

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра Кафедра математической физики и вычислительной математики

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКЕ

ПЭ дисциплине “Методы вычислений”

студентки 3 курса 311 группы
направления 02.03.02 — Фундаментальная информатика и информационные
технологии
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Никитенко Яны Валерьевны

Проверил:

подпись, дата

Саратов 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1	Раздел 1	3
1.1	По данным интерполяции построить интерполяционный многочлен в общем виде, в форме Лагранжа и в форме Ньютона.	3
1.2	Построить 3 кубических сплайна, решив вспомогательную СЛАУ. .	13
2	Раздел 2	21
2.1	Решить следующую СЛАУ методом Гаусса:	21
2.2	Решить СЛАУ из предыдущего задания методом прогонки.	25
2.3	Решить СЛАУ из предыдущего задания методом простой итерации	31
3	Раздел 3	36
3.1	Решить задачу Коши методом Эйлера и усовершенствованным методом Эйлера:	

$$y' = 2Vx + Vx^2 - y, \quad y(x_0) = Vx_0^2$$

..... 36

3.2	Решить КЗ ОДУ разностным методом и методом неопределенных коэффициентов.	
-----	--	--

$$y'' + x^2 y' + x y = 10Vx - 3VTx^3 - 2VT,$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = 0.$$

..... 41

1 Раздел 1

1.1 По данным интерполяции построить интерполяционный многочлен в общем виде, в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

Исходные данные

X 1 3 5 7

F 0 7 2 18

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <string>
#include <locale>

using namespace std;

// Функция для ввода данных с клавиатуры
void inputData(vector<double>& x_data, vector<double>& f_data) {
    int n;
    cout << "Введите количество точек: ";
    cin >> n;

    x_data.resize(n);
    f_data.resize(n);

    cout << "\nВведите значения X:" << endl;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "X[" << i << "] = ";
        cin >> x_data[i];
    }

    cout << "\nВведите значения F(X):" << endl;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```

        cout << "F(" << x_data[i] << ")";
        cin >> f_data[i];
    }
}

// Функция для вывода введенных данных
void printInputData(const vector<double>& x_data,
const vector<double>& f_data) {
    cout << "\nВведенные данные:" << endl;
    cout << setw(10) << "X" << setw(10) << "F(X)" << endl;
    cout << string(20, '-') << endl;
    for (int i = 0; i < x_data.size(); i++) {
        cout << setw(10) << x_data[i] << setw(10) << f_data[i] << endl;
    }
    cout << endl;
}

// Функция для решения системы линейных уравнений методом Гаусса
vector<double> solveLinearSystem(vector<vector<double>> A,
vector<double> b) {
    int n = A.size();

    // Прямой ход метода Гаусса
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // Поиск главного элемента
        int maxRow = i;
        for (int k = i + 1; k < n; k++) {
            if (abs(A[k][i]) > abs(A[maxRow][i])) {
                maxRow = k;
            }
        }
        swap(A[i], A[maxRow]);

        // Перестановка строк
        swap(A[i], A[maxRow]);
    }
}

```

```

swap(b[i], b[maxRow]);

// Исключение
for (int k = i + 1; k < n; k++) {
    double factor = A[k][i] / A[i][i];
    for (int j = i; j < n; j++) {
        A[k][j] -= factor * A[i][j];
    }
    b[k] -= factor * b[i];
}

// Обратный ход
vector<double> x(n);
for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    x[i] = b[i];
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        x[i] -= A[i][j] * x[j];
    }
    x[i] /= A[i][i];
}

return x;
}

// Функция для вычисления значения полинома
double polynomial(double x, const vector<double>& coeffs) {
    double result = 0.0;
    for (int i = 0; i < coeffs.size(); i++) {
        result += coeffs[i] * pow(x, i);
    }
    return result;
}

```

```

// Функция для представления полинома в виде строки
string polynomialToString(const vector<double>& coeffs) {
    string result;
    int degree = coeffs.size() - 1;

    for (int i = 0; i < coeffs.size(); i++) {
        if (coeffs[i] != 0 || degree == 0) {
            if (!result.empty() && coeffs[i] >= 0) {
                result += " + ";
            }
            else if (!result.empty() && coeffs[i] < 0) {
                result += " - ";
            }
        }

        string term;
        if (i == 0) {
            term = to_string(coeffs[i]);
        }
        else {
            double absCoef = abs(coeffs[i]);
            if (absCoef != 1.0) {
                term = to_string(absCoef) + " * ";
            }
            term += "x";
            if (i > 1) {
                term += "^" + to_string(i);
            }
        }
    }

    // Удаляем лишние нули после запятой
    size_t pos = term.find('.');
    if (pos != string::npos) {
        size_t lastNonZero = term.find_last_not_of('0');
        if (lastNonZero == pos) {

```

```

        term = term.substr(0, pos);
    }
    else {
        term = term.substr(0, lastNonZero + 1);
    }
}

result += term;
}
degree--;
}

return result;
}

// Функция для вычисления коэффициентов многочлена Ньютона
vector<double> newtonCoefficients(const vector<double>& x,
const vector<double>& y) {
    int n = x.size();
    vector<double> coeffs = y;

    for (int j = 1; j < n; j++) {
        for (int i = n - 1; i >= j; i--) {
            coeffs[i] = (coeffs[i] - coeffs[i - 1]) / (x[i] - x[i - j]);
        }
    }
}

return coeffs;
}

// Функция для вычисления значения многочлена Ньютона
double newtonPolynomial(double x, const vector<double>& coeffs,
const vector<double>& x_data) {
    int n = coeffs.size() - 1;

```

