1)Ограниченные множества. Верхняя и нижняя грани числовых множеств. Свойства граней.

Ограниченные множества. Верх. и нижн. грани мн-тв. св-ва граней

$X\uparrow$ - огр. св. если $\exists M$: $\forall x \in X$: $x <= M$; M - мажоранта

$X\downarrow$ если $\exists m$ $\forall x \in X$: $x >= m$; m - миноранта

X - огр., если оно $X\uparrow$ и $X\downarrow$

наименьшая M (мажоранта) - называется $\sup X$ (верх. грань)

наибольшая m (миноранта) - $\inf X$ (нижняя грань)

св-ва:

1) $\forall x \in X$ $x \leq a$ $(x \geq a) \Rightarrow \sup X \leq a$ $(\inf X \geq a)$

2) $X \subset Y$, Y - огр. сверху $\Rightarrow \sup X \leq \sup Y$; снизу $\inf X \geq \inf Y$

3) Если x_0 - наиб. эл-нт мн-ва X, то $\sup X = x_0$; наим. $\inf X = x_0$

$a = \sup X$, если

$$1)\forall x \in X \quad x \leq a,$$

$$2)\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon \in X \quad x_\epsilon > a - \epsilon;$$

и $a = \inf X$, если

$$1)\forall x \in X \quad x \geq a$$

$$2)\forall \epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon \in X \quad x_\epsilon < a + \epsilon.$$

2. Теорема о существовании верхней грани.

Теорема 2.2.1. *У любого непустого ограниченного сверху множества существует верхняя грань.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, кода среди элементов множества X есть хотя бы одно неотрицательное число.

Рассмотрим целые части неотрицательных чисел, принадлежащих множеству X. В силу неравенства $x \leq M$ все целые части не превосходят M, а поэтому найдется наибольшее число среди них, которое обозначим через a_0. Рассмотрим множество элементов $x \in X$, целые части которых равны a_0, и первые десятичные знаки после запятой этих элементов. Наибольший среди них обозначим через a_1. Рассмотрим множество элементов $x \in X$, целые части которых равны a_0, а первый десятичный знак после запятой равен a_1. Наибольший второй десятичный знак этих чисел обозначим через a_2. Продолжая далее аналогичные действия, мы последовательно определим десятичные знаки некоторого числа

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \quad .$$

Докажем, во-первых, что число a является мажорантой множества X. Так как $a \geq 0$, то любое отрицательное число из множества X меньше a. Остается доказать, что любой неотрицательный элемент $x \in X$ удовлетворяет условию $x \leq a$.

Предположим, что некоторый неотрицательный элемент $x = x_0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ множества X не удовлетворяет неравенству $x \leq a$. Тогда $x > a$, и найдется номер k такой, что $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots, x_{k-1} = a_{k-1}, x_k > a_k$. Но последние соотношения противоречат построению числа a. Итак, мы доказали, что число a - мажоранта множества X.

Докажем теперь, что число a - наименьшая мажоранта. Пусть $a' = a'_0, a'_1 a'_2 \ldots a'_n \ldots$ -призвольное число, удовлетворяющее условию $a' < a$.

Если a' является отрицательным, то неравенству $x > a$ удовлетворяет любой неотрицательный элемент множества X (по предположению хотя бы один такой элемент существует).

Остается рассмотреть случай, когда число a', удовлетворяющее условию $a' < a$, является неотрицательным. Так как $a' < a$, то найдется номер m такой, что

$$a'_0 = a_0, \quad a'_1 = a_1, \quad \ldots, \quad a'_{m-1} = a_{m-1}, \quad a'_m < a_m.$$

С другой стороны, из построения числа a вытекает, что для любого номера m найдется элемент $x \in X$ такой, что

$$x_0 = a_0, \quad x_1 = a_1, \quad \ldots, \quad x_m = a_m,$$

и, значит, $x > a'$. Таким образом мы доказали, что число a является наименьшей мажорантой, т.е. $a = \sup X$.

3. Счетные множества и их свойства.

Множество называется счётным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Всякое бесконечное подмножество счётного множества является счётным.

Объединение последовательности счётных множеств является счётным множеством.

Множество рациональных множеств счётно.

Теорема 2.6.2. *Объединение последовательности счетных множеств является счетным множеством.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, An, \ldots$ - последовательность счетных множеств. Тогда

$$A_1 = \{a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{13}, \quad \ldots\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, \quad a_{22}, \quad a_{23}, \quad \ldots\}$$
$$A_3 = \{a_{31}, \quad a_{32}, \quad a_{33}, \quad \ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Произведем нумерацию элементов a множества A следующим образом:

$$a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{21}, \quad a_3 = a_{12}, \quad a_4 = a_{31}, \quad a_5 = a_{22}, \quad a_6 = a_{13} \quad \text{и т. д.}$$

У некоторых множеств A_i и $A_j (i \neq j)$ могут оказаться общие элементы. В этом случае учитываем их только один раз.

Таким образом, элементы множенства A будут занумерованы. □

Следствие. Множество рациональных чисел счетно.

4. Теорема о несчетности интервала. Множества мощности континуум.

Теорема 2.6.3. *Множество всех точек интервала* $(0, 1)$ *несчетно.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. предположим, что множество всех точек интервала $(0, 1)$ счетно.

Представляя каждое число этого интервала бесконечной десятичной дробью, расположим их в виде последовательности:

$$a_1 = 0, a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \ldots \quad ,$$
$$a_2 = 0, a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \ldots \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = 0, a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Рассмотрим бесконечную десятичную дробь $b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$, где b_1 - любая цифра,отличная от a_{11}, 0 и 9; b_2 - любая цифра, отличная от a_{22}, 0 и 9; и т.д.; b_n - любая цифра, отличная от a_{nn}, 0 и 9; и т.д.. Очевидно, что число $b \in (0, 1)$ и оно отлично от всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Определение 2.10. *Множество, эквивалентное множеству точек интервала* $(0, 1)$, *называется множеством мощности континуума.*

5. Ограниченные последовательности. Достаточное условие ограниченности последовательности.

