可以使得结构常数 $N_{\alpha\beta}$ 取为实数,具体的证明与命题 4.8.8 类似但更复杂. 与前面类似的计算可知:

引理 4.9.10 对于任意的 $\alpha,\beta\in\Delta$,设 $[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$,则

$$N_{\alpha\beta}^2=\frac{q(1+p)}{2}(\alpha,\alpha).$$

设 $\mathfrak{g}$ 中由向量 $\sqrt{-1}\Delta$ 及所有的基底 $\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha})$, $e_\alpha-e_{-\alpha}$, $\forall\,\alpha\in\Delta$ 实线性张成的子代数为 $\mathfrak{g}_0$,不难验证:$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个实子代数. 实际上直接计算可知对任意 $\alpha,\beta\in\Delta$:

$$[\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}\beta]=0.$$

$$[\sqrt{-1}\alpha,\sqrt{-1}(e_\beta+e_{-\beta})]=-(\alpha,\beta)(e_\beta-e_{-\beta}).$$

$$[\sqrt{-1}\alpha,e_\beta-e_{-\beta}]=(\alpha,\beta)\sqrt{-1}(e_\beta+e_{-\beta}).$$

$$[\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),(e_\alpha-e_{-\alpha})]=-2\sqrt{-1}\alpha.$$

$$[\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),\sqrt{-1}(e_\beta+e_{-\beta})]$$
$$=-N_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta}-e_{-\alpha-\beta})-N_{-\alpha,\beta}(e_{-\alpha+\beta}-e_{\alpha-\beta}),\beta\neq\pm\alpha.$$

$$[\sqrt{-1}(e_\alpha+e_{-\alpha}),(e_\beta-e_{-\beta})]$$
$$=N_{\alpha\beta}\sqrt{-1}(e_{\alpha+\beta}+e_{-\alpha-\beta})+N_{-\alpha,\beta}\sqrt{-1}(e_{-\alpha+\beta}+e_{\alpha-\beta}),\beta\neq\pm\alpha.$$

$$[\sqrt{-1}(e_\alpha-e_{-\alpha}),\sqrt{-1}(e_\beta-e_{-\beta})]$$

$=N_{\alpha\beta}(e_{\alpha+\beta}-e_{-\alpha-\beta})-N_{-\alpha,\beta}(e_{-\alpha+\beta}-e_{\alpha-\beta}),\beta\neq\pm\alpha.$

定理 4.9.11 g_0是紧半单李代数.

证明 显然$g_0\oplus\sqrt{-1}g_0=g_0\otimes\mathbf{C}\cong g$,由$g$半单可知$g_0$半单.

为了验证g_0是紧的,只需要验证g_0的 Killing 型是负定的即可,细节留给读者.

至此我们证明了

定理 4.9.12 (1)设g为复半单李代数,则存在紧半单李代数g_0,使得$g=g_0\otimes\mathbf{C}$,g_0称为g的一个紧实形式.

(2)若对于两个紧半单李代数g_0,g_1,$g_0\otimes\mathbf{C}\cong g_1\otimes\mathbf{C}$,则$g_0\cong g_1$.

证明 (1)这是前面讨论的自然结果.

(2)只需要注意到g关于 Cartan 子代数 h 的 Cartan 分解与g_0关于 Cartan 子代数 $h_0=g_0\cap h$ 的 Cartan 分解完全吻合,二者的根系完全相同即可.

从上面的讨论可以看出虽然紧半单李代数和复半单李代数从表面上看起来很不相同,但从根系的角度看它们具有相同的本质,通过复化二者完全等同起来.

经典的复单李代数 $\mathrm{sl}(l+1,\mathbf{C})$,$\mathrm{o}(l,\mathbf{C})$,$\mathrm{sp}(l,\mathbf{C})$对应的紧单李代数是$\mathrm{su}(l+1,\mathbf{R})$,$\mathrm{o}(l)$,$\mathrm{sp}(l)$.

给定复半单李代数g,可以计算出它的根系和 Cartan 矩阵,反过来给定根系和 Cartan 矩阵,也可以直接构造出一个复半单李代数的g. 实际上有下面的

定理 4.9.13(Serre) 设$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$是根系 Δ 的一个素根系,相应的Cartan矩阵为 $\boldsymbol{C}=(a_{ij})_{l\times l}$,则存在由 $3l$ 个元素的集合$\{x_i,y_i,h_i,1\leqslant i\leqslant l\}$,它们在复数域上生成李代数$g$,满足以下的定义关系:

(1)$[h_i,h_j]=0$;

(2)$[x_i,y_i]=h_i,[x_i,y_j]=0,i\neq j$;

(3)$[h_i,x_j]=a_{ji}x_j,[h_i,y_j]=-a_{ji}y_j$;

(4)$\mathrm{ad}(x_i)^{-a_{ji}+1}(x_j)=0,i\neq j$;

(5)$\mathrm{ad}(y_i)^{-a_{ji}+1}(y_j)=0,i\neq j$.

这样得到的李代数g是复半单李代数,且它的根系为 Δ,Cartan 矩阵为 $\boldsymbol{C}$.

习题 4.9

1. 对于复半单李代数$g=\mathrm{sp}(n,\mathbf{C})$，按照本节讨论过程：

(1)找出 Cartan 子代数 h.

