

FSD301 - Théorie de la Décision
Bureau d'Étude du 26 Janvier 2021
Partages et allocations équitables
Thème : partage de charges indivisibles

Romain Guillaume, Michel Lemaître

Avertissement : ce Bureau d'Études est noté. Répondez à toutes les questions. Soignez la présentation et l'argumentation. BE à rendre pour le **9 Février 2021**

Le thème de ce Bureau d'Étude est le problème d'allocation équitable de tâches indivisibles entre différents agents. Exemples : partage des corvées ménagères entre des colocataires ; distribution des tâches entre des travailleurs substituables (travail posté), emplois du temps dans des établissements scolaires, hopitaux, administrations ; répartition d'industries polluantes entre villes ; répartition d'immigrés entre pays ...

On recherche, autant que possible, des allocations *efficaces* et *équitables*.

Nous adoptons un modèle simplifié, celui des notes de cours, chapitre 3 (partage de lot d'objets indivisibles), avec la modification suivante : les utilités deviennent des *désutilités*, qui peuvent être interprétées comme des pénibilités, du temps de travail, des coûts, ... selon le contexte. On conserve l'*additivité* des désutilités, hypothèse qui revient à considérer les charges comme compensatoires¹. On suppose que tout agent peut accomplir n'importe quelle charge. Toutes les charges doivent être allouées, chacune à un agent et un seul.

On supposera les désutilités strictement positives (si une charge a une désutilité nulle pour un agent, on peut l'attribuer à cet agent sans dommages pour lui, et donc cette charge peut être ignorée).

1 Adaptation du modèle

1.1 Approche par les tests

Question 1. Reprendre l'approche par les tests (notes de cours paragraphe 3.3) et adapter les définitions au cas des désutilités :

- Pareto-optimalité (efficacité)
- proportionnalité
- absence d'envie
- le test maxmin
- le test CEEL.

L'approche par les tests nécessite-t-elle de normaliser les utilités ? Expliquer.

1.2 Approche par les Ordres de Bien-Être Social (OBES) et les Fonctions d'Utilité Collective (FUC)

Question 2. Reprendre l'approche par les OBES et les FUC (notes de cours paragraphe 3.4) et de même adapter les définitions ainsi que les sens d'optimisation au cas des désutilités :

- l'utilitarisme classique
- l'égalitarisme
- Nash (se souvenir que l'on recherche équité — c'est en maximisant un produit que l'on équilibre ses arguments — ; et efficacité — penser à la Pareto-optimalité)
- la réduction des inégalités
- la famille des *Ordered Weighted Averaging Operators* (OWA). Quelles conditions sur les poids d'un OWA assurent la propriété de réduction des inégalités ?

L'approche par les OBES/FUC nécessite-t-elle de normaliser les utilités ? Expliquer.

1. Par exemple, pour un agent, une charge de désutilité 10 est équivalente à deux charges de désutilités 6 et 4

1.3 Un exemple

Soit l'instance suivante (3 charges a, b, c, à partager entre 2 agents) :

	a	b	c
$u_1()$	6	3	1
$u_2()$	1	2	1

Question 3. Enumérer toutes les allocations possibles, les placer graphiquement dans l'espace des désutilités. Tracer quelques courbes d'iso-somme, iso-égalité, iso-Nash et iso-OWA (avec un vecteur de poids bien choisi). Pour chaque allocation, la caractériser par les 5 tests cités plus haut (pour CEEL, préciser les prix). Lesquelles optimisent les 3 OBES utilitarisme classique, l'égalitarisme et Nash ?

2 Mise en œuvre

Vous allez construire un procédé de résolution de problème d'allocation équitable de tâches indivisibles, basé sur l'optimisation de FUC bien choisies. Vous exprimerez ces FUCs par des OWA.

Question 4. Quels vecteurs de poids correspondent aux OBES suivants :

- l'ordre de l'utilitarisme classique
- l'ordre de l'égalitarisme
- l'ordre correspondant à l'OWA de Gini (notes de cours paragraphe 4.2 et note en bas de page 21). Précisez l'ordre des désutilités et des poids.

Question 5. Exprimer le problème d'optimisation d'un OWA sous forme d'un programme linéaire.

Question 6. Construire un programme qui, étant donné une instance de problème de répartition équitable de tâches indivisibles, calcule une "bonne" allocation des charges aux agents, par optimisation d'OWA. Ce programme fera appel à une bibliothèque de programmation linéaire. Annexer votre programme à votre compte-rendu.

Exercer votre programme sur l'instance donnée plus bas. Considérer plusieurs jeux de poids pour votre OWA, et en particulier, les 3 jeux de poids cités plus haut.

Pour chaque allocation donnée par votre programme, vérifie-t-elle la proportionnalité et l'absence d'envie ?

Proposer une ou plusieurs allocations parmi celles trouvées ou d'autres, et argumenter votre choix. Conclure sur l'approche.

3 Bonus

Les questions suivantes sont facultatives mais apportent un bonus.

Question 7. Les solutions que vous proposez sont-elles efficaces ?

Question 8. Calculer les parts minmax de chaque agent pour l'instance donnée, et dire si vos solutions vérifient le test correspondant.

Question 9. Construire un programme linéaire qui décide si une allocation satisfait le test CEEL. L'utiliser pour trouver, pour l'instance donnée ci-dessous, des allocations satisfaisant le test CEEL, s'il en existe.

L'instance à résoudre

L'instance suivante représente un problème d'allocation de 10 tâches à 5 agents. Chaque agent a noté les tâches sur une échelle de 1 à 20.

	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	t8	t9	t10
u_1	8	14	12	13	5	9	3	8	15	2
u_2	15	18	12	17	17	12	16	12	10	18
u_3	10	9	11	13	10	9	15	11	9	13
u_4	20	20	14	10	10	2	4	12	7	16
u_5	20	20	15	18	20	18	17	17	15	16

Pour toute question : Romain.Guillaume@irit.fr,