Посл $(x_n)\uparrow$ если $\exists M \in R$ $\forall n \in N$ $x_n \leq M$

$(x_n)\downarrow$ $\exists m \in R$ $\forall n \in N$ $x_n \geq m$

(x_n) - огр. $(\underline{O}(1))$ $\exists a \in R$ $\exists b \in R$ $\forall n \in N$ $a \leq x_n \leq b$

Достаточное усл. огр. посл.:

Если $\exists M \in R$ $\exists n_0 \in N$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n| \leq M$, то $\underline{O}(1)$

Док-во:

$M_0 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, M\} \Rightarrow \forall n \in N$ $|x_n| \leq M_0$, т.е. $x_n = \underline{O}(1)$

6. Бесконечно малые последовательности. Теорема об арифметических действиях над бесконечно малыми последовательностями.

Определение 3.5. *Последовательность называется бесконечно малой, если*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad |x_n| \leq \epsilon. \tag{5}$$

Бесконечно малые последовательности будем обозначать символом $o(1)$.

Теорема 3.1.2. *Бесконечно малая последовательность ограничена.*

Доказательство. Возьмем $\epsilon = 1$, тогда найдется номер n_1 такой , что при всех $n \geq n_1$ выполняется неравенство $|x_n| < 1$. В силу теоремы (3.1.1) последовательность ограничена. □

Теорема 3.1.3. *(об арифметических действиях над бесконечно малыми).*

Справедливы равенства

$$o(1) \pm o(1) = o(1); \quad o(1)O(1) = o(1);$$

тем более

$$o(1)o(1) = o(1).$$

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $x_n = o(1), y_n = o(1)$ и ϵ - призвольное положительное чсло.

Тогда найдется номер n'_ϵ такой, что

$$\forall n \geq n'_\epsilon \quad |x_n| < \epsilon/2;$$

и найдется номер n''_ϵ такой, что

$$\forall n \geq n''_\epsilon \quad |y_n| < \epsilon/2.$$

Следовательно, $\forall n \geq n_\epsilon = \max\{n'_\epsilon, n''_\epsilon\}$ выполняется условие

$$|x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Это означает, что $x_n \pm y_n = o(1)$.

7. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми.

Определение 3.6. *Последовательность* (x_n) *называется положительно бесконечно большой, если выполняется условие:*

$$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_M \quad x_n > M. \tag{6}$$

В этом случае используют обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{или} \quad x \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.7. *Последовательность* (x_n) *называется отрицательно бесконечно большой, если выполняется условие:*

$$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_M \quad x_n < -M. \tag{7}$$

В этом случае используют обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \quad \text{или} \quad x \to -\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.8. *Последовательность* (x_n) *называется бесконечно большой, если выполняется условие:*

$$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_M \quad |x_n| > M. \tag{8}$$

В этом случае используют обозначение:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{или} \quad x \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема 3.1.5. *Пусть при всех* $n \in \mathbb{N}$ $x_n \neq 0$. *Тогда* (x_n) *- бесконечно большая последовательность тогда и только тогда, когда* $(\frac{1}{x_n})$ *- бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Суть доказательства состоит в равносильности неравенств

$$|x_n| > M \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M}.$$

8. Предел последовательности. Теорема о единственности предела.

Определение 3.9. *Последовательность* (x_n) *называется сходящейся, если существует число* a *такое, что последовательность* $x_n - a = o(1)$. *Число* a *в этом случае называют пределом последовательности или говорят, что последовательность* x_n *стремится к числу* a. *Записывается это так:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Определение 3.10. *Число* a *называется пределом поледовательности* (x_n), *если*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_\epsilon \quad |x_n - a| < \epsilon \tag{9}$$

Теорема 3.2.1. *(о единственности предела). Если последовательность* (x_n) *сходится, то она имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существуют $a_1 \neq a_2$ такие, что $x_n - a_1 = o(1)$ и $x_n - a_2 = o(1)$. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$a_2 - a_1 = o(1) - o(1) = o(1).$$

В силу теоремы (3.1.4) $a_2 - a_1 = 0$, т.е. $a_2 = a_1$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

9. Ограниченность сходящейся последовательности.

Теорема 3.2.2. *(об ограниченности сходящейся последовательности). Если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $x_n = a + o(1)$. Поскольку всякая бесконечно малая последовательность является ограниченной и стационарная последовательность, очевидно, также ограничена, то их сумма $a + o(1) = O(1)$.

10. Порядковые свойства предела. Переход к пределу в неравенствах.

Теорема 3.3.1. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $a > b$, то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n > b.$$

Доказательство. Возьмем $\epsilon = \frac{a-b}{2}$.
Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \frac{a-b}{2}$. Следовательно,

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b,$$

при всех $n \geq n_0$. □

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо в случае $a < b$. а именно,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n < b.$$

Теорема 3.3.2. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $a < b$, то*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n < y_n.$$

Теорема 3.3.3. *(о переходе к пределу в неравенстве). Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и для всех $n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.*

Доказательство. От противного. Пусть $a > b$. Тогда по предыдущей теореме

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n > y_n,$$

что противоречит условию данной теоремы. □

11. Порядковый признак существования предела последовательности.

Теорема 3.3.4. *(порядковый признак существования предела). Пусть $x_n \leq z_n \leq y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Согласно определению предела

$$\exists n'_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n'_\epsilon \quad a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$$

и

$$\exists n''_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n''_\epsilon \quad a - \epsilon < y_n < a + \epsilon.$$

Тогда

$$\forall n \geq n_0 = \max(n'_\epsilon, n''_\epsilon) \quad a - \epsilon < x_n < z_n < y_n < a + \epsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. □

12. Арифметические свойства предела последовательности.

Теорема 3.3.5. *(арифметические свойства предела последовательности). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ *при дополнительном условии, что* $b \neq 0$.

Доказательство. Согласно условию теоремы, имеем $x_n = a + o(1), \quad y_n = b + o(1)$.
1) Следовательно,

$$x_n \pm y_n = (a + o(1)) \pm (b + o(1)) = (a \pm b) + (o(1) \pm o(1)) = (a \pm b) + o(1).$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

13. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.