(2)计算 Killing 型.

(3)给出根系 Δ.

(4)找出相应的基底 $e_\alpha\in g_\alpha$，使得结构常数为实数.

(5)得到它的紧实形式g_0.

(6)给出素根系Π.

(7)计算 Cartan 矩阵并画出 Dynkin 图.

2. 设g为复半单李代数，h 是g的 Cartan 子代数，证明：若有幂零李代数 k 包含 h，则必有 $k=h$.

第 5 章
紧李代数的自同构群和表示论

本章的两节分别讨论紧李代数的自同构群的结构和不可约表示的分类.

§5.1 紧李代数的自同构群

这一节研究紧李代数的自同构群，这可以看做前面介绍的 Cartan 子代数、根系、素根系、Weyl 群和 Weyl 房等概念的自然应用.

设g_0为 n 维紧李代数，则存在连通紧李群 G_0 以它为李代数. 在g_0中选取 Cartan 子代数 h_0，则 G_0 中有对应的 Cartan 子群 H_0. g_0上有不变内积$(\,,\,)$. 设 g_0，h_0 的复化为g，h，Cartan 子代数 h_0 和不变内积$(\,,\,)$决定的根系为 Δ，相应的 Cartan 分解为

$$g=h\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}g_\alpha.$$

对任意 $\alpha\in\Delta$，存在 Weyl 基 e_α，$e_{-\alpha}$，使得

$$e_\alpha\in g_\alpha,\ e_{-\alpha}\in g_{-\alpha},\ \text{且}\ e_{-\alpha}=\bar{e}_\alpha,\ (e_\alpha,e_{-\alpha})=1,$$

它们满足

$[h,h]=0$;

$[X,e_\alpha]=(\alpha,X)e_\alpha$, $\forall\,\alpha\in\Delta, X\in h$;

$[e_\alpha,e_{-\alpha}]=\alpha$;

$[e_\alpha,e_\beta]=N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$, $\forall\,\alpha,\beta\in\Delta,\alpha+\beta\neq0$.

在 Δ 中还可以选取一个素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$.

下面从这些假定出发，讨论g_0的自同构群.

引理 5.1.1 设g_0是紧李代数，则$g_0=c(g_0)\oplus \mathrm{D}g_0$. g_0的自同构群可以看成它的中心的自同构群和它的导出代数 $\mathrm{D}g_0$的自同构群的直积，即 $\mathrm{Aut}(g_0)\cong\mathrm{Aut}(c(g_0))\times\mathrm{Aut}(\mathrm{D}g_0)$. 这里 $\mathrm{D}g_0=[g_0,g_0]$是紧半单李代数.

这只需要注意到若 $\phi:g_0\to g_0$是自同构，则 $\phi(c(g_0))=c(g_0)$，$\phi(\mathrm{D}g_0)=\mathrm{D}g_0$即可.

由于 $c(g_0)$是交换李代数，它的任意线性自同构都是李代数的自同构. 在下面的讨论中不妨假定g_0是紧半单李代数.

对紧李代数g_0，内自同构群 $\mathrm{Inn}(g_0)$是自同构群 $\mathrm{Aut}(g_0)$的闭正规子群，称商群 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)$为$g_0$的外自同构群.

下面利用自同构群和内自同构群在所有的 Cartan 子代数构成的集合上是传递的这一事实，来做进一步的探讨.

引理 5.1.2 设 h_0 是g_0的 Cartan 子代数，则g_0的自同构群 $\mathrm{Aut}(g_0)$中有闭子群

$$U_0=\{\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)\mid\phi(h_0)=h_0\}$$

且 $\mathrm{Aut}(g_0)$ 可以分解为子群的乘积 $\mathrm{Aut}(g_0)=U_0\mathrm{Inn}(g_0)$.

证明 设 $\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)$,则g_0的子代数 $h_1=\phi^{-1}(h_0)$ 仍为 Cartan 子代数,且 $\phi(h_1)=h_0$. 由于 Cartan 子代数是彼此共轭的,所以存在 $\phi'\in\mathrm{Inn}(g_0)$,使得 $\phi'(h_1)=h_0$,令 $\phi_0=\phi\phi'^{-1}$,则 $\phi_0\in U_0$,$\phi=\phi_0\phi'$. 这说明 $\mathrm{Aut}(g_0)=U_0\mathrm{Inn}(g_0)$.

U_0 显然是 $\mathrm{Aut}(g_0)$ 的闭子群.

下面讨论商群 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)$.

引理 5.1.3 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong U_0/U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$.

证明 利用群论中的同构定理结合前面的结论可得

$$\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)=U_0\mathrm{Inn}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong U_0/U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0).$$

为了进一步讨论,需要研究 $U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$.

引理 5.1.4 $U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$ 是 U_0 的紧致李子群,且 $U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)=\mathrm{Ad}(N_{G_0}(H_0))$,其中 $H_0=\exp(h_0)$ 是 G_0 的 Cartan 子群,$N_{G_0}(H_0)$ 是 H_0 在 G_0 中的正规化子.

证明 因为 $\mathrm{Inn}(g_0)\cong G_0/C(G_0)$ 是紧李群,而 $U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$ 是它的闭子群,所以是紧致李子群.

