Ответы на билеты по теорверу

silvia.lesnaia

June 2025

1 Билет 1

Билет 1.

2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Опр. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностн. простр-во. $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$ (т.е. B точно насту)

Условная вероятность события A при условии, что наступило событие B, назв. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Теорема Пусть A и B случ. соб. такие, что $P(B) > 0$. Тогда: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Пусть A_1, A_2, A_3 - случ. событ., такие, что $P(A_1) > 0$ $P(A_1 A_2) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot$

$\cdot$ $A_1 \cap A_2)$

3. Функция распределения (ф.р.) и её свойства

Опр: Функцией распредел. вероятн. случайной величины ξ назв.

$F_\xi(x) = P\{w : \xi(w) < x\}$. $(F(x) = P\{\xi < x\}$

Свойства:

1 $0 \le F_\xi(x) \le 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3 $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$

2 $F_\xi(x)$ - неуб. непр. слева функц.

4 $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$

5 $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$

4. Распределение Пуассона

Описывает количество событий, происходящих в фиксированном интервале времени и пространства, при условии, что эти событ. происход. с постоянной средней частотой и независимо друг от друга

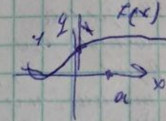
5. Нормальное распределение (функция плотн., графики, свойства).

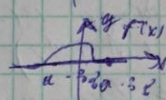
Опр: непрерывное вероятностное распределение, которое описыва множество явлений в природе и статистике. Оно своей симметричной формой напоминает колокол, и определяется двумя параметрами: средним значением μ, стандартным отклон. σ

$$\xi \sim N(a, \sigma^2)$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \frac{(t-a)^2}{2\sigma} dt$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$





6. Вычисление м.о. и дисперсии для равномерного непрерывного распред.

Если X - случайная величина, равномерно распределенная на интервале [a, b], то $E(X) = \frac{a+b}{2}$

7. Коэффициент корреляции и его свойства

Опр: Коэффициентом корреляции ξ и η ~~называется~~ называют ξ равное

$$r = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\,\sqrt{D\eta}}$$

Свойства:

1 $|r| \le 1$

2 Если ξ и η незав., то $r = 0$, обр. неверно $M\eta = \dots$

3 Если ξ и η линей. связаны, то $|r| = 1$

Если $|r| = 1$, то ξ и η лин. связаны, т.е. $\eta = a\xi + b$, $a \ne 0$

Продолжение 1

8. Величины x и y независимы и имеют характеристики $M_x = 1, M_{x^2} = 2, M_y = -2, M_{y^2} = 6$. Найдите м.о. и дисперсию величины $z = -2x + 3y - 5$.

М.О. M_z

$M_z = M[-2x + 3y - 5] = -2M_x + 3M_y - 5 =$
$= -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5 = -2 - 6 - 5 = -13$

Дисперсия D_z

$D_x = M_{x^2} - (M_x)^2 = 2 - 1^2 = 1$

$D_y = M_{y^2} - (M_y)^2 = 6 - (-2)^2 = 6 - 4 = 2$

$D_z = (-2)^2 D_x + 3^2 D_y = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 4 + 18 = 22$

Ответ: $M_z = -13$, $D_z = 22$

9. Известно, что x распределена по биномиальному закону 10 и 0,4. Чему равны её характеристики.

$M_x = np = 10 \cdot 0,4 = 4$

$D_x = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,4$

Ответ: $M_x = 4$, $D_x = 2,4$.

1. Аксиомы Колмогорова

- Аксиома неотрицательности

Каждому событию A соответствует неотрицательное число - вероятность этого события.

- Аксиома нормировки

Вероятность достоверного события равна 1

- Аксиома аддитивности

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей

2 Билет 3

Билет 3

1. Определение сигма-алгебры событий

Сигма-алгебра F – это непустой класс м-в, замкнутый относительно счётного пересечения, сумм и отрицания, т.е.

1) если $A \in F$, то $\bar{A} \in F$
2) $\Omega \in F$
3) если последов. $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in F$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$

2. Известно, что $X \sim R[-3, 5]$. Чему равны её характеристики?

М.О.: $E[X] = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

Д: $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \approx 5{,}3$

Станд. откл.: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

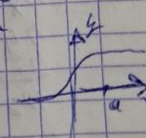
Функц. плотн.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{8}, & \text{если } x \in [-3, 5] \\ 0, & \end{cases}$

Функц. распр.: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -3 \\ \frac{x-a}{b-a} = \frac{x+3}{8}, & \text{если } -3 \le x \le 5 \\ 1, & \text{если } x > 5 \end{cases}$

3. Нормальное распределение (функц. плотн., функц. распр., св-ва)

Опр.: непрерывное вероятностное распределение, которое описывает множество явлений в природе и статистике. Оно своей симметричной формой на колокол похоже, и определяется двумя параметрами:

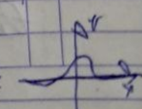
средн. знач. μ
станд. откл. σ



$\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \frac{(t-a)^2}{2\sigma} dt$

$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



4. Вычисление м.о. и дисперсии для равномерного непрерывного распределения

Если X - случайная величина, равномерно распределена на интервале $[a, b]$, то $M(x) = \frac{a+b}{2}$

5. Коэффициент корреляции и его свойства.