Определение 3.12. *Последовательность называется*
неубывающей, если $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \uparrow$);
невозрастающей, если $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow$);
возрастающей, если $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \uparrow\uparrow$);
убывающей, если $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow\downarrow$).
Последовательности первых двух типов называют монотонными, а последовательности возрастающие и убывающие называют еще строго монотонными.

Теорема 3.4.1. *(Вейерштрасса о монотонных последовательностях). Пусть (x_n) - монотонная и ограниченная последовательность. Тогда (x_n) сходится. Причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, если $x_n \uparrow$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, если $x_n \downarrow$.*

Доказательство. Доказательство проведем в случае, когда $x_n \uparrow$.
Так как (x_n) - ограничена сверху , то существует $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Пусть $a = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Тогда, во-первых,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq a$$

и, во-вторых,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \quad x_{n_\epsilon} > a - \epsilon.$$

Так как (x_n) - неубывающая последовательность, то

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad a - \epsilon < x_{n_\epsilon} \leq x_n.$$

Следовательно,

$$\forall n \geq n_\epsilon \quad a - \epsilon < x_n \leq a < a + \epsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

14. Лемма о вложенных отрезках.

Определение 3.13. *Последовательность отрезков*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

называется последовательностью вложенных отрезков, если выполняется условие: $\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.
Последовательность вложенных отрезков называется стягивающейся, если выполняется условие: $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 3.4.1. *(о вложенных отрезках.)*
У всякой стягивающейся последовательности отрезков существует и притом единственная точка, принадлежащая всем отрезкам последовательности.

Доказательство. Пусть последовательность

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

является стягивающейся. Рассмотрим последовательность (a_n). Очевидно, что $a_n \uparrow$ и ограничена сверху, причем b_m при любом $m \in \mathbb{N}$ является мажорантой. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ и $c \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Докажем, что точка c, принадлежащая всем отрезкам, может быть только одна. Пусть нашлась еще одна точка d, отличная от c и принадлежащая всем отрезкам. Предположим для определенности, что $c < d$. Тогда отрезок $[c, d] \subset [a_n, b_n]$ при любом натуральном n. Но тогда $b_n - a_n \geq d - c > 0$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$. □

15. Подпоследовательности и частичные пределы последовательности. Теорема о подпоследовательностях сходящейся последовательности.

Определение 3.14. *Пусть (x_n) - числовая последовательность и (k_n) - некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $(y_n) = (x_{k_n})$ называется подпоследовательностью последовательности (x_n).*

Теорема 3.5.1. *(о подпоследовательностях сходящейся последовательности). Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же числу, что и вся последовательность.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\epsilon > 0$. Тогда найдется номер n_ϵ такой, что при всех $n \geq n_\epsilon$ выполняется условие $|x_n - a| < \epsilon$. Очевидно, что $k_n \geq n$. Следовательно, при всех $n \geq n_\epsilon \quad y_n = x_{k_n}$ удовлетворяет неравенству $|y_n - a| < \epsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

16. Верхний и нижний пределы последовательности. Корректность определения.

Определение 3.15. *Пусть (x_n) - ограниченная числовая последовательность.*
Верхний предел последовательности определим равенством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k. \tag{10}$$

Нижний предел последовательности определим равенством

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k. \tag{11}$$

Докажем корректность определения верхнего предела. Обозначим $y_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Очевидно, что последовательность (y_n) ограничена. В силу свойства монотонности верхней грани последовательность (y_n) является невозрастающей. Тогда, согласно теореме Вейерштрасса, она сходится.
Корректность определения нижнего предела доказывается аналогично.

17. Свойства верхнего и нижнего пределов.

Теорема 3.5.2. *Для любой ограниченной последовательности справедливо неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Доказательство. Обозначим

$$z_n = \inf_{k\ge n} x_k, \quad y_n = \sup_{k\ge n} x_k.$$

Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n \le y_n$. Осталось перейти к пределу в этом неравенстве. □

Теорема 3.5.3. *У любой ограниченной последовательности предел существует тогда и только тогда, когда*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

18. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема 3.5.4. *(Больцано-Вейештрасса .)*

У любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть последовательность x_n ограничена, т.е. найдется $M > 0$ такое, что $|x_n| \le M$ при всех n. Разделим отрезок $I_0 = [-M, M]$ пополам. По крайней мере один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов последовательности. Выберем такой отрезок и обозначим его I_1. В качестве первого члена искомой подпоследовательности возьмем какой-либо элемент $x_{n_1} \in I_1$. Затем отрезок I_1 снова разделим на два и обозначим через I_2 ту его половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности x_n. Среди них выберем такой член x_{n_2}, номер которого $n_2 > n_1$. Повторяя эту процедуру далее, мы получим последовательность вложенных отрезков (I_n) и подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, причем $x_{n_k} \in I_k$.

Длина отрезка I_k равна $\frac{2M}{2^k} = \frac{M}{2^{k-1}}$. Поскольку $\frac{M}{2^{k-1}} \to 0$ при $k \to \infty$, то система отрезков является стягивающейся. Согласно лемме о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам. Обозначим $I_k = [a_k, b_k]$. Так как $a_k \to c, \quad b_k \to c$ при $k \to \infty$, а $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, то $x_{n_k} \to c$ при $k \to \infty$. □

19. Фундаментальные последовательности. Теорема об ограниченности фундаментальной последовательности.

Определение 3.16. *Последовательность (x_n) называется фундаментальной, если*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_\epsilon \quad \forall m \ge n_\epsilon \quad |x_n - x_m| < \epsilon. \qquad (12)$$

Отметим, что условие (12) равносильно следующему условию:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_\epsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \epsilon. \qquad (13)$$

Теорема 3.6.1. *Всякая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Из условия фундаментальности, взяв $\epsilon = 1$, имеем

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge n_1 \quad |x_n - x_{n_1}| < \epsilon,$$

т.е.

$$x_{n_1} - 1 \le x_n \le x_{n_1} + 1 \quad \text{при всех} \quad n \ge n_1.$$

Согласно теореме (3.1.1) , последовательность (x_n) ограничена. □

20. Критерий Коши сходимости последовательности.

