Глава 1. Случайные события

1. Случайные события, классификация событий, операции над ними.

Определ. **Произведением** событ. A и B назв. событие C, которому благоприятств. исходы и A, и B. $C = A \cap B$

Определ. Случайные события A и B назв. несовместными, если $A \cap B = \varnothing$ (произведен. не благопр. ни один из исходов).

Пример: подбрасывание симметр. игральной кости. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ – „выпало нечётное кол-во очков"

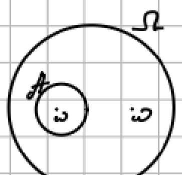
$B = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ – „выпало 3, 4, 5"

$A \cap B = \{\omega_3, \omega_5\}$ | $A \setminus B = \{\omega_1\}$

$A \cup B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ | $B \setminus A = \{\omega_4\}$

$\bar{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

Определ: Пусть Ω – м-во элементарных исходов эксперим. **Случайным событием** назв. любое подмножество Ω.



$\varnothing \subset \Omega$
$A \subset \Omega$
$\Omega \subset \Omega$

$\boxed{\text{м-во} \Leftrightarrow \text{событие}}$

Если $\omega \in A$, то ω благоприятствует событию A.

Определ. **Невозможным** назв. событие $\varnothing$, которому не благоприятств. ни один исход эксперимента

Определ. **Достоверным** назв. событие Ω, которому благоприятств. каждый исход эксперимента.

Определ. **Суммой событий** $A \cup B$ A и B назв. событие C, равное A или B, которому благоприятств. исходы хотя бы одного из A или B

Определ. Событием, противоп. событию A, назв. $\bar{A}$, котф. состоит из исходов, неблагоприятств. событию A.

$\bar{A} \cup A = \varnothing$ по построению

2. Определения: кольцо, алгебра, с-алгебра, минимальная с-алгебра над классом К. Борепевская с-алгебра

Определ. Кольцом $\mathcal{R}$ назв. непустой класс множеств, замкнутый относит. операции $\cup$ и $\setminus$.

Пример: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}$

$A = \{\omega_1, \omega_2\}$ $B = \{\omega_2, \omega_3\}$

$A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$A \setminus B = \{\omega_1\}$ $B \setminus A = \{\omega_3\}$

$\mathcal{R} = \{A, B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, \{\omega_1; \omega_3\}, \{\omega_2\}, \varnothing\}$

Определ. Алгеброй $\mathcal{A}$ назв. непустой класс м-ва, замкнутой относительно $\cup$ и отрицаних.

$\mathcal{A} = \{A, B, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ $\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega, \varnothing, \bar{A} \cup \bar{B}, \bar{A} \cup \bar{C}, \bar{B} \cup \bar{C}\}$

$A \cup B$ $\bar{A}$ $\bar{B}$ $\bar{A} \cup B$

Алгебра как класс м-ва м/б рассматрив. как $\mathcal{R} \cup \Omega$

Опред. Сигма-алгебра $\mathcal{F}$ — это непустой класс м-в, замкнутый относительно счётного количества сумм и отрицаний, т.е.:

1) если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$
2) $\Omega \in \mathcal{F}$
3) если послед $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Пример: $\mathcal{F} = \{\Omega, \varnothing, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_6\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \dots, \{\omega_5, \omega_6\}, \dots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \dots, \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \dots\}$ Ω, $\varnothing$, все единички, пары, тройки, четверки, пятерки.

Замечание Сигма-алгебра событий — м-во всех возможных в данном эксперим. событий.

Определен.: Пусть $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ и $K = \{[a, b)\}$, где b м/б $+\infty$.
Борелевской σ-алгеброй назв. миним. σ-алгебра над классом K полуинтервалов из $\mathbb{R}$. Обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$
$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$; B - борелевское м-во. B - конечное и счётное $\cup$ или $\cap$ $[a, b)$.

Примеры: $\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{[a, a + \frac{1}{n})\}$

3. Теорема Каратеодори.

Теорема Каратеодори (о продолжении вероятностной меры)

Пусть $Q(A)$ - счётно аддитивн. вероятн. мера на алгебре $\mathcal{A}$.
Тогда $\exists$ единственная счётно аддитивн. вероятн. мера $P(A)$, заданная на миним. σ-алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ и являющаяся её продолжением, т.е. $\forall A \in \mathcal{A}$ $P(A)=Q(A)$

1933г Колмогоров А.Н.

Аксиомы Колмогорова

Пусть Ω - м-во элементар. исходов эксперим. σ-алгеброй $\mathcal{F}$ назовём класс событий со св-ми:

$A_1)$ $\Omega \in \mathcal{F}$; $A_2)$ Если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$

$A_3)$ Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Счётно аддитивной вероятностной мерой назв. $P: \mathcal{F} \to [0,1]$, облад. св-вами:

$P_1)$ $P(\Omega)=1$ $P_2)$ $\forall A \in \mathcal{F}$ $P(A) \geqslant 0$ $P_3)$ $P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$\sqcup$ - сумма несовмест.

4. Определения: мера, конечно-аддитивная, счетно-аддитивная мера.

Вероятностная мера

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра мн-в из Ω.

