Компьютерная графика

Harpie

February 2025

17.02.25

1 Собъективно-ориентированное программирование

Это парадигма программирования которая представляет отрезок вменении во время которого возникают определенные события. Программа выполняется не линейно, программа описывается как набор обработчиков/ обработчик события.

Некоторые события происходят автоматически, какие то нужно/можно инициализировать.

Примеры обработчиков:
Paint
Load
Resize

Некоторые обработчики могут быть инициализированы
Refresh

2 Полигональная КГ

Объект описывается с помощью вершин/точек, которые соединенны отрезками. Перед описанием объекта нужно знать и задать координаты точек.

3 Модели

Модель строиться набором отрезков, которые определенным образом соединенны в точках, в некоторой системе координат. **Модельная система координат, объектная система координат,локальная система координат**

Правая система координат - система повернута против часовой стрелки под 90 градусов

Система координат экрана - (нужно заполнить тут)

Правая декартовая СК (мировая система координат) - "виртуальный мир в котором существеют модели.

4 Кадрирование

Операция кадрирования - совмещенние одного кадра с другим, преобразования одного кадра

Кадр - прямоуглник, стороны которого параллельны осям координат и у которого есть параметры

Размер по горизонтале - Vx

Размер по вертикале - Vy

Координты нижного угла - Vcx, Vcy

Исходный кадр обозоначается как - Wx, Wy, Wcx, Wcy

Безразмерные координаты :

$x_1 = x - V_c x$ $\quad y_1 = y - V_c y$

$x_2 = \frac{x - V_c x}{V_x}$ $\quad y_2 = \frac{y - V_c y}{V_y}$

$x_3 = \frac{x - V_c x}{V_x} * W_x$ $\quad y_3 = \frac{y - V_c y}{V_y} * W_y$

$x' = \frac{x - V_c x}{V_x} * W_x + W_c x$ $\quad y' = \frac{y - V_c y}{V_y} * W_y + W_c y$

Если умножить на - 1 еденицу, то картинка перевернется (касается перевернутых картинок)

$x_4 = \frac{x - V_c x}{V_x} * W_x + W_c x$ $\quad y_4 = \frac{y - V_c y}{V_y} * W_y - W_c y$

$x_5 = \frac{x - V_c x}{V_x} * W_x + W_c x$ $\quad y_5 = \frac{y - V_c y}{V_y} * W_x + 2 W_c y$

$x' = \frac{x - C_c x}{V_x} * W_x + W_c x$ $\quad y' = W_c y - \frac{x - C_c x}{V_x} * W_y$

24.02.25

Продолжение

$x' = \frac{x - V_{cx}}{V_x} * W_x + W_c$

$y' = W_y - \frac{y - V_{cy}}{V_y} * W_y$

5 Преобразование изображения

5.1 Элементарные преобразования

1. Перенос/Сдвиг

Смысл преобразования: объект в одной системе координат нужно сдвинуть в "другую систнму координат".

Пример:

$x_1 \implies x'_1$ между ними расстояние T_x $\quad y_1 \implies y'_1$ между ними расстояние T_y

$x_2 \implies x'_2$ между ними расстояние V_x $\quad y_2 \implies y'_2$ между ними расстояние V_y

Итог: $x' = x + T_x \qquad y' = y + T_y$

2. Масштабирвоание относительно начала координат

Это озночает, все точки преобразуются за исключением начальной точки. На месте остается только точка начала координат.

Пример:

$3 \implies 4.5$ и т.д

Итог: $x' = x * S_x \qquad y' = y * S_y$

3. Поворот относительно начала координат против часовой стрелки на угол ϑ

Нужно соеденить лучом точку с началом координат. Преоброзовать точку означает, повернуть этот отрезок на заданный угол ϑ. В результате полчвется новая точка.

