

Методы вычислений

Никитенко Яна

28 декабря 2025 г.

02.09.25

1 1 Раздел

Интерполяция функций одного аргумента

Интерполяция - приближение.

1.1 Параграф 1 - Постановка интерполяций

Пусть заданна дискретным набором своих значений некоторая функция f а именно, данная функция определенна следующей табличей своих значений

тут пикча с табличкой

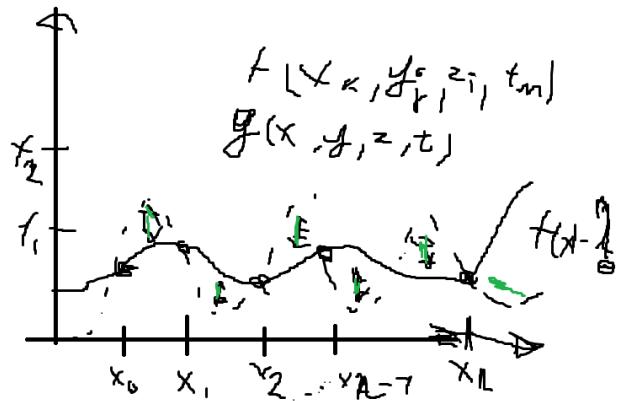
, где $f_k = f(x_k)$, $\forall k = \overline{0, n}$

требуется указать(построить) непрерывную на некоторой области функцию $g(x)$ такую что бы выполнялись следующие условия:

$$g(x_k) = f_k, \forall k = \overline{0, n} \text{ (1) (ГУИ)}$$

A handwritten table showing a set of data points. The table has two rows: the top row contains the values x_0, x_1, \dots, x_n and the bottom row contains the corresponding function values f_0, f_1, \dots, f_n . The table is enclosed in brackets and labeled with the letter f .

f	x_0	x_1	\dots	x_n	,
	f_0	f_1	\dots	f_n	,



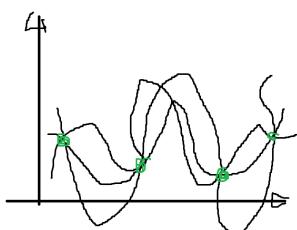
01 x, x_1, \dots, x_n будем называть **узлами интерполяций**(узлами приближений)

02 $f(x_k, f_k), \forall k = \overline{0, n}$ называется **интерполируемой(приближаемой) функцией**

03 $g(x)$ удовлетворяющей условиям (1) будем называть **интерполирующей (приближающей, интерполяционный)** или **интерполянта**

04 условия (1) будем называть **главным условием интерполяции(ГУИ)**

В сформулированной задачи интерполяции очевидно в качестве искомой интерполянты бесконечное количество искомой функции



1.2 Параграф - 2 Интерполяционный многочлен в общем виде

В этом параграфе покажем что в качестве искомой интерполяцый - задачи интерполяции(З.И) может быть предложен алгебраический многочлен в степени n , построенный по $(n+1)$ -му по парно различному узлу интерполяции.

Таким образом для $(n+1)$ узла интерполяции x_0, x_1, \dots, x_n осторожно попробуем построить алгебраический многочлен $\rho_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ (2)

Потребуем что бы алгебраический многочлен вида (2) удовлетворял ГУИ (1)

а именно что бы

$$\rho_n(x_0) = f_0 \quad (2) \quad a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0$$

$$\rho_n(x_1) = f_1 \Leftrightarrow a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \quad (3)$$

и т.д

$$\rho_n(x_n) = f_n \quad a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n$$

Равенство (3) по своей алгебраической природе представляют собой СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений) размерности

СЛАУ $(n+1)x(n+1)$ отн. несущ.коэф.

Что бы решить СЛАУ (3)

$$\text{запишем определитель } \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \dots \prod (x_j - x_i) \neq 0 \quad (4)$$

Что бы определитель (4) нужно чтоб узел $x_j \neq x_i, j \neq i$ (5) это есть условие по парной различности узлов интерполяции

Таким образом из выше изложенного можем получить следующие:

Определитель (4) отличен от нуля при условии (5), а седовательно СЛАУ (3) решив каким либо подходящим численным методом, сможем найти ее единственное решение, а именно значение искомых коэффициентов a_0, a_1

Найдя эти коэффициенты и подставим их в искомое (2) явно аналитическую формулу для искомого представления интерполянты:

$$\rho_n(x_n) = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0$$

Попробуем найти коэффициенты a_i . Мы хотим подставить (2) в качестве $g(x)$, то есть чтобы Потребуем чтобы алгебраический многочлен (2) удовлетворял ГУИ (1), чтобы выполнялись следующие равенства:

1. $\rho_n(x_0) = f_0$, по этой же логике $\rho_n(x_1) = f_1$

$$\begin{cases} \rho_n(x_0) = f_0 \\ \rho_n(x_1) = f_1 \\ \dots \\ \rho_n(x_n) = f_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f_0 \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = f_1 \\ \dots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f_n \end{cases} \quad (3)$$

Равенство (3) по своей алгебраической природе представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) размерности $(n + 1) * (n + 1)$ относительно неизвестных коэффициентов интерполянты $f_n(x)$ a_0, a_1, \dots, a_n

Чтобы решить СЛАУ (3) чтобы ее решить нужно чтобы ее главный определитель был отличен от нуля

$$(4) \Delta_{(\text{Equation 3})} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^1 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\dots = \prod_{j>i} (x_j - x_i) \neq 0$$

чтобы СЛАУ
(Equation 3)
имеется единственный
решение

Чтобы определитель (4) был отличен от нуля нужно, чтобы узел $x_j \neq x_i$, если $j = i$ (5)

(5) — условие попарной различности узлов интерполяции Таким образом из выше изложенного можем получить следующее:

При условии (5) определитель (4) будет отличен от нуля, а следовательно СЛАУ (3) будет иметь единственное решение. Соответственно решив СЛАУ

(3) каким-либо численным методом, сможем найти ее единственное решение, а именно значение искомых коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n . В свою очередь найдя эти коэффициенты и подставив из в исходное представление (2), мы получим явную аналитическую форму для исходного представления интерполянты

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 \quad (6)$$

Из выше изложенного, получаем следующий алгоритм построения интерполяционного многочлена (И.М.) в общем виде: По данным интерполяции $(x_k, f_k), k = \overline{0, n}$

1. записать общий вид искомого многочлена (2); $P_k(x) = (2)$
2. Построить вспомогательную СЛАУ (3)
3. Решить СЛАУ (3)
4. Найдя на шаге 3 коэффициенты a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , подставить из в исходное представление И.М. в общем виде записанный на шаге 1.