Теорема 3.6.2. *(критерий Коши сходимости последовательности).*

Последовательности сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть последовательность $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное число $\epsilon > 0$. Тогда найдется номер n_ϵ такой, что при $n \ge n_\epsilon$ и $m \ge n_\epsilon$ выполняются условия

$$|x_n - a| < \epsilon/2 \quad \text{и} \quad |x_m - a| < \epsilon/2.$$

Следовательно,

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

То есть последовательность (x_n) - фундаментальна.

Докажем достаточность. Пусть (x_n) - фундаментальна. Согласно теореме (3.6.1), (x_n) ограничена. Тогда в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$. Пусть $x_{k_n} \to a$ при $n \to \infty$. Поскольку $k_n \ge n$, то из условия фундаментальности следует вывод, что

$$x_n - x_{k_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$x_n - a = (x_n - x_{k_n}) + (x_{k_n} - a) \to 0,$$

т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Теорема полностью доказана. □

21. Определения Гейне и Коши предела функции в точке. Теорема об их эквивалентности.

Определение 4.4. *(предела функции по Коши).*

Пусть функция f определена на множестве X и точка x_0 является предельной точкой множества X.

Число A называют пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon) \qquad (14)$$

Формулой это записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Определение 4.5. *(предела функции по Гейне).*

Пусть функция f определена на множестве X и точка x_0 является предельной точкой множества X.

Число A называют пределом функции f в точке x_0, если для любой последвательности (x_n) точек множества X такой, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$ и $x_n \ne x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, выполняется условие $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.1.1. *Определение предела функции в точке по Коши равносильно определению предела по Гейне.*

Доказательство. 1) Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши и (x_n) -последовательность точек множества X, отличных от точки x_0, сходящаяся к точке x_0.

Пусть число $\epsilon > 0$. Согласно определению Коши, найдется число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \epsilon$, если $0 < |x - x_0| < \delta$. Поскольку $x_n \to x_0$, то найдется номер n_0 такой, что при всех $n \ge n_0$ выполняется условие $|x_n - x_0| < \delta$, а следовательно, $|f(x_n) - A| < \epsilon$. Это и означает, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, т.е. функция f удовлетворяет определению Гейне.

2) Пусть теперь число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Гейне. Докажем, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого числа $\epsilon_0 > 0$ и любого $\delta > 0$ найдется x_δ такое, что $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, но $|f(x_\delta) - A| \ge \epsilon_0$.

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, и найдем x_n такие, что

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x_n) - A| \ge \epsilon_0.$$

Построенная последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \ne x_0$. Тогда согласно определению Гейне $f(x_n) \to A$, что протоворечит условию $|f(x_n) - A| \ge \epsilon_0 > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

22. Критерий Коши существования предела функции.

Определение 4.6. *Говорят, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши, если выполняется условие*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in X\ (0 < |x' - x_0| < \delta, 0 < |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon).$$

Теорема 4.2.1. *Функция f имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши.*

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Возьмем произвольное число $\epsilon > 0$. Согласно определению Коши найдем $\delta > 0$ такое,

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x'')| \le |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \epsilon,$$

а это и означает, что функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши.

2) *Достаточность.* Пусть функция f удовлетворяет в точке x_0 условию Коши. Докажем, что функция f удовлетворяет условию определения предела по Гейне.

Пусть $\epsilon > 0$, а последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \ne x_0$. Руководствуясь условием Коши, выберем $\delta > 0$. Тогда найдется номер n_0 такой, что при $n \ge n_0$ выполняется условие $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Если теперь p - произвольное натуральное число, то тем более $0 < |x_{n+p} - x_0| < \delta$.

Следовательно, в силу условия Коши при $n \ge n_0$ и для любого натурального p справедливо неравество

$$|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \epsilon,$$

а это означает фундаментальность последовательности $(f(x_n))$. В силу критерия Коши сходимость числовой последовательности, последовательность $(f(x_n))$ сходится к некоторому числу A.

Остается доказать, что для любой другой последовательности $x'_n \to x_0$, $x'_n \ne x_0$, выполняется условие $f(x'_n) \to A$.

Предположим, что $f(x'_n) \to A'$. Рассмотрим последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots,$$

которая тоже сходится к точке x_0. В силу доказанного выше, последовательность

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \ldots, f(x_n), f(x'_n), \ldots$$

сходится к некоторому числу A''. Тогда ее подпоследовательности $(f(x_n))$ и $(f(x'_n))$ тоже сходятся к числу A''. Отсюда вытекает, что $A = A' = A''$. Теорема полностью доказана. □

23. Односторонние пределы функции, связь с пределом.

Определение 4.7. *(левостороннего предела по Коши) Пусть $A \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0 - \delta < x < x_0\ \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon) \qquad (16)$$

Для левостороннего предела используют более короткое обозначение

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Определение 4.8. *(правостороннего предела по Коши) Пусть $A \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ (x_0 < x < x_0 + \delta\ \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon) \qquad (17)$$

Для правостороннего предела используют более короткое обозначение

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Теорема 4.3.1. *Предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны между собой. При этом*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

24. Арифметические свойства предела функции.

Теорема 4.4.1. *(арифметические свойства предела.) Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = AB,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},$$

(последнее равенство справедливо при дополнительном условии, что $B \ne 0$).

Доказательство. Для доказательства будем пользоватся определением предела по Гейне. Пусть последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \ne x_0$. Тогда

$$f(x_n) \to A \text{ и } g(x_n) \to B.$$

Воспользуемся доказанными ранее арифметическими свойствами предела последовательности. В силу теоремы (3.3.5), имеем

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to A \pm B, \quad f(x_n)g(x_n) \to AB, \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{A}{B}.$$

Согласно определению предела по Гейне, это означает, что функции $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$ имеют в точке x_0 пределы, соответственно равные $A \pm B$, AB и A/B. □

25. Порядковые свойства предела функции.