$x' = rcos(\alpha + \vartheta)^x = rcos\alpha cos\vartheta - rsin\alpha sin\Theta = xcos\vartheta - ysin\vartheta$

$y' = rsin(\alpha + \vartheta)^x = rsin\alpha cos\vartheta + rsin\vartheta cos\alpha = ycos\vartheta + xsin\vartheta$

Итог : $x' = xcos\vartheta - ysin\vartheta \qquad y' = ycos\vartheta + xsin\vartheta$

4. Зеракальное отражение. Частный случай масштабирвоание

$x' = x * -1 \qquad y' = y * -1$

6 Совмещенние преобразований

Пример: поворот на угол ϑ против часовой стрелки относительно т. $A(x_a, y_a)$

$x^{(1)} = x - x_a \qquad y^{(1)} = y - y_a$

$x^{(2)} = x^{(1)} cos\vartheta - y^{(2)} sin\vartheta \qquad y^{(2)} = x^{(1)} csin\vartheta + y^{(2)} cos\vartheta$

$$x' = x^{(2)} + x_a = (x - x_a)cos\vartheta - (y - y_a)sin\vartheta + x_a$$
$$y' = y^{(2)} + y_a = (x - x_a)csin\vartheta + (y - y_a)cos\vartheta + y_a$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

6.1 Однородные координаты

6.1.1 Евклидовые координаты

В однородных координатах координаты объекта задается с точностью какого то множетеля. Например, для прямой вида $A_x + B_y + C = 0$. Можно скзаать, что координаты прямой задаются тройкой (A, B, C). В таком случае, если домножить эту тройку, то она все еще будет указывать на иходную прямую.

Для евклидовой точки (x, y) выберем некоторую произвольную

Переход от однородных в евклидовые координаты

Предположим были однородные координаты (χ, γ, α) и нам нужно получить $(\chi', \gamma', \alpha')$

6.2 Однородные преобразоавания

Формула для масштабирвоание

$\chi' = \chi S_\chi$

$\gamma' = \gamma S_\gamma$

$\alpha' = \alpha$

Матрица масштабирвоания

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Матрица поворота

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta & 0 \\ sin\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$\chi' = \alpha x' = \alpha x + Y_x \alpha$

$\gamma' = \gamma x' = \gamma x + Y_x \alpha$

$\alpha' = \alpha$

Матрица для переноса

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Универсальная формула

$$\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta & 0 \\ sin\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$$

03.03.25

$P' = MP$ В таком виде записывается матричное преообразование

P - столбец

M - матрица

P= $\begin{bmatrix} \chi \\ \gamma \\ \alpha \end{bmatrix}$ P= $\begin{bmatrix} \chi' \\ \gamma' \\ \alpha' \end{bmatrix}$

M' - обратная матрица

$P = M'(MP)$

$RightarrowM' = M^-1$

6.3 Преобразование перенос

Translate $(T_x, T_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T_x \\ 0 & 1 & -T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T(T_x, T_y)

6.4 Преобразование масштабирвоание

Scale (S_x, S_y) $\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/S_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

S(S_x, S_y)

6.5 Преобразование поворот

Rotate$(\vartheta) = \begin{bmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta & 0 \\ sin\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\vartheta & sin\vartheta & 0 \\ -sin\vartheta & cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 Совмещенное преобразование

Смысл:

$P' = (M_2 ... M_3, M_2, M_1)P$

$E = M'(M_3, M_2, M_1)$

$M' = M'(M_\Delta^{-1}, M_2^{-1}, M_3^{-1})$

8 Принцип двойтсвенности

Двойственное преобразование

У нас есть матрица

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Масштабирвоание равно преобразованию....

Напоминание: Операция кордирования $x' = \frac{x - V_{cx}}{V_x} W_x + W_{cx}$

$y' = \frac{y - V_{cy}}{V_y} W_y + W_{cy}$

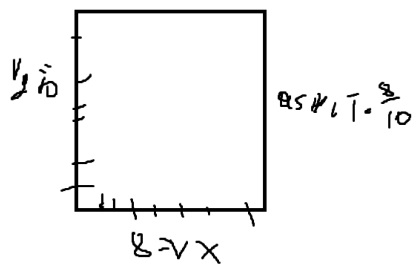
$\frac{W_x}{V_x} < \frac{W_y}{V_y}$

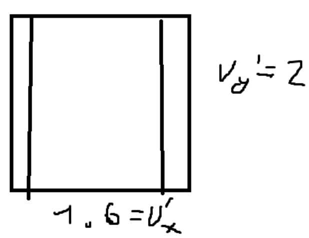
$\frac{2}{V_x} < \frac{2}{V_y}$

$1 = \frac{2}{2} < \frac{V_x}{V_y}$ - aspect - соотношение сторон

Если соотношение сторон больше 1 масштабируем по x, если же наоборот то по y. (Для вписания картинки в квадрат)