Тут пропущенная лекция, могут быть ошибки

2 Параграф 3

В предыдущем параграфе мы установили, что в случае попарно различных узлов интерполяции вспомогательная система (3) имеет единственное решение, а следовательно, искомая интерполянта вида (2) будет определена единственным образом.

Поскольку способ, описанный в предыдущем параграфе, имеет вычислительные ограничения с ростом числа узлов интерполяции, то, зная, что в задаче интерполяции (ЗИ) при условии (5) существует и притом единственное решение, далее будем решать ту же задачу, но иным способом.

Введем алгебраические многочлены:

$$l_k(x), \quad k = 0, \dots, n; \quad l_k(x_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнение (7) — фундаментальный многочлен Лагранжа (ФМЛ).

При помощи таких ФМЛ построим многочлен

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \cdot l_k(x). \quad (8)$$

Здесь l_0 будет принимать значение 1 в точке x_0 , l_1 в точке x_1 и так далее по индукции.

Покажем, что представление (8) действительно удовлетворяет главному условию интерполяции (ГУИ). Для этого подставим в него в качестве значения аргумента x узел x_j , где $j = 0, \dots, n$:

$$\begin{aligned} L_n(x_j) &\stackrel{(8)}{=} f_0 \cdot \underbrace{l_0(x_j)}_0 + f_1 \cdot \underbrace{l_1(x_j)}_0 + \cdots + f_j \cdot \underbrace{l_j(x_j)}_1 + \cdots + f_n \cdot \underbrace{l_n(x_j)}_0 \\ &\stackrel{(7)}{=} f_j \cdot 1 = f_j, \quad \forall j = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, разложение вида (8) (линейная комбинация ФМЛ) действительно удовлетворяет главному условию интерполяции.

Но отметим, что пока представление (8) непригодно для нахождения значений интерполянты вне узловых точек (что необходимо для полного разрешения задачи интерполяции).

В этой связи, зная, что фундаментальные многочлены Лагранжа $l_k(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ равны 0 в силу (8), применим основную теорему алгебры.

Небольшое отступление

Рассмотрим квадратный трёхчлен:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad x_1, x_2 — \text{корни.}$$

Тогда

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (10)$$

Если там хорошие числа, то все норм.

Это утверждение можно сформулировать и обратно: если есть произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$, где a, x_1, x_2 — произвольные числа, то можно получить все множество парабол, но все они будут иметь нули в точках x_1 и x_2 .

Возвращаемся обратно

В результате ФМЛ можно записать в следующем виде:

$$l_k(x)|_{k=0,\dots,n} = c_k(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n). \quad (11)$$

Потребуем также, чтобы представление (11) удовлетворяло условию нормировки

$$\begin{aligned} l_k(x_k) &= 1, \quad \forall k = 0, \dots, n; \\ l_k(x_k) &= c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n) \Rightarrow \\ c_k|_{k=0,\dots,n} &= \frac{1}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, осуществляя последовательную подстановку сначала (12) в (11), а затем (11) в (8), мы получим искомую явную аналитическую формулу интерполяционного многочлена в форме Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}. \quad (13)$$

Уравнение (13) — интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.

Тут тоже пропущенная лекция

3 Параграф 4 Интерполяционный многочлен в форме Ньютона

В данном параграфе рассмотрим еще один способ построения интерполяционного многочлена (ИМ), существование и единственность которого были изучены в параграфе (1.1.2). При этом данный способ будет лишен недостатков предыдущих двух способов решения задачи интерполяции (ЗИ).

3.1.1. Минутка школьной программы. ЛОЛ

Если дан многочлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, нам надо найти его коэффициенты:

$$\begin{cases} P_2(x_0) = \dots = A, \\ P'_2(x_0) = 2ax_0 + b = B, \\ P''_2(x_0) = 2a = C. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда можем найти значения коэффициентов. А как найти производную?

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (15)$$

А что, если мы откажемся от классического понимания производной (так как нам тяжело вычислить предел)?

Для дальнейшего использования дадим ряд вспомогательных определений.

Опр. 1. Разделёнными разностями (РР) нулевого порядка функции будем называть её узловые значения:

$$f : f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n). \quad (16)$$

Опр. 2. РР 1-го порядка будем называть

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (17)$$

Опр. 3. РР 2-го порядка будем называть выражение вида

$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (18)$$

Опр. 4. (Общее) РР l -го порядка будем называть функцию f следующего вида:

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+l-1}; x_{k+l}) = \frac{f(x_{k+1}; \dots; x_{k+l}) - f(x_k; \dots; x_{k+l-1})}{x_{k+l} - x_k}, \quad k = 0, \dots, n-l. \quad (19)$$

РР, указанные в приведённых определениях, можно рассматривать как дискретные приближённые аналоги соответствующих производных, понимаемых по классическому определению.

Соответственно, используя введённые РР, попробуем с их помощью восстановить искомый ИМ: $P_n(x) = L_n(x)$.

Для упрощения выскажем предположение, что интерполируемая функция f сама является алгебраическим многочленом степени n .

В этом случае такая функция f и её интерполяционный многочлен $P_n(x)$ в силу единственности такого многочлена будут тождественно равны друг другу, т.е. $\forall x \quad f(x) \equiv P_n(x)$.

Возьмём некоторую фиксированную точку x ; для определённости считаем, что $x < x_0$. Попытаемся найти значение в этой точке $f(x)$. С этой целью будем привлекать РР в следующем порядке:

$$f(x; x_0) \stackrel{\text{по опр}}{=} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \Rightarrow \underbrace{f(x)}_{?} = \underbrace{f(x_0)}_{\text{известно}} + \underbrace{f(x; x_0)}_{?} \underbrace{(x - x_0)}_{\text{известно}}. \quad (20)$$

Нам нужно найти $f(x; x_0)$ справа — неизвестно. Это уравнение, причём неявное.