设 $\phi\in U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$,则 $\phi(h_0)=h_0$,且存在 $a\in G_0$,$\phi=\mathrm{Ad}(a)$,但是 $\mathrm{Ad}(a)(h_0)=h_0$ 等价于 $\mathrm{AD}(a)(H_0)=H_0$,即 $a\in N_{G_0}(H_0)$. 反之,若 $\phi=\mathrm{Ad}(a)$,$a\in N_{G_0}(H_0)$,显然 $\mathrm{Ad}(a)(h_0)=h_0$,即 $\phi\in U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0)$.

下面继续考察 U_0 的结构,为此先给出下面的引理.

引理 5.1.5 设 $\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)$,则 $\phi\in U_0$ 当且仅当 $\phi(\Delta)=\Delta$.

证明 若 $\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)$,$\phi(h_0)=h_0$,则它可以扩充为自同构 $\phi:g\to g$,且 $\phi(h)=h$,考虑 Cartan 分解

$$g=h\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}g_\alpha.$$

用 ϕ 作用,得到

$$g=h\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}\phi(g_\alpha)=h\oplus\sum_{\alpha\in\Delta}g_{\phi(\alpha)}.$$

而它们是同一 Cartan 子代数对应的 Cartan 分解,因此除了根子空间的排列次序不同以外,它们没有其他差别,这表明 $\phi(\Delta)=\Delta$.

反之,若 $\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)$,满足 $\phi(\Delta)=\Delta$ 则由于 Δ 张成 $\sqrt{-1}h_0$,所以 $\phi(h_0)=h_0$.

考虑U_0 在 Δ 上的群作用,定义 U_0 的子群 $L_0=\{\phi\in\mathrm{Aut}(g_0)\mid\phi|_{h_0}=\mathrm{id}\}$,则有

引理 5.1.6 L_0 为 U_0 的闭正规子群.

证明很容易,细节留给读者.

引理 5.1.7 $\mathfrak{g}_0$的自同构 $\phi\in L_0$ 当且仅当存在 l 个模长为 1 的复数 v_1, $v_2,\cdots,v_l$,对任意 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{l}m_i\alpha_i\in\Delta$,若令 $v_\alpha=\prod\limits_{i=1}^{l}v_i^{m_i}$,则有 $\phi(\alpha)=\alpha,\alpha\in\Delta$ 且 $\phi(e_\alpha)=v_\alpha e_\alpha$.

证明 由于 $\phi\in L_0,\phi|_{\mathfrak{h}_0}=\mathrm{id}$,所以 $\phi(\alpha)=\alpha,\ \forall\,\alpha\in\Delta$.

由此 $\phi(e_\alpha)\in\phi(\mathfrak{g}_\alpha)=\mathfrak{g}_{\phi(\alpha)}=\mathfrak{g}_\alpha$即存在非零复数 v_α,使得 $\phi(e_\alpha)=v_\alpha e_\alpha$.

令 $\phi(e_{\alpha_i})=v_ie_{\alpha_i}$,则由 ϕ 保持不变内积知,v_i 为单位复数. $v_\alpha=\prod\limits_{i=1}^{l}v_i^{m_i}$ 显然可得.

引理 5.1.8 $L_0=\mathrm{Ad}(H_0)$,其中 H_0 为 G_0 的 Cartan 子群.

证明 先证明 $L_0\subset\mathrm{Ad}(H_0)$. 由上面的引理,设 $\phi\in L_0$,并且 $\phi(e_{\alpha_i})=v_ie_{\alpha_i}$,$v_i=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\phi_i}$,令 $f:\mathfrak{h}_0\to\mathbf{R}$ 为满足 $f(\alpha_i)=\sqrt{-1}\phi_i$ 的线性函数,于是在 $\mathfrak{h}_0$ 中存在元素 X_0,使得 $f(\alpha)=(\alpha,X_0)$. 由 $v_i=\mathrm{e}^{(\alpha_i,X_0)}$ 及 f 的线性性可知 $v_\alpha=\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}$.

$$
\begin{aligned}
\text{于是 }\phi(e_\alpha)=v_\alpha e_\alpha=\mathrm{e}^{(\alpha,X_0)}e_\alpha&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\alpha,X_0)^ke_\alpha\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathrm{ad}(X_0)^ke_\alpha=e^{\mathrm{ad}(X_0)}e_\alpha=\mathrm{Ad}(\exp(X_0))e_\alpha.
\end{aligned}
$$

这表明 $\phi=\mathrm{Ad}(\exp(X_0))\in\mathrm{Ad}(H_0)$.

$\mathrm{Ad}(H_0)\subset L_0$ 是显然的.

由此可知

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_0)/\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}_0)\cong U_0/(U_0\cap\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}_0))\cong(U_0/L_0)/((U_0\cap\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}_0))/L_0).$$

而群$(U_0\cap\mathrm{Inn}(\mathfrak{g}_0))/L_0\cong\mathrm{Ad}(N_{G_0}(H_0))/\mathrm{Ad}(H_0)\cong N_{G_0}(H_0)/H_0$.

定义 5.1.9 群 U_0/L_0 称为$\mathfrak{g}_0$(或 G_0)的 Cartan 群,$N_{G_0}(H_0)/H_0$ 称为$\mathfrak{g}_0$(或 G_0)的 Weyl 群.