Теорема 4.4.2. *(порядковые свойства предела) Пусть* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$ *и* $A < B$. *Тогда* $\exists \mathring{O}_\epsilon(x_0) \quad \forall x \in \mathring{O}_\epsilon(x_0) \bigcap X \quad f(x) < g(x)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно построить последовательность $x_n \to x_0$, $\quad x_n \neq x_0$ такую, что $f(x_n) \geq g(x_n)$. Следовательно, $\lim_{n \to x_0} f(x_n) \geq \lim_{n \to x_0} g(x_n)$, а значит, и $A \geq B$, что противоречит условию. □

Следствие. *Пусть* $\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B, \quad C \in \mathbb{R}$.
Тогда если $\quad \exists \mathring{O}_\epsilon(x_0) \quad \forall x \in \mathring{O}_\epsilon(x_0) \bigcap X$

a) $f(x) > g(x)$, то $A \geq B$;

b) $f(x) \geq g(x)$, то $A \geq B$;

c) $f(x) > C$, то $A \geq C$;

d) $f(x) \geq C$, то $A \geq C$.

26. Порядковый признак существования предела функции.

Теорема 4.4.3. *(порядковый признак существования предела функции) Пусть* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *при всех* x, *принадлежащих некоторой проколотой окрестности* $\mathring{O}_\delta(x_0)$, *и* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = A$. *Тогда* $\lim_{x \to x_0} h(x) = A$.

Доказательство. Пусть последовательность $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$. Тогда

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$$

Поскольку

$$\lim_{n \to x_0} f(x_n) = \lim_{n \to x_0} g(x_n) = A,$$

то, в силу порядкового признака существования предела последовательности, существует $\lim_{n \to x_0} h(x_n) = A$. Согласно определению предела по Гейне, $\lim_{x \to x_0} h(x) = A$. □

27. Теорема о пределе сложной функции.

Теорема 4.4.5. *Пусть* $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$ *и для всех* x *из некоторой проколотой окрестности* $\mathring{O}(x_0) \quad g(x) \neq y_0$, *и пусть*

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = A$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A.$$

Доказательство. Воспользуемся определением предела по Гейне. Возьмем произвольную последовательность (x_n) точек из $\mathring{O}(x_0)$ такую, что $x_n \to x_0$.

Тогда имеем

$$y_n = g(x_n) \to y_0 \text{ и } y_n \neq y_0.$$

И далее

$$f(g(x_n)) = f(y_n) \to A.$$

Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A.$$

28. Непрерывность функции в точке. Свойства функций непрерывных в точке.

Определение 5.1. *Пусть функция* f *определена на множестве* X *и точка* $x_0 \in X$ *является предельной точкой множества* X. *Функция* f *называется непрерывной в точке* x_0, *если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X \, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$ *(по Коши)*;

2) $\forall O(f(x_0)) \, \exists O(x_0) : f(O(x_0)) \subset O(f(x_0))$;

3) *для любой последвательности* (x_n) *точек множества* X *такой, что* $x_n \to x_0$, *выполняется условие* $f(x_n) \to f(x_0)$ *(по Гейне)*;

4) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

5) $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *- бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Теорема 5.1.1. *Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда она непрерывна в ней одновременно справа и слева.*

Теорема 5.1.2. *(о свойствах непрерывных функций).*
Пусть функции f *и* g *непрерывны в точке* x_0. *Тогда*

1) *функция* $af + bg$ *непрерывна в точке* x_0 *при любых* $a, b \in \mathbb{R}$;

2) *функция* fg *непрерывна в точке* x_0;

3) *функция* f/g *непрерывна в точке* x_0, *если* $g(x_0) \neq 0$;

4) *если* $f(x_0) \neq 0$, *то найдется окрестность* $O(x_0)$ *такая, что* $\forall x \in O(x_0) \quad f(x)f(x_0) > 0 \quad$ *(т.е.* $f(x)$ *сохраняет знак)*;

5) *функция* f *ограничена в некоторой окрестности точки* x_0 *(т.е. функция* f *локально ограничена)*.

Теорема 5.1.3. *Если функция* g *непрерывна в точке* x_0, *а функция* f *непрерывна в точке* $y_0 = g(x_0)$, *то функция* $f \circ g$ *непрерывна в точке* x_0.

29. Непрерывность функции на множестве. Теорема об обращении функции в нуль и теорема Коши о промежуточных значениях функции.

Определение 5.3. *Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого мнжества.*

Функцию называют непрерывной, если она непрерывна на всей своей области определения.

Теорема 5.2.1. *(Коши об обращении функции в нуль). Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и* $f(a)f(b) < 0$. *Тогда найдется точка* $c \in [a, b]$ *такая, что* $f(c) = 0$.

Доказательство. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то из двух отрезков $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ выберем тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Переобозначим его симолом $[a_1, b_1]$.

С отрезком $[a_1, b_1]$ поступим аналогичным образом. И так далее. Если в процессе деления очередного отрезка мы так и не получим точку, в которой фукция обращается в нуль, то образуется стягивающаяся последовательностьотрезков $([a_n, b_n])$. Пусть x_0 - их общая точка. Тогда $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$. Поскольку функция f непрерывна, то $f(a_n) \to f(x_0)$ и $f(b_n) \to f(x_0)$. Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \leq 0.$$

Следовательно, $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать. □

Теорема 5.2.2. *(Коши о промежуточеых значениях функции). Пусть функция* f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ *и* C *- любое число, промежуточное между* A *и* B. *Тогда найдется точка* $c \in [a, b]$ *такая, что* $f(c) = C$.

Доказательство. Нужно рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - C$ и применить к ней предыдущую теорему. □

30. Компакт. Критерий компактности.

Определение 5.4. *Множество* $X \subset \mathbb{R}$ *называют компактом, если любая последовательность* (x_n) *точек этого множства содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке* $x_0 \in X$.