Привлечём другие РР:

$$f(x; x_0; x_1) \stackrel{\text{по опр}}{=} \frac{f(x_0; x_1) - f(x; x_0)}{x_1 - x} \Rightarrow f(x; x_0) = \underbrace{f(x_0; x_1)}_{\text{известно}} + \underbrace{f(x; x_0; x_1)}_{?} \underbrace{(x - x_1)}_{\text{известно}}. \quad (21)$$

Снова получаем уравнение. Таким образом, подставляя (21) в (20):

$$f(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x; x_0; x_1)(x - x_0)(x - x_1). \quad (22)$$

Соответственно, продолжая аналогичные действия, то есть вводя новый узел интерполяции и привлекая РР следующего порядка, за конечное число шагов, исчерпав все узлы интерполяции, мы придём к уравнению следующего вида:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \\ & + \underbrace{f(x; x_0; x_1; \dots; x_n)}_{?}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \end{aligned} \quad (23)$$

кроме ‘?’ все остальное известно.

Если у нас дано:

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots, \quad Q_m(x) = b_m x^m + \dots$$

$$P_n(x) \stackrel{?}{=} Q_m(x) \iff \begin{cases} n = m, \\ a_k = b_j, \quad \forall k = j. \end{cases} \quad (24)$$

Обратим внимание, что в равенстве (23) в левой части стоит алгебраический многочлен степени n , а в правой части стоит многочлен.

Можем прийти к следующему выводу: для того чтобы равенство (23), как равенство двух алгебраических многочленов, выполнялось для всех значений аргумента x , необходимо, чтобы $f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) \equiv 0$. В противном случае равенство (23) будет выполняться лишь в конечном числе точек.

В этой связи равенство (23) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

Получили аналитическую явную формулу.

Таким образом, в условиях сделанного предположения формула (25) позволила нам получить явное аналитическое выражение интерполируемой функции.

Откажемся от сделанного предположения, т.е. будем считать, что $f(x)$ — произвольная интерполируемая функция. И наряду с такой функцией отдельно, то есть возьмём произвольную функцию $f(x)$ и многочлен $N_n(x)$:

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Это — интерполяционный многочлен в форме Ньютона.

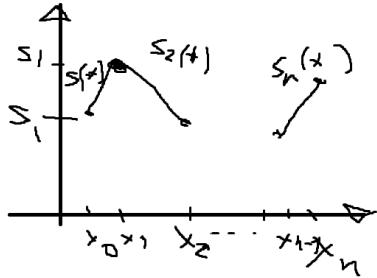
Непосредственной подстановкой можно убедиться, что алгебраический многочлен (26) действительно удовлетворяет ГУИ:

$$\begin{aligned} N_n(x_0) &\stackrel{(26)}{=} f(x_0) + f(x_0; x_1) \underbrace{(x - x_0)}_{=0} + 0 + \cdots + 0 = f(x_0); \\ N_n(x_1) &\stackrel{(26)}{=} f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x_1 - x_0) + 0 + \cdots + 0 = f(x_1); \\ N_n(x_2) &\stackrel{(26)}{=} \cdots = f(x_2); \end{aligned} \quad (27)$$

то есть $N_n(x)$ удовлетворяет ГУИ, а значит, является интерполяционным.

23.09.25

4 Параграф 5 Интерполяция кубическими сплайнами



$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad (1)$$

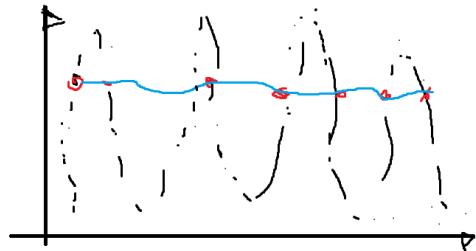
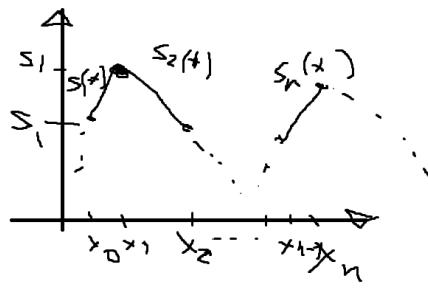
$$x \in (x_{i-1}, x_i)$$

Сплайн — кусок, фрагмент чего-либо.

На каждом отрезке сформирован соседними узлами интерполяции, определим некоторой алгебраический многочлен третьей степени вида (1).

И поскольку каждый такой многочлен будем рассматривать исключительно на соответствующем отрезке будем называть **кубическим сплайном** или алгебраическим многочленом третьей степени.

Сплайн - кусок, фрагмент чего либо.



Потребуем что бы кусочная "склейка" указана кубических многочленов удовлетворила главному условию интерполяции. А именно что бы каждый сплайн вида (1) удовлетворял следующему равенствам.

Каждый левый сплайн должен припринимать занчения левой точки(1)...

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, & i = \overline{1, n} \\ S_i(x_i) = f_i, & i = \overline{1, n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_i = f_{i-1}, & i = \overline{1, n} \\ a_i + b_i * h + c_i * h^2 + \alpha * h^3 = f_i, & i = \overline{1, n} \end{cases}$$

СЛАУ относительно нев.выраж $a_i, b_i, c_i, d_{i=\overline{i,n}}$ (2) ур, отн 4n непр

Недостающие уравнения будем строить требуя не только не прирывной склейки самих сплайнинов, но и не прерывной склейки их производных в тех точках.

Для удобства дальнейшего использования заполним следующую таблицу



ля удобства дальнейшего использования заполним следующую таблицу:

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_i, x_{i+1})$
$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3$	$S_{i+1}(x) = a_{i+1} + b_{i+1}(x - x_i) + c_{i+1}(x - x_i)^2 + d_{i+1}(x - x_i)^3$
$S'_i(x) =$ $b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$	$S'_{i+1}(x) =$ $b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2$
$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$	$S''_{i+1}(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)$

Обозначим $h = x_i - x_{i-1}$ (предполагаем равномерную сетку).