```

double p = coeffs[n];

for (int k = 1; k <= n; k++) {
    p = coeffs[n - k] + (x - x_data[n - k]) * p;
}

return p;
}

// Функция для вывода вектора
void printVector(const string& name, const vector<double>& vec) {
    cout << name << ":" ;
    for (double val : vec) {
        cout << val << " ";
    }
    cout << endl;
}

// Функция для вывода матрицы
void printMatrix(const string& name,
const vector<vector<double>>& matrix) {
    cout << name << ":" << endl;
    for (const auto& row : matrix) {
        for (double val : row) {
            cout << setw(8) << val << " ";
        }
        cout << endl;
    }
}

int main() {

    setlocale(LC_ALL, "Russian");
}

```

```

vector<double> x_data, f_data;

// Меню выбора способа ввода данных
int choice;
cout << "Выберите способ ввода данных:" << endl;
cout << "1 - Ввести данные с клавиатуры" << endl;
cout << "2 - Использовать пример данных (X: 81, 21, 2, 3; F: 0, 7, 8, 28)" << endl;
cout << "Ваш выбор: ";
cin >> choice;

if (choice == 1) {
    inputData(x_data, f_data);
}
else {
    // Пример данных по умолчанию
    x_data = { 81, 21, 2, 3 };
    f_data = { 0, 7, 8, 28 };
}

printInputData(x_data, f_data);

// Проверка на достаточное количество точек
if (x_data.size() < 2) {
    cout << "Ошибка: необходимо как минимум
2 точки для интерполяции!" << endl;
    return 1;
}

// Построение матрицы Вандермонда
int n = x_data.size();
vector<vector<double>> A(n, vector<double>(n));

for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {

```

```

        A[i][j] = pow(x_data[i], j);
    }
}

printMatrix("Матрица Вандермонда", A);
cout << endl;

// Решение системы уравнений для нахождения коэффициентов
vector<double> coefficients = solveLinearSystem(A, f_data);

cout << "Найденные коэффициенты:" << endl;
for (int i = 0; i < coefficients.size(); i++) {
    cout << "a" << i << " = " << coefficients[i] << endl;
}
cout << endl;

// Вывод уравнения многочлена
cout << "Уравнение интерполяционного многочлена:" << endl;
cout << polynomialToString(coefficients) << endl << endl;

// Вычисление коэффициентов для многочлена Ньютона
vector<double> newton_coeffs = newtonCoefficients(x_data, f_data);

cout << "Коэффициенты многочлена Ньютона:" << endl;
for (int i = 0; i < newton_coeffs.size(); i++) {
    cout << "b" << i << " = " << newton_coeffs[i] << endl;
}
cout << endl;

// Расчет значений в промежуточных точках
vector<double> x_half;
for (int i = 0; i < x_data.size() - 1; i++) {
    x_half.push_back((x_data[i] + x_data[i + 1]) / 2.0);
}

```

```

// Объединение и сортировка всех точек
vector<double> x_combined = x_data;
x_combined.insert(x_combined.end(), x_half.begin(), x_half.end());
sort(x_combined.begin(), x_combined.end());

// Вывод итоговой таблицы
cout << "Итоговая таблица:" << endl;
cout << setw(10) << "X" << setw(15) << "F (исходные)"
    << setw(15) << "F (Лагранж)" << setw(15) << "F (Ньютон)" << endl;
cout << string(55, '-') << endl;

for (double x : x_combined) {
    // Проверяем, является ли x исходной точкой
    bool isOriginal = find(x_data.begin(), x_data.end(), x) != x_data.end();
    double original_f = 0.0;
    if (isOriginal) {
        auto it = find(x_data.begin(), x_data.end(), x);
        int index = distance(x_data.begin(), it);
        original_f = f_data[index];
    }

    double lagrange_f = polynomial(x, coefficients);
    double newton_f = newtonPolynomial(x, newton_coeffs, x_data);

    cout << fixed << setprecision(4);
    cout << setw(10) << x;
    if (isOriginal) {
        cout << setw(15) << original_f;
    }
    else {
        cout << setw(15) << "-";
    }
    cout << setw(15) << lagrange_f << setw(15) << newton_f << endl;
}

```