Теорема 5.2.4. *(критерий компактности). Множество является компактом тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть X - компакт. Ограниченность компакта доказана в предыдущей теореме. Осталось доказать замкнутость множества. Пусть x_0 - предельная точка множества X. Тогда найдется последовательность (x_n) точек множества X, отличных от точки x_0, сходящаяся к точке x_0. Согласно компктности множества найдется подпоследовательность (x_{n_k}), сходящаяся к некоторой точке $x_0' \in X$. С другой стороны, так как $x_n \to x_0$, то и $x_{n_k} \to x_0$. Следовательно, $x_0 = x_0' \in X$.

2) Достаточность. Пусть множество X ограничено и замкнуто, а (x_n) - последовательность точек этого множесва. Тогда последовательность ограничена, и согласно теореме Больцано-Вейерштрасса у нее существует сходящаяся подпоследовательность (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x_0$. Если x_0 совпадает с каким-либо членом x_{n_k}, то $x_0 \in X$ автоматически; если нет, то x_0 - предельная точка множества X. В силу замкнутости множества и в этом случае x_0 принадлежит X. Итак, $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Следовательно, X - компакт. □

31. Теорема о непрерывном образе компакта. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса.

Теорема 5.2.6. *(о непрерывном образе компакта). Пусть функция* f *непрерывна на множестве* X *и* X *- компакт . Тогда* $Y = f(X)$ *тоже компакт.*

Доказательство. Пусть (y_n) - последовательность точек множества $Y = f(X)$, и $\forall n \in \mathbb{N}$ точка $x_n \in X$ такова, что $f(x_n) = y_n$. Поскольку X - компакт, то найдется подпоследовательность $x_{k_n} \to x_0 \in X$ при $n \to \infty$. В силу непрерывности функции в точке x_0 последовательность $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(x_0) = y_0 \in Y$. Это означает, что Y - компакт. □

Следствие 1. (*Первая теорема Вейерштрасса). Если функция непрерывна на компакте, то она ограничена на нем.*

Следствие 2. (*Вторая теорема Вейерштрасса). Если функция непрерывна на компакте, то она принимает на нем наименьшее и наибольшее значения.*

32. Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора.

Определение 5.8. *Функция* f *называется равномерно непрерывной на множестве* X, *если*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \, \forall x \in X \, \forall x' \in X \, (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon).$$

Теорема 5.3.1. *(Кантора). Пусть функция* f *непрерывна на множестве* X *и* X *- компакт. Тогда функция* f *равномерно непрерывна на множестве* X.

Доказательство. От противного. Предположим, что f непрерывна на X, но не является равномерно непрерывной на нем. Тогда

$\exists \epsilon_0 > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x', x'' \in X$ такие, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$.

Возьмем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $\forall n \in \mathbb{N}$ найдем x_n', x_n'', такие, что

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}, \text{ но } |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon_0.$$

Так как X является компактом, то найдется подпоследовательность $x_{k_n}' \to x_0 \in X$. Очевидно, что $x_{k_n}'' \to x_0 \in X$ также. В силу непрерывности функции f имеем

$$f(x_{k_n}') \to f(x_0), \quad f(x_{k_n}'') \to f(x_0).$$

Следовательно, $f(x_{k_n}') - f(x_{k_n}'') \to 0$, что противоречит условию $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \epsilon_0 > 0$. Теорема доказана. □

33. Односторонние пределы. Точки разрыва функции и их классификация. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

Определение 5.9. *Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.*

Точка x_0 называется точкой устранимого разрыва функции f, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, но или функция f не определена в точке x_0, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, но

Теорема 5.4.1. *(об односторонних пределах монотонной функции). Пусть функция f является монотонной на интервале (a,b). Тогда в каждой точке интервала у нее существуют односторонние пределы. Более того, при любом $x_0 \in (a,b)$ имеем*

$$f(x_0-0) = \sup_{x<x_0} f(x), \quad f(x_0+0) = \inf_{x>x_0} f(x),$$

$$f(x_0-0) \le f(x_0) \le f(x_0+0),$$

если $f\uparrow$, и

$$f(x_0-0) = \inf_{x<x_0} f(x), \quad f(x_0+0) = \sup_{x>x_0} f(x),$$

$$f(x_0-0) \ge f(x_0) \ge f(x_0+0),$$

если $f\downarrow$.

Доказательство. Рассмотрим случай $f\uparrow$.

Докажем, что $f(x_0-0) = \sup\limits_{x<x_0} f(x)$.

Множество $\{f(x) : x < x_0\}$ ограничено сверху ($f(x_0)$ - одна из его мажорант). Следовательно, существует $\sup\limits_{x<x_0} f(x) = l$, причем $l \le f(x_0)$.

По определению верхней грани имеем:

1) $f(x) \le l \quad \forall x < x_0$;

2) $\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon < x_0 \quad f(x_\epsilon) > l - \epsilon$.

В силу того, что функция f неубывает, при любых x, удовлетворяющих условию $x_\epsilon \le x < x_0$ выполняются неравенства

$$l - \epsilon < f(x_\epsilon) \le f(x) \le l < l + \epsilon,$$

следовательно, $l = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Остальное доказывается аналогично. □

34. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции.

Теорема 5.4.2. *(критерий непрерывности монотонной функции). Пусть функция f монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $f([a,b])$ есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $f\uparrow$.

Необходимость. Утверждение справедливо в силу теоремы Коши о промежуточечых значениях функции, непрерывной на отрезке.

*Достаточность.*Будем рассуждать от противного. Пусть точка $c \in [a,b]$ является точкой разрыва функции $f\uparrow$. Следовательно, $f(c-0) \neq f(c)$ или $f(c) \neq f(c+0)$. То есть хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ не пуст, и в нем нет значений функции. Ввиду монотонности функции такой интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 5.4.3. *(о непрерывности обратной функции). Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует обратная функция строго монотонная того же типа, определенная и непрерывная на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

35. Дифференцируемость функции в точке, производная функции в точке. Непрерывность дифференцируемой функции. Теорема о дифференцируемости композиции.