__Определ.__: Конечно аддитивной вероятностной мерой $Q(A)$ назв. ф-ция м-ва $Q: \mathcal{A} \to [0,1]$ такая, что $Q(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$. $Q(\Omega) = 1$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $A \cap B = \varnothing$ $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$.

$$\left[Q\left(\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} Q(A_i) \right]$$

__Определ.__: Счётно аддитивной вероятностной мерой $P(A)$ назв. ф-ция м-ва $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ такая, что $P(A) \geq 0$ $\forall A \in \mathcal{A}$; $P(\Omega) = 1$. $\forall \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ таких что $\forall i, j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$ $P\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

5. Построение меры Лебега. Верхняя мера Лебега, нижняя мера Лебега, мера Лебега. Измеримое по Лебегу множество.

Мера Лебега. Измеримые ф-ции

Пусть $P=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$ $\quad P\in R_2$

P - прямоугольник $\quad \langle\,\rangle\in\{[\,,\,],\ (\,,\,)\}$.

Определ.: Мерой прямоугольника назв. число

$m(P)=(b-a)\cdot(d-c)$.

Определ. М-во A назв элементарным, если оно представимо в виде суммы прямоуг. хотя бы одним способом. т.е. $A=\cup P_k$ $\{P_k\}$ – покрытие A.

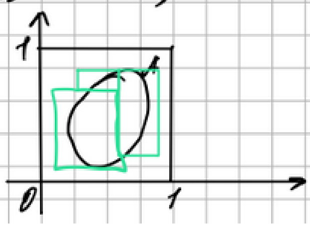
Определение: Мерой элем. м-ва A назв. сумма мер

$m'(A)=\sum m(P_k)$, где $\{P_k\}$ – разбиение A, т.к. $P_k\cap P_j=\varnothing$

Если $A\subset\cup A_k$, A_k – мво элем.м, то $m'(A)\le\sum m'(A_k)$

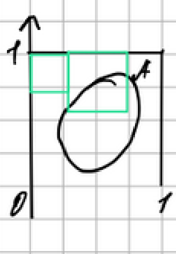
Р/м м-во $E=[0,1]\times[0,1]$

A - некоторое м-во. Р/м систему прямоуг. $\{P_k\}$: $A\subset\cup P_k$.



Определ.: Верхней мерой Лебега назв. число

$\mu^*(A)=\inf\limits_{\{P_k\}}\sum m(A_k)$.



Р/м $E\setminus A$. $\quad m(E)=1$. (накрываем прямоугольниками внешность A)

Определение: Нижней мерой Лебега назв. число $\mu_*(A)=1-\mu^*(E-A)$.

Определ.: Говорим, что A измеримо по Лебегу, если $\mu^*(A) = \mu_*(A) = \mu(A)$. Величина $\mu(A)$ назв. мерой Лебега м-ва A.

Св-ва меры Лебега:

① Если $A \subset \bigcup A_n$ (A, A_n – некотор. м-ва), то $\mu^*(A) \leq \sum \mu^*(A_n)$.

② Элем. м-ва измеримы по Лебегу.

$\mu(A) = m'(A) = \sum m(P_k)$

③ Критерий измеримости по Лебегу.

М-во A измеримо по Лебегу $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists B$ – элем. м-во, такое что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

④ Сумма и произвед. м-в, измеримых по Лебегу, также измеримы по Лебегу.

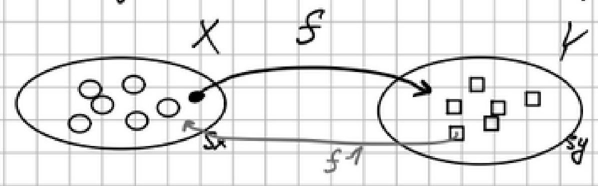
⑤ Мера Лебега счётно аддитивна, т.е. $\mu(A) = \sum \mu(A_k)$, если $A = \bigsqcup A_k$

⑥ Мера Лебега непрерывна, т.е. если $\{A_n\}$-монотон. класс, то $\mu(\bigcup A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ ($A_i \subset A_{i+1}$).

$\mu(\bigcap A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ ($A_i \supset A_{i+1}$)

Определ: М-во A из E назв измеримым по Лебегу, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \subset S$ измеримое : $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Пусть X и Y – некотор. м-ва. Пусть S_x и S_y – классы подмножеств. $f: X \to Y$ – некотор. ф-ция.



6. Вероятностная мера, ее свойства, непрерывность вероятностной меры.

Вероятностная мера — это специальный вид меры, который используется в теории вероятностей для количественной оценки случайных событий. Она определяет вероятность событий в вероятностном пространстве и обладает рядом свойств.

Определение вероятностной меры

Вероятностная мера P на σ-алгебре $\mathcal{F}$ пространства Ω — это функция, которая сопоставляет каждому событию $A \in \mathcal{F}$ число $P(A)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. **Неотрицательность**: $P(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.
2. **Нормировка**: $P(\Omega) = 1$.
3. **Сигма-аддитивность**: Если $A_1, A_2, \ldots$ — это последовательность попарно несовместимых событий (то есть $A_i \cap A_j = \emptyset$ для $i \neq j$), то: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Свойства вероятностной меры

1. **Свойство монотонности**: Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.
2. **Свойство комплементарности**: Для любого события A выполняется $P(A^c) = 1 - P(A)$, где A^c — комплемент события A.
3. **Свойство непрерывности**:
   - Если A_n — это последовательность событий, такая что $A_n \uparrow A$ (то есть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$), то: $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
   - Если A_n — это последовательность событий, такая что $A_n \downarrow A$ (то есть $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ и $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$), то: $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Непрерывность вероятностной меры

Непрерывность вероятностной меры означает, что вероятность предела последовательности событий равна пределу вероятностей этих событий. Это свойство важно для работы с бесконечными последовательностями событий и позволяет использовать предельные теоремы в теории вероятностей.