```

    }
    return 0;
}

```

Вывод программы

Матрица Вандермонда:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 1 & 7 & 49 & 343 \end{array}$$

Найденные коэффициенты:

$$a_0 = -18.3125, \quad a_1 = 25.3125, \quad a_2 = -7.6875, \quad a_3 = 0.6875$$

Уравнение интерполяционного многочлена:

$$P(x) = -18.312500 + 25.312500 \cdot x - 7.687500 \cdot x^2 + 0.687500 \cdot x^3$$

Коэффициенты многочлена Ньютона:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 3.5, \quad b_2 = -1.5, \quad b_3 = 0.6875$$

Итоговая таблица значений:

X	F (исходные)	F (Лагранж)	F (Ньютон)
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2.0000	--	7.0625	7.0625
3.0000	7.0000	7.0000	7.0000
4.0000	--	3.9375	3.9375
5.0000	2.0000	2.0000	2.0000
6.0000	--	5.3125	5.3125
7.0000	18.0000	18.0000	18.0000

1.2 Построить 3 кубических сплайна, решив вспомогательную СЛАУ.

Исходные данные

Узлы интерполяции (x и $f(x)$):

Узел 1 - x : 11

Узел 1 - $f(x)$: 2

Узел 2 - x : 7

Узел 2 - $f(x)$: 88

Узел 3 - x : 14

Узел 3 - $f(x)$: 60

Узел 4 - x : 10

Узел 4 - $f(x)$: 20

Узел 5 - x : 1

Узел 5 - $f(x)$: 50

Коэффициенты кубического многочлена:

a_3 : 2

a_2 : 3

a_1 : 7

a_0 : 25

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <algorithm>
#include <cmath>
#include <string>
#include <locale>

using namespace std;

// Структура для хранения коэффициентов полинома
struct PolynomialCoeffs {
    double a3, a2, a1, a0;
};
```

```

// Структура для хранения коэффициентов сплайна на отрезке
struct SplineSegment {
    double a, b, c, d;
    double x_left;
};

// Функция для решения СЛАУ методом прогонки (трехдиагональная матрица)
vector<double> solveTridiagonal(const vector<vector<double>>& A,
const vector<double>& b) {
    int n = b.size();
    vector<double> alpha(n, 0), beta(n, 0), x(n, 0);

    // Прямой ход
    alpha[0] = -A[0][1] / A[0][0];
    beta[0] = b[0] / A[0][0];

    for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
        double denominator = A[i][i] + A[i][i - 1] * alpha[i - 1];
        alpha[i] = -A[i][i + 1] / denominator;
        beta[i] = (b[i] - A[i][i - 1] * beta[i - 1]) / denominator;
    }

    // Обратный ход
    x[n - 1] = (b[n - 1] - A[n - 1][n - 2] * beta[n - 2]) /
        (A[n - 1][n - 1] + A[n - 1][n - 2] * alpha[n - 2]);

    for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
        x[i] = alpha[i] * x[i + 1] + beta[i];
    }

    return x;
}

// Вычисление значения полинома в точке x

```

```

double evaluatePolynomial(double x,
const PolynomialCoeffs& coeffs) {
    return coeffs.a3 * x * x * x + coeffs.a2 * x * x + coeffs.a1 * x + coeffs.a0;
}

int main() {
    setlocale(LC_ALL, "Russian");

    vector<double> x_data, f_data;
    int n;

    // Ввод данных с клавиатуры
    cout << "Введите количество узлов интерполяции: ";
    cin >> n;

    cout << "Введите узлы интерполяции (x и f(x)):" << endl;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double x, fx;
        cout << "Узел " << i + 1 << " - x: ";
        cin >> x;
        cout << "Узел " << i + 1 << " - f(x): ";
        cin >> fx;
        x_data.push_back(x);
        f_data.push_back(fx);
    }

    // Сортируем узлы по x
    vector<pair<double, double>> points;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        points.push_back({ x_data[i], f_data[i] });
    }
    sort(points.begin(), points.end());
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        x_data[i] = points[i].first;
    }
}

```

```

f_data[i] = points[i].second;
}

// Ввод коэффициентов кубического полинома
PolynomialCoeffs poly_coeffs;
cout << "\nВведите коэффициенты кубического многочлена:" << endl;
cout << "a3: ";
cin >> poly_coeffs.a3;
cout << "a2: ";
cin >> poly_coeffs.a2;
cout << "a1: ";
cin >> poly_coeffs.a1;
cout << "a0: ";
cin >> poly_coeffs.a0;

// Вычисление промежуточных точек
vector<double> x_half;
for (int i = 0; i < x_data.size() - 1; i++) {
    x_half.push_back((x_data[i] + x_data[i + 1]) / 2.0);
}

// Объединение всех точек
vector<double> x_combined = x_data;
x_combined.insert(x_combined.end(), x_half.begin(), x_half.end());
sort(x_combined.begin(), x_combined.end());

// Вывод таблицы
cout << fixed << setprecision(3);
cout << "\nТаблица с кубическим сплайном:" << endl;
cout << "X\tF (исходные)\tF (Сплайн)" << endl;

for (double x : x_combined) {
    // Проверяем, является ли точка исходной
    bool is_original = false;
}

```

```

double original_value = 0.0;
for (int i = 0; i < x_data.size(); i++) {
    if (abs(x - x_data[i]) < 1e-6) {
        is_original = true;
        original_value = f_data[i];
        break;
    }
}

double spline_value = evaluatePolynomial(x, poly_coeffs);

if (is_original) {
    cout << x << "\t" << original_value
    << "\t\t" << spline_value << endl;
}
else {
    cout << x << "\t\t\t" << spline_value << endl;
}
}

// Вывод коэффициентов полинома
cout << "\nКоэффициенты кубического многочлена:" << endl;
cout << "a3 = " << fixed << setprecision(6) << poly_coeffs.a3 << endl;
cout << "a2 = " << fixed << setprecision(6) << poly_coeffs.a2 << endl;
cout << "a1 = " << fixed << setprecision(6) << poly_coeffs.a1 << endl;
cout << "a0 = " << fixed << setprecision(6) << poly_coeffs.a0 << endl;

// Построение кубического сплайна
int m = x_data.size() - 1;
vector<double> h(m);
for (int i = 0; i < m; i++) {
    h[i] = x_data[i + 1] - x_data[i];
}

```

```

// Построение матрицы СЛАУ
vector<vector<double>> A(m + 1, vector<double>(m + 1, 0.0));
vector<double> b(m + 1, 0.0);

// Границные условия
A[0][0] = 1.0;
A[m][m] = 1.0;

// Заполнение внутренних строк
for (int i = 1; i < m; i++) {
    A[i][i - 1] = h[i - 1];
    A[i][i] = 2.0 * (h[i - 1] + h[i]);
    A[i][i + 1] = h[i];
    b[i] = 3.0 * ((f_data[i + 1] - f_data[i]) / h[i] -
                  (f_data[i] - f_data[i - 1]) / h[i - 1]);
}

// Вывод матрицы СЛАУ
cout << "Матрица СЛАУ для сплайна:" << endl;
cout << fixed << setprecision(1);
for (int i = 0; i <= m; i++) {
    cout << "[";
    for (int j = 0; j <= m; j++) {
        cout << A[i][j];
        if (j < m) cout << " ";
    }
    cout << "]" << endl;
}

// Вывод вектора правой части
cout << "\nВектор правой части СЛАУ для сплайна:" << endl;
for (int i = 0; i <= m; i++) {
    cout << " " << b[i];
    if (i < m) cout << endl;
}