Теперь потребуем непрерывность склейки первых производных в точках склейки:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (32)$$

Также потребуем непрерывность склейки вторых производных в точках склейки:

$$S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (33)$$

Условия (32) и (33) дают систему:

$$\begin{cases} S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i), & i = 1, \dots, n-1, \\ S''_i(x_i) = S''_{i+1}(x_i), & i = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

что эквивалентно:

$$\begin{cases} b_i + 2c_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1, \\ 2c_i + 6d_i h = 2c_{i+1}, & i = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (34)$$

Таким образом получаем два набора уравнений:

$$b_i + 2c_i h + 3d_i h^2 = b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (35)$$

$$2c_i + 6d_i h = 2c_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (36)$$

По своей алгебраической природе равенства (35) и (36) объединяют коэффициенты соседних сплайнов, давая $(n-1) + (n-1) = 2n - 2$ уравнений.

Ранее из условий интерполяции мы имели $2n$ уравнений:

$$\begin{cases} S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, & i = 1, \dots, n, \\ S_i(x_i) = y_i, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (30)$$

Всего имеем: $2n + (2n - 2) = 4n - 2$ уравнений относительно $4n$ неизвестных $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=1}^n$.

Недостающие 2 уравнения получим из так называемого условия нулевой кривизны (УНК) для $S_1(x)$ в точке x_0 и $S_n(x)$ в точке x_n , что может быть записано как:

$$\begin{cases} S_1''(x_0) = 0, \\ S_n''(x_n) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 = 0, \\ 2c_n + 6d_n \cdot h = 0. \end{cases} \quad (37)$$

То есть:

$$S_1''(x_0) = 0, \quad (38)$$

$$S_n''(x_n) = 0, \quad (39)$$

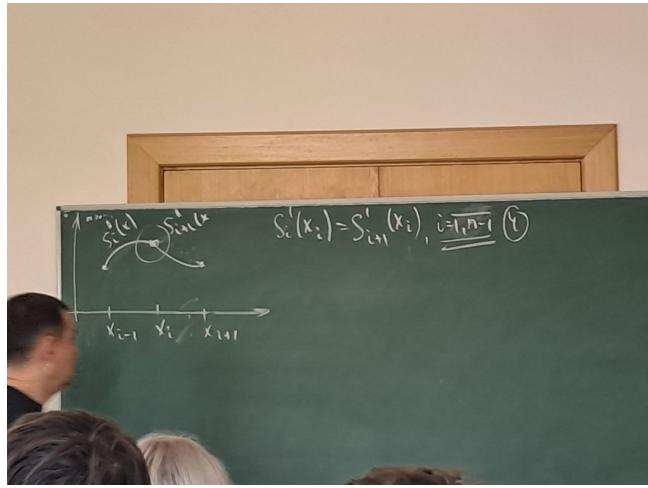
$$2c_1 = 0, \quad (40)$$

$$2c_n + 6d_n \cdot h = 0. \quad (41)$$

Таким образом, мы получили СЛАУ размерности $4n \times 4n$, состоящую из уравнений (30), (31), (35), (36), (40), (41). Можно убедиться, что главный определитель будет отличен от нуля, а следовательно, система будет иметь единственное решение.

Соответственно, решив данную СЛАУ любым подходящим численным методом, мы сможем найти искомые коэффициенты $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}_{i=1}^n$ для сплайнов, определяемых по формуле:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (28)$$

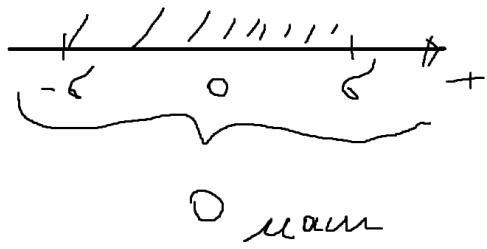


07.10.25

5 Раздел 2 Решение СЛАУ Метод Гаусса

$$a_{11} \neq 0, a_{22}^{(1)} \neq 0, a_{33}^{(2)} \neq 0, \dots a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$$

Соответственно если на каждом прямого хода мы встретим элемент $a_{kk_1}^{(k-1)} \equiv 0$ ($a_{kk_1}^{(k-1)} \in 0_\delta = (-\delta; \delta)$)
Любое число из этого интервала будет 0



Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (42)$$

Систему (42) можно записать в матричном виде:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (43)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор \mathbf{x} является решением системы (неизвестным):

$$\mathbf{x} = ? \quad (44)$$

Расширенная матрица коэффициентов СЛАУ (42) имеет вид:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right). \quad (45)$$

Далее будем предполагать, что СЛАУ (42) имеет единственное решение. Метод Гаусса условно подразделяют на 2 последовательных этапа:

1. Прямой ход

2. Обратный ход

Рассмотрим их подробнее.

5.1 Прямой ход Методом Гаусса

Сутью прямого хода является преобразование расширенной матрицы коэффициентов (РМК) системы (42) к так называемому верхнему треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & a_{ij} & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \quad (46)$$

где * обозначает возможные ненулевые элементы (кроме единиц на главной диагонали), a_{ij} и b_i — некоторые преобразованные коэффициенты.

В полученной системе:

(x_1, x_2, \dots, x_n) — уравнения с одним неизвестным x_n в последней строке.

21.10.25

В предыдущем параграфе мы рассмотрели базовую конструкцию метода Гаусса, в рамках которой на прямом ходе мы попутно делали предположения, что $a_{11} \neq 0$, и в результате мы могли делить строку на a_{11} , и что $a_{22}^{(1)} \neq 0$; с такой же целью и $a_{33}^{(2)} \neq 0$; … $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$.

Соответственно, если на k -ом шаге прямого хода мы встретим $a_{kk}^{(k-1)} \equiv 0$ ($a_{kk}^{(k-1)} \in O_\delta = (-\delta, \delta)$),

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & * & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k-1)} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(k+1)k}^{(k-1)} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k-1)} & * & * & * & * \end{array} \right)$$

В этом случае в строках с $k+1, \dots, n$ ищут элемент

$$a_{mk}^{(k-1)} = \max_{k+1 \leq j \leq n} |a_{jk}|. \quad (47)$$

1. Если $a_{mk}^{(k-1)} \neq 0$ ($\notin (-\delta, \delta)$), то меняют местами k -ую и m -ую строки РМК. В этом случае в позиции (k, k) $a_{mk}^{(k-1)} \neq 0$ ($\notin (-\delta, \delta)$), и прямой ход метода Гаусса может быть продолжен. Т.е. нормировка строки будет возможна.
2. Если $a_{mk}^{(k-1)} = 0$ ($\in (-\delta, \delta)$), тогда перестановка строк не решает проблему. И в этом случае ищут элемент

$$a_{km}^{(k-1)} = \max_{k+1 \leq j \leq n} |a_{kj}|. \quad (48)$$

и в этом случае, если $a_{km}^{(k-1)} \neq 0$ ($\notin (-\delta, \delta)$), то меняют k -й и m -й столбцы.