7. Классическое вероятностное пространство. Классическое определение вероятности.

Классическое вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$. 1) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ – конечное м- равновозможных исходов.

Построим вероятностную меру. Рассмотрим $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, где $A_i = \{\omega_i\}$. Тогда $A_i \cap A_j = \varnothing$ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$$1 \overset{A}{=} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{P_3}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

равновозможность $\Rightarrow P(A_i) = P(A_j) = p$

$$np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n} \Rightarrow \forall \omega_i \; P(\omega_i) = \frac{1}{n}$$

Пусть $A = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ $0 \le k \le n$. Тогда:

$$P(A) = P\left(\bigsqcup_{i=1}^{k} \omega_k\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n} \text{ – вероятн. мера в КВП}}$$

Классическое определение вероятности

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\dots, \omega_n\}$ – конечное множество равновозможных исходов, а $A = \{\omega_{i_1}, \dots\dots, \omega_{i_k}\}$ –некоторое событие. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \tag{1.1}$$

где k – количество исходов, благоприятствующих событию A, а n – общее количество исходов эксперимента.

8. Дискретное вероятностное пространство.

Дискретное вероятностное прост-во

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ – конечное или счётное м-во неравновозможн. исходов.

Пусть $P\{\omega_i\} = p_i \geq 0$ (зададим). Тогда p_i должны удовл. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Тогда $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) \cdot \mathbb{I}_{\omega_i}(A)$.

$$\mathbb{I}_{\omega_i}(A) = \begin{cases} 1, & \omega_i \in A \\ 0, & \omega_i \notin A \end{cases}$$

<u>Пример</u>: Монета подбрас до 1-го появления „орла".

$\Omega = \{о, ро, рро\}$.

$p_1 = P(о) = \frac{1}{2}$ $\quad p_2 = P(ро) = \frac{1}{4}$

$p_k = \frac{1}{2^k}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1/2}{1/2} = 1.$

$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \omega_k = \Omega$

Остановка на чётном шаге $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$

9. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение: Пусть (Ω, F, P) – вероятност. прост-во. $A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$ (т.е. B точно наступит).

Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B назв. число $\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Св-ва условной вероятности:

1. $P(B|B) = 1$
2. $P(A|B) \geq 0$
3. Если $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$, то $P(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$

Условная вероятн. удовл. определ. вероятн. меры, т.е. $P(A|B)$ – вероятн. мера на $(\Omega_B, \mathcal{F}_B, P(A|B)) \subset (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\Omega_B = B \subset \Omega$, $\mathcal{F}_B = \sigma(B) \subset \mathcal{F}$

$P_{A|B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(B > 0)$ $B \neq \varnothing$

Теорема: умножение вероятностей

Пусть A и B – случ. события, такие, что $P(B) > 0$. Тогда:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Пусть A_1, A_2, A_3 – случ. события, такие, что $P(A_1) > 0$ $P(A_1 A_2) > 0$.

Тогда $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$

Пример: Студент выучил 20 из 25. Какова вероятность, что 3 достанутся выученные, «5»?

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) =$

$= \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \simeq 0,4965.$

10. Формулы полной вероятности и байеса.

Теорема (формула полной вероятности).

Пусть (Ω, F, P) - вероятн. пр-во и $\{A_i\}_i^\infty \in F$ - полная группа попарно несовм. событий, $P(A_i) > 0$. и пусть $A \in F$ - некоторое событие $P(A|A_i) \geq 0$. Тогда $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(A|A_i)$

Док-во. $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i)) =$

$= P(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)) \overset{P(3)}{=\!=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A) \cdot P(A|A_i)$

чтд.

Теорема (формула Байеса).

Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - полная группа попарно несовм. событий. Пусть для некотор. A $P(A) > 0$. Тогда $\forall\ 1 \leq i < \infty$

$$P(A_i | A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A|A_i)}{P(A)}$$

Док-во: Т.к. $P(A) > 0$, то $P(A_i | A) = \dfrac{P(A \cap A_i)}{P(A)} =$

$= \dfrac{P(A_i) \cap P(A|A_i)}{P(A)}$

апостериорные вероятн. гипотез.

11. Независимость событий. Независимость в совокупности.

Независимость событий

Определение Случ. соб. A и B назв. независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Независимость в совокупности

Определение События $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ назв. независ. в совокупн., если $\forall\, 2 \le k \le n$ $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$

Замечание: Из независ. в совокупности следует попарн. независ. Но не обратно.

12. Теорема о независимости противоположных событий. Критерий независимости случайных событий.

Теорема (о независ. противоп. событий)

Пусть A и B — независ. Тогда A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B попарно независимы.

Док-во: 1) Д/м A и $\overline{B}$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (AB)) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) =$

$= P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

Док-во остальное самостоятельно.

Критерий независим. событий:

Пусть A и B таковы, что $P(B)>0$. Тогда A и B независимы $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Док-во: **Необходимость:** Пусть A и B независ. Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$ (по опред. усл. вероятн.)

Достаточность: Пусть верно, что $P(A|B) = P(A)$. Тогда

$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) =$ (из опред. усл. вероятн. след.)

