Ответы на матлог

Никитенко Яна

June 2024

1 Логические операции над высказываниями.

Высказывание - повествовательное предложение, о котором можно судить, истинное оно или ложное.

Отрицанием высказывания $\neg A$ называется высказывание (читается «не А которое истинно в том и только том случае, если высказывание ложно.

Конъюнкцией высказываний А$\wedge B$называется высказывание (читается « А и В которое истинно в том и только том случае, если оба высказывания истинны.

Дизъюнкцией высказываний А$\vee B$ называется высказывание (читается «А и В »), которое ложно в том и только том случае, если оба высказывания ложны.

Импликацией высказываний А$\Rightarrow$ В называется высказывание (читается «А влечет В »), которое ложно в том и только том случае, если высказывание А истинно, а высказывание В ложно.

Эквивалентностью высказываний А $\Leftrightarrow$ В высказывание (читается «А равнасильно В »), которое истинно в том и только том случае, если высказывания А и В имеют одинаковое истинностное значение.

2 Формулы и истинностные значения формул.

Таблица истинностных значений логических операций.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

3 Тавтологии. Методы доказательства тавтологий.

Тавтологией $\vdash$ или общезначимой называется тождественно истинная формула, то есть такая формула, которая принимает значение И при любых значениях ее компонент.

Наряду с тавтологиями первостепенную роль в логике высказываний играют тождественно ложные формулы (противоречия или невыполнимые формулы), которые на всех наборах компонент принимают значение Л.

Существуют различные способы доказательства тавтологий:

с помощью таблиц истинности; метод обратного рассуждения;

4 Логическая равносильность формул. Равносильные преобразования формул.

Формулы Φ, Ψ называются логически равносильными (или просто равносильными), если они принимают одинаковые логические значения при любых истинностных значениях их переменных.

Для обозначения логически эквивалентных формул используется символическая запись $\Phi = \Psi$. Такие выражения называются логическими равенствами или просто равенствами формул.

Лемма 1. Справедливы следующие равенства формул:

1) $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$, $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$ – свойства ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции;

2) $X \vee Y = Y \vee X$, $X \wedge Y = Y \wedge X$ – свойства коммутативности дизъюнкции и конъюнкции;

3) $X \vee X = X$, $X \wedge X = X$ – свойства идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции;

4) $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) = (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$ – законы дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $\neg(X \wedge Y) = \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) = \neg X \wedge \neg Y$ – законы де Моргана;
6) $(X \wedge Y) \vee X = X$, $(X \vee Y) \wedge X = X$ – законы поглощения;
7) $\neg\neg X = X$ – закон двойного отрицания;
8) $X \Rightarrow Y = \neg X \vee Y$, $X \Rightarrow Y = \neg(X \wedge \neg Y)$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией и конъюнкцией;
9) $X \Leftrightarrow Y = (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, $X \Leftrightarrow Y = (\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ – взаимосвязь эквивалентности с импликацией, дизъюнкцией и конъюнкцией.

Лемма (Правило замены). Если формулы Φ, Φ/ равносильны, то для любой формулы Ψ(X), содержащей переменную X, выполняется равенство: Ψ(X)=Ψ(Φ/). Это правило означает, что при замене в любой формуле $\Psi = \Psi(\Phi)$ некоторой ее подформулы Φ на равносильную ей формулу Φ/ получается формула $\Psi' = \Psi(\Phi/)$, равносильная исходной формуле Ψ. Такие переходы называются равносильными преобразованиями формул.

5 Нормальные формы для формул алгебры высказываний.

Определение. Конъюнктом (соответственно, дизъюнктом) называется конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер или одна литера.

Определение. Конъюнктивной нормальной формой (сокращенно КНФ) называется конъюнкция дизъюнктов или один дизъюнкт.

Дизъюнктивной нормальной формой (сокращенно ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктов или один конъюнкт.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется совершенной, если все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты). содержат все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Теорема 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

6 Логическое следование формул. Методы доказательства логического следования формул.

Определение. Формула Φ называется логическим следствием формул Φ,...,Φ_m , если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных X_1,...,

X_n конкретных высказываний A_1,..., A_n из истинности высказываний $\Phi_m(A_1,...,$ $A_n)$,...,m$(A_1,..., A_n)$ следует истинность высказывания $(A_1,..., A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1,...,\Phi_m \models \Phi$ - называется *логическим следованием*.

