

Дефференцальные уравнения. Лекции

silvia.lesnaia

February 2025

14.02.25

1 Литература

1. В.В Степанов. Курс дифференциальных уравнений (вообще можно любые учебники использовать) 2. А.Ф Филипов Сборник задач дифференциальных уравнений

2 ВВЕДЕНИЕ

ОПР: Обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка имеет вид $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ где x независимая переменная, $y' = y'(x), \dots, y^{(n)} = y^{(n)}(x)$,

$$F = F(t_1, t_2, \dots, t_n) \varphi(x) \quad 1) F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x) \equiv 0$$

Законы природы написаны на языке дифференциальных уравнений - Ньютон

Примеры:

1. Уравнение радиоактивного распада

x - время, $y(x)$ - количество рад. вещества в момент времени x

$$y'(x) - \text{скорость распада} \quad y'(x) = -k y(x) \quad k > 0$$
$$\boxed{y'(x) = -k y(x)} - \text{диффер. уравн}$$

2. Уравнение малых колебаний маятника

x - время $y(x)$ - угол отклонения от положения равен 2??

$$y'' + \frac{g}{l} * y(x) = 0$$



3 Дифференциальные уравнения первого порядка

ОПР: Деф.урав.1го порядка это уравнения вида $F(x,y,y') = 0$ или $y' = f(x,y)$ (нормальная форма)

ОПР: Деф.урав.1го порядка в симметричной форме имеет вид $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$, где $A(x,y)$, $B(x,y)$ - заданные функциями.

$$\text{Если } y=y(x), \text{ то } (2) \iff \frac{dy}{dx} = + \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \quad (3)$$

$$\text{Если } x=x(y), \text{ то } (2) \iff \frac{dy}{dx} = - \frac{A(x,y)}{B(x,y)} \quad (3)$$

Можно показать

3.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменным

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

$y' = f(x,y)$ - общий вид

$y' = x+y$ такое не распадется - частный случай

Алгоритм решения:

1. Переходим к дифференциалу

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \quad | \cdot dx, \frac{1}{f_2(y)}$$

2. Делим переменные (Разделение переменных)

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) dx \quad | \int$$

3. Вычисляем интеграл

$$\int f_1(x) dx = F_1(x),$$

Получим $(2) F_2(y) = f_1(x) + c$ - производная константа

4. Находим из (2)

$$\varphi(x, c) - \text{общ.реш}(1)$$

Замечание

Называется общим интеграл уравнения (1)

Общее решение в неявном виде:

$$J \frac{ay}{f_2(y)} = F_2(y)$$

Обоснование алгоритма(доказательство):

3.2 Однородные дифференциальные уравнения

ОПР: Однородное деф.урав имеет вид

1) $y' = f(x,y)$, где f обладает след свойств $f(\lambda x, \lambda y)$

Алгоритм решения:

1. Делаем замену функции

(2) $y(x) = xu(x) \implies y'(x) = u(x) + xu'(x)$, где $u(x)$ новая неявная функция

2. Подставляем эти в (1) $u + xu' = f(x, xu)$;

$$xu' = f(x, xu) - u;$$

$$u' = \frac{1}{x} \{f(x, xu) - u\}$$

Примечание (все z заменить на u)

@ Тезис 2. Как уравн. с разд. перемен.
 @ Фигур. $z(x,y) = \psi(x,y) \Leftrightarrow y = \chi(x,y)$
 @ Ответ.

3.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ОПР: (1)

21.02.25

Теорема 1

4 Метод вариации производной постоянной

$$y' + p(x)y = y(x)$$

Теорема Общее решение $y = e^{\int p(x)dx} (Se^{\int p(x)dx} * q(x)dx + c)$

Ит. Решение соотв. однородное уравнение

$$Y' + P(X)Y = 0, \text{ с разд. перем}$$

ПРИМЕЧАНИЕ! Уравнения решаются только методом вариации

4.1 Дифференциальные уравнения полных дифференциалах

Опр: Рассмотрим дифф.ур-ие $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ - 1

Уравнение 1 называется Уравнением в полных дифф-лах, если

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Считаем что $y=y(x)$, $N(x,y) \neq 0$ Тогда получаем по опр (1) эквив. уравнению (3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

Алгоритм решения

1 Пусть выполняется (2)

2 Найдем вспомогательную функцию $\Phi(x,y)$ как решение след. системы уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \quad (2)$$

3 Рассмотрим 1-е Уравнение в(*) решаем у. Тогда получим $\frac{d\Phi(x,y)}{dx} = M(x,y)$

$$\Phi(x,y) = \int M(x,y)dx = \int_{x_0}^x M(x,y)dx \quad (\text{винзу } x_0 \text{ и } x \text{ сверху}) \quad \text{тут надо дополнить}$$

4 Подставляем эту

5 Решим уравнение (отн.у) (**)

6

Теорема 2

Обоснования алгоритма

.....

Рассмотрим уравнение в симметрической форме

Уравнением в дифференциалах называется уравнение

$$(1) A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} \neq \frac{\partial B}{\partial x}$$

(1) Не является ур-ием полных дифференциалов

Теорема Сущ-ие ф-ия $\mu(x, y) \neq 0$, (2) $\mu(x, y)$

...

