Дефференцальные уравнения. Лекции

silvia.lesnaia

February 2025

14.02.25

1 Литература

1. В.В Степанов. Курс дифференциальных уравнений (вообще можно любые учебники использовать) 2. А.Ф Филипов Сборник задач дифференциальных уравнений

2 ВВЕДЕНИЕ

ОПР: Обыкновенные дифференциальные уравнения n-го порядка имеет вид F(x,y,y’,.. y$^{(}n$))=0 где x независимая переменная, y’=y’(x),... y$\hat{(}$n)=y^n(x),

$F = F(t_1, t_2, .., t_n)\varphi(x)()1F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^n(x) \equiv 0$

Законы природы написаны на языке дифференциальных уравнении - Ньютон

Примеры:

1. Уравнение радиоактивного распада

x - время, y(x) - количество рад. вещества в момент времени x

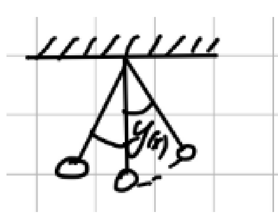
$y'(x)$ – скорость распада $y'(x) = -ky(x)$ $k>0$

$\boxed{y'(x) = -ky(x)}$ – диффер. ур-ние

2. Уравнение малых колебаний маятника

x - время y(x)- угол отклонения от положения равен 2??

y”+ $\frac{g}{l}$ *y(x)=0



3 Дифференциальные уравнения первого порядка

ОПР: Деф.урав.1го порядка это уравнения вида F(x,y,y') = 0 или y'=f(x,y) (нормальная форма)

ОПР: Деф.урав.1го порядка в симметричной форме имеет вид A(x,y), B(x,y) = 0, где A(x,y), B(x,y) - заданные функциями.

Если y=y(x), то(2) $\iff$ $\frac{dy}{dx} = +\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ (3)

Если x=x(y), то(2) $\iff$ $\frac{dy}{dx} =$ -$\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$(3)

Можно показать

3.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменным

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид:

y'=f(x,y) - общий вид

y'=x+y такое не распадется - частный случай

Алгоритм решения:

1. Переходим к дифференциалу

$\frac{dy}{dx} = f_1$(x) f_2(y) | *dx, $\frac{1}{f_2(y)}$

2. Делим переменные (Разделение переменных)

$\frac{dy}{dx} = f_1(x)dx| \int$

3. Вычисляем интеграл

$\int f_1(x)dx = F_1(x)$,

Получим (2)$F_2(y) = f_1(x) + c$ c - производная константа

4. Находим из (2)

$\varphi(x, c)$ - общ.реш(1)

Замечание

Называется общим интеграл уравнения (1)

Общее решение в неявном виде:

J $\frac{ay}{f_2(y)} = F_2(y)$

Обоснование алгоритма(доказательство):

3.2 Однородные дифференциальные уравнения

ОПР: Однородное деф.урав имеет вид

1) y'=f(x,y), где f обладает след свойств f($\Lambda x, \lambda y$)

Алгоритм решения:

1. Делаем замену функции

(2) y(x)= xu(x) $\implies$ $y'(x) = u(x) + xu'(x)$, где u(x) новая неявная функция

2. Подставляем эти в (1) u+xu'=f(x,xu);

xu'=f(x,xu)-u;

u'= $\frac{1}{x}\{f(x, xu) = u\}$

Примечание (все z заменить на u)

③ Реш. 2 как ур-ние с раздел. перемен.

④ Получ. $z(x)=\psi(x,C) \Leftrightarrow y = x\cdot\psi(x,c)$.

⑤ Ответ.

3.3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

ОПР: (1)

21.02.25

Теорема 1

4 Метод вариации производьной постоянной

$y' + p(x)y = y(x)$

Теорема Общее решение $y = e^{(}Sp(x)ex)$ $(Se^{(}Sp(x)cx) * q(xdx + c))$

Iэт. Решение соотв. однородное уравнение

$Y' + P(X)Y = 0$, с разд, перем

ПРИМЕЧАНИЕ!Уравниния решаются только методом варианции

4.1 Дефференцальные уравнения полных дефференцалах

Опр: Рассмотрим дифф.ур-ие $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - 1

Уравнение 1 назывется Уравнением в полных дифф-лах, если $\frac{\vartheta M(x,y)}{\vartheta y} \equiv \frac{\vartheta N(x,y)}{\vartheta x}$

Считаем что y=y(x), $N(x, y) \neq 0$ Тогда получаем по опр (1) эквив. уравнению (3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

Алгоритм решения

1 Пусть выполняется (2)

2 Найдем вспомогательную функцию $\Phi(x, y)$ как решение след. системы уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \end{cases} \quad (2)$$

3 Рассмотрим 1-е Уравнение в(*) решаем y. Тогда получем $\frac{d\Phi(x,y)}{dx} = M(x, y)$