$= P(A)\cdot P(B)$ т.е. выполнено определ. независ. событий

Глава 2. Случайные величины

1. Определение измеримой функции, абстрактной и действительной. Критерий измеримости действительных функций (полупрямые)

Определ: Ф-ция $f: X\to Y$ назв (S_x, S_y)-измеримой, если $\forall B\subset S_y$ $f^{-1}(B)\subset S_x$

Примеры: 1) $X=Y=\mathbb{R}$ $S_x=S_y=\{(-\infty, a)\}$

Тогда $f(x)$ - непрерывн. на $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ измерима на $\mathbb{R}$

2) $X=Y=\mathbb{R}$ $S_x=S_y=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - борелевская σ-алгебра, т.е. содерж. все возм. открытые м-ва, их пересеч и т.д.

$f(x)$, измеримая $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ - борелевская ф-ция.

Абстрактная измеримая функция

Абстрактная измеримая функция — это функция, определенная на абстрактном измеримом пространстве, которая удовлетворяет критериям измеримости, описанным выше. Она может принимать значения в любом измеримом пространстве, не обязательно в $\mathbb{R}$.

Действительная измеримая функция

Действительная измеримая функция — это частный случай абстрактной измеримой функции, где значения функции принимаются в действительных числах. То есть, функция $f: X \to \mathbb{R}$ является действительной измеримой, если для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(B)$ измеримо в X.

Теорема: Критерий измеримости (действит. ф-ций)

Действит. ф-ция $f(x)$ измерима $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(B) = f^{-1}(-\infty, c)$ измеримо.

Или: $f^{-1}(B) = \{x : f(x) < c\}$

2. Случайная величина (сл.в.). Виды сл.в.(дискретная и абсолютно непрерывная)

Определение: Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятн. пр-во. Случайной величиной ξ назв. ф-ция $\xi: \Omega \mapsto R$ такая, что $\forall x \in R$ $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$, т. ξ - измерим. по $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ ф-ция и $\forall b \in \mathcal{B}$ $\xi^{-1}(b) \in \mathcal{F}$. $b \in (-\infty, \infty)$.

Абсолютно непрерывные определения

Случ. велич. ξ назв. абсолютно непрерывн., если $\exists f(x) \geq 0 : F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. $f(x)$ ф-ция плотности распр.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ $f(x) = F'_\xi(x)$ (почти всюду)

3. Функция распределения (ф.р.) и ее свойства.

Определение: Ф-ция распределения вероятностей случайной величины ξ назв. $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$.

$(F(x) = P\{\xi < x\}$

Св-ва ф-ции распределения:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $F_\xi(x)$ – неубыв., непрерывная слева ф-ция.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$
4. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
5. $P\{\xi = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0)$.

4. Теорема о существовании сл.в., соответствующей функции со свойствами ф.р.

для любой неубывающей функции распределения вероятностей F(x), которая удовлетворяет определённым условиям, существует случайная величина X, распределение которой описывается этой функцией.

Условия для функции распределения

Функция распределения $F(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. **Неубывание**: $F(x_1) \leq F(x_2)$ для всех $x_1 < x_2$.
2. **Границы**:
   - $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
   - $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. **Правосторонняя непрерывность**: $F(x)$ должна быть правосторонне непрерывной, то есть для любого x выполняется: $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

Существование случайной величины

Согласно теореме, если функция $F(x)$ удовлетворяет вышеуказанным условиям, то можно построить случайную величину X следующим образом:

1. **Определение случайной величины**: Случайная величина X может быть определена через равномерное распределение на интервале $[0,1]$. Если U — равномерно распределённая случайная величина на $[0,1]$, то случайная величина X может быть определена как:
   $X = F^{-1}(U)$
   где F^{-1} — обратная функция к F.
2. **Распределение случайной величины**: В результате, случайная величина X будет иметь функцию распределения $F(x)$.

5. Функция плотности распределения сл.в. Ее свойства.

$-\infty$

Определение. Функция $f(x)$ называется функцией плотности распределения вероятностей случайной величины ξ и обладает свойствами

1. При любом $x \in R$ $f(x) \geq 0$.
2. При почти всех $x \in R$ $f(x) = F'(x)$. (6.2)
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

6. Дискретная сл.в. Основные типы дискретных распределений (постановка задачи, закон распределения): распределение Бернулли, равномерное дискретное, биномиальное, пуассоновское, геометрическое распределения.

Пусть $(\Omega,\ \boldsymbol{F}, P)$ – вероятностное пространство, $R = (-\infty, +\infty)$ –множество действительных чисел.

Определение. Случайной величиной называется действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, ($\xi : \Omega \to R$) такая, что для каждого действительного x

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \boldsymbol{F}.$$

Здесь $\boldsymbol{F}$ – σ-алгебра событий, то есть $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ – некоторое событие вероятностного пространства.

Распределение Бернулли

Постановка задачи

Распределение Бернулли описывает случайную величину, которая принимает только два возможных значения: успех (обычно обозначается как 1) и неудача (обычно обозначается как 0). Это распределение используется для моделирования ситуаций, где результат может быть только одним из двух исходов. Например:

- Подбрасывание монеты (орел или решка).
- Тестирование на наличие дефекта в изделии (дефектное или бездефектное изделие).
- Успех или неудача в каком-либо эксперименте (например, успешная продажа товара или нет).

Закон распределения

Если X — случайная величина, описывающая результат испытания, то закон распределения Бернулли можно записать следующим образом:

- Вероятность успеха (значение 1):
  $P(X = 1) = p$
- Вероятность неудачи (значение 0):
  $P(X = 0) = 1 - p$

где p — вероятность успеха, и $0 \leq p \leq 1$.