Таким образом, если элементы, определённые по формулам (47) и (48), будут равны 0, то прямой ход метода Гаусса будет вынужденно приостановлен ввиду невозможности произвести нормировку соответствующего диагонального элемента.

В случае перестановки столбцов в РМК параллельно необходимо запоминать соответствующую перестановку в векторе \mathbf{x} , с тем чтобы после завершения уже после обратного хода выполнить обратную перестановку неизвестных, вернув им натуральный порядок нумерации.

6.1.2 Нахождение определителя квадратной матрицы $A_{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2} \rightarrow \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (49)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \rightarrow \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \quad (50)$$

$$A_{n \times n} \rightarrow \Delta \sim n! \quad (51)$$

Таким образом, с ростом размерности матрицы n число операций, необходимое для нахождения определителя этой матрицы по классической формуле, растёт довольно заметно.

Применим к матрице $A_{n \times n}$ процедуру диагонализации, позаимствованную из метода Гаусса:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{эквив. преобр.}]{\text{над матриц.}} \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

При этом вспомним, что в процедуре диагонализации матрицы применяются следующие эквивалентные преобразования:

1. Умножение строки на $\frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}$
2. Прибавление к строке другой строки, умноженной на $\lambda \neq 0$
3. Перестановка строк или столбцов (в процедуре выбора главного элемента)

Таким образом, после завершения процедуры диагонализации исходной матрицы A её исходный определитель будет подвергнут следующим преобразованиям:

$$\frac{\Delta}{a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}} = (-1)^\nu \cdot \underbrace{\Delta}_{=1}, \quad (53)$$

$$\Delta = (-1)^\nu \cdot a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)}, \quad (54)$$

где ν — количество реализованных перестановок при выборе главного элемента (ПВГЭ).

Замечание. Отметим, что для того чтобы воспользоваться формулой (54), необходимо узнать нормирующие коэффициенты $a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \dots, a_{nn}^{(n-1)}$, для чего необходимо ...

5.2 Метод прогонки. Решение трехдиагональных СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ следующего вида:

$$\begin{cases} a_i \cdot x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & i = 1, \dots, n, \\ a_1 = c_n = 0. \end{cases} \quad (55)$$

Или подробнее:

$$a_i \cdot x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (56)$$

$$a_1 = c_n = 0. \quad (57)$$

Запишем СЛАУ (56)–(57) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_n \end{pmatrix}_{n \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}_{n \times 1}. \quad (58)$$

Запишем расширенную матрицу коэффициентов (РМК) СЛАУ (58):

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_1 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & a_3 & -b_3 & \dots & 0 & 0 & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -b_n & d_n \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & \dots & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & \dots & 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & * \end{array} \right). \quad (59)$$

Результирующая РМК после прямого метода Гаусса.

Если к СЛАУ вида (58) применить в лоб прямой ход метода Гаусса, то в результате него трехдиагональная РМК СЛАУ (58) будет преобразована к двухдиагональной итоговой РМК. При этом нулевые элементы, стоящие вне исходных ненулевых диагоналей, будут преобразованы снова в нулевые элементы (при этом нижняя из 3 диагоналей будет обнулена; а две оставшиеся изменят свои значения). Также нулевые элементы, расположенные выше двух полученных диагоналей в результате прямого хода метода Гаусса, не смогут оказывать влияния на итоговый результат (т.к. линейная комбинация нулей есть ноль).

В связи с чем поставим перед собой цель оптимизировать метод Гаусса применительно к случаю систем вида (58). А именно, попытаемся его усовершенствовать, устранив лишние «операции» по преобразованию нулевых элементов в себя. При этом мы откажемся от лобового применения метода Гаусса, используя при этом его конечный результат: а именно то, что после прямого хода уравнения примут двухкомпонентный вид

$$x_i = \underbrace{P_{i+1}}_? x_{i+1} + \underbrace{Q_{i+1}}_?, \quad i = 1, \dots, n \quad - (i\text{-е уравнение}). \quad (60)$$

Обратив внимание, что в i -ом уравнении вида (56) в результате его преобразования к виду (60) исчезает компонента x_{i-1} , однако эта неизвестная присутствует в $(i-1)$ -ом уравнении вида (60), которое имеет вид:

$$x_{i-1} = P_i x_i + Q_i \quad - (i-1)\text{-е уравнение}. \quad (61)$$

Соответственно, подставив выражение (61) для $(i-1)$ -го уравнения в уравнение (56), получим еще один (уже третий) способ записи i -го уравнения:

$$a_i(P_i x_i + Q_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i \quad - i\text{-е уравнение в третьей форме записи}. \quad (62)$$

$$a_i P_i x_i + a_i Q_i - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad (a_i P_i - b_i) x_i = -c_i x_{i+1} + (d_i - a_i Q_i). \quad (63)$$

$$x_i = \frac{c_i}{b_i - a_i P_i} \cdot x_{i+1} + \frac{a_i Q_i - d_i}{b_i - a_i P_i} \quad - i\text{-е уравнение в 4-й форме записи}. \quad (64)$$

Сравнивая две различные формы записи одного и того же i -го уравнения, а именно (60) и (64), мы можем прийти к следующим равенствам соответствующих коэффициентов:

$$P_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i P_i}, \quad Q_{i+1} = \frac{a_i Q_i - d_i}{b_i - a_i P_i}. \quad (65)$$