Формулы $\Phi_1,...,\Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1,...,\Phi_m \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус поненс* – от латинского modus ponens)
$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$
2) *правило контрапозиции*
$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi;$$
3) *правило цепного заключения*
$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3;$$
4) *правило перестановки посылок*
$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3).$$

Вывод: **Следующие задачи равносильны:**

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

7 Метод резолюций в логике высказываний.

Правило резолюций — это правило вывода, восходящее к методу доказательства теорем через поиск противоречий; используется в логике высказываний и логике первого порядка.

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;
б) проверка логического следования формул;
в) проверка тождественной ложности формул;
г) проверка противоречивости множества формул;
д) проверка противоречивости множества дизъюнктов.

8 Понятие предиката и его множества истинности. Перенесение на предикаты логических операций.

Выразительные средства алгебры высказываний недостаточны для описания утверждений со сложной логической структурой субъектно-предикатных рассуждений, в которых используются не только понятие субъекта (как объекта, о которых говорится в рассуждении), но и понятие предиката

Предикатом называется утверждение, содержащее переменные x1,..., xn, которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений. Обозначаются предикаты P,Q,...

Переменные x_1,..., x_n, называются предметными или индивидуальными переменными. Число предметных переменных в предикате называется его арностью или местностью.

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется n-арным или n-местным предикатом и обозначается P(x_1,..., x_n).

Предикат $P(x_1,...,x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1,...,x_n = a_n$ его n предметных переменных $x_1,...,x_n$ ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1,...,a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1,...,a_n))$.

Такое n-арное отношение обозначается символом P+ и называется множеством истинности предиката P+ на множестве M.

Примеры.

1. Пусть M – множество студентов вуза.

Предикаты:

$P(x)$ – « x есть студент 1-ой группы»,

$Q(x)$ – « студент x есть отличник».

Множеством истинности P^+ на множестве M является множество студентов 1-ой группы вуза и множеством истинности Q^+ на множестве M является множество всех отличников вуза.

2. Пусть M – множество вещественных чисел $\boldsymbol{R}$.

Предикаты:

$P(x)$ – утверждение «$x > 0$»,

$Q(x)$ – утверждение «$(x-1)\cdot(x^2-2)=0$».

Множеством истинности предиката P на множестве $M = \boldsymbol{R}$ является множество всех положительных вещественных чисел и множеством истинности предиката Q на множестве $M = \boldsymbol{R}$ является множество $Q^+ = \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

9 Кванторы общности и существования, их действие на предикат. Свободные и связанные переменные.

В математике слова “любые”, “некоторые” и их синонимы называются кванторами, которые соответственно называются квантор общности и квантор существования . Квантор общности заменяется в словесных формулировках словами: любой, все, каждый, всякий и т.д. Квантор существования в словесной формулировке заменяется словами: существует, хотя бы один, какой-нибудь найдётся и т.д.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1,...,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1,x_2,...,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,...,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,...,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при любых значениях $x_1=a_1 \in M$ высказывание $P(a_1,a_2,...,a_n)$ истинно.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на n-местный предикат $P(x_1,...,x_n)$ называется $(n-1)$-местный предикат $(\forall x_1)P(x_1,x_2,...,x_n)$, который зависит от переменных $x_2,...,x_n$ и который при значениях $x_2=a_2,...,x_n=a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1, если при любых значениях $x_1=a_1 \in M$ высказывание $P(a_1,a_2,...,a_n)$ истинно.

Вхождение предметной переменной x в формулу j называется связанным, если x входит в часть j вида ∃ xj или ∀ xj или стоит непосредственно после знака квантора. Несвязанные вхождения переменной в формулу называются свободными.

10 Формулы алгебры предикатов.

Формулы алгебры предикатов определяются по индукции следующим образом:

1) для любого n-местного предикатного символа P и любых n предметных переменных $x_1,...,x_n$ выражение $P(x_1,...,x_n)$ есть формула, которая называется *элементарной* (или *атомарной*) *формулой*;
2) если Φ,Ψ – формулы, то формулами являются также выражения
$$(\neg\Phi),\ (\Phi\wedge\Psi),\ (\Phi\vee\Psi),\ (\Phi\Rightarrow\Psi),\ (\Phi\Leftrightarrow\Psi);$$
3) если Φ – формула и x – предметная переменная, то формулами являются также выражения $(\forall x)\Phi$, $(\exists x)\Phi$; при этом переменная x и формула Φ называется *областью действия* соответствующего *квантора*.

