

Дефференциальные уравнения. Лекции

silvia.lesnaia

February 2025

21.02.25

1 Элементы комбинаторики

1.1 Основные правила комбинаторики

Правило произведения

ПП A-m B-n \implies (A,B) - mn

Правило суммы

ПΣ A-m B-n \implies (A,B) - A(m) + B(n)

Размещение

$\bar{A}_n^k = n^k$ с повторениям

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n_k+1)$ без повторений

Перестановки

Перестановка без повторения $P_n = n!$

Перестановка с повторениям $\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

Сочетания

Без повторения $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$k!C_n^k = A_n^k$

Биномиальные свойства

1. $C_n^k = \bar{P}(k < n - k)$

2. Свойства симметричности $C_n^k = C_n^{n-k}$

3. Основное свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

4. Суммы сочетания $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

5. Знак переменной суммы сочетания $C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_n^2 - \dots + (-1)C_n^n = 0$

С повторениям

$\bar{C}_n^0 = C_{n+k-1}^k = \bar{P}(k, n - 1)$

Формула включения исключения

$$A \neq \emptyset, A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$$

$$|A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \dots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}|$$

Доказательство:

Возьмём произвольный элемент $a \in A$.

Первый случай: $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$. Пусть a принадлежит ровно k подмножествам. — справа в формуле k .

$$C_k^0 - C_k^1 + C_k^2 - C_k^3 + \dots + (-1)^k C_k^k = 0 \quad \text{по 5-му свойству.}$$

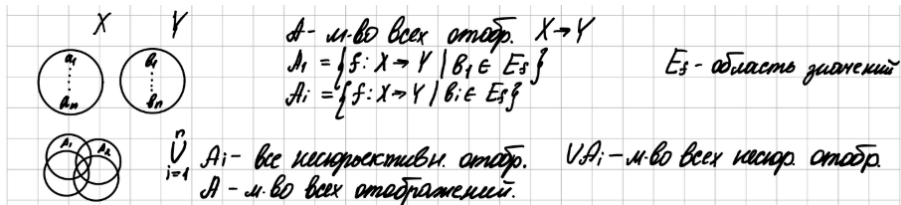
Второй случай: $a \notin \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Слева 1 раз встречается a , справа 1 раз встречается a .

Пример:

$$X = \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$Y = \{b_1, \dots, b_n\}$$



||
||
||

07.03.25

2 Комбинаторики разбиения