Рассмотрим формулы (65) применительно к первому уравнению ($i = 1$):

$$P_2 = \frac{c_1}{b_1 - a_1 P_1}, \quad (66)$$

$$Q_2 = \frac{a_1 Q_1 - d_1}{b_1 - a_1 P_1}. \quad (67)$$

Учитывая, что $a_1 = 0$, получаем:

$$P_2 = \frac{c_1}{b_1}, \quad Q_2 = -\frac{d_1}{b_1}. \quad (68)$$

Таким образом, используя формулы (65) и (68), мы можем однозначным образом задать искомые значения коэффициентов двухкомпонентных уравнений вида (60) в следующей последовательности:

$$\underbrace{(P_2, Q_2)}_{\text{из (68)}} \xrightarrow{\text{по (65)}} (P_3, Q_3) \xrightarrow{\text{по (65)}} \dots \xrightarrow{\text{по (65)}} (P_n, Q_n) \xrightarrow{\text{по (65)}} Q_{n+1}. \quad (69)$$

Таким образом, узнав коэффициенты двухкомпонентных уравнений вида (60), мы сможем реализовать обратный ход (но не построчный) по следующим формулам:

$$x_n = Q_{n+1}, \quad (70)$$

$$\begin{cases} x_{n-1} = P_n x_n + Q_n, \\ x_{n-2} = P_{n-1} x_{n-1} + Q_{n-1}, \\ \dots \\ x_1 = P_2 x_2 + Q_2. \end{cases} \quad (71)$$

Из вышеизложенного можем выделить следующий алгоритм метода прогонки:

Этап 1 (прямая прогонка) Он состоит в нахождении прогоночных коэффициентов:

$$(P_2, Q_2), (P_3, Q_3), \dots, (P_n, Q_n), Q_{n+1}. \quad (72)$$

Этап 2 (обратная прогонка) Нахождение x_i по формулам (70) и (71).

Структурно формулы (68), (65), а также (70) и (71) являются рекуррентными соотношениями.

Метод прогонки — это оптимизированный метод Гаусса для систем специального трехдиагонального вида.

5.3 Метод простой итерации. Решения СЛАУ

$$Ax=b \quad (1)$$

Покажем что СЛАУ(1) к следующему эквивалентному виду $x = \alpha * \chi + \beta(2)$

Одним из способов преобразования СЛАУ из (1) к (2) может быть следующие:

В каждом уравнении системы (1) в левой части равенства, оставляют ту компоненту искомого вектора x , что имеет номер текущего уравнения, а именно каждое уравнение записываем в виде

$$\chi_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\chi_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}\chi_j), i = \overline{1, n}(1')$$

Перепишем систему (1') в матричном виде тут матрица втсавить

Таким образом развернутая система в виде(2') показывает что СЛАУ (1) может быть преобразована к эквивалентному виду (2), другими словами решить СЛАУ(1), что и решить СЛАУ (2).

Метод простой итерации (МПИ) решеени (2) основан на итерационном (рекурсивном повторяющимся), построении последовательности векторов.

Тут кое-что переработанное, может содержать дубликаты

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (73)$$

Предполагая, что у данной системы существует единственное решение.

Покажем, что СЛАУ вида (73) может быть преобразована к следующему эквивалентному виду

$$\mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta. \quad (74)$$

Одним из способов преобразования СЛАУ вида (73) к (74) может быть следующий: В каждом уравнении системы (73) в левой части равенства оставляем ту компоненту вектора \mathbf{x} , что имеет номер текущего уравнения. А именно, каждое уравнение записываем в виде:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (75)$$

Перепишем систему (75) в матричном виде:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{\alpha} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}}_{\beta}. \quad (76)$$

Таким образом, разёрнутая система в виде (76) показывает, что СЛАУ (73) может быть преобразована к эквивалентному виду (74). Другими словами, решить (73) — это то же самое, что решить СЛАУ (75).

Метод простой итерации (МПИ) решения СЛАУ (74) основан на итерационном (рекурсивном, повторяющемся) построении последовательности векторов

$$\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}. \quad (77)$$

по следующей формуле (формула МПИ):

$$\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}: \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \alpha \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \beta, \quad \text{где } \mathbf{x}^{(0)} \text{ — задан некоторым образом.} \quad (78)$$

Предположим, что есть вектор $\mathbf{x}^{(0)}$, и вектор $\mathbf{x}^{(*)}$ — точное решение. Строим вектора $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k+1)}$, и они сгущаются около вектора $\mathbf{x}^{(*)}$.

Разница $\mathbf{x}^{(*)}$ и $\mathbf{x}^{(0)}$ равна $\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}$,
 Разница $\mathbf{x}^{(*)}$ и $\mathbf{x}^{(1)}$ равна $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$, и т.д. по индукции.

Выясним, при каких условиях последовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ будет сходиться к точному решению $\mathbf{x}^{(*)}$ системы (74). При этом значение начального вектора $\mathbf{x}^{(0)}$ будем считать заданным, но пока неизвестным для себя образом.

Так как $\mathbf{x}^{(*)}$ есть точное решение СЛАУ (74), то имеет место следующее тождество:

$$\mathbf{x}^{(*)} = \alpha \cdot \mathbf{x}^{(*)} + \beta. \quad (79)$$

Составим разность равенств (79) и (78) при некотором фиксированном k :

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}} = \alpha \cdot \underbrace{(\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k)})}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (80)$$

Используя представление (80), получим:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \alpha \cdot \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \alpha^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \alpha^3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = \alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} = \alpha \cdot \alpha^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \alpha^{k+1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (81)$$

Таким образом, мы имеем последовательность векторов-погрешностей $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, определяемую по формуле (81) или (80).

Пусть $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ — норма.

(82)

Согласно «известному факту», для того чтобы последовательность векторов сходилась к предельному вектору, необходимо чтобы последовательность норм этих векторов сходилась к соответствующей норме предельного вектора. В этой связи в векторном равенстве (81) перейдем к соответствующему равенству норм:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}\| = \left\| \underbrace{\alpha^{k+1}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}_{\in \mathbb{R}^n} \right\|. \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}\| &= \left\| \underbrace{\alpha^{k+1}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}}_{\in \mathbb{R}^n} \right\| \\ &\leq \|\alpha^{k+1}\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\|_{\mathbb{R}^n} \quad — \text{условие согласованности норм.} \end{aligned} \quad (84)$$

Из последней цепочки равенств/неравенств получаем:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}\| \leq \|\alpha\|^{k+1} \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\|, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (85)$$

(выполняется при условии согласованности норм).

Следовательно, последовательность векторов $\{\varepsilon^{(k+1)}\}_{k=0}^{\infty}$ будет стремиться к $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$. Другими словами, последовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(*)} - \mathbf{x}^{(k+1)}\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow \{\mathbf{x}^{(k+1)}\} \rightarrow \mathbf{x}^{(*)}$.