下面证明如上定义的$\mathfrak{g}_0$的 Weyl 群和由$\mathfrak{g}_0$的根系定义的 Weyl 群 W 是同构的. 为此暂时将此处定义的 Weyl 群,记为 W'. 已知 W 是 $\mathrm{O}(\mathfrak{h}_0)$的子群,定义$N_{G_0}(H_0)$到 $\mathrm{O}(\mathfrak{h}_0)$的同态 φ,对任意 $n\in N_{G_0}(H_0)$,令 $\varphi(n)=\mathrm{Ad}(n)|_{\mathfrak{h}_0}$. 因为对 $n\in H_0$,$\mathrm{Ad}(n)|_{\mathfrak{h}_0}=\mathrm{id}$,所以 φ 诱导出群同态 $\varphi':W'\to\mathrm{O}(\mathfrak{h}_0)$.

命题 5.1.10 映射 φ'是 W'到它的像 W 的同构.

证明 首先证明 φ'是单射. 若 $\varphi(n)=\mathrm{id}$,由引理 5.1.8,可知存在 $a\in H_0$,$\mathrm{Ad}(n)=\mathrm{Ad}(a)$,这表明 $\mathrm{Ad}(na^{-1})=\mathrm{id}$,则必有 $na^{-1}\in C(G_0)$. 而

$C(G_0)\subset H_0$，这表明 $n\in H_0$，因此 φ'是单射.

再证明 φ'是满射，只需证明对任意 $w_\alpha\in W,\alpha\in\Delta$，存在 $n_\alpha\in N_{G_0}(H_0)$，使得 $\varphi'(n_\alpha)=w_\alpha$. 根据引理 5.1.4，只需找到 $n_\alpha\in G_0$，使得

$$\mathrm{Ad}(n_\alpha)h_0=h_0\text{，且}w_\alpha=\mathrm{Ad}(n_\alpha)|_{h_0}.$$

已知$(\alpha,\alpha)<0$，约定$\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\mathrm{i}\sqrt{|(\alpha,\alpha)|}$，定义

$$X_\alpha=\frac{\pi}{2\sqrt{(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha-e_{-\alpha}),$$

则对于任意 $X_0\in h_0$：

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k-1}X_0=\frac{(-1)^k\pi^{2k-1}}{2\sqrt{(\alpha,\alpha)}}(\alpha,X_0)(e_\alpha+e_{-\alpha}).$$

$$\mathrm{ad}(X_\alpha)^{2k}X_0=\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,X_0)\alpha.$$

令 $n_\alpha=\exp(X_\alpha)$，对 $\forall X_0\in h_0$，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}(n_\alpha)X_0=\mathrm{Ad}(\exp(X_\alpha))X_0=\exp(\mathrm{ad}(X_\alpha))X_0\\&=X_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,X_0)\alpha+\\&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{(-1)^k\pi^{2k-1}}{2\sqrt{(\alpha,\alpha)}}(\alpha,X_0)(e_\alpha+e_{-\alpha})\\&=X_0+(\cos\pi-1)\frac{(\alpha,X_0)}{(\alpha,\alpha)}\alpha+\sin\pi\frac{(\alpha,X_0)}{2\sqrt{(\alpha,\alpha)}}(e_\alpha+e_{-\alpha})\\&=X_0-\frac{2(\alpha,X_0)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=w_\alpha(X_0).\end{aligned}$$

这说明 $\mathrm{Ad}(n_\alpha)|_{h_0}=w_\alpha$，于是 φ'是满射.

下面讨论 Cartan 群的结构，根据定义 $C=U_0/L_0$，定义群同态

$$f:U_0\to\mathrm{Aut}(\Delta),\phi\mapsto\phi|_\Delta,$$

前面的讨论表明 $\ker f=L_0$，于是 $C\cong\mathrm{Aut}(\Delta)$，即根系 Δ 的自同构群.

和前面在g_0中选择 Cartan 子代数 h_0 进行的讨论类似，可以在 Δ 中选定一个素根系Π，定义 $\mathrm{Aut}(\Delta)$的子群 $N_0=\{\phi\in\mathrm{Aut}(\Delta)\mid\phi(\Pi)=\Pi\}$，则与引理 5.1.2 类似的有

引理 5.1.11 $\mathrm{Aut}(\Delta)=N_0W$.

于是 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong U_0/(U_0\cap\mathrm{Inn}(g_0))\cong C/W\cong N_0W/W\cong N_0/N_0\cap W$，因为 Weyl 群在素根系的集合上作用是单传递的，所以 $N_0\cap W=\{\mathrm{id}\}$，于是有

定理 5.1.12 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)$同构于素根系$\Pi$的自同构群 N_0，或者等

价地看成是 Dynkin 图的自同构群.

特别的对于紧单李代数有下面的结果.

定理 5.1.13 设g_0是紧单李代数.

(1)若g_0为 $A_1, B_l, l\geqslant 2, C_l, l\geqslant 3, G_2, F_4, E_7$ 或 F_8,则 $\mathrm{Aut}(g_0)=\mathrm{Inn}(g_0)$.