$\frac{W_x}{V_x}$ или $\frac{W_y}{V_y}$
$\frac{2}{V_x}$ или $\frac{2}{V_y}$
$\begin{cases} V_x^{'} \\ \\ V_y^{'} \end{cases}$ Размеры модели после вписания в квадрат 2x2

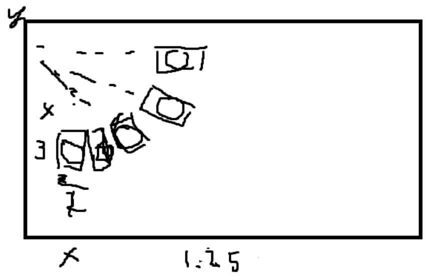




Команды:
translate x y
rotate ϑ
scale S
figure
Вспомогательные команды
popTransform - забираем из стка
pushTransform - добавляем в стек

scale 1.25
pushTransform
translate 0 -R
translate x y

translate -x -y
rotate 22.5
translate x y



Сокращение картинки:
scale 1.25
translate 0 -R
pushTransform
translate x y
figure
popTransform
rotate 22.5
pushTransform
translate x Y
figure

$$\begin{cases} pushTransform \\ rotate 22.5 \\ pushTransform \\ translate xy \\ figure \end{cases}$$

popTransform
10.03.25

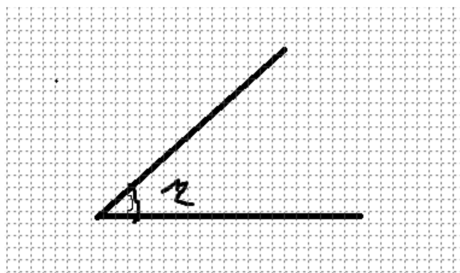
9 Операции над векторами

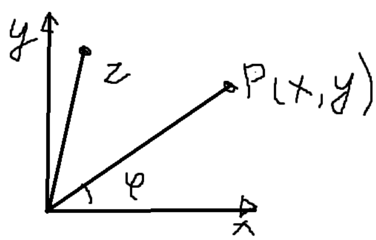
9.1 Двумерные вектора

У веторов две характиристики:
длина
$+$
направлнение

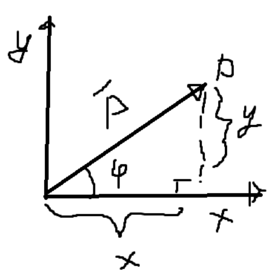
Подобные вектора называется свободными векторами если, есть точка из которой он начинается, то он называется связанным

Угол вектора (r, φ)
Угол ветора против часовой стрелки



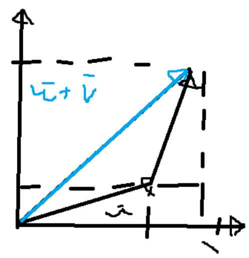


Радиус вектор точка P
$\bar{P}(x, \varphi)$
$x = rcos\varphi$
$y = rsin\varphi$

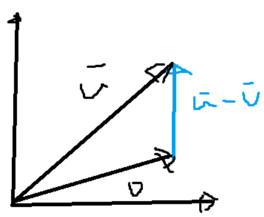


Сложение векторов(сумма)
$\bar{u}u\bar{v}$
$\bar{u} + \bar{v}$
$\bar{u} = (u_x, u_y)$

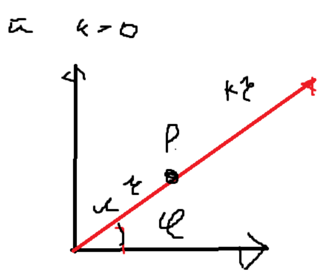
$\bar{v} = (v_x, v_y)$
$\bar{u} + \bar{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$