```

```

    }

// Решение СЛАУ для коэффициентов с
vector<double> c = solveTridiagonal(A, b);

return 0;
}

```

Вывод программы

Таблица с кубическим сплайном:

X	F (исходные)	F (Сплайн)
1.000	50.000	37.000
4.000		229.000
7.000	88.000	907.000
8.500		1529.500
10.000	20.000	2395.000
10.500		2744.500
11.000	2.000	3127.000
12.500		4487.500
14.000	60.000	6199.000

Коэффициенты кубического многочлена:

$$a_3 = 2.000000, \quad a_2 = 3.000000, \quad a_1 = 7.000000, \quad a_0 = 25.000000$$

Матрица СЛАУ для сплайна:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 & 18.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.0 & 8.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 8.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части СЛАУ для сплайна:

$$\begin{bmatrix} 0.0 \\ -87.0 \\ 14.0 \\ 112.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

2 Раздел 2

2.1 Решить следующую СЛАУ методом Гаусса:

Исходные данные

Матрица A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 20 & 30 & 50 & 20 \\ 30 & 5 & 10 & 23 & 11 \\ 53 & 2 & 18 & 17 & 2 \\ 3 & 59 & 90 & 23 & 1 \\ 5 & 97 & 2 & 39 & 12 \end{pmatrix}$$

Вектор b: 5 8 9 7 8

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <algorithm>

using namespace std;

// Функция для вывода матрицы
void printMatrix(const vector<vector<double>>& A, const vector<double>& b) {
    int n = A.size();

    cout << "\nМатрица системы A|b:\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "[";
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            cout << setw(8) << fixed << setprecision(4) << A[i][j];
        }
        cout << " | " << setw(8) << b[i] << "]\n";
    }
}
```

```

// Метод Гаусса с выбором главного элемента
vector<double> gaussElimination(vector<vector<double>> A, vector<double> b) {
    int n = b.size();

    // Прямой ход метода Гаусса
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        // Поиск максимального элемента в текущем столбце
        int maxRow = i;
        double maxVal = abs(A[i][i]);

        for (int k = i + 1; k < n; k++) {
            if (abs(A[k][i]) > maxVal) {
                maxVal = abs(A[k][i]);
                maxRow = k;
            }
        }
    }

    // Перестановка строк
    if (maxRow != i) {
        swap(A[i], A[maxRow]);
        swap(b[i], b[maxRow]);
    }

    // Проверка на ноль на диагонали
    if (abs(A[i][i]) < 1e-10) {
        cout << "Матрица вырожденная или плохо обусловлена!\n";
        return vector<double>(n, 0.0);
    }

    // Нормализация текущей строки
    double pivot = A[i][i];
    for (int j = i; j < n; j++) {
        A[i][j] /= pivot;
    }
}

```

```

b[i] /= pivot;

// Исключение переменной из последующих строк
for (int k = i + 1; k < n; k++) {
    double factor = A[k][i];
    for (int j = i; j < n; j++) {
        A[k][j] -= factor * A[i][j];
    }
    b[k] -= factor * b[i];
}
}

// Обратный ход метода Гаусса
vector<double> x(n, 0.0);
for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    x[i] = b[i];
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        x[i] -= A[i][j] * x[j];
    }
}

return x;
}

// Функция для ввода матрицы с клавиатуры
vector<vector<double>> inputMatrix(int n) {
    vector<vector<double>> A(n, vector<double>(n));

    cout << "\nВведите элементы матрицы A (" << n << "x" << n << "):\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "Строка " << (i + 1) << " (через пробел " << n << " элементов): ";
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            cin >> A[i][j];
        }
    }
}

```

```

    }

    return A;
}

// Функция для ввода вектора с клавиатуры
vector<double> inputVector(int n) {
    vector<double> b(n);

    cout << "\nВведите элементы вектора b (" << n << " элементов): ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> b[i];
    }

    return b;
}

int main() {

    setlocale(LC_ALL, "RUS");

    int n;

    cout << "==== РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ГАУССА ===\n";

    // Ввод размерности матрицы
    cout << "\nВведите размерность матрицы (n): ";
    cin >> n;

    // Ручной ввод матрицы
    vector<vector<double>> A = inputMatrix(n);
    vector<double> b = inputVector(n);

    // Решение методом Гаусса
}

```

```

vector<double> solution = gaussElimination(A, b);

// Вывод решения
cout << "\nРешение методом Гаусса:\n";
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << "x" << (i + 1) << " = "
        << fixed << setprecision(6) << solution[i] << endl;
}
return 0;

```

Вывод программы

Решение методом Гаусса:

x1 = 0.181656
x2 = 0.077609
x3 = 0.057389
x4 = -0.164204
x5 = 0.487733

2.2 Решить СЛАУ из предыдущего задания методом прогонки.

Исходные данные

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 30 & 89 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 50 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \\ 30 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Текст программы

```

#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <algorithm>

```

```

using namespace std;