Определение 6.1. *Пусть функция f определена на множестве X и точка $x_0 \in X$ - предельная точка этого множества.*

Функцию f называют дифференцируемой в точке x_0, если найдется непрерывная в точке x_0 функция A такая, что $\forall x \in X$ выполняется равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0). \tag{35}$$

Производной функции f в точке x_0 назовем значение $A(x_0)$ и обозначим символом

$$f'(x_0) = A(x_0).$$

Теорема 6.1.2. *(о непрерывности дифференцируемой функции). Если функция f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Перепишем равенство (35) в виде

$$f(x) = f(x_0) + A(x)(x - x_0)$$

и воспользуемся утверждением об арифметических действиях над непрерывными функциями. □

Теорема 6.1.3. *(о дифференцируемости композиции). Если функция g дифференцируема в точке x_0, а функция f дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то функция $f \circ g$ дифференцируема в точке x_0 и*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) g'(x_0). \tag{41}$$

36. Теорема об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями.

Теорема 6.1.4. *(об арифметических действиях над дифференцируемыми функциями) Пусть функции f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f+g$, fg, и f/g (при дополнительном условии, что функция g в нуль не обращается) дифференцируемы в точке x_0.*

Причем справедливы равенства

1)

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0); \tag{42}$$

2)

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0); \tag{43}$$

3)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{44}$$

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости имеем:

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0), \quad g(x) - g(x_0) = B(x)(x - x_0),$$

где функции A и B непрерывны в точке x_0 ; причем

$$f'(x_0) = A(x_0), \quad g'(x_0) = B(x_0).$$

Тогда

$$(f+g)(x) - (f+g)(x_0) = (f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0)) = (A(x) + B(x))(x - x_0).$$

Так как функция $A+B$ непрерывна в точке x_0, то $f+g$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(f+g)'(x_0) = A(x_0) + B(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

37. Теорема о дифференцируемости обратной функции.

Теорема 6.1.5. *(о дифференцируемости обратной функции). Пусть функция f обратима, существует производная $f'(x_0) \neq 0$, и обратная функция f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда f^{-1} дифференцируема в точке y_0 и*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{45}$$

Доказательство. Для функции f имеем равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),$$

где функция A непрерывна в точке x_0, $A(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. В силу обратимости (взаимной однозначности) функци f $\quad A(x) \neq 0\ \forall x \neq x_0$.

Используя соотношения

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{и} \quad y_0 = f(x_0),$$

имеем

$$y - y_0 = A(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)),$$

или

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{A(f^{-1}(y))}(y - y_0)$$

Осталось заметить, что функция $C = A \circ f^{-1}$ непрерывна в точке y_0 и

$$C(y_0) = \frac{1}{A(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{A(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

38. Точки роста и убывания функции. Достаточное условие точек роста и точек убывания.

Определим, так называемую, «функцию знака ».

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } x < 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \\ 1, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Определение 6.5. *Точка x_0 называется точкой роста функции f, если*

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0). \tag{67}$$

Точка x_0 называется точкой убывания функции f, если эта точка является точкой роста функции $(-f)$, т. е.

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad sign(f(x) - f(x_0)) = -sign(x - x_0). \tag{68}$$

Теорема 6.4.1. *(достаточное условие точек роста и точек убывания) Если $f'(x_0) > 0 \quad (f'(x_0) < 0)$, то точка x_0 является точкой роста (убывания) функции f.*

Доказательство. Согласно определению дифференцируемости функции имеем равенство

$$f(x) - f(x_0) = A(x)(x - x_0),$$

где функция A непрерывна в точке x_0 и $A(x_0) = f'(x_0)$. Если $A(x_0) > 0$, то

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad A(x) > 0.$$

Тогда $\forall x \in O(x_0)$

$$sign(f(x) - f(x_0)) = sign(A(x)(x - x_0)) = sign(x - x_0),$$

т.е. точка x_0 является точкой роста.

39. Точки локального экстремума. Теорема Ферма.

Определение 6.6. *Пусть точка x_0 является внутренней точкой области определения функции f.*

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции f, если

$$\exists O(x_0) \quad \forall x \in O(x_0) \quad f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)). \tag{69}$$

В случае если

$$\forall x \in \mathring{O}(x_0) \quad f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

то говорят о строгом локальном максимуме (минимуме).

Точки локального максимума и минимума объединяют термином "точки локального экстремума".

Теорема 6.4.2. *(теорема Ферма или необходимое условие локального экстремума). Пусть точка x_0 является точкой локального экстремума функции f и существует $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Точка x_0 не может быть точкой роста функции f. Тогда согласно предыдущей теореме выполняется условие $f'(x_0) \le 0$.

В то же самое время точка x_0 не может быть точкой убывания, а следовательно, $f'(x_0) \ge 0$.

Одновременное выполнение неравенств $f'(x_0) \le$ и $f'(x_0) \ge 0$ означает выполнение равенства $f'(x_0) = 0$. □

40. Теорема Ролля.

Теорема 6.4.3. *(Ролля). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогда найдется точке $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Если $f \equiv const$, то $\forall x \in (a,b) \quad f'(x) = 0$.

Пусть теперь f не является тождественно константой.

В силу теорема Вейерштрасса функция f, непрерывная на отрезке, принимает на нем наименьшее значение в некоторой точке x_1 и наибольшее - в некоторой точке x_2. По крайней мере, одна из этих точек не совпадает с концами отрезка, и, значит, является внутренней точкой экстремума. Обозначим ее c. Согласно теореме Ферма $f'(c) = 0$. □

41. Теоремы Коши и Лагранжа. Следствия теоремы Лагранжа.

Теорема 6.5.1. *(Коши). Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $\forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$. Тогда $\exists c \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (70)$$

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы Ролля, $g(b) \neq g(a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Нетрудно убедиться, что функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Теорема 6.5.2. *(Лагранжа). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда найдется точке $c \in (a,b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (71)$$

Доказательство. Утверждение теоремы является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. □

42. Производные высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора-Пеано.

Определение 6.7. *Пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки x_0. Тогда в точках этой окрестности определена функция f'.*

Если функция f' дифференцируема в точке x_0, то говорят, что функция f дважды дифференцирукма в точке x_0 и вторую производную функции f в точке x_0 определяют равенством

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

а также еще обозначают символом $f^{(2)}(x_0)$.