Таким образом, из вышеизложенного получаем:

Чтобы последовательность векторов $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, вычисляемых по итерационной формуле (78), сходилась к точному решению СЛАУ (74) — $\mathbf{x}^{(*)}$, необходимо

1. наличие условия на норму матрицы α : $\|\alpha\| < 1$;

(86)

2. согласованность используемых норм в \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times n}$.

11.11.25

6 Раздел 3 численные методы дифференциальных уравнений

6.1 Метод Эйлера решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Рассмотрим следующую задачу:

$$1. \quad y'(x) = f(x, y(x)) \text{ — ОДУ 1-го порядка относительно } y = y(x) \quad (87)$$

$$2. \quad y(x_0) = y_0 \text{ — начальные условия} \quad (88)$$

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (89)$$

Это задача Коши. Для системы:

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y'_2(x) = f_2(x, y_1(x), y_2(x)) \\ y_1(x_0) = y_1^0 \\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{cases} \quad (90)$$

Согласно известной теореме о существовании и единственности решения задачи Коши, задача (87)-(88) при некоторых условиях на функцию $f(\cdot, \cdot)$ в некоторой окрестности $O_{\delta}(x_0)$ имеет единственное решение $y(x)$ такое, что $y(x)$ дифференцируемо, $y(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (87) и начальному условию (88). В этой связи далее будем предполагать, что мы рассматриваем задачу (87), (88), где задача Коши имеет единственное решение.

Покажем, что задача Коши (87)-(88) может быть преобразована к некоторому интегральному уравнению. С этой целью проинтегрируем обыкновенное дифференциальное уравнение (87) по отрезку $[x_0, x] \subset O_\delta(x_0)$. В результате получаем:

$$\int_{x_0}^x y'(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (91)$$

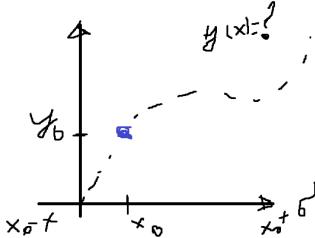
Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x), \quad f(x) \leftrightarrow F(x) \quad (92)$$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (93)$$

Каши звали Гюст, лол это пороль на экзамен. ПАРОЛЬ пряник предположим аахах



Покажем что задача Коши 1.2 может быть преобразована к некоторому интегральному уравнению. С этой целью проинтерегрируем ОДУ (1) по отрезку $[x_0, x] \in O_{x_0}^f$. В результате получаем, Таким образом,

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (94)$$

Итак, если $y(x)$ – решение задачи Коши (87)-(88), то оно является решением интегрального уравнения (94). И наоборот, если $y(x)$ – решение интегрального уравнения (94), то можно прийти к выводу, что $y(x)$ будет являться решением задачи Коши. Именно в этом смысле мы и будем понимать эквивалентность интегрального уравнения (94) и задачи Коши (87)-(88).

Ф.Н.-Л.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ F'(x) &= f(x) \\ f(x) &\leftrightarrow F(x) \\ y(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi \quad (3) \end{aligned}$$

6.2 Квадратурная формула левого прямоугольника

Заменим интегральное слагаемое в правой части уравнения (94) по квадратурной формуле “левого прямоугольника”

$$\int_a^b F(x) dx \approx F(a)(b-a),$$

понимая, что данное значение является приближенным. В результате такой замены получаем

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, y(x_0)) \quad (95)$$

Заметим, что равенство (95) по сути представляет собой явную аналитическую формулу для нахождения значения функции y в точке x , поскольку величины, стоящие в правой части (95), известны.

Для того чтобы обобщить полученную приближенную формулу (95), введем следующий набор точек: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $\forall k : x_{k+1} - x_k = h$. Для пар точек $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ воспроизведем ранее полученную формулу (95). В результате получим следующую обобщенную формулу:

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k)), \quad k = 0, n-1 \quad \text{— формула Эйлера} \quad (96)$$

Замечание: полученная нами формула метода Эйлера (96) является приближенной формулой и, соответственно, позволяет находить лишь приближенные решения в соответствующих точках по следующим двум причинам:

1. Формула (96) была получена путем замены интегрального слагаемого в интегральном уравнении (94) соответствующей квадратурой, поэтому по построению она является приближенной формулой.
2. Чтобы вычислить значение y в точке x_{k+1} , надо подставить значение $y(x_k)$, которое на предыдущем шаге было вычислено с приближением (погрешность входных данных).

Таким образом, получаем, что метод Эйлера целесообразно использовать лишь в “небольшой окрестности” точки x_0 с небольшим количеством итераций.

6.2.1 Пункт 2. Усовершенствованный метод Эйлера

Если при замене в интегральном уравнении использовать другие квадратуры, то можно таким образом получать другие расчетные формулы, порождая тем самым бесконечное множество различных формул.

Для примера воспользуемся квадратурной формулой правого прямоугольника:

$$\int_a^b F(x) dx \approx F(b)(b-a) \quad (97)$$

Повторяя ранее произведенные рассуждения, получим следующий аналог формулы (96):

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \cdot f(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \quad (98)$$

Таким образом, усовершенствование состоит в последовательном применении формул (96) и (98).

18.11.25

7 Разностный метод решения краевой задачи для ОДУ второго порядка

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} 1. \quad & y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \text{ — ОДУ 2-го порядка, неизвестная функция} \\ & y = y(x) \end{aligned} \quad (99)$$

$$2. \quad y(0) = y(T) = 0 \text{ — краевые условия} \quad (100)$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(0) = y(T) = 0 \end{cases} \quad (101)$$

Таким образом, решить краевую задачу (99)-(100) означает: указать такую дважды дифференцируемую функцию $y(x)$, определенную на отрезке $[0, T]$, чтобы она удовлетворяла обыкновенному дифференциальному уравнению (99) и краевому условию (100).

Далее будем исходить из того, что известные функции $p(x), q(x), f(x)$ таковы, что краевая задача на отрезке $[0, T]$ имеет единственное решение.

Разностный метод решения краевой задачи (99)-(100) основан на замене соответствующих производных в точках их разностными аналогами. Рассмотрим подробно конструкцию разностного метода.