Таким образом, закон распределения можно представить в виде:

$$P(X = k) = \begin{cases} p & \text{если } k = 1 \\ 1 - p & \text{если } k = 0 \end{cases}$$

Равномерное дискретное распределение

$\xi \sim R(N)$ $(\xi \sim U(N))$

Стохастич. эксперим. – конечное м-во равновозможных исходов. (классич. вероятн. пр-во).

Случайная велич. ξ - номер наступившего исхода.

$P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}$ $k = \overline{1, N}$

$\sum_{k=1}^{N} P\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1.$

<u>Например:</u> подбрасыв. кубика. (ξ-номер грани).

6. $\xi \sim Bin(n, p)$

$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ $k \in \{0, \dots, n\}$

Биномиальное распределение

Постановка задачи

Биномиальное распределение описывает количество успехов в фиксированном числе независимых испытаний, каждое из которых имеет два возможных исхода: успех (обычно обозначается как 1) и неудача (обычно обозначается как 0). Это распределение используется в ситуациях, где:

- Мы проводим n независимых испытаний.
- Вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна p.
- Интересует количество успехов k в этих n испытаниях.

Примеры применения биномиального распределения:

- Подбрасывание монеты n раз и подсчет количества орлов.
- Оценка количества дефектных изделий в партии из n изделий.
- Подсчет числа успешных продаж в n попытках.

7. $\xi \sim Pois(\lambda)$; $\lambda = np$

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

Пуассоновское распределение

Постановка задачи

Пуассоновское распределение описывает количество событий, происходящих в фиксированном интервале времени или пространства, при условии, что эти события происходят с постоянной средней частотой и независимо друг от друга. Это распределение используется в ситуациях, где:

- События происходят случайным образом.
- Среднее количество событий за интервал времени или пространства известно и обозначается как λ (лямбда).
- Интересует количество событий k за данный интервал.

Примеры применения пуассоновского распределения:

- Количество звонков в колл-центр за час.
- Число автомобилей, проезжающих через перекресток за день.
- Количество дефектов в партии изделий.

12.04.23 Лекция № 8 Геометрическое распределение

Стохастич. эксперимент – испытание Бернулли проводится до тех пор, пока не появится 1-ый успех.

ξ – кол-во произведённых испытаний. (или кол-во испытаний, провед. до 1-ого успеха).

Построим закон распределения:

$$P(\xi = k) = P\{\overline{\omega} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, 1)\} = P\{\varepsilon_1 = 0\} \cdot P\{\varepsilon_2 = 0\} \cdot \dots \cdot P\{\varepsilon_{k-1} = 0\} \cdot P\{\varepsilon_k = 1\} = p \cdot q^{k-1}. \qquad 0 < p, q < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = 1.$$

Закон распределения:

$$\boxed{P\{\xi = k\} = p q^{k-1}} \qquad 0 < p < 1 \quad q = 1 - p \quad k \in \mathbb{N}$$

7. Равномерное непрерывное распределение (построение функций, ф.р., функция плотности, графики)

① Равномерное непрерывное распредел.

$\xi \sim R[a,b]$ $\quad$ $\xi \sim U[a,b])$

ξ - ошибки от округл. измерений „прибора со шкалой"

Построим распределение:

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$

Из условия эксперимента : $f(x) = c = const$ на $[a,b]$ и $f(x) = 0$ вне $[a,b]$. Воспольз. св-вом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} cdx + \int_{b}^{+\infty} 0dx = 0 + cx\Big|_a^b + 0 = c(b-a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$$

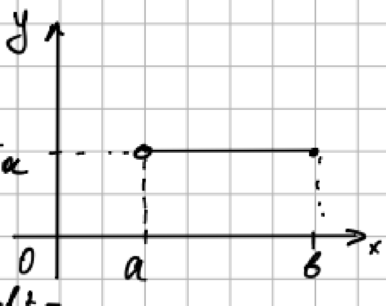
26.04
10.05
минимум

Таким образом $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \\ 0, & x > b, \ x \le a \end{cases}$

Ф-ция распред. по ф-ции плотности:

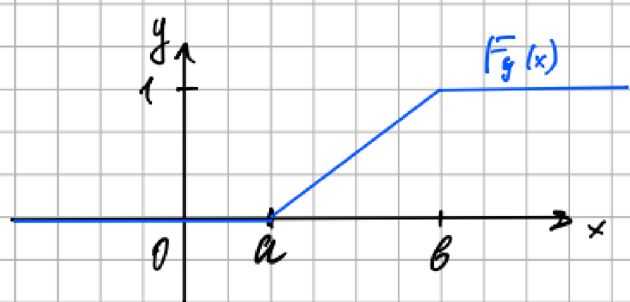
Пусть $x \le a$. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.

Пусть $x \in (a, b]$ $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$



Пусть $x > b$. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0dt = 0 + \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



8. Показательное (экспоненциальное) распределение (построение ф.р., функции плотности, графики, свойство отсутствия последействия)

② Показательное (экспоненциальное) распределение.

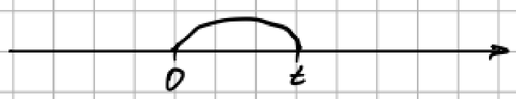
$\xi \sim \Pi(\lambda)$ λ – параметр распред.

ξ – время безотказной работы „прибора". (вр. выхода из стр.)

Построим распределение.