(2)若g_0为 $A_l, l\geqslant 2$,则 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong \mathbf{Z}_2$,设 ϕ 为 $e_{\alpha_i}\mapsto e_{\alpha_{l+1-i}}, 1\leqslant i\leqslant l$ 给出的自同构,则 $\mathrm{Aut}(g_0)=\mathrm{Inn}(g_0)\sqcup \phi\mathrm{Inn}(g_0)$.

(3)若g_0为 $D_l, l\geqslant 5$,则 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong \mathbf{Z}_2$,设 ϕ 为 $e_{\alpha_i}\mapsto e_{\alpha_i}, 1\leqslant i\leqslant l-2, e_{\alpha_{l-1}}\mapsto e_{\alpha_l}, e_{\alpha_l}\mapsto e_{\alpha_{l-1}}$ 给出的自同构,则 $\mathrm{Aut}(g_0)=\mathrm{Inn}(g_0)\sqcup \phi\mathrm{Inn}\,(g_0)$.

(4)若g_0为 E_6,则 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong \mathbf{Z}_2$,设 ϕ 为 $e_{\alpha_1}\mapsto e_{\alpha_6}, e_{\alpha_2}\mapsto e_{\alpha_2}, e_{\alpha_3}\mapsto e_{\alpha_5}, e_{\alpha_4}\mapsto e_{\alpha_4}, e_{\alpha_5}\mapsto e_{\alpha_3}, e_{\alpha_6}\mapsto e_{\alpha_1}$,给出的自同构,则 $\mathrm{Aut}(g_0)=\mathrm{Inn}(g_0)\sqcup \phi\mathrm{Inn}(g_0)$.

(5)若g_0为 D_4,则 $\mathrm{Aut}(g_0)/\mathrm{Inn}(g_0)\cong$置换群 S_3,它由如图 5-1 中的$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$的置换给出.

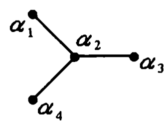

图 5-1

所以 $\mathrm{Aut}(g_0)$有 6 个连通分支,对应于 S_3 的 6 个元素.

这里素根 α_i 的标记方式与定理 4.6.14 相同.

下面的结果是这一节主要定理的自然应用.

推论 5.1.14 李代数g_0的伴随表示 Ad 的轨道空间g_0/Ad 自然的等同于空间 h_0/W.

例 5.1.15 计算 $\mathrm{U}(n)$的 Weyl 群.

设 $\mathbf{C}^n$ 的标准基底为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$,选取 $\mathrm{U}(n)$中的标准 Cartan 子群 H_0,即 $\mathrm{U}(n)$中的对角型元素构成的子群. 下面计算 H_0 在 $\mathrm{U}(n)$中的正规化子 $N_{\mathrm{U}(n)}(H_0)$. 若 $B\in N_{\mathrm{U}(n)}(H_0)$,则对于任意 $A\in H_0$,可知 $BAB^{-1}\in H_0$. 设 $BAB^{-1}=C$,则 $C\in H_0, BA=CB$. 将两边同时作用在向量 $\boldsymbol{e}_i, 1\leqslant i\leqslant n$ 上,设 $A\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i$,则得到 $CB(\boldsymbol{e}_i)=\lambda_i B(\boldsymbol{e}_i)$. 由于 A 取遍 H_0 时,C 也取遍 H_0. 这说明 $B(\boldsymbol{e}_i), 1\leqslant i\leqslant n$ 是 H_0 中所有元素的公共特征向量,于是 $B(\boldsymbol{e}_i)$必为 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中某个元素的倍数. 再由 B 保持内积,可知存在 $\sigma\in S_n$ 和单位复数 μ_i,使得 $B(\boldsymbol{e}_i)=\mu_i(B)\boldsymbol{e}_{\sigma(i)}$. $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$的置换群 S_n 可以自然的看成 $\mathrm{U}(n)$的子群,这说明 $N_{\mathrm{U}(n)}(H_0)=S_nH_0$,于是 Weyl 群

$$W\cong S_nH_0/H_0\cong S_n.$$

习题 5.1

1. 根据本节给出的 Weyl 群的定义计算李群 SO(n),Sp(n)的 Weyl 群.

2. 仿照本节对紧李代数的自同构群的讨论,研究复半单李代数的自同构群,给出类似于定理 5.1.13 的自同构的分类结果.

§5.2 紧李代数的表示理论

为了理解紧李代数的结构，我们对伴随表示进行了细致的研究，并由此得到了紧李代数的分类. 实际上，类似的做法可以推广到紧李代数的任意复表示上，并得到一般的理论.