Разность векторов $\bar{u} u \bar{v}$
$\bar{u} - \bar{v}$
$\bar{u} - \bar{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$



пупуп



$k\bar{u} = (ku_x, ku_y)$
Скалярное произведение векторов

$\bar{u}\bar{v}$

$\bar{u}*\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|cos\widehat{\bar{u}\bar{v}}$

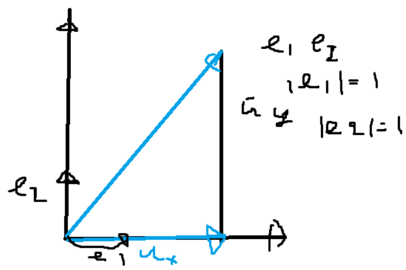
$\bar{u}=(r,\varphi)$

$|\bar{u}|=r$

$\bar{u}=u_x\bar{+}\bar{u_y}$

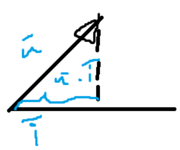
$\bar{u}*\bar{v}=(u_x\bar{+}\bar{u_y})*(\bar{v_x}+\bar{v_y})=(|u_x|e_1+|u_y|e_2)*(|v_x|e_1*|v_x|e_1)$

$\bar{u}*\bar{v}=|\bar{u_x}||\bar{v_x}||\bar{u_x}+|\bar{v_y}|$ - основная формула



$\bar{u}\bar{i}$

$\bar{u}*\bar{i}=|\bar{u}||\bar{i}|cos\widehat{\bar{u}\bar{i}}=|\bar{u}|cos\widehat{\bar{u}\bar{i}}$



dot-prodect - Скалярное произведение

Псевдоскалярное произведение

$\bar{u}\bar{v}$

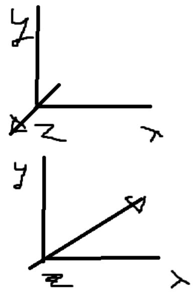
$\bar{u}x\bar{v}=|\bar{u}|\bar{v}|sin<\bar{u}\bar{v}$

$\bar{u}x\bar{v}=-\bar{u}x\bar{v}$

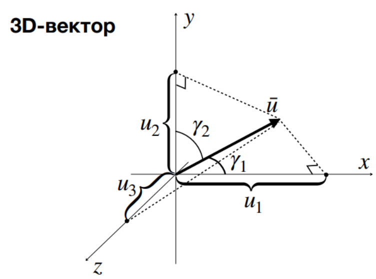
$e_1xe_1=0e_1xe_2=1e_2xe_1=-1e_2xe_2=0=u_xv_y-u_yv_x>\bar{u}x\bar{v}=\begin{bmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{bmatrix}$

cross-prodect - Псевдоскалярное произведение

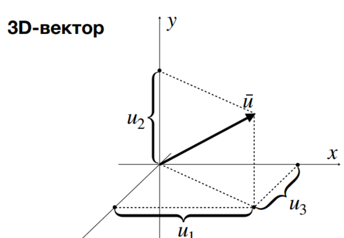
9.2 Трехмерные вектора



Левосторонняя и правостороняя

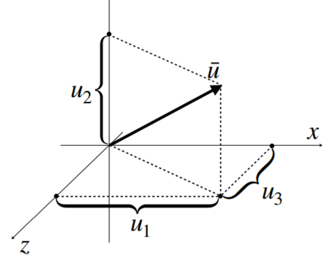


$$u_1 = |\bar{u}| \cos \gamma_1$$
$$u_2 = |\bar{u}| \cos \gamma_2$$
$$u_3 = |\bar{u}| \cos \gamma_3$$



$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T = (u_1, u_2, u_3)$$

Длина вектора

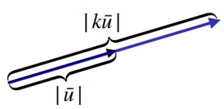


$$|\bar{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

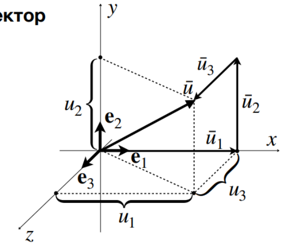
Умножение вектора на скаляр

$$k\bar{u} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ku_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 & ku_2 & ku_3 \end{bmatrix}^T = (ku_1, ku_2, ku_3)$$

$$|k\bar{u}| = \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2} = k\,|\bar{u}|$$