11 Интерпретация формул алгебры предикатов.

Область интерпретации – непустое множество M, которое является областью возможных значений всех предметных переменных. n-местным предикатным символам P присваиваются конкретные значения P_M nместных предикатов на множестве M.

Соответствие b: P -> P_M называется интерпретацией предикатных символов.

Область интерпретации M вместе с интерпретацией предикатных символов b называется интерпретацией формул алгебры предикатов и обозначается (M,b) или просто M. При наличии интерпретации M конкретные значения предметным переменным формул алгебры предикатов присваиваются с помощью отображения α множества всех предметных переменных X в область интерпретации M. Такие отображения называются оценками предметных переменных.

12 Логическое равенство формул алгебры предикатов. Свойства логических операций над предикатами.

Определение. Формулы алгебры предикатов Φ, Ψ называется *логически равносильными,* если результат применения к ним логической операции эквивалентность $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ является тавтологией.

В этом случае записывают $\Phi \equiv \Psi$, или просто $\Phi = \Psi$.

Таким образом, $\Phi = \Psi$ означает, что $\models \Phi \Leftrightarrow \Psi$.

Логические операции над предикатами (утверждениями, которые могут быть истинными или ложными) включают в себя следующие свойства:

1. Конъюнкция (И):

- Коммутативность: p q = q p
- Ассоциативность: p (q r) = (p q) r
- Идемпотентность: p p = p

2. Дизъюнкция (ИЛИ):

- Коммутативность: p q = q p
- Ассоциативность: p (q r) = (p q) r

3. Отрицание (НЕ):

- Двойное отрицание: $\neg(\neg\, p) = p$

4. Импликация (если-то):

- $p \to q$ эквивалентно $\neg$ p q

5. Эквиваленция (тогда и только тогда):

- p <-> q эквивалентно (p -> q) (q -> p)

Эти свойства являются основой для формального рассмотрения логики и предикатов.

13 Логическое следование формул алгебры предикатов.

С помощью логического следования формул определяются общие способы доказательства взаимосвязи между истинностными значениями утверждений посредством исследования формальной структуры этих утверждений.

Определение. Формула Φ алгебры предикатов называется ***логическим следствием*** формулы Ψ, если $\models \Psi \to \Phi$, т.е. в любой интерпретации M формула Φ истинна при любой оценке предметных переменных α, при которой истинна формула Ψ.

Определение. Формула Φ называется ***логическим следствием множества формул*** Γ, если в любой интерпретации M формула Φ истинна при любой оценке предметных переменных α, при которой истинны все формулы из Γ.

Такое логическое следствие обозначается $\Gamma \models \Phi$ и называется ***логическим следованием***. При этом формулы из Γ называются ***посылками*** и формула Φ – ***следствием*** логического следования $\Gamma \models \Phi$.

В случае, когда $\Gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\}$ записывают $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$.

14 Предваренная нормальная форма (ПНФ) формул алгебры предикатов.

Формула исчисления предикатов Φ находится в *предваренной или пренексной нормальной форме* (сокращенно ПНФ), если она имеет вид

$$(K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)\Psi,$$

где $K_1,\ldots,K_n$ – некоторые кванторы и Ψ – бескванторная формула, находящаяся в КНФ. При этом последовательность кванторов $(K_1 x_1)\ldots(K_n x_n)$ называется *кванторной приставкой* и формула Ψ называется *конъюнктивным ядром* формулы Φ.

Теорема 1. Любая формула исчисления предикатов Φ логически равносильна формуле Φ', находящейся в ПНФ.

Такая формула Φ' называется *пренексной нормальной формой* (сокращенно ПНФ) *формулы* Φ.

15 Скулемовская стандартная форма (ССФ) формул алгебры предикатов.

Рассмотренный прием удаления квантора существования был введен Скулемом и называется *скулемизацией формул*. Вводимые в процессе скулемизации новые функциональные и предметные символы называются *функторами Скулема* или *скулемовскими функциями*.