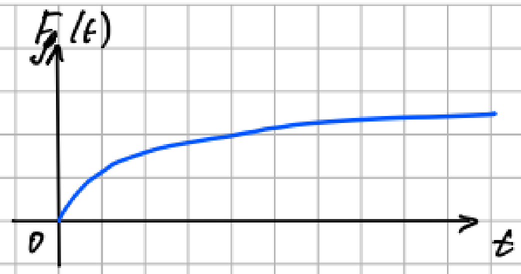
По усл. эксперимента: $\xi \geq 0$.

Предположим, что прибор проработал безотказно t времени:



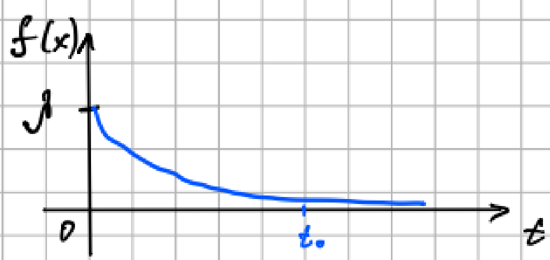
Ф-ция распред. $\xi \sim \Pi(\lambda)$

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$



Ф-ция плотности:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$$



Свойство отсутствия последействия

Одним из ключевых свойств показательного распределения является свойство отсутствия последействия (или "без памяти"). Это означает, что вероятность того, что событие произойдет в будущем, не зависит от того, сколько времени уже прошло. Формально это можно записать как:

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

для всех $s, t \geq 0$. Это свойство делает показательное распределение уникальным среди непрерывных распределений и полезным в различных приложениях, таких как теория очередей и надежность систем.

9. Нормальное распределение. (ф.р., функции плотности, графики, свойства)

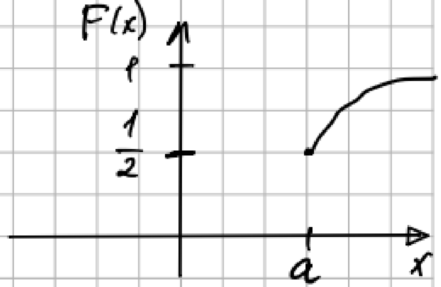
③ Нормальное распределение (распред. Гаусса):

$\xi = N(a, \sigma^2)$

a - среднее значение

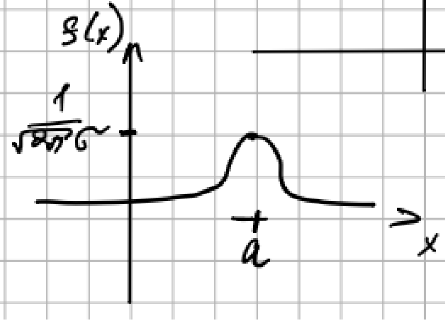
σ - среднее квадр. о ...ение (характер. разброс).

ξ - измерение некотр. неизвестн. величины.



$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$



10. Случайные векторы. Ф.р. сл. вектора, её свойства. дискретные и непрерывные сп.векторы.

Случайные вектора и независ. случ. величин.

Опред. Пусть (Ω, F, P) - вероятн. пр-во. Случайным вектором назв. $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ со случ. коорд. где $\xi_i \in (\Omega, F_i, P_i)$

$(\Omega, F, P) = (\Omega, F_1, P_1) \times \dots \times (\Omega, F_n, P_n)$

Пример: подбрасываем 5 играл. костей. $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)$

$\xi_i \sim R(6)$

ε	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пример: $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3$ ξ_1 - кухня кв. ξ_2 - S кв. ξ_3 колич. к.

Определ. Ф-цией распред. вероятностей случайного вектора назв. $F_\xi(x_1 \dots x_n) = P\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\}$.

При $n = 2$ $F_{\xi\eta}(x, y) = P\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\}$.

Св-ва ф-ции распред. вероятностей случайного вектора

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad 0 \le F_{\xi\eta}(x,y) \le 1$

2. При фиксир. x_0 $F_{\xi\eta}(x_0, y)$ – неуб, непр слева по y

   При фиксир y_0 $F_{\xi\eta}(x, y_0)$ – неуб., непр. слева по x

3. $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_\eta(y) \\ \lim\limits_{y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x) \end{array}\right\}$$

   $$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = 1 \quad \lim_{x \to -\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{y \to -\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F_{\xi\eta}(x,y) = 0.$$

Определ.: Случайный вектор наз. дискретным, если его коорд. – дискретные случ. величины.

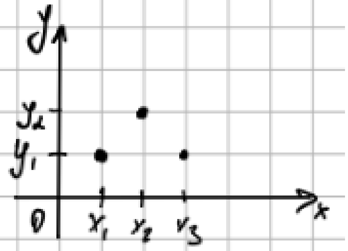
Закон распределения для случ. вектора:

$$p_{ij} = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \quad 0 < p_{ij} < 1 \quad \forall i, j$$

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1$$

x_i – знач ξ

y_j – знач η



Если известно совместное распред. случ. величин ξ и η, то частные распред. имеют вид:

$$p_i = P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$$

$$q_i = P\{\eta = y_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$$

ξ	x_1	x_2	x_3
p	p_1	p_2	p_3

η	y_1	y_2
p	q_1	q_2

Дискретные случайные векторы

Дискретный случайный вектор принимает конечное или счётное множество значений. Для дискретного случайного вектора можно определить его функцию вероятности:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

Пример

Если $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ — дискретный случайный вектор, где X_1 и X_2 могут принимать значения 0 или 1, то можно построить таблицу вероятностей для всех возможных комбинаций значений.