$\Phi(x, y) = \int M(x, y)dx = \int_x 0x$ (винзу x0 и x сверху) тут надо дополнить

4 Подставялем эту

5 Решим уравнение (отн.y) (**)

6

Теорема 2

Обноснования алгоритма

.....
Рассмотрим уравнение в симметрической форме
Уравнением в дифференциалах называется уравнение
(1) A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0,
$\frac{\vartheta A}{\vartheta y} \neq \frac{\vartheta B}{\vartheta x}$
(1) Не явяелтся ур-ием полных дефференцалов
Теорема Сущ-ие ф-ия $\mu(x, y) \neq 0$,т, (2) $\mu(x, y)$
...
Опр: Функция $\mu(x, y)$ интегрируевым множитилем для ур(1)
Пример:
Основаная теорема и единсвтенности
28.02.25
Оснвовная теорема Коши Если f(x,y) $\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta y}$ - непр,
то задача Коши (1 -2) имеет единтсвенное решение
Док-во: I этап. Сведение 1 - 2 кинт уравнению
(3) y(x)$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$
Мы доказали, что
1 - 2 $\Leftrightarrow$ (3) (их решенеия совп)
II этап. Решение (3)
Строится последовательность функции
$\varphi_0(x) = y_0, \varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt$
$\varphi_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt$
(*) $\varphi_{n+1}(x) = y_o + \int_{x0}^{x} f(t, \varphi_n(t))dt$
Получем последовательность непрерывной функции
$\varphi_0(x), \varphi_1()x, \varphi_n(x)$

[redacted]

Для этого рассм. ряд: $\varphi_0(x) + (\varphi_1(x)-\varphi_0(x)) + (\varphi_2(x)-\varphi_1(x)) + \ldots +$
$+(\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)) + \ldots$ (4)

Частичные суммы этого ряда: $S_0(x)=\varphi_0(x)$, $S_1(x)=\varphi_1(x), \ldots,$
$S_n(x)=\varphi_n(x)\ldots$

Если докажем, что ряд (4) сходится, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, то докажем, что $\exists \lim_{n\to\infty}\varphi(n)$.

Можно показать, что $|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \le a_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.
(ряд мажор. с числ. рядом.) По признаку мажорации ряд (4) сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$

Тогда $\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_0^x f(t,\varphi(t))\,dt \Rightarrow$ по опред. решения интегр ур, это решение (3) $\Rightarrow$ решение задачи Коши.

III этап. Единсвтенность решения

Имеем $\varphi(x)$ реш (3) Пусть $\varphi_1(x)$ точка решения (3) т.е

$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)dt)$

$\varphi_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t)dt)$

(4) $\varphi(x) - \varphi_1(x) \equiv \int_{x_0}^{x} \left[f(t,\varphi(t)) - f(t,\varphi)\right] dt$

Теорема о среднем Если g(x) - диф. функ, то $g(x_1) - g(x) = g'(\varepsilon)(x_1 - x_1)$

ε каждая точка между Из (4)

...

... ...

5 2 Раздел. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Опр: Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ...a_n(x)y = f(x), a \le x \le b, y = y(x)-$ низв.

$a_0(x), a_1(x), ...a_n(x)$ заданные непр функции

Опр: Линейнре уравнение назывется однорондным, если $f(x) \equiv 0$,, Линейнре уравнение назывется неоднорондным, если $f(x) \neq 0$,

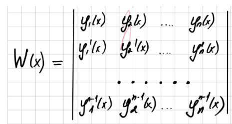
Опр: Функция $\varphi(x)$ нызвается решением (частный) уравнения (1), если $a_0(x)y^n(x) + ... + a_n(x)y(x) = f(x)$.

Решение:

Короче надо будет запонлнить пробелы тут

07.03.25

Опр: Линейно зависимые и линейно независимое функции $\varphi_1(x), ...\varphi_m(x)$ на $[a, b]$

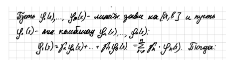


$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ & \dots & & \\ y_1^{n-1}(x) & y_2^{n-1}(x) & \dots & y_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 2 Если $\varphi_1(x), ...\varphi_m$ - линейно зависима на $[a, b]$, то W(x)=0

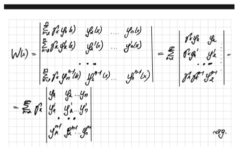
Доказательство: Пусть $\varphi_1(x), ...\varphi_m(x)$ линейно зависимана на $[a, b]$ $\exists \alpha_1, ..., \alpha_m$ не всеравно Об т.ч

$\alpha_1, \varphi_1(x)+, ..., \alpha_m, \varphi_m(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 i = \bar{1}, m$



Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ - линейн. завис на $[a, b]$ и пусть $\varphi_1(x)$ - лин. комбинац $\varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$:

$\varphi_1(x) = \beta_2\varphi_2(x) + \dots + \beta_n\varphi_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \beta_k \cdot \varphi_k(x)$. Тогда:



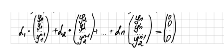
$$W(x) = \begin{vmatrix} \sum_{k=2}^{n} \beta_k \varphi_k(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \sum_{k=2}^{n} \beta_k \varphi_k'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ & \dots & & \\ \sum_{k=2}^{n} \beta_k \varphi_k^{n-1}(x) & \varphi_2^{n-1}(x) & \dots & \varphi_n^{n-1}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=2}^{n} \begin{vmatrix} \beta_k \varphi_k & \varphi_2 & \dots \\ \beta_k \varphi_k' & \varphi_2' & \dots \\ & \dots & \\ \beta_k \varphi_k^{n-1} & \varphi_2^{n-1} & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \beta_k \begin{vmatrix} \varphi_k & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_k' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ & \dots & & \\ \varphi_k^{n-1} & \varphi_2^{n-1} & \dots & \varphi_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

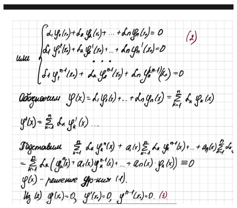
чтд.

Рассмотрим линейное однородное уравнение $(1) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} +, ..., a_n(x) y = 0$, или $l(y) = 0 a \leq x \leq b$

Доказательство: Предположим противное : $\exists x_0 \in [a, b] W(x_0) = 0$ По теории из алгберы столбцы определителя $W(x_0)$ линейно зависимы: $\exists \alpha_1, ..\alpha_n$ числа не все 0, такие что



$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \\ \dots \\ \varphi_1^{n-1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \\ \dots \\ \varphi_2^{n-1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \varphi_n' \\ \dots \\ \varphi_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$



или
$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0) + \alpha_2\varphi_2(x_0) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0) + \alpha_2\varphi_2'(x_0) + \dots + \alpha_n\varphi_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1\varphi_1^{n-1}(x_0) + \alpha_2\varphi_2^{n-1}(x_0) + \alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $\varphi(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$

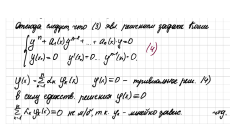
$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k'(x) \dots$

Подставим $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{n}(x) + a_1(x) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k^{n-1}(x) + \dots + a_n(x) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\varphi_k^{n}(x) + a_1(x)\varphi_k^{n-1}(x) + \dots + a_n(x) \cdot \varphi_k(x)\right) \equiv 0$

$\varphi(x)$ - решение ур-ния (1).

Из (2) $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi'(x_0) = 0$, $\varphi^{n-1}(x_0) = 0$. (3)



Отсюда следует, что (3) явл. решением задачи Коши

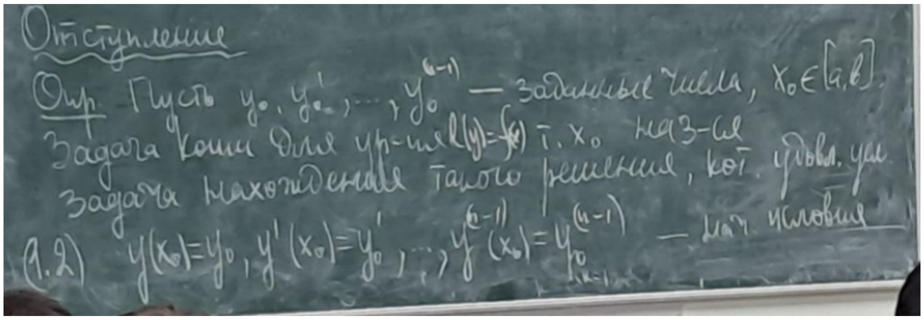
$$\begin{cases} y^{n} + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x) \cdot y = 0 \\ y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 0 \dots y^{n-1}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$ $\quad \varphi(x) \equiv 0$ - тривиальное реш. (4)

в силу единств. решения $\varphi(x) \equiv 0$

$\sum_{k=1}^{k} \alpha_k \varphi_k(x) \equiv 0$ не м/б, т.к. φ_k - линейно завис. чтд.

Отступление



Теорема о существовании решенеия задачи Коши для линейного уравнения

Имеет единтсвенное решения для линейного уравнения имеет единтсвенное решение $\forall x_0 \in [a,b], y_0, y_0', \dots$

Конец отступления

Тут нужно везде заполнить пробелы, в крайнем случае попросить людей которые лучше конспектировали лекцию

Теорема 4

14.03.25

Теорема 6

Обоснования метода варианции

21.03.25

6 Линейные уравненияс постоянными коэффицентами

$(1) a_0 y^{(n)'} + a_1 y^{(n-1)'} + \dots a_n y = 0$

Метод Эйлера

Ищем решение в (1) в виде y $= e^{\lambda x} \lambda -$ пока неизвестное число $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots y^n = \lambda^n e^{\lambda x}$

Подставим в (1)

28.03.25

7 Линейные уравнения второго порядка

$(1) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$