Полученную в результате скулемизации замкнутую ПНФ Φ' называют *скулемовской стандартной формой* (сокращенно ССФ).

Теорема 2. Любая замкнутая формула исчисления предикатов Φ эффективно преобразуется (с помощью определенного алгоритма) в логически эквивалентную ей скулемовскую стандартную форму Φ', которая называется *скулемовской стандартной формой* (сокращенно, ССФ) формулы Φ.

При этом формула Φ выполнима или противоречива одновременно с ее ССФ.

Пример. Результатом скулемизации формулы

$$(\forall x)(\exists z)(\forall y)(\exists w)\big((\neg P(x) \lor R(y)) \land P(z) \land \neg R(w)\big)$$

является следующая ССФ

$$(\forall x)(\forall y)\big((\neg P(x) \lor R(y)) \land P(f(x)) \land \neg R(g(x,y))\big).$$

16 Сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов.

Сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов основано на использовании метода резолюций. Этот метод позволяет свести вопрос о том, является ли формула общезначимой, к вопросу о том, существует ли противоречие в системе дизъюнктов, полученной из отрицания этой формулы.

Для этого предположим, что у нас есть формула F, и мы хотим проверить, является ли она общезначимой. Мы можем взять отрицание этой формулы (¬ F) и привести её к конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Затем мы можем применить метод резолюций к полученной системе дизъюнктов.

Если при этом мы обнаружим, что система дизъюнктов становится противоречивой (т.е. мы можем вывести из неё пустой дизъюнкт), то это означает, что исходная формула F является общезначимой. В противном случае, если мы не можем получить пустой дизъюнкт, то формула F не является общезначимой.

Таким образом, сведение проблемы общезначимости формул к проблеме противоречивости систем дизъюнктов позволяет использовать метод резолюций для эффективной проверки общезначимости логических формул.

17 Унификация формул.

Элементы области интерпретации могут описываться не только с помощью предметных переменных, но и с помощью так называемых *термов* – специальных выражений языка, которые индуктивно определяются следующим образом:

а) все предметные переменные и предметные символы формулы являются термами,

б) если f – n-арный функциональный символ формулы и $t_1,...,t_n$ – термы, то выражение $f(t_1,...,t_n)$ является термом.

Отображения θ множества переменных X_s в множество термов T_s называются ***подстановками*** (или ***заменами переменных***) и обозначаются

$$\theta = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{bmatrix},$$

где $t_i = \theta(x_i)$ для всех $\boxed{x_i \in \operatorname{dom}\theta}$, удовлетворяющих условию $\boxed{\theta(x_i) \neq x_i \; (i = \overline{1,n}}$).

18 Метод резолюций в логике предикатов.

Метод резолюций в логике предикатов — это метод, используемый для вывода новых предложений из имеющихся логических формул. Он является основным методом автоматического доказательства теорем в логике предикатов.

Процесс резолюций в логике предикатов основан на применении правила резолюции к кванторной форме предложений. Правило резолюции для предикатов формулируется следующим образом:

Если у нас есть два предложения A и B, такие что существует такой унификатор θ, что A θ = P и B θ = ¬ P, где P — некоторый предикат, то мы можем получить новое предложение, называемое резольвентой, путем объединения A и B и последующей подстановки унификатора θ.

Применение этого правила к множеству логических формул позволяет построить цепочку резолюций, которая либо приведет к выводу пустого дизъюнкта (что означает противоречие), либо покажет, что невозможно вывести противоречие из имеющихся формул.

Метод резолюций в логике предикатов является основой для многих современных систем автоматического доказательства теорем и играет важную роль в области искусственного интеллекта и формальной верификации программ.

19 Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Доказуемость формул.

Построение математических теорий в виде аксиоматических теорий соответствующих формальных исчислений составляет суть *аксиоматического метод*а в математике.

Простейшей аксиоматической теорией является *аксиоматическая логика высказываний*, которая строится на основе соответствующего формального исчисления, называемого *исчислением высказываний* (сокращенно, ИВ).