Опр: Коэффициентом корр. ξ и η - число r, равное:

$$r = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

Свойства:

1 $|r| \leq 1$

2 Если ξ и η независ., то $r = 0$. Обратное неверно.

Независим => некоррелир.

3 Если ξ и η линейно связаны, то $|r| = 1$

Если $|r| = 1$, то ξ и η линейно связ.,

т.е. $\eta = a\xi + b$

$a \neq 0$

6. Повторим задачу из пункта 1 №8

М.о. M_Z

$M_Z = M[-2x + 3y - 5] = -2M_x + 3M_y - 5 =$

$= -2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5 = -2 - 6 - 5 = -13$

Дисперсия D_Z

$D_x = M_{x^2} - (M_x)^2 = 2 - 1^2 = 1$

$D_y = M_{y^2} - (M_y)^2 = 6 - (-2)^2 = 6 - 4 = 2$

$\cancel{D_Z = (-2)^2 D_x + 3^2 D_y = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 =}$

$D_Z = (-2)^2 D_x + 3^2 D_y = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 4 + 18 = 22$

Ответ: $M_Z = -13$, $D_Z = 22$

3 Билет 4

Билет 4.

1. Аксиомы Колмогорова

• Аксиома неотрицательности

Каждому событию A соответствует неотрицательное число — вероятность этого события

• Аксиома нормировки

Вероятность достоверного события равна 1

• Аксиома аддитивности

Вероятность суммы ~~несовместн~~ несовместных событий равна сумме вероятностей

2. Независимость случайных событий. Критерий независимости событий.

Опр: ~~[illegible]~~: Случ. соб. A и B называют независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Критерий: Пусть A и B такие, что $P(B) > 0$. Тогда A и B называются независимыми $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$

3. Равномерное дискретное распределение

$\xi \sim R(N)$ $(\xi \sim U(N))$

Стохастич. эксперимент — конечное мн-во равновозможных исходов

Случайная велич. ξ — номер наступившего исх.

$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}$ $k = \overline{1,N}$

$\sum_{k=1}^{N} P\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1$

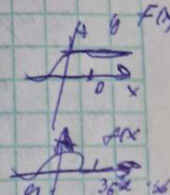
4. Нормальное распределение (функция распр.-я, график, связь с ф-й Лапласа)

Опр. непрерывное вероятностное распределение, которое описывает множество явлений в природе и статистики. Оно своей формой напоминает колокол, и обладает двумя параметрами:

среднее знач. μ

станд. откл. σ

$$\xi \sim N(a, \sigma^2)$$



$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{x} \frac{(t-a)^2}{2\sigma}\,dt$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

~~Связь с ф-ей непрер-~~

~~Связь~~ Функ. Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Связь:

$$P(Z \le x) = F(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$$

$$P(X \le x) = F\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

5. Обобщенное неравенство Чебышева

Пусть ξ — неотр. случ. велич. а $g(x)$ неуб. на множестве знач. ξ неотр. ф-я. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $P\{\xi \ge \varepsilon\} \le M(g(\xi)) : g(\varepsilon))$

Продолжение 4

6. Величины X и Y независимы и имеют характеристики $M_x = 2$, $Mx^2 = 5$, ~~$MY = 3$~~ $MY = 1$, $MY^2 = 4$. Найдите математическое ожидание и дисперсию величины $Z = -3X + 2Y - 1$

М. О. М. Z

$M_Z = M[-3X + 2Y - 1] = -3M_X + 2MY - M1$

$M_Z = -3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 1 = -6 + 2 - 1 = -5$

Дисперсия D_Z

$D_X = M_X^2 - (M[X])^2 = 5 - 2^2 = 1$

$D_Y = M_Y^2 - (M[Y])^2 = 4 - 1^2 = 3$

$D_Z = 9 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 9 + 12 = 21$

Ответ: $M_Z = -5$, $D_Z = 21$

7. Определение Н. Ф. и ее свойства, теорема о разложении Х. Ф. в ряд.

8. Известно, что X распределена по показательному закону с параметром 0,25. Чему равна ее характер

$E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,25} = 4$ - М. О.

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,25^2} = \frac{1}{0,0625} = 16$ Дисп.

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{16} = 4$ - ст. от.

Функция $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

при $\lambda = 0,25$

$F(x) = 1 - e^{-0,25x}$ ≥ 0

Функция плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тогда $\lambda = 0,25$

$$f(x) = 0,25 e^{-0,25x} \quad x \geq 0$$

Ответ: М.О $= 4$

$D = 16$

$\sigma = 4$