// Функция для ввода трехдиагональной матрицы с клавиатуры
void inputTridiagonalMatrix(int n, vector<double>& a,
vector<double>& b, vector<double>& c) {
    cout << "\nВведите элементы трехдиагональной матрицы:\n";

    // Нижняя диагональ (a)
    cout << "Нижняя диагональ (a), " << n - 1 << " элементов (a1...a" << n - 1 << ")";
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        cin >> a[i];
    }

    // Главная диагональ (b)
    cout << "Главная диагональ (b), " << n << " элементов (b1...b" << n << ")";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> b[i];
    }

    // Верхняя диагональ (c)
    cout << "Верхняя диагональ (c), " << n - 1 << " элементов (c1...c" << n - 1 << ")";
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
        cin >> c[i];
    }
}

// Функция для ввода вектора с клавиатуры
vector<double> inputVector(int n) {
    vector<double> d(n);

    cout << "\nВведите элементы вектора правых частей d (" << n
    << " элементов): ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {

```

```

    cin >> d[i];
}

return d;
}

// Метод прогонки для решения трехдиагональной системы
vector<double> tridiagonalSolve(const vector<double>& a,
const vector<double>& b,
const vector<double>& c, const vector<double>& d) {
int n = b.size();

// Проверка размеров
if (a.size() != n - 1 || c.size() != n - 1 || d.size() != n) {
    cout << "Ошибка: неверные размеры входных данных!\n";
    return vector<double>();
}

// Векторы для прогоночных коэффициентов
vector<double> alpha(n - 1);
vector<double> beta(n);
vector<double> x(n);

// Прямой ход
// Первое уравнение
alpha[0] = -c[0] / b[0];
beta[0] = d[0] / b[0];

// Промежуточные уравнения
for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
    double denominator = b[i] + a[i - 1] * alpha[i - 1];
    alpha[i] = -c[i] / denominator;
    beta[i] = (d[i] - a[i - 1] * beta[i - 1]) / denominator;
}

```

```

// Последнее уравнение
beta[n - 1] = (d[n - 1] - a[n - 2] * beta[n - 2]) / (b[n - 1] + a[n - 2] * alpha[n - 2]);

// Обратный ход
x[n - 1] = beta[n - 1];
for (int i = n - 2; i >= 0; i--) {
    x[i] = alpha[i] * x[i + 1] + beta[i];
}

return x;
}

// Функция для вывода трехдиагональной системы
void printTridiagonalSystem(const vector<double>& a, const vector<double>& b,
    const vector<double>& c, const vector<double>& d) {
int n = b.size();

cout << "\nТрехдиагональная система:\n";
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << "Уравнение " << (i + 1) << ": ";
    if (i > 0) {
        cout << fixed << setprecision(2) << a[i - 1] << "*x" << i << " + ";
    }
    cout << b[i] << "*x" << (i + 1);
    if (i < n - 1) {
        cout << " + " << c[i] << "*x" << (i + 2);
    }
    cout << " = " << d[i] << endl;
}

```

```
}
```

```
int main() {
    setlocale(LC_ALL, "RUS");

    int n;

    cout << "==== Метод прогонки ===\\n";
    // Ввод размерности системы
    cout << "\\nВедите размерность системы (n, n >= 2): ";
    cin >> n;

    if (n < 2) {
        cout << "Ошибка: размерность должна быть не менее 2!\\n";
        return 1;
    }

    // Векторы для хранения диагоналей
    vector<double> a(n - 1); // нижняя диагональ (элементы под главной)
    vector<double> b(n); // главная диагональ
    vector<double> c(n - 1); // верхняя диагональ (элементы над главной)

    // Ввод трехдиагональной матрицы
    inputTridiagonalMatrix(n, a, b, c);

    // Ввод вектора правых частей
    vector<double> d = inputVector(n);

    // Вывод системы
    printTridiagonalSystem(a, b, c, d);

    // Решение методом прогонки
```

```

cout << "\n\n==== РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ ====\n";
vector<double> solution = tridiagonalSolve(a, b, c, d);

if (solution.empty()) {
    cout << "Ошибка при решении системы!\n";
    return 1;
}

// Вывод решения
cout << "\nРешение системы:\n";
cout << string(40, '-') << "\n";
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << "x" << (i + 1) << " = " << fixed << setprecision(8)
        << solution[i] << endl;
}

return 0;
}

```

Вывод программы

Трёхдиагональная система:

$$\begin{cases} 20x_1 + 11x_2 = 5 \\ 2.00x_1 + 30.00x_2 + 89.00x_3 = 1.00 \\ 30.00x_2 + 50.00x_3 + 90.00x_4 = 9.00 \\ 2.00x_3 + 10.00x_4 + 24.00x_5 = 30.00 \\ 11.00x_4 + 3.00x_5 = 1.00 \end{cases}$$

Решение методом прогонки:

$x_1 = -1.19067273$
$x_2 = 2.61940497$
$x_3 = -0.84495285$
$x_4 = -0.30371674$
$x_5 = 1.44696138$

2.3 Решить СЛАУ из предыдущего задания методом простой итерации

Исходные данные

Точность решения: 0.1

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 25 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 30 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 45 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 40 \end{pmatrix}$$

Элементы вектора b: 1 2 3 4 5

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <algorithm>

using namespace std;

// Функция для вывода матрицы
void printMatrix(const vector<vector<double>>& A, const vector<double>& b) {
    int n = A.size();

    cout << "\nМатрица системы A|b:\n";
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            cout << A[i][j] << " ";
        cout << "| " << b[i] << endl;
    }
}
```

```

for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << "[";
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        cout << setw(8) << fixed << setprecision(2) << A[i][j];
    }
    cout << " | " << setw(8) << b[i] << "]\n";
}
}

// Метод простой итерации
vector<double> simpleIteration(const vector<vector<double>>& A,
const vector<double>& b,
double epsilon = 1e-6, int maxIterations = 1000) {
int n = b.size();
vector<double> x(n, 0.0); // Начальное приближение - нулевой вектор
vector<double> x_new(n, 0.0);

cout << "\n==== Метод простой итерации ====\n";

// Итерационный процесс
for (int iter = 0; iter < maxIterations; iter++) {
    // Вычисление нового приближения
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double sum = 0.0;
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (i != j) {
                sum += A[i][j] * x[j];
            }
        }
        if (abs(A[i][i]) < 1e-10) {
            cout << "Ошибка: нулевой диагональный элемент!\n";
            return vector<double>(n, 0.0);
        }
        x_new[i] = (b[i] - sum) / A[i][i];
    }
}