Множество аксиом $Ax(\text{ИВ})$ исчисления высказываний описывается следующими тремя *схемами аксиом*:

(A_1) $(\Phi \Rightarrow (\Psi \Rightarrow \Phi))$,

(A_2) $((\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3)) \Rightarrow ((\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2) \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3)))$,

(A_3) $((\neg\Phi \Rightarrow \neg\Psi) \Rightarrow ((\neg\Phi \Rightarrow \Psi) \Rightarrow \Phi))$,

где Φ, Ψ, Φ_i $(i = 1,2,3)$ – произвольные формулы исчисления высказываний.

Исчисление высказываний имеет единственное *правило вывода,* которое называется *правилом заключения* или правилом *modus ponens* (сокращенно *MP*) и которое для произвольных формул исчисления высказываний Φ, Ψ определяется по формуле $MP(\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi) = \Psi$.

Символически это правило вывода записывается следующей схемой:

$$MP: \ \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi}.$$

20 Теорема Геделя о полноте исчисления высказываний.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов является одной из фундаментальных теорем математической логики: она устанавливает однозначную связь между логической истинностью высказывания и его выводимостью в логике первого порядка.

Теорема полноты ИВ.

Всякая тавтология является теоремой ИВ, т.е. выполняется $\mathscr{T}_{\text{АВ}} \subset Th(\text{ИВ})$ и, следовательно, $\mathscr{T}_{\text{АВ}} = Th(\text{ИВ})$.

Следствия теоремы полноты ИВ.

Теорема о непротиворечивости ИВ.

В исчислении высказываний невозможно доказать никакую формулу Ф вместе с ее отрицанием $\neg$Ф.

Теорема о разрешимости ИВ.

Существует универсальная эффективная процедура (алгоритм), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИВ.

21 Непротиворечивость и разрешимость исчисления высказываний.

Исчисление высказываний (или исчисление предикатов первого порядка) может быть как противоречивым, так и разрешимым в зависимости от его структуры и аксиоматики.

1. Непротиворечивость: Исчисление высказываний считается непротиворечивым, если в нем невозможно вывести одновременно утверждения и их противоположности. Если в системе есть возможность вывести как утверждение P, так и его отрицание P, то система считается противоречивой.

2. Разрешимость: Разрешимость исчисления высказываний означает возможность алгоритмически определить, истинно или ложно данное высказы-

вание в рамках данной системы. Например, для исчисления высказываний с конечным числом переменных и формул разрешимость обеспечивается алгоритмами решения, такими как алгоритм дедукции или метод таблиц истинности.

Изучение непротиворечивости и разрешимости исчисления высказываний является важным в математике и логике, поскольку это позволяет удостовериться в правильности выводов и обеспечить корректность рассуждений в рамках формальной логики.

22 Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Тождественная истинность выводимых формул.

Исчисление предикатов (или исчисление предикатов первого порядка) имеет свои аксиомы и правила вывода, которые определяют, как строить выводы в рамках этой логики. Вот несколько основных элементов исчисления предикатов:

1. Аксиомы: - Аксиомы исчисления предикатов включают аксиомы равенства, кванторов и логических связок. - Например, аксиомы равенства могут включать x = x (рефлексивность), x = y -> y = x (симметричность) и т.д. - Аксиомы кванторов включают правила для кванторов существования и всеобщности.

2. Правила вывода: - Основные правила вывода включают модус поненс (MP) и обобщение (Generalization). - Модус поненс позволяет выводить из премиссы P и импликации P -> Q следствие Q. - Обобщение позволяет переходить от утверждения A к утверждению ∀ x A, где x — переменная.

3. Тождественная истинность выводимых формул: - В исчислении предикатов формулы называются тождественно истинными, если они истинны при любых значениях переменных. - Тождественная истинность выводимых формул зависит от корректности применения аксиом и правил вывода. - Если формула выводима в рамках системы аксиом и правил вывода, то она будет тождественно истинной в данной системе.

Изучение аксиом и правил вывода в исчислении предикатов позволяет строить корректные математические рассуждения и выводы, а тождественная истинность выводимых формул является ключевым понятием для проверки корректности логических выкладок в рамках данной логической системы.

23 Полнота, непротиворечивость и неразрешимость исчисления предикатов.

Исчисление предикатов может быть полным, непротиворечивым или неразрешимым в зависимости от своих свойств и возможностей.

1. Полнота: - Исчисление предикатов называется полным, если для любой тождественно истинной формулы в этой системе можно построить вывод этой формулы. - Это означает, что система доказательств способна вывести любую истинную утверждение, если оно действительно является истинным в данной логической системе.