3D-вектор



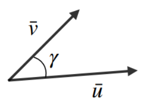
$\bar{u}_1 = u_1\mathbf{e}_1$ $\quad \bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$

$\bar{u}_2 = u_2\mathbf{e}_2$

$\bar{u}_3 = u_3\mathbf{e}_3$ $\quad \bar{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$

Сложение вектора по координатам

!Скалярное произведение аналогично двухмерному



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\gamma$$

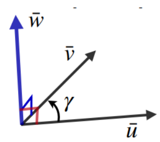
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \bar{u}^T \bar{v}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \bar{v}^T \bar{u}$$

Через матрицу

Векторное произведение

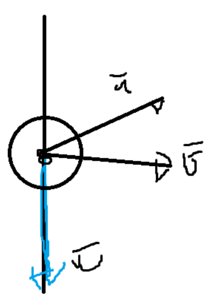


$$\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v}$$

$$|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\angle\gamma$$

$$\bar{w} \perp \bar{u} \qquad \bar{w} \cdot \bar{u} = 0$$
$$\bar{w} \perp \bar{v} \qquad \bar{w} \cdot \bar{v} = 0$$

Угол может быть как положительным, так и отрицательным
Не важно в какую сторону отмереяться угол
Если положительный результат, то вверх, отрицательный же вниз



$$\bar{u} \times \bar{v} = M\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{u}]_\times \bar{v} = \bar{u} \times \bar{v}$$

Матрица векторного произведения

17.03.25

10 Одномерноые координаты

$e = (A, B, C)(0, 0, 3)$

$A_x + B_y + C = 0$

$P\ (\chi, \gamma, \alpha) = (\frac{\chi}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha})$

$(2, 3, 0)$

$A_\chi + B_\gamma + C + \alpha = 0$

$(A, B, C)(\chi, \gamma, \alpha) = 0$

$P_1(\chi_1, \gamma_1, \alpha_1)$ и $P_2(\chi_2, \gamma_2, \alpha_2)$

$P_1 x P_2 = e$

$e_1 x e_2 = P$

Одномерноые координаты не будут использоваться в этом курсе, но пусть будут как факт

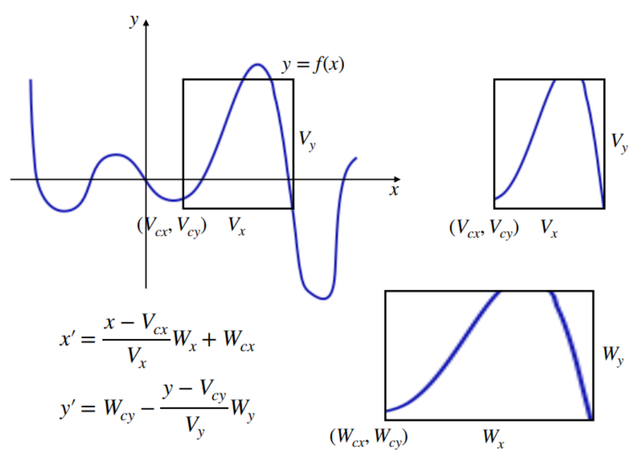
Плюкерова координата - $\beta = LP$

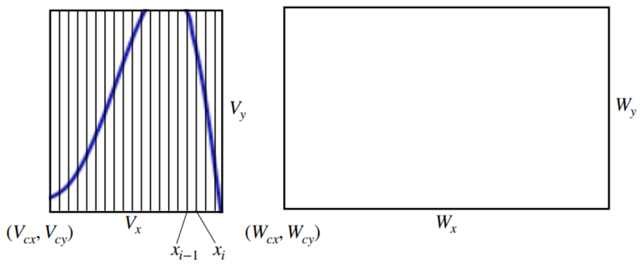
L - представление как матрицы 4x4

Все выше перечисленное не бует на экзамене, это чисто для общего развитися

11 Построение 2D - графика

Задана некая функция, нужно изобразить на экране. Функция бесконечная, как и графика. Нужно определить кадр, выделить его. Здаем кадр на экране.