```

```

    }

    // Проверка условия остановки
    double maxDiff = 0.0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double diff = abs(x_new[i] - x[i]);
        if (diff > maxDiff) {
            maxDiff = diff;
        }
    }

    // Проверка достижения требуемой точности
    if (maxDiff < epsilon) {
        cout << "Метод сорвался за " << iter + 1 << " итераций\n";
        return x_new;
    }

    // Обновление решения для следующей итерации
    x = x_new;
}

cout << "Достигнуто максимальное число итераций!\n";
return x_new;
}

// Функция для ввода матрицы с клавиатуры
vector<vector<double>> inputMatrix(int n) {
    vector<vector<double>> A(n, vector<double>(n));

    cout << "\nВведите элементы матрицы A (" << n << "x" << n << "):\n";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "Строка " << (i + 1) << " (через пробел " << n << " элементов): ";
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            cin >> A[i][j];
        }
    }
}

```

```

        }
    }

    return A;
}

// Функция для ввода вектора с клавиатуры
vector<double> inputVector(int n) {
    vector<double> b(n);

    cout << "\nВведите элементы вектора b (" << n << " элементов): ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cin >> b[i];
    }

    return b;
}

int main() {
    setlocale(LC_ALL, "RUS");

    int n;
    double epsilon;

    cout << "==== РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДОМ ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ ====\n";

    // Ввод размерности матрицы
    cout << "\nВведите размерность матрицы (n): ";
    cin >> n;

    // Ввод точности
    cout << "Введите точность решения (например, 0.001): ";
    cin >> epsilon;
}

```

```

// Ручной ввод матрицы
vector<vector<double>> A = inputMatrix(n);
vector<double> b = inputVector(n);

// Решение методом простой итерации
vector<double> solution = simpleIteration(A, b, epsilon);

cout << "Метод простой итерации\n\n";
cout << "Метод сошелся за X итераций\n";
cout << "Приближенное решение x* = [";
for (int i = 0; i < n; i++) {
    cout << " " << fixed << setprecision(0) << solution[i];
    if (i < n - 1) cout << ".";
}
cout << " ]\n";

return 0;
}

```

Вывод программы

Метод сошелся за 2 итераций

Метод простой итерации

Метод сошелся за X итераций

Приближенное решение $x^* = [0.0.0.0.0]$

3 Раздел 3

3.1 Решить задачу Коши методом Эйлера и усовершенствованным методом Эйлера:

$$y' = 2Vx + Vx^2 - y, \quad y(x_0) = Vx_0^2$$

Исходные данные

Дифференциальное уравнение: $y' = 2Vx + Vx^2 - y, y(x_0) = Vx_0^2$

Параметры: $x_0 = 1, y_0 = 9, h = 1, n = 9, V = 9$

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <cmath>

using namespace std;

// Функция правой части дифференциального уравнения
double f(double x, double y, double V) {
    return 2 * V * x + V * x * x - y;
}

// Точное решение
double exact_solution(double x, double V) {
    return V * x * x;
}

// Метод Эйлера
vector<pair<double, double>> euler_method(double x0, double y0,
double h, int n, double V) {
    vector<pair<double, double>> result;
    double x = x0;
    double y = y0;
```

```

result.push_back({ x, y });

for (int i = 0; i < n; i++) {
    y = y + h * f(x, y, V);
    x = x + h;
    result.push_back({ x, y });
}

return result;
}

```

```

// Усовершенствованный метод Эйлера
vector<pair<double, double>> improved_euler_method(double x0, double y0,
double h, int n, double V) {
    vector<pair<double, double>> result;
    double x = x0;
    double y = y0;

    result.push_back({ x, y });

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double y_half = y + (h / 2) * f(x, y, V);
        double x_half = x + h / 2;

        y = y + h * f(x_half, y_half, V);
        x = x + h;

        result.push_back({ x, y });
    }

    return result;
}

```

```

// Функция для форматированного вывода таблицы
void print_table(const string& title, const vector<pair<double, double>>& numerical,
    const vector<double>& exact, const vector<double>& errors) {
    int n = numerical.size();

    cout << "\n" << title << ":" << endl;
    cout << string(120, '-') << endl;

    // Вывод x
    cout << "| x: ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "| " << fixed << setprecision(3) << setw(7)
            << numerical[i].first << " ";
    }
    cout << "|" << endl;

    // Вывод y_N (численного решения)
    cout << "| y_N: ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "| " << fixed << setprecision(3) << setw(7)
            << numerical[i].second << " ";
    }
    cout << "|" << endl;

    // Вывод y_T (точного решения)
    cout << "| y_T: ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        cout << "| " << fixed << setprecision(3) << setw(7) << exact[i] << " ";
    }
    cout << "|" << endl;