2. Непротиворечивость: - Исчисление предикатов называется непротиворечивым, если в этой системе невозможно одновременно вывести и утверждение P и его отрицание P. - Непротиворечивость означает отсутствие возможности вывода противоречивых утверждений в рамках данной логической системы.

3. Неразрешимость: - Исчисление предикатов называется неразрешимым, если не существует алгоритма, который бы мог решать любую формулу в этой системе, т.е. определять её истинность или ложность. - Это означает, что для некоторых формул в данной системе невозможно однозначно определить их истинность или ложность.

Исследование этих свойств помогает понять возможности и ограничения конкретной логической системы и её способность обрабатывать информацию и строить математические выводы.

24 Понятие алгоритма и основные математические модели алгоритма.

Важные математические проблемы имеют вид:

для некоторого данного множества X найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой можно для каждого элемента x этого множества X определить за конечное число шагов, будет этот элемент обладать некоторым данным свойством P или нет (т.е. $x \in P^+$ или $x \notin P^+$).

Решением такой проблемы является построение и обоснование искомого алгоритма.

Массовые задачи – задачи распознавания и оптимизации.

Примеры массовых задач:

- ВЫП (SAT) – задача выполнимости формулы логики высказываний.
- ТЕОРЕМА (THM) – задача доказуемости формулы логики предикатов.

1. Модель RAM (Random Access Machine): - Это абстрактная модель, используемая для описания работы алгоритмов. Она предполагает, что у алгоритма есть доступ к памяти, которая может быть произвольно доступной (то есть RAM может читать или записывать в любую ячейку памяти за постоянное время). - В этой модели алгоритмы оцениваются по количеству базовых операций, таких как присваивание, сравнение и т.д.

2. Модель вычислительной сложности: - Эта модель используется для оценки ресурсов, необходимых для выполнения алгоритма. Она включает в себя временную сложность (количество шагов или времени, необходимого для выполнения алгоритма) и пространственную сложность (количество памяти, необходимой для выполнения алгоритма).

3. Модель конечного автомата: - Эта модель используется для описания поведения автоматизированных систем. Она состоит из набора состояний, переходов между этими состояниями и действий, выполняемых при переходах.

4. Модель языка программирования: - Алгоритмы могут быть реализованы на различных языках программирования, каждый из которых предоставляет свои собственные способы описания и выполнения алгоритмов.

Эти модели помогают математически описать и анализировать работу алгоритмов, позволяя оценить их производительность и эффективность.

25 Разрешимые и полуразрешимые языки. Теорема Поста.

Теорема Поста. Система булевых функций в том и только том случае является полной, если она не содержится ни в одном из классов Поста

1. Разрешимый язык: - Язык называется разрешимым, если существует алгоритм, который может корректно ответить "да"или "нет"на любой вопрос о принадлежности строки к этому языку. Другими словами, для любой строки можно определить, принадлежит ли она языку или нет.

2. Полуразрешимый язык: - Язык называется полуразрешимым, если существует алгоритм, который остановится и ответит "да"только для строк,

принадлежащих языку, но может зациклиться (не дать ответа) для строк, не принадлежащих языку.

Теорема Поста утверждает, что не существует общего алгоритма, который мог бы решить любую возможную задачу в области математики. То есть, не существует универсального алгоритма, способного определить принадлежность любой строки к произвольному языку.

Конкретно, теорема Поста гласит, что для любого формального языка (набора строк) либо сам язык разрешим (есть алгоритм, который точно определяет принадлежность строки к языку), либо его дополнение (дополнительный язык, состоящий из строк не принадлежащих первому) полуразрешимо (существует алгоритм, который остановится только для строк из языка).

Теорема Поста имеет фундаментальное значение в теории алгоритмов и формальных языков, подчеркивая ограничения общности алгоритмов и вычислимости.

26 Машины Тьюринга и вычисляемые ими функции.

Машина Тьюринга — это математическая модель вычислений, предложенная Аланом Тьюрингом в 1936 году. Она состоит из бесконечной ленты, разделенной на ячейки, и управляющего устройства (головки), способного читать и записывать символы на ленте. Машина Тьюринга может находиться в определенном состоянии и в зависимости от символа на текущей ячейке и своего текущего состояния выполнять определенные действия (переходы в другие состояния, запись символов на ленту и т. д.).