设 G_0 是紧李群，H_0 为其 Cartan 子群，设 G_0，H_0 的李代数为$\mathfrak{g}_0$，$\mathfrak{h}_0$. 对$\mathfrak{g}_0$的任意复表示(ϕ,V)，则在 V 上存在 ϕ 不变$(\,,\,)$. 将这一表示限制在 Cartan 子代数上，则由 Schur 引理可知这一表示可以分解为一维$\phi(\mathfrak{h}_0)$不变子空间的直和. 即在 V 中存在一个基底$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$，使得对任意$X_0\in\mathfrak{h}_0$，

$$\phi(X_0)(\boldsymbol{v}_i)=\mu_i(X_0)\boldsymbol{v}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

于是在这个基底下，$\phi(X_0)$，$X_0\in\mathfrak{h}_0$ 被同时对角化，对角线上的元素为 $\mu_1(X_0)$，$\mu_2(X_0)$，$\cdots$，$\mu_n(X_0)$. 与根系的讨论完全类似的，μ_i，$1\leqslant i\leqslant n$，可以看成 $\mathfrak{h}_0$ 上的纯虚值的线性函数，利用$\mathfrak{g}_0$的 ad 不变内积在 $\mathfrak{h}_0$ 的限制，可以把它们对偶到 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中，使得 $\mu(X_0)=(\mu,X_0)$.

定义 5.2.1 如上定义的紧李代数$\mathfrak{g}_0$的表示 ϕ 对应的 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中的元素 μ_1，μ_2，$\cdots$，μ_n 的集合 Φ 称为表示 ϕ 的权系. Φ 中元素称为表示 ϕ 的权.

$$V_\mu=\{\boldsymbol{v}\in V\mid\phi(X_0)\boldsymbol{v}=(\mu,X_0)\boldsymbol{v},\ \forall\,X_0\in\mathfrak{h}_0\}$$

称为表示 ϕ 属于权 μ 的权子空间. 权子空间 V_μ 的维数称为权 μ 的重数.

设 $\alpha\in\Delta$，则权 μ 关于根 α 的权链为权系中的序列

$$\mu-p\alpha,\mu-(p-1)\alpha,\cdots,\mu-\alpha,\mu,\mu+\alpha,\cdots,\mu+(q-1)\alpha,\mu+q\alpha$$

使得 $\mu-(p+1)\alpha,\mu+(q+1)\alpha\notin\Phi$.

定理 5.2.2 设 $\mathfrak{h}_0$ 为紧李代数$\mathfrak{g}_0$的 Cartan 子代数，由 $\mathfrak{h}_0$ 及$\mathfrak{g}_0$上的不变内积$(\,,\,)$决定的根系为 Δ，Weyl 基为$\{e_\alpha\mid\alpha\in\Delta\}$. 设$(\phi,V)$为$\mathfrak{g}_0$的复表示，由 ϕ 及不变内积决定的权系为 Φ，则有

(1) 对任意 $\alpha\in\Delta$，$\mu\in\Phi$，有$\phi(e_\alpha)V_\mu\subset V_{\mu+\alpha}$. 这里当 $\mu\notin\Phi$ 时，约定

$$V_\mu=\{0\}.$$

(2) 设 $\alpha\in\Delta$，权 μ 关于根 α 的权链为

$$\mu-p\alpha,\mu-(p-1)\alpha,\cdots,\mu-\alpha,\mu,\mu+\alpha,\cdots,\mu+(q-1)\alpha,\mu+q\alpha,$$

则有$\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$ 为整数，且对 Weyl 群 W 中的元素 w_α，$w_\alpha(\mu)\in\Phi$.

证明 (1) 对任意 $X_0\in\mathfrak{h}_0$，$\boldsymbol{v}\in V_\mu$，

$$
\begin{aligned}
&\phi(X_0)(\phi(e_\alpha)v)\\
=&\phi([X_0,e_\alpha])v+\phi(e_\alpha)\phi(X_0)v\\
=&(\alpha,X_0)\phi(e_\alpha)v+(\mu,X_0)\phi(e_\alpha)v\\
=&(\mu+\alpha,X_0)\phi(e_\alpha)v.
\end{aligned}
$$

于是命题得证.

(2)考虑 Weyl 群在权链上的作用,则显然 $w_\alpha(\mu-p\alpha)=\mu+q\alpha$. 化简即得 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p-q$. 由此易得 $w_\alpha(\Phi)=\Phi$.

定义 5.2.3　设 ϕ 是紧李代数g_0的复表示,表示空间为 V,如果表示 ϕ 的权λ 满足对任意 $\alpha\in\Delta^+$,$\lambda+\alpha\notin\Phi$,那么称 λ 为表示 ϕ 的最高权. 如果适合 $\lambda-\alpha\notin\Phi$,$\forall\alpha\in\Delta^+$,那么称 λ 为表示(ϕ,V)的最低权.

定理 5.2.4　设λ 为紧李代数g_0的不可约复表示(ϕ,V)的最高权,Φ 为权系. 设 h_0 为g_0的 Cartan 子代数,Δ 为根系,$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$为素根系,则有

(1)任给 $\mu\in\Phi$,则存在指标 $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant l,k\geqslant 0$,使得

$$
\lambda,\lambda-\alpha_{i_1},\cdots,\lambda-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}-\cdots-\alpha_{i_k}=\mu
$$

是 Φ 中的权的序列.

(2)不可约表示 ϕ 的最高权唯一,且最高权对应的权子空间的维数为 1.

(3)对最高权 λ 及正根 α,$\dfrac{2(\lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=n_{\lambda,\alpha}$为非负整数.

证明　设 V_λ 是最高权λ 的权子空间,在 V_λ 中取非 0 向量 v_λ. 令 V'是由所有的元素 $v_{i_1i_2\cdots i_s}=\phi(e_{-\alpha_{i_1}})\phi(e_{-\alpha_{i_2}})\cdots\phi(e_{-\alpha_{i_s}})v_\lambda$,$1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_s\leqslant l,s\geqslant 0$,张成的 V 的子空间,下面证明 $V'=V$.