Опр: Функция $\mu(x, y)$ интегрируемым множителем для ур(1)

Пример:

Основная теорема и единственности

28.02.25

Основная теорема Коши Если $f(x, y)$ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ - непр,

то задача Коши (1 - 2) имеет единственное решение

Док-во: I этап. Сведение 1 - 2 к инт уравнению

$$(3) y(x)y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

Мы доказали, что

$$1 - 2 \Leftrightarrow (3) \text{ (их решения совп)}$$

II этап. Решение (3)

Строится последовательность функции

$$\varphi_0(x) = y_0, \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_0(t))dt$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t))dt$$

$$(*) \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_n(t))dt$$

Получем последовательность непрерывной функции

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_n(x)$$

Покажем, что при $\forall x$ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Для этого рассм. ряд: $y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + (y_2(x) - y_1(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x)) + \dots$ (4).

Частичные суммы этого ряда: $S_0(x) = y_0(x)$, $S_1(x) = y_1(x)$, ..., $S_n(x) = y_n(x)$...

Если докажем, что ряд (4) сходится, т.е. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$, то докажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Можно показать, что $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

(ряд мажор. с числ. рядом.) По признаку мажоранты ряд (4) сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$

Тогда $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow$ по опред. решения интегр. ур, это решение (3) \Rightarrow решение задачи Коши.

III этап. Единственность решения

Имеем $\varphi(x)$ реш (3) Пусть $\varphi_1(x)$ точка решения (3) т.е

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

$$\varphi_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_1(t)) dt$$

$$(4) \varphi(x) - \varphi_1(x) \equiv \int_{x_0}^x [f(t, \varphi(t)) - f(t, \varphi_1(t))] dt$$

Теорема о среднем Если $g(x)$ - диф. функ, то $g(x_1) - g(x) = g'(\varepsilon)(x_1 - x)$

ε каждая точка между Из (4)

...

... ..

5 2 Раздел. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Опр: Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $y = y(x)$ - н.з.в.

$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$ заданные непр функции

Опр: Линейное уравнение называется однородным, если $f(x) \equiv 0$, Линейное уравнение называется неоднородным, если $f(x) \neq 0$,

Опр: Функция $\varphi(x)$ называется решением (частным) уравнения (1), если $a_0(x)y^n(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x)$.

Решение:

Короче надо будет заполнить пробелы тут

07.03.25

Опр: Линейно зависимые и линейно независимые функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ на $[a, b]$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 2 Если $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m$ - линейно зависима на $[a, b]$, то $W(x) = 0$

Доказательство: Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на $[a, b]$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ не все равно 0 т.ч

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ - линейно зависима на $[a, b]$ и пусть $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 \varphi_1(x) & \alpha_2 \varphi_2(x) & \dots & \alpha_m \varphi_m(x) \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) & \alpha_2 \varphi_2'(x) & \dots & \alpha_m \varphi_m'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) & \alpha_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \alpha_m \varphi_m^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{vmatrix} = 0$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение $(1)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$, или $l(y) = 0$ $a \leq x \leq b$

Доказательство: Предположим противное: $\exists x_0 \in [a, b] W(x_0) = 0$ По теории из алгебры столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы: $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$ числа не все 0, такие что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(x_0) \\ \varphi_2'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \varphi_n'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x_0) + \alpha_2 \varphi_2(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 \varphi_1'(x_0) + \alpha_2 \varphi_2'(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 \varphi_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x)$

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x)$$

Продифференцируем $\frac{d}{dx} \varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1'(x) + \alpha_2 \varphi_2'(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x)$

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1'(x) + \alpha_2 \varphi_2'(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x) = 0$$

$\varphi(x)$ - решение уравнения (1)

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x) = 0 \quad (2)$$

Отсюда следует, что $\varphi(x)$ - постоянное значение

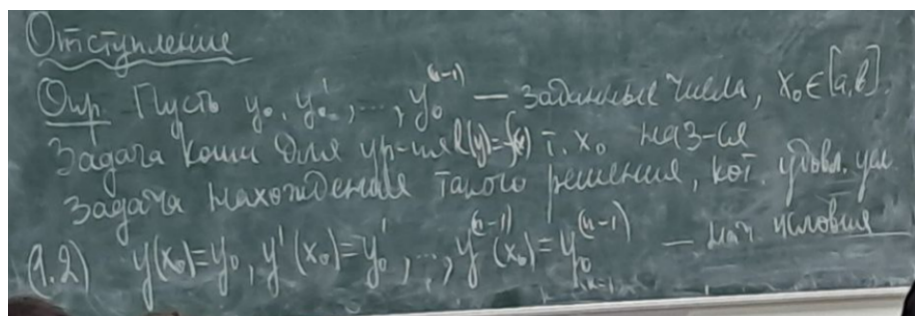
$$\begin{cases} \varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \\ \varphi'(x) = 0, \quad \varphi''(x) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$ - тождество (4)

В силу условия равенства $\varphi(x) = 0$

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad \text{на } [a, b] \quad \text{т.е. } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Отступление



Теорема о существовании решения задачи Коши для линейного уравнения

Имеет единственное решение для линейного уравнения имеет единственное решение $\forall x_0 \in [a, b], y_0, y'_0, \dots$

Конец отступления

Тут нужно везде заполнить пробелы, в крайнем случае попросить людей которые лучше конспектировали лекцию

Теорема 4

14.03.25