Вычислимая функция (или алгоритмически вычислимая функция) — это функция, для которой существует алгоритм, который может её вычислить. Машина Тьюринга используется для формализации понятия алгоритма, и любая вычислимая функция может быть вычислена с помощью машины Тьюринга.

Основная идея заключается в том, что любой алгоритмически вычислимый процесс может быть представлен в виде последовательности шагов, которые могут быть выполнены машиной Тьюринга. Это связано с концепцией вычислимости и теорией алгоритмов.

Машины Тьюринга играют ключевую роль в теории вычислимости, так как они помогают формализовать понятие алгоритма и показывают, что некоторые задачи могут быть вычислены с помощью алгоритма, в то время как другие могут быть неразрешимыми или невычислимыми.

Помимо детерминированной машины Тьюринга $T=(\Sigma, Q, \delta, q_S, q_F)$ с одной программой δ в теории алгоритмов рассматриваются *недетерминированные машины Тьюринга* $T=(\Sigma, Q, \delta_1, \delta_2, q_S, q_F)$ с двумя программами δ_1, δ_2, которая на каждом шаге вычислений случайным образом выбирает одну из этих двух программ и по ней выполняет изменение своей конфигурации.

27 Распознаваемость языков машинами Тьюринга.

Множество всех разрешимых языков будем обозначать R (от Recursive)

Свойства: дополнения, конечные пересечения и конечные объединения разрешимых языков являются разрешимыми языками.

Определение 2. Язык L называется ***полуразрешимым*** или ***перечислимым***, если существует такая машина Тьюринга T, что

1) при входе $w \in L$ машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w)=1$,
2) при входе $w \notin L$ машина Тьюринга T не дает никакого результата.

Множество всех полуразрешимых языков будем обозначать RE (от Recursive Enumerable).

Лемма. Существуют языки, не являющиеся полуразрешимыми.

Основная теорема. Существуют полуразрешимые неразрешимые языки, т.е. полуразрешимые языки, которые не могут быть разрешимы никаким алгоритмом, т.е. выполняется свойство $R \not\subset RE$.

28 Разрешимые, неразрешимые и распознавательные проблемы.

Определение 1. Язык L называется *разрешимым* (или *рекурсивным*), если существует такая машина Тьюринга T, что для любого слова $w \in W$ выполняются условия:

1) если $w \in L$, то при входе w машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w) = 1$;
2) если $w \notin L$, то при входе w машина T попадает в заключительное состояние, останавливается и выдает значение $T(w) = 0$.

Такие машины соответствуют понятию «алгоритма» и применяются при решении *распознавательных задач* типа «да/нет».

29 Временная и ленточная сложность машины Тьюринга.

В качестве модели алгоритма рассматривается машина Тьюринга T, вычисляющая словарную функцию $f(x)$.

Временной сложностью машины T называется функция $t_T(x)$, значение которой равно числу шагов работы машины T, сделанных при вычислении значения $f(x)$, если $f(x)$ определено, и $t_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

Ленточной сложностью машины T называется функция $s_T(x)$, значение которой равно числу ячеек машины T, используемых при вычислении значения $f(x)$, и $s_T(x)$ не определено, если $f(x)$ не определено.

30 Классы языков P и NP.

Определение. Говорят, что язык L принадлежит *классу* $\mathscr{P}$, если он разрешим некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Определение. Распознавательная задача принадлежит классу $\mathscr{P}$, если ее язык принадлежит классу $\mathscr{P}$, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального алгоритма - некоторой детерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Пример. Задача вычисления НОД целых чисел принадлежит классу $\mathscr{P}$.

Определение. Язык L принадлежит классу $\mathscr{NP}$, если он разрешим некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

Определение. Распознавательная задача принадлежит классу $\mathscr{NP}$, если ее язык принадлежит классу $\mathscr{NP}$, т.е. эта задача решается с помощью полиномиального недетерминированного алгоритма - некоторой недетерминированной машины Тьюринга T с полиномиальной временной сложностью.

31 Полиномиальные сведения проблем.