$$x_i = x_{i-1} + \Delta_x$$

$$x' = \frac{x - V_{cx}}{V_x} W_x + W_{cx}$$

$$y' = W_{cy} - \frac{y - V_{cy}}{V_y} W_y$$

Δ - шаг

Что получается

$x_0 = V_{cx} \longrightarrow x_0' = W_{cx}$ - кадрирование

$y_0 = f(x_0) \longrightarrow y_0'$ - кадрирование

$x_i = x_{i-1} + x \longrightarrow x_0'$ - кадрирование

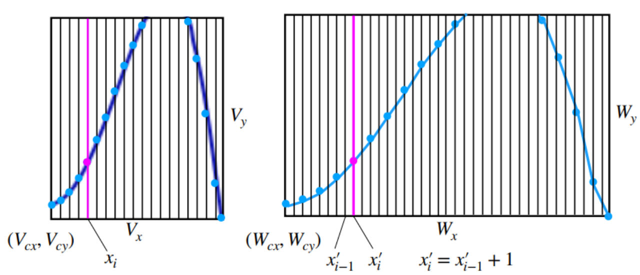
$y_i = f(x_0) + x \longrightarrow y_0'$ - кадрирование

отрезок от x_{i-1}', y_{i-1}' до x_i', y_i'

цикл $x_i < W_{cx} + W_x$

Как выбрать Δ_x?

Нужно отталкиваться от экрана, в зависимсмоти от этого и выбиратьеся Δ_x. Экран растровое пространство. По сути это сетка - точка растра.



$$x' = \frac{x - V_{cx}}{V_x} W_x + W_{cx}$$

$$y' = W_{cy} - \frac{y - V_{cy}}{V_y} W_y$$

$$x' \;\rightarrow\; x = \frac{x' - W_{cx}}{W_x} V_x + V_{cx}$$

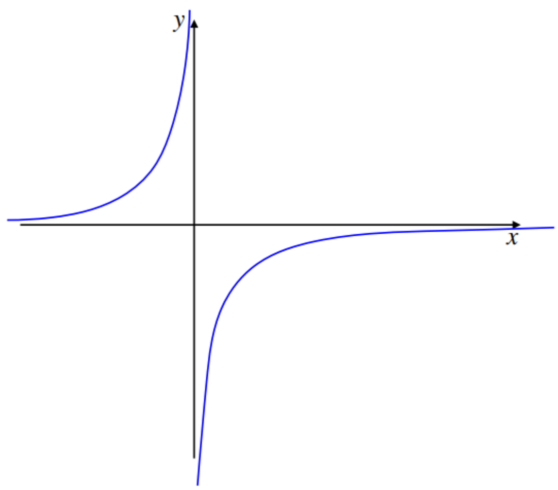
$$x \;\rightarrow\; y = f(x)$$

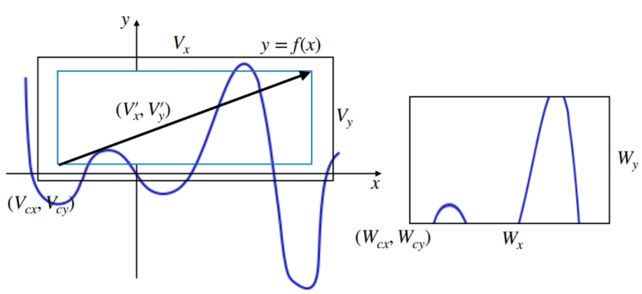
$$y' = W_{cy} - \frac{y - V_{cy}}{V_y} W_y$$

Цикл отриосовки:

пока $x_i^{'} <= W_{cx} + W_x$
$x_i^{'} = x_{i-1}^{'} + 1 \longrightarrow x_i$ кадр
$y_i^{'} \longleftarrow y_i(f_i)$ кадр
обработка от $(x_{i-1}^{'}, y_{i-1}^{'})$ до $(x_i^{'}, y_i^{'})$
$x_i = x_{i-1} + \frac{V_x}{W_x}$

Все усложняется, когда появляется разрыв...