因为 ϕ 为不可约表示,所以只需证明 V'是在g的作用下的不变子空间. g由 $e_{\alpha_1},e_{\alpha_2},\cdots,e_{\alpha_l};e_{-\alpha_1},e_{-\alpha_2},\cdots,e_{-\alpha_l}$ 生成,显然 V' 在 $\phi(e_{-\alpha_1}),\phi(e_{-\alpha_2}),\cdots,\phi(e_{-\alpha_l})$的作用下不变,因此只需再证明 V'在 $\phi(e_{\alpha_1}),\phi(e_{\alpha_2}),\cdots,\phi(e_{\alpha_l})$作用下也是不变的,即证明

对任意 $\alpha_i\in\Pi$ 及 $i_1,i_2,\cdots,i_s$,$\phi(e_{\alpha_i})v_{i_1,i_2,\cdots,i_s}$ 属于 V'.

下面通过对 s 归纳来证明. 首先由最高权的定义,$s=0$ 时,对 v_λ 引理成立. 设 s 时,引理成立,即对任意 i 及 $i_1,i_2,\cdots,i_s$,$\phi(e_{\alpha_i})v_{i_1i_2\cdots i_s}\in V'$.

则当 $s+1$ 时,对任意 i 及 $i_0,i_1,\cdots,i_s$,可知

$$
\begin{aligned}
&\phi(e_{\alpha_i})v_{i_0i_1i_2\cdots i_s}\\
=&\phi(e_{\alpha_i})\phi(e_{-\alpha_{i_0}})v_{i_1i_2\cdots i_s}\\
=&\phi([e_{\alpha_i},e_{-\alpha_{i_0}}])v_{i_1i_2\cdots i_s}+\phi(e_{-\alpha_{i_0}})\phi(e_{\alpha_i})v_{i_1i_2\cdots i_s}.
\end{aligned}
$$

由此利用归纳假设不难看出，不管是否 $i=i_0$，总有 $\phi(e_{\alpha_i})\boldsymbol{v}_{i_0 i_1 i_2\cdots i_s}\in V'$.

因为 ϕ 是不可约表示，所以必有 $V'=V$. 于是 V 中由所有的元素 $\boldsymbol{v}_{i_1 i_2\cdots i_s}=\phi(e_{-\alpha_{i_1}})\phi(e_{-\alpha_{i_2}})\cdots\phi(e_{-\alpha_{i_s}})\boldsymbol{v}_\lambda, 1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_s\leqslant l, s\geqslant 0$，张成的子空间恰为 V.

(1)(2)中的结果都可以容易的由此得到.

(3)中的结论通过考虑过 λ 的 α 权链得到.

定义 5.2.5 设 h_0 为紧李群 g_0 的 Cartan 子代数，$\sqrt{-1}h_0$ 中的向量 μ 称为整向量，若 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}, \forall\alpha\in\Delta^+$. 若 $\dfrac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbf{Z}^+, \forall\alpha\in\Delta^+$，则称 μ 为强整向量.

推论 5.2.6 g_0 的复表示的最高权是强整向量.

下面的定理说明最高权的重要性.

定理 5.2.7(Harish-Chandra) 设 ϕ_1,ϕ_2 是紧李代数 g_0 的两个不可约表示，则 ϕ_1,ϕ_2 等价当且仅当它们的最高权相同.

证明 从定理 5.2.2 的证明过程可以看出.

要构造出所有的不可约表示，需要用到李代数表示的张量积的概念. 设 ϕ_1,ϕ_2 是紧李代数 g_0 的两个表示，表示空间分别为 V_1,V_2，则表示 $\phi=\phi_1\otimes\phi_2$ 定义为

$$\phi: g_0\to \mathrm{gl}(V_1\otimes V_2), \phi(X)(\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2)=\phi_1(X)\boldsymbol{v}_1\otimes\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_1\otimes\phi_2(X)\boldsymbol{v}_2.$$

容易证明

命题 5.2.8 设 ϕ_1,ϕ_2 是紧代数 g_0 的复表示，它们的权系为 Φ_1,Φ_2，则 $\phi_1\otimes\phi_2$ 的权系为 $\Phi_1+\Phi_2$.

定理 5.2.9 设 ϕ_1,ϕ_2 是李代数 g_0 的两个不可约表示，它们的最高权为 λ_1,λ_2，则在 $\phi_1\otimes\phi_2$ 中存在以 $\lambda_1+\lambda_2$ 为最高权的不可约子表示.

证明 容易看出 $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ 是表示 $\phi_1\otimes\phi_2$ 的最高权，令 $\boldsymbol{x}_\lambda$ 为最高权向量，则类似于定理 5.2.2 的证明，可知它生成 $\phi_1\otimes\phi_2$ 的以 λ 为最高权的不可约表示.