Непрерывные случайные векторы

Непрерывный случайный вектор принимает значения в непрерывном множестве. Для непрерывного случайного вектора можно определить его функцию плотности вероятности (ф.п.):

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

где $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ — функция плотности вероятности.

Пример

Если $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ — непрерывный случайный вектор, где X_1 и X_2 имеют нормальное распределение, то функция плотности вероятности будет определяться как:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$$

где μ_1, μ_2 — математические ожидания, σ_1, σ_2 — стандартные отклонения, а ρ — коэффициент корреляции.

11. Независимые сл.величины. Критерий независимости сл.вепичин.

Определение. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если при любых действительных x и y имеет место

$$P\{\omega : \xi(\omega) < x, \eta(\omega) < y\} = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) < y\}.$$

К основным числовым характеристикам случайных величин относят математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

12. Числовые характеристики сп.в: Математическое ожидание и его свойства.

Определение. Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k \,, \tag{5.2}$$

(при условии, что ряд сходится). Здесь x_k–значения случайной величины ξ, $p_k = P\{\xi = k\}$ –вероятность, с которой случайная величина ξ принимает значение x_k.

Свойства математического ожидания.

1. Если $P\{\xi = C\} = 1$, то $M\xi = C$. Иначе $MC = C$, где $C = const$.
2. $MC\xi = CM\xi$, где $C = const$.

3. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$.
4. Если случайные величины ξ и η независимы, то $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

Определение. Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \tag{5.4}$$

Свойства дисперсии.

0. $D\xi \geq 0$.
1. Если $P\{\xi = C\} = 1$, то $D\xi = 0$. Иначе $DC = 0$, где $C = const$.
2. $DC\xi = C^2 D\xi$, где $C = const$.
3. Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta.$$

4. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Определение. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют величину $\sigma = \sqrt{D\xi}$.

13. Обобщенное неравенство Чебышёва. Следствие (неравенство Чебышёва)

7 **Неравенство Чебышёва** (обобщен.).

Пусть ξ – неотр. случ. велич., а $g(x)$ неуб. на мн-ве знач. ξ непрер. ф-ция. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq Mg(\xi) : g(\varepsilon))$.

Док-во: $Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dF_\xi(x) = \int_{0}^{\infty} g(x)\,dF_\xi(x) \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)\,dF_\xi(x) \geq$

$\geq g(\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{\infty} dF_\xi(x) = g(\varepsilon)(\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) - F_\xi(\varepsilon)) =$

$= g(\varepsilon)(1 - P\{\xi < \varepsilon\}) = g(\varepsilon)\cdot P\{\xi \geq \varepsilon\}$

$Mg(\xi) \geq g(\varepsilon)\cdot P\{\xi \geq \varepsilon\}$

Следствие: Пусть ξ – некотор. случ. велич. с конеч. мат. ожид. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

14. Вычисление математического ожидания для распределений Бернулли, биномиального распределения, распределения Пуассона, равномерного непрерывного, показательного, нормального законов распределения.

1. **Распределение Бернулли**:
   - Если X — случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$, то математическое ожидание вычисляется как: $E(X) = 1\cdot p + 0\cdot(1-p) = p$
2. **Биномиальное распределение**:
   - Если X — биномиально распределенная случайная величина с параметрами n (число испытаний) и p (вероятность успеха в каждом испытании), то: $E(X) = n\cdot p$
3. **Распределение Пуассона**:
   - Если X — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ (среднее число событий за фиксированный интервал), то: $E(X) = \lambda$
4. **Равномерное непрерывное распределение**:
   - Если X — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[a, b]$, то: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
5. **Показательное распределение**:
   - Если X — случайная величина, распределенная по показательному закону с параметром λ (интенсивность), то: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
6. **Нормальное распределение**:
   - Если X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2, то: $E(X) = \mu$

15. Числовые характеристики сп.вепичин: Начальные, центральные и смешанные моменты. дисперсия и ее свойства.

Начальные центральные и смешанные моменты распределения

Опред. Начальным моментом k-того порядка ξ назв. число $m_k = M\xi^k$, если $M|\xi^k| < +\infty$.

$m_1 = M\xi \quad m_2 = M\xi^2$

Определ. Центральным моментом k-того порядка ξ назв. $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k \quad M|\xi| < +\infty$.

$\mu_1 = M(\xi - M\xi) = M\xi - M\xi = 0$

$\mu_2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi$

Определ. Смешанным моментом k-того порядка ξ назв. $\alpha_{ij} = M(\xi - M\xi)^i(\eta - M\eta)^j$, $i + j = k$, $M|\xi| < +\infty$, $M|\eta| < +\infty$.