Увеличиваются V_x **и/или** V_y **—** график сжимается по оси Ox и/или Oy;
Увеличиваются V_{cx} **и/или** V_{cy} **—** график сдвигается влево и/или вниз.

Чтобы растянуть график относительно центра кадра в S_x **и** S_y **раз по осям** Ox **и** Oy**, нужно масштабировать окно относительно центра кадра, т. е. применить операции**

- масштабирования точки (V_{cx}, V_{cy}) относительно центра окна;
- масштабирования величин V_x, V_y (вектора (V_x, V_y)) в S_x и S_y соответственно.

$$Translate(T_x, T_y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Scale(S_x, S_y) = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x^\star & 0 & T_x^\star \\ 0 & S_y^\star & T_y^\star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V'_{cx} \\ V'_{cy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} S_x^\star & 0 & T_x^\star \\ 0 & S_y^\star & T_y^\star \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_{cx} \\ V_{cy} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} S_x^\star & 0 \\ 0 & S_y^\star \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

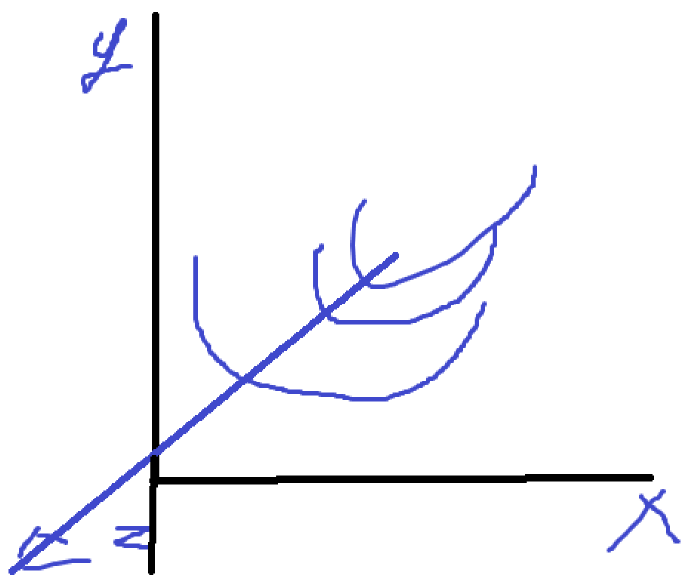
Так будет масштобироваться в окне

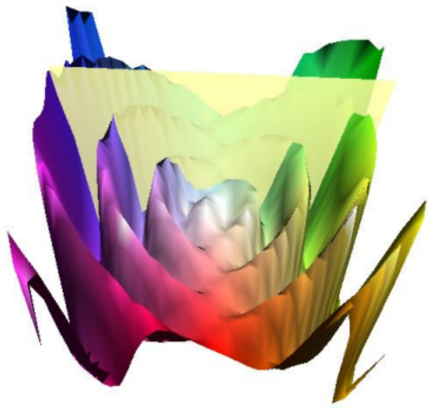
12 Построение 3D-граифка

Трехмерный график формирктся из двумерных графиков

Пусть:

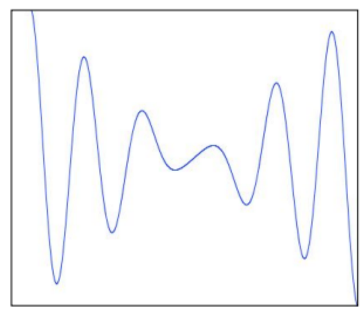
Бужем обозначать $y = f(x, z)$. Теперь график зависит еще и от z



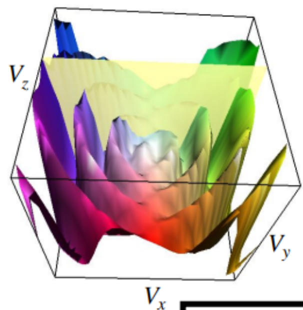


$$y = -x \sin\sqrt{x^2 + z^2}$$
$$z = -5$$

$$y = -x \sin\sqrt{x^2 + 25}$$



Для рисования такого используется "Алгоритм художника". Вначале начинаем с заднего плана и от него идет вплоть до самого ближнего плана



$$y = -x \sin\sqrt{x^2 + z^2}$$