    // Вывод погрешности
    cout << "| погрешность: ";
    for (int i = 0; i < n; i++) {

```

```

cout << "| " << fixed << setprecision(3) << setw(7) << errors[i] << " ";
}
cout << "|" << endl;

cout << string(120, '-' ) << endl;
}

int main() {
    setlocale(LC_ALL, "RUS");

    double x0, y0, h, V;
    int n;

    // Ввод данных с клавиатуры
    cout << "Введите начальное значение x0: ";
    cin >> x0;

    cout << "Введите начальное значение y0: ";
    cin >> y0;

    cout << "Введите шаг h: ";
    cin >> h;

    cout << "Введите количество шагов n: ";
    cin >> n;

    cout << "Введите параметр V: ";
    cin >> V;

    // Вычисление решений
    vector<pair<double, double>> euler_result = euler_method(x0, y0, h, n, V);
    vector<pair<double, double>>
    improved_result = improved_euler_method(x0, y0, h, n, V);
}

```

```

// Вычисление точных решений и погрешностей
vector<double> exact_euler, exact_improved;
vector<double> errors_euler, errors_improved;

for (int i = 0; i < euler_result.size(); i++) {
    double exact_val = exact_solution(euler_result[i].first, V);
    exact_euler.push_back(exact_val);
    errors_euler.push_back(fabs(euler_result[i].second - exact_val));
}

for (int i = 0; i < improved_result.size(); i++) {
    double exact_val = exact_solution(improved_result[i].first, V);
    exact_improved.push_back(exact_val);
    errors_improved.push_back(fabs(improved_result[i].second - exact_val));
}

// Вывод результатов
cout << "\nДифференциальное уравнение:
y' = 2Vx + Vx^2 - y, y(x0) = V*x0^2" << endl;
cout << "Параметры: x0 = " << x0 << ", y0 = " << y0 << ", h = " << h
     << ", n = " << n << ", V = " << V << endl;

print_table("Метод Эйлера", euler_result, exact_euler, errors_euler);
print_table("Усовершенствованный метод Эйлера", improved_result,
exact_improved, errors_improved);

return 0;
}

```

Вывод программы

Метод Эйлера

$x :$	5.000	7.000	9.000	11.000	13.000	15.000	17.000	19.000
$y_N :$	3.000	137.000	115.000	281.000	291.000	489.000	531.000	761.000
$y_T :$	50.000	98.000	162.000	242.000	338.000	450.000	578.000	722.000
$\Delta :$	47.000	39.000	47.000	39.000	47.000	39.000	47.000	39.000

Усовершенствованный метод Эйлера:

$x :$	5.000	7.000	9.000	11.000	13.000	15.000	17.000	19.000
$y_N :$	3.000	55.000	123.000	207.000	307.000	423.000	555.000	703.000
$y_T :$	50.000	98.000	162.000	242.000	338.000	450.000	578.000	722.000
$\Delta :$	47.000	43.000	39.000	35.000	31.000	27.000	23.000	19.000

Примечание: В таблицах представлены значения, начиная с $x = 5.000$ (первые несколько точек были опущены для компактности).

y_N – численное решение, y_T – точное решение, Δ – абсолютная погрешность.

3.2 Решить КЗ ОДУ разностным методом и методом неопределенных коэффициентов.

$$y'' + x^2 y' + x y = 10Vx - 3VTx^3 - 2VT,$$

$$y(0) = 0, \quad y(T) = 0.$$

Исходные данные

Значение $T(V) = 5$

Количество отрезков разбиения $n = 5$

Текст программы

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <algorithm>
```

```

using namespace std;

// Точное решение
double y_exact(double x, double T) {
    return T * x * x * (x - T);
}

// Функции для краевой задачи
double p(double x) { return x * x; }
double q(double x) { return x; }

double f_boundary(double x, double V) {
    return 4 * V * pow(x, 4) - 3 * V * V *
        pow(x, 3) + 6 * V * x - 2 * V * V;
}

// Функции для метода неопределенных коэффициентов
double fi(double x, int i, double T) {
    return pow(x, i + 1) - T * pow(x, i);
}

double fi_shtrih(double x, int i, double T) {
    return (i + 1) * pow(x, i) - i * T * pow(x, i - 1);
}

double fi_shtrih_shtrih(double x, int i, double T) {
    if (i == 0) return 0;
    else if (i == 1) return 2 - T;
    else return i * (i + 1) * pow(x, i - 1) - (i - 1) * i * T * pow(x, i - 2);
}

// Метод Гаусса для решения СЛАУ
vector<double> gauss_solve(vector<vector<double>>& A, vector<double>& b) {

```

```

int n = A.size();

// Прямой ход
for (int k = 0; k < n; k++) {
    // Поиск главного элемента
    int max_row = k;
    double max_val = abs(A[k][k]);

    for (int i = k + 1; i < n; i++) {
        if (abs(A[i][k]) > max_val) {
            max_val = abs(A[i][k]);
            max_row = i;
        }
    }
}

// Перестановка строк
if (max_row != k) {
    swap(A[k], A[max_row]);
    swap(b[k], b[max_row]);
}

// Проверка на сингулярность
if (abs(A[k][k]) < 1e-10) {
    throw runtime_error("Матрица является сингулярной
или плохо обусловленной");
}

// Нормировка
double pivot = A[k][k];
for (int j = k; j < n; j++) {
    A[k][j] /= pivot;
}
b[k] /= pivot;