Основной метод доказательства того, что проблему P_2 нельзя решить за полиномиальное время (т.е. $P_2 \notin \mathscr{P}$) состоит в сведении к ней за полиномиальное время такой проблемы P_1, что $P_1 \notin \mathscr{P}$. Такое преобразование языков называется *полиномиальным сведением*.

32 NP-трудные и NP-полные языки.

Определение. Говорят, что язык L является $\mathscr{NP}$-*трудным,* если для любого языка L' из класса $\mathscr{NP}$ существует полиномиальное сведение языка L' к языку L.

Определение. Говорят, что язык L является $\mathscr{NP}$-*полным,* если он принадлежит классу $\mathscr{NP}$ и является $\mathscr{NP}$-трудным.

Теорема 1. Если проблема P_1 является $\mathscr{NP}$-трудной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме P_2, то проблема P_2 также $\mathscr{NP}$-трудна.

Следствие. Если проблема P_1 является $\mathscr{NP}$-полной и существует полиномиальное сведение проблемы P_1 к проблеме $P_2 \in \mathscr{NP}$, то проблема P_2 также $\mathscr{NP}$-полна.

33 Основные NP-полные проблемы.

Форма описания $\mathscr{NP}$-полной проблемы:

1. *Название* проблемы и ее аббревиатура.
2. *Вход* проблемы: что и каким образом представляют данные.
3. Искомый *выход:* при каких условиях выходом будет «да».
4. Известная проблема, сведение которой к данной проблеме доказывает $\mathscr{NP}$-полноту последней.

<u>Проблема выполнимости</u> (ВЫП)

Формулы алгебры высказываний строятся из следующих элементов.

1. Пропозициональные переменные, принимающие значения 1 (истина) или 0 (ложь).
2. Бинарные операторы $\wedge, \vee$, обозначающие логические связки И, ИЛИ двух формул.
3. Унарный оператор $\neg$, который обозначает логическое отрицание.
4. Скобки для группирования операторов и операндов, если необходимо изменить порядок старшинства (приоритетов) операторов, принятый по умолчанию (вначале применяется - $\neg$, затем $\wedge$ и, наконец, $\vee$).

<u>Проблема выполнимости</u> (ВКНФ)

Проблема выполнимости ВКНФ формул алгебры высказываний состоит в следующем

- выяснить, выполнима ли данная формула алгебры высказываний Ф в форме КНФ?

Ограниченная проблема выполнимости (3-ВЫП)

Ограниченная проблема выполнимости 3-ВЫП формул алгебры высказываний состоит в следующем

- выяснить, выполнима ли данная формула алгебры высказываний Ф в форме КНФ с дизъюнктами из 3 литер?

Проблема независимого множества (НМ):

Вход: граф $G = (V, E)$ и нижняя граница k, удовлетворяющая условию $1 \le k \le |V|$.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда G имеет независимое множество из k вершин.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема 3-ВЫП.

Следствие. Проблема НМ $\mathcal{NP}$-полна.

Проблема вершинного покрытия (ВП):

Вход: граф $G = (V, E)$ и нижняя граница k, удовлетворяющая условию $0 \le k \le |V| - 1$.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда G имеет вершинное покрытие из k или менее числа вершин.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема НМ.

Следствие. Проблема ВП $\mathcal{NP}$-полна.

Проблема ориентированного гамильтонова цикла (ОГЦ):

Вход: ориентированный граф G.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда G имеет ориентированный гамильтонов цикл.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема 3-ВЫП.

Следствие. Проблема ОГЦ $\mathcal{NP}$-полна.

Проблема гамильтонова цикла (ГЦ):

Вход: неориентированный граф G.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда G имеет гамильтонов цикл.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема ОГЦ.

Следствие. Проблема ГЦ $\mathcal{NP}$-полна.

Проблема коммивояжера (ПКОМ):

Вход: взвешенный граф G и предельное значение k.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда G имеет гамильтонов цикл веса не превышающего k.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема ГЦ.

Следствие. Проблема ПКОМ $\mathcal{NP}$-полна.

Задача целочисленного программирования (ЗЦП):

Вход: система линейных ограничений, целевая функция и предельное значение k.

Выход: ответ «да» тогда и только тогда, когда функция имеет превышающее k значение для допустимых переменных.

Проблема, сводящаяся к данной: Проблема 3-ВЫП.

Следствие. Проблема ЗЦП $\mathcal{NP}$-полна.