$k = 1 \quad \alpha_{ij} = M(\xi - M\xi)^1(\eta - Mn)^0 = M(\xi - m\xi)^0(\eta - Mn)^1 = 0$

$k = 2 \quad \alpha_{20} = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi = \mu_{2\xi}$

$\alpha_{02} = D\eta = \mu_{2\eta}$

$\alpha_{11} = M(\xi - M\xi)^1(\eta - Mn)^1 = cov(\xi, \eta)$

Свойства дисперсии:

0) $D\xi \geq 0$, т.к. $M(\xi - M\xi)^2 \geq 0$

1) $DC = 0 \qquad C = const$

$DC = M(C - MC)^2 = M(C - C) = M(0) = 0.$

2) $DC\xi = C^2 D\xi$

$DC\xi = M(C\xi - MC\xi)^2 = M(C(\xi - M\xi))^2 = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 D\xi$

3) Если случ. велич. ξ и η независ., то $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$

$D(\xi \pm \eta) = M((\xi \pm \eta) - M(\xi \pm \eta))^2 = M((\xi - M\xi) \pm (\eta - M\eta))^2 =$

$= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 - 2M(\eta - M\eta)M(\xi - M\xi) =$

$= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 - 2(M(\xi\eta - \eta M\xi - \xi M\eta + M\xi M\eta))$

$= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 - 2(M\eta\xi - M\eta\xi - M\eta\xi + M(M\xi \cdot$

$\cdot M\eta)) = D\xi + D\eta - 2 \cdot (M\eta \cdot M\xi - M\xi \cdot M\eta - M\eta M\xi + M\xi \cdot M\eta) =$

$= D\xi \cdot D\eta.$

④ $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi^2 + M\xi^2)$

10.05.23г Лекция №12

Св-ва дисперсии

⑤ Для произвольных случ. велич. ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$ $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta) \pm 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$

$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)\cdot(\eta - M\eta)$ – ковариация

Док-во: см. п. 4.

Ковариация и её свойства. Коэффициент корреляции и его свойства.

Опред: Коэффициент корреляции ξ и η - число r, равное

$$r = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\,\sqrt{D\eta}}$$

Св-ва r:

① $|r| \leq 1$

② Если ξ и η независ, то $r = 0$. Обратное неверно

Независ $\Rightarrow$ некорреляция

③ Если ξ и η линейно связаны, то $|r| = 1$.

Если $|r| = 1$, то ξ и η линейно связаны, т.е. $\eta = a\xi + b$. $a \neq 0$.

Коэф. корреляц. показывает, насколько связь $\eta = f(\xi)$ близка к линейной.

Характеристические функции

1. Характеристическая функция, определение. Вид для дискретной и абсолютно непрерывной сл.в.

Определ. Характеристич. ф-цией ξ назв. $\varphi(t) = Me^{it\xi}$, $t \in \mathbb{R}$

Вид для дискретной случайной величины

Если X — дискретная случайная величина, принимающая значения x_k с вероятностями $p_k = P(X = x_k)$, то её характеристическая функция имеет вид:

$$\phi_X(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Вид для абсолютно непрерывной случайной величины

Если X — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$, то её характеристическая функция выражается через преобразование Фурье плотности:

$$\phi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx.$$

2. Теорема о существовании х.ф.

Теорема о существ. характер. велич.

Любая случ. велич. ξ имеет характер. ф-цию

Док-во: $\varphi(t) = Me^{it\xi}$ сущ., если $\exists\, M|e^{it\xi}| < +\infty$.

Т.к. $|e^{it\xi}| = 1$, то $\varphi(t)$ сущ. для $\forall \xi$.

3. Свойства х.ф.(формулировки)

Свойства:

1. $\varphi(0)=1; \quad |\varphi(t)|\le 1 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\varphi(0)=Me^{i0\xi}=M1=1 \quad |\varphi(t)|=|Me^{it\xi}|\le M|e^{it\xi}|=1$

2. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

$\varphi(-t)=M(\cos t\xi - i\sin t\xi)=M\cos t\xi - iM\sin t\xi=\overline{M\cos t\xi + iM\sin t\xi}=$
$=\overline{\varphi(t)}$

3. характеристич. ф-ция равномерно непрерывна

$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_1x}dF(x)-\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_2x}dF(x)\right|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{it_2x}\left(e^{i(t_1-t_2)x}-\right.\right.$
$\left.\left.-1\right)dF(x)\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|e^{it_2x}|\cdot|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\cdot dF(x)=\underbrace{\int_{|x|\le A}|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\,dF(x)}_{J_1}+$
$+\underbrace{\int_{|x|>A}|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\,dF(x)}_{J_2}$

$|e^z-1|=|\cos z+i\sin z-1|=\sqrt{(\cos z-1)^2+\sin^2 z}=\sqrt{\cos^2 z-2\cos z+1+\sin^2 z}=$
$=\sqrt{2-2\cos z}\le 2$

$J_2<2\int dF(x)=2P\{|\xi|>A\}$

3. Доказательство свойства "Равномерная непрерывность х.ф."

4. доказательство свойства "Существование производных и Вычисление моментов с использованием х.ф.

5. Теорема единственности.

Теорема (о единственности хар. ф-ции)

Пусть $\varphi(t)$ – хар. ф-ция двух распредел. $F(x)$ и $G(x)$.

Т.е. $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) \quad \varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x)$. Тогда $F(x)\equiv G(x)$.

$(P\{\omega: F(x)\ne G(x)\}=0)$.

7. Теорема бохнера-Кинчина.

Теорема Бохнера-Хинчина (критерий сущ. характ. ф-ции)

Для того, чтобы непрерывн. $\varphi(t)$: $\varphi(0) = 1$ была хар. ф-цией вектор. распред. необход. и достат., чтобы $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ и $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ (комплексн.) квадратичн. форма была неотриц. определена: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j) \lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0$.

8. Теорема непрерывности.(Теорема Леви)

Теорема (Леви о непрерывности хар. ф-ции).

Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ - послед. хар. ф-ций, $\varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\xi_n}(x)$. Тогда если $\exists \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, то $\varphi(t)$ - хар. ф-ция $F_\xi(x)$.

Пусть $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow{w} F_\xi(x)$ (сходится слабо) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$.