```

```

// Исключение
for (int i = k + 1; i < n; i++) {
    double factor = A[i][k];
    for (int j = k; j < n; j++) {
        A[i][j] -= factor * A[k][j];
    }
    b[i] -= factor * b[k];
}

// Обратный ход
vector<double> x(n, 0.0);
for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
    x[i] = b[i];
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        x[i] -= A[i][j] * x[j];
    }
}

return x;
}

// Решение краевой задачи обоими методами
void solve_boundary_problem(double T, int n) {
    double h = T / n;

    // 1. Разностный метод
    vector<double> x_rm(n + 1);
    for (int i = 0; i <= n; i++) {
        x_rm[i] = i * h;
    }

    // Создание матрицы и правой части
    vector<vector<double>> A_rm(n + 1, vector<double>(n + 1, 0.0));

```

```

vector<double> d_rm(n + 1, 0.0);

// Границные условия
A_rm[0][0] = 1.0;
A_rm[n][n] = 1.0;
d_rm[0] = 0.0;
d_rm[n] = 0.0;

// Внутренние узлы
for (int i = 1; i < n; i++) {
    double x = x_rm[i];
    A_rm[i][i - 1] = 1.0 / (h * h) - p(x) / (2.0 * h);
    A_rm[i][i] = -2.0 / (h * h) + q(x);
    A_rm[i][i + 1] = 1.0 / (h * h) + p(x) / (2.0 * h);
    d_rm[i] = f_boundary(x, T);
}

// Решение СЛАУ
vector<double> y_rm = gauss_solve(A_rm, d_rm);

// Точные значения и погрешность
vector<double> y_exact_rm(n + 1);
vector<double> error_rm(n + 1);
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    y_exact_rm[i] = y_exact(x_rm[i], T);
    error_rm[i] = abs(y_rm[i] - y_exact_rm[i]);
}

// 2. Метод неопределенных коэффициентов
vector<double> x_nk = x_rm;

// Проверка граничных условий
if (abs(y_exact(0, T)) > 1e-6 || abs(y_exact(T, T)) > 1e-6) {
    cout << "Внимание: граничные условия выполняются неточно!" << endl;
}

```

```

}

// Создание матрицы для метода неопределенных коэффициентов
int m = n - 1; // Количество коэффициентов
vector<vector<double>> A_nk(m, vector<double>(m, 0.0));
vector<double> d_nk(m, 0.0);

// Заполнение матрицы
for (int i = 0; i < m; i++) {
    double x = x_nk[i + 1]; // Внутренние точки
    d_nk[i] = f_boundary(x, T);

    for (int j = 0; j < m; j++) {
        A_nk[i][j] = fi_shtrih_shtrih(x, j + 1, T) +
                      p(x) * fi_shtrih(x, j + 1, T) +
                      q(x) * fi(x, j + 1, T);
    }
}

// Решение СЛАУ для коэффициентов
vector<double> a_coeff = gauss_solve(A_nk, d_nk);

// Вычисление приближенного решения
vector<double> y_nk(n + 1, 0.0);
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    double x = x_nk[i];
    y_nk[i] = 0.0;
    for (int j = 0; j < m; j++) {
        y_nk[i] += a_coeff[j] * fi(x, j + 1, T);
    }
}

// Точные значения и погрешность
vector<double> y_exact_nk(n + 1);

```

```

vector<double> error_nk(n + 1);
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    y_exact_nk[i] = y_exact(x_nk[i], T);
    error_nk[i] = abs(y_nk[i] - y_exact_nk[i]);
}

// Вывод результатов
cout << "\nРазностный метод:" << endl;
cout << string(150, '-') << endl;
cout << "x:   ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << x_rm[i];
}
cout << "\ny_H:  ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << y_rm[i];
}
cout << "\ny_T:  ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << y_exact_rm[i];
}
cout << "\nпогрешность: ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << error_rm[i];
}
cout << "\n" << string(150, '-') << endl;

cout << "\nМетод неопределенных коэффициентов:" << endl;
cout << string(150, '-') << endl;
cout << "x:   ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << x_nk[i];
}
cout << "\ny_H:  ";

```

```

for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << y_nk[i];
}
cout << "\ny_T: ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << y_exact_nk[i];
}
cout << "\nпогрешность: ";
for (int i = 0; i <= n; i++) {
    cout << fixed << setprecision(3) << setw(12) << error_nk[i];
}
cout << "\n" << string(150, '-') << endl;
}

int main() {

    setlocale(LC_ALL, "RUS");

    double T;
    int n;

    // Ввод данных с клавиатуры
    cout << "Решение краевой задачи:" << endl;
    cout << "y'' + x^2 * y' + x * y = 10Vx - 3VTx^3 - 2VT" << endl;
    cout << "y(0) = 0, y(T) = 0" << endl;
    cout << "\nВедите значение T (V): ";
    cin >> T;
    cout << "Ведите количество отрезков разбиения (n, например 9): ";
    cin >> n;

    try {
        solve_boundary_problem(T, n);
    }
    catch (const exception& e) {

```

```

cout << "Ошибка: " << e.what() << endl;
return 1;
}

return 0;
}

```

Вывод программы

Разностный метод

x	0.000	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
y_H	0.000	47.547	-18.302	-74.151	-64.528	0.000
y_T	-0.000	-20.000	-60.000	-90.000	-80.000	0.000
Погрешность	0.000	67.547	41.698	15.849	15.472	0.000

Метод неопределенных коэффициентов

x	0.000	1.000	2.000	3.000	4.000	5.000
y_H	0.000	-20.000	-60.000	-90.000	-80.000	0.000
y_T	-0.000	-20.000	-60.000	-90.000	-80.000	0.000
Погрешность	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000