定义 5.2.10 在紧半单李代数 g_0 中取定 Cartan 子代数 h_0，记 Δ 为根系，取定素根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$，则在 $\sqrt{-1}h_0$ 中存在强整向量 $\lambda_i, 1\leqslant i\leqslant l$，使得 $\dfrac{2(\lambda_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\delta_{ij}, j=1,2,\cdots,l, \lambda_i, 1\leqslant i\leqslant l$ 称为基本权. 如果 g_0 的不可约表示 ϕ_i 的最高权为 λ_i，那么称 ϕ_i 为 g_0 的第 i 个基本表示.

定理 5.2.11 对紧半单李代数 g_0，及每个 $i, 1\leqslant i\leqslant l$，存在第 i 个基本表示.

证明略去，读者可参考文献[9].

命题 5.2.12　任取强整向量 λ，则存在 n_i，$1\leqslant i\leqslant l$，$\lambda=\sum\limits_{i=1}^{l}n_i\lambda_i$，其中 $n_i=\dfrac{2(\lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ 为非负整数，且以 λ 为最高权的不可约表示存在.

证明　命题的前一部分根据基本权的定义直接验证即可.

对命题的第二部分，考虑基本表示 $\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_l$ 的张量积 $\phi_1^{n_1}\otimes\phi_2^{n_2}\otimes\cdots\otimes\phi_l^{n_l}$ 中的最高权 λ 对应的权向量 $\boldsymbol{v}_\lambda$ 生成的不可约子表示即可.

上面的讨论说明：

定理 5.2.13　紧半单李代数 $\mathfrak{g}_0$ 的不可约表示的集合和 $\sqrt{-1}\mathfrak{h}_0$ 中的强整向量的集合一一对应.

例 5.2.14　su(n)的复表示.

对于 su(n)，取标准的对角型的 Cartan 子代数和标准不变内积，根系为 $\Delta=\{\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j\mid i\neq j\}$，这里 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n=0$，素根系为 $\Pi=\{\alpha_i=\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_{i+1}\mid 1\leqslant i\leqslant n-1\}$. 令 $\lambda_i=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_i$.

可以看出 $2\dfrac{(\lambda_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\delta_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n-1$.

设 su(n)在 $\mathbf{C}^n$ 上的自然表示为 ϕ，即对 $X\in\mathrm{su}(n)$，$\boldsymbol{v}\in\mathbf{C}^n$，$\phi(X)\boldsymbol{v}=X\boldsymbol{v}$，显然它的最高权为 $\boldsymbol{e}_1$，因此对应的表示为 ϕ_{λ_1}，考虑外幂表示 $\Lambda^i(\phi)$，$1\leqslant i\leqslant n-1$，则它的最高权为 λ_i，于是它们给出了 su(n)的 $n-1$ 个基本表示.

由此利用前面定理理论上可以构造出 su(n)的所有不可约表示. 它们与强整向量的集合$\{k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_{n-1}\mid k_1,\cdots,k_{n-1}\in\mathbf{Z}^+\}$一一对应.

对于李代数 u(n)，可以类似的进行讨论，此时没有 $\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n=0$ 的限制条件，强整向量的集合为$\{k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\cdots+k_{n-1}\lambda_{n-1}+k_n\lambda_n\mid k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\in\mathbf{Z}^+,k_n\in\mathbf{Z}\}$，基本表示为 $\Lambda^i(\phi)$，$1\leqslant i\leqslant n$.

习题 5.2

1. 对李代数 u(n)，设它的标准表示为 ϕ，计算 $\phi\otimes\phi$ 的权系，找出最高权向量生成的不可约子表示，并将 $\phi\otimes\phi$ 分解为不可约表示的直和.

2. 对于紧半单李代数 su(n)，o(n)和 sp(n)计算它们的伴随表示的最高权，并将其写成素根的线性组合.

3. 对于 o(n)和 sp(n)，计算基本权和强整向量的集合.

4. 利用紧半单李代数表示的分类，讨论连通的紧半单李群的表示的分类. 特别的对 SU(2)和 SO(3)给出的所有不可约表示.

5. 将本节讨论的紧半单李代数的复表示的分类推广到复半单李代数的情形.

参考文献

[1] Adams, J. Frank. Lectures on Lie groups. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[2] 白正国，沈一兵，水乃翔，郭孝英. 黎曼几何初步. 高等教育出版社，1992.

[3] 邦德列雅金. 连续群(上、下册). 曹锡华译，科学出版社，1978.

[4] Bump, Daniel. Lie groups. Graduate Texts in Mathematics, 225. Springer-Verlag, New York, 2004.

[5] 丁同仁，李承治. 常微分方程教程(第二版). 高等教育出版社，2004.

[6] 黄宣国. 李群基础(第二版). 复旦大学出版社，2007.

[7] Simon, Barry. Representations of finite and compact groups. Graduate Studies in Mathematics, 10. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[8] Helgason, Sigurdur. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.

[9] Humphreys J E. Introduction to Lie algebras and representation theory. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[10] Sagle, Arthur A; Walde, Ralph E. Introduction to Lie groups and Lie algebras. Pure and Applied Mathematics, Vol. 51. Academic Press, New York-London, 1973.

[11] Varadarajan V S. Lie groups, Lie algebras, and their representations. Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs N J. 1974.

[12] 项武义，侯自新，孟道骥. 李群讲义. 北京大学出版社，1981.

[13] 严志达，许以超. Lie 群及其 Lie 代数. 高等教育出版社，1985.