По индукции, если определена производная $f^{(n-1)}$ в окрестности точки x_0, то производная порядка n в точке x_0 определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0),$$

и функция в этом случае называется n-дифференцируемой в точке x_0. Условимся считать, что $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Следствие 3 (форма Лагранжа остаточного члена).

$$r_n(x_0;x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

42.

Теорема 6.7.1. *(формула Тейлора). Пусть функция f n-непрерывно дифференцируема на отрезке с концами x_0, x и имеет производную порядка $n+1$ внутри него. Тогда при любой функции φ, непрерывной на этом отрезке и имеющей внутри него призводную $\varphi'(x) \neq 0$, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x_0;x), \qquad (72)$$

где

$$r_n(x_0;x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \qquad (73)$$

Доказательство. На отрезке I с концами x_0, x рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - P_n(t;x) = f(x) - [f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$$

Очевидно, что F непрерывна на отрезке I и дифференцируема внутри него, причем

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Применяя к паре функций F, φ на отрезке I теорему Коши, найдем точку ξ между x_0 и x, в которой выполняется равенство

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Поскольку $F(x) - F(x_0) = 0 - F(x_0) = -r_n(x_0;x)$ и

$$F'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

то приходим к равенству

$$r_n(x_0;x) = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Взяв функцию $\varphi(t) = (x-t)^p, p > 0$, получаем

43. Правила Лопиталя.

Теорема 6.8.1. *(первое правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a,b), $\quad \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0.$$

Тогда если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$$

то существует и предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Доказательство. Доопределим функции в точке a

$$f(a) = g(a) = 0.$$

Пусть (x_n) - последовательность такая, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in (a,b) \quad \text{и} \quad x_n \to a.$$

При любом натуральном n на отрезке $[a, x_n]$ можем применить теорему Коши. Тогда найдутся точки $\xi_n \in (a, x_n)$ такие, что

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

или

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)},$$

так как $f(a) = g(a) = 0$.

Очевидно, что $\xi_n \to a$. Тогда в силу определения предела по Гейне и условия существования предела отношения производных имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \alpha,$$

и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \alpha \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha.$$

Теорема 6.8.2. *(второе правило Лопиталя). Пусть функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a,b), $\quad \forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0$ и*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = \infty.$$

Тогда если существует конечный или бесконечный предел $\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha,$

44. Достаточные условия экстремума.

Теорема 6.9.1. *(первое достаточное условие экстемума). Пусть функция f дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Тогда если производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от точки x_0, то точка x_0 является точкой локального максимума (минимума) функции f. Если же производная имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то экстремума нет.*

Теорема 6.9.2. *(второе достаточное условие экстремума). Пусть функция f 2-дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда если $f''(x_0) < 0$, то функция f имеет в точке x_0 локальный максимум, и если $f''(x_0) > 0$, то локальный минимум.*

Доказательство. Из условия $f''(x_0) < 0$ (> 0) вытекает, что точка x_0 является точкой убывания (роста) функции f. Поскольку $f'(x_0) = 0$, то найдется окрестность точки x_0, в пределах которой $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева и отрицательна (положительна) справа от точки x_0. Осталось воспользоваться предыдущей теоремой. □

Теорема 6.9.3. *(третье достаточное условие экстремума). Пусть функция f n-дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Тогда при четном n

1) *если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой локального максимума,*
2) *если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой локального минимума функции f;*

и при нечетном n

1) *если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то точка x_0 является точкой убывания,*
2) *если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой роста функции f.*

45. Выпуклые функции. Критерии выпуклости функции.

Определение 6.10. *Функция f, определенная на интервале (a,b), называется выпуклой, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и любых чисел $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, имеет место неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \qquad (78)$$

Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ это неравенство является строгим, то функцию называют *строго выпуклой*.

Определение 6.11. *Если для функции в (78) имеет место обратное неравенство, то функцию f называют вогнутой.*

Теорема 6.10.1. *(критерий выпуклости дифференцируемой функции). Пусть функция f дифференцируема на интервале (a,b). Тогда*

$$f - \text{выпуклая} \Leftrightarrow f' \uparrow.$$

При этом условию $f' \uparrow\uparrow$ соответствует строгая выпуклость f.

Используя доказанные ранее необходимые и достаточные условия монотонности функций, нетрудно получить в качестве следствия предыдущей теоремы следующую теорему.

Теорема 6.10.2. *(критерий выпуклости 2-дифференцируемой функции) Пусть функция 2-дифференцируема на интервале (a,b). Тогда*

$$f - \text{выпуклая} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

46. Первообразная. Теорема о первообразной. Неопределенный интеграл и его простейшие свойства.

Определение 7.1. *Пусть функции F и f определены на интервале (a,b). Функция F называется первообразной функции f, если*

$$\forall x \in (a,b) \quad F'(x) = f(x).$$

Теорема 7.1.1. *Если F является первообразной функции f на интервале (a,b), то при любом $C \in \mathbb{R}$ функция $F + C$ является первообразной функции f на этом интервале.*

Доказательство. Заключение теоремы верно, поскольку

$$\forall x \in (a,b) \quad (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Определение 7.2. *Совокупность всех первообразных функции f на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от функции f и обозначается символом*

$$\int f(x)dx.$$

Если F - одна из первообразных функции f, то, в силу выше сказанного,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (82)$$

где C - любая постоянная.

Отметим прежде всего два свойства, непосредственно вытекающие из определения неопределенного интеграла:

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x) + +C$.

Следующие два свойства называют свойствами линейности интеграла:

3. $\int(f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad (c = const)$.

47. Основные методы интегрирования: формула замены переменной и формула интегрирования по частям.

Теорема 7.3.1. *(формула замены переменной). Пусть f определена на интервале (a,b) и*

$$\int f(t)dt = F(t) + C,$$

а функция $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ дифференцируема. Тогда функция $(f\circ\varphi)\varphi'$ имеет на интервале (α,β) первообразную, причем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Теорема 7.3.2. *(формула интегрирования по частям). Пусть функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и функция gf' имеет первообразную. Тогда функция fg' имеет первообразную, причем*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$