Для чего на отрезке $[0, T]$ введем следующий набор узловых точек:

$$[0, T] : \quad 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = T. \quad (102)$$

$$x_{k+1} - x_k = h \quad \forall k = 0, n - 1 \quad (103)$$

Соответственно, спроектируем краевую задачу на указанные точки $[0, T]$, в результате чего получаем:

$$3. \quad y''(x_k) + p(x_k)y'(x_k) + q(x_k)y(x_k) = f(x_k), \quad \forall k = 0, n, \quad (104)$$

$$4. \quad y(x_0) = 0; \quad y(x_n) = 0 \quad (105)$$

$$\begin{cases} y''(x_k) + p(x_k)y'(x_k) + q(x_k)y(x_k) = f(x_k), & \forall k = 0, n \\ y(x_0) = 0; \quad y(x_n) = 0 \end{cases} \quad (106)$$

Теперь равенства (104)-(105) представляют систему числовых уравнений, в которой неизвестными являются следующие числовые величины:

$$\begin{cases} y(x_k) = ? & \forall k = 1, n - 1 \\ y'(x_k) = ? & \forall k = 0, n \\ y''(x_k) = ? & \forall k = 0, n \end{cases} \quad \text{всего } (n-1)+(n+1)+(n+1) = 3n+1 \quad (107)$$

При этом равенства (104)-(105) в том виде, в котором они сейчас имеются, содержат $(n + 1) + 2 = n + 3$ уравнения.

Однако, учитывая, что между значениями $y(x_k), y'(x_k), y''(x_k), \forall k$ имеет место связь, выраженная в операции дифференцирования, можно использовать следующие разностные аппроксимации:

$$5. \quad y'(x_k) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h}, \quad \forall k = 1, n - 1 \quad (108)$$

$$6. \quad y''(x_k) \approx \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2}, \quad \forall k = 1, n - 1 \quad \text{центральная} \quad (109)$$

Разностные формулы (108)-(109) имеют смысл лишь во внутренних точках $[0, T]$.

Перепишем уравнение (104)-(105), осуществив соответствующие подстановки по формулам (108)-(109):

$$7. \quad \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} + p(x_k) \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + q(x_k)y(x_k) = f(x_k), \quad \forall k = 1, n - 1 \quad (110)$$

$$8. \quad y(x_0) = 0; \quad y(x_n) = 0 \quad (111)$$

$$\begin{cases} \frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} + p(x_k) \frac{y(x_{k+1}) - y(x_{k-1})}{2h} + q(x_k)y(x_k) = f(x_k), & \forall k = 1, n - 1 \\ y(x_0) = 0; \quad y(x_n) = 0 \end{cases} \quad (112)$$

Сгруппируем слагаемые в уравнениях (110) и перепишем (для сокращения записи введем обозначения: $y_k = y(x_k), p_k = p(x_k), q_k = q(x_k), f_k = f(x_k)$):

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_k}{2h} \right) y_{k-1} - \left(\frac{2}{h^2} - q_k \right) y_k + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_k}{2h} \right) y_{k+1} = f_k, \quad \forall k = 1, n - 1 \quad (113)$$

$$y_0 = 0; \quad y_n = 0 \quad \text{— разностная схема краевой задачи (99)-(100)} \quad (114)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_k}{2h} \right) y_{k-1} - \left(\frac{2}{h^2} - q_k \right) y_k + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_k}{2h} \right) y_{k+1} = f_k, & \forall k = 1, n-1 \\ y_0 = 0; \quad y_n = 0 \end{cases} \text{ — разностная схема краевой задачи (99)-(100)} \quad (115)$$

Соответственно, решая СЛАУ (113)-(114), которая является разностной схемой краевой задачи (99)-(100) (учитывая трехдиагональность уравнений (113)), получаем приближенное решение.

Замечание: можно показать, что с уменьшением шага разбиения h (или, что то же самое, с ростом числа узлов x_k) решение разностной схемы (113)-(114) y_k будет стремиться к точному решению краевой задачи (99)-(100) $y(x_k)$ для всех k .

8 Метод неопределенных коэффициентов в решении краевой задачи для ОДУ II порядка

По-прежнему решаем следующую краевую задачу:

$$1. \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \text{ — ОДУ 2-го порядка, неизвестная функция} \\ y = y(x) - ? \quad \forall x \in (0, T) \quad (116)$$

$$2. \quad y(0) = y(T) = 0 \text{ — краевые условия} \quad (117)$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(0) = y(T) = 0 \end{cases} \quad (118)$$

Идея метода неопределенных коэффициентов решения краевой задачи заключена в поиске неизвестной функции $y(x)$, являющейся решением краевой задачи, в следующем виде:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{\text{неопределенные коэффициенты}} \varphi_k(x) \quad (119)$$

где $\varphi_k(x), k = 1, n$ — являются конечным набором из системы линейно-независимых функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$. $y(x)$ должна иметь производные, непрерывные на x .

1. Покажем, что для того, чтобы искомое представление (119) давало дважды непрерывную на отрезке $[0, T]$ функцию, необходимо, чтобы функции $\varphi_k(x), k = 1, n$ также были дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$. Другими словами, если $\varphi_k(x), k = 1, n \in C^2[0, T] \Rightarrow y(x) \in C^2[0, T]$ по (119):

$$\varphi_k(x), k = 1, n \in C^2[0, T] \quad (120)$$

$$\begin{cases} y(x) \stackrel{(119)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\varphi_k(x)}_{\in C[0,T] \text{ непрерывно}} \in C[0,T] \\ y'(x) \stackrel{(119)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\varphi'_k(x)}_{\in C[0,T] \text{ непрерывно}} \in C[0,T] \Rightarrow y(x) \in C^2[0,T] \\ y''(x) \stackrel{(119)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\varphi''_k(x)}_{\in C[0,T] \text{ непрерывно}} \in C[0,T] \end{cases} \quad (121)$$

2. Покажем, что для того, чтобы искомое представление (119) удовлетворяло краевым условиям (117), необходимо, чтобы $\varphi_k(x), k = 1, \dots, n$ удовлетворяли краевому условию (117). Другими словами:

$$\varphi_k(x), k = 1, n : \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(T) = 0, \quad \forall k = 1, n \quad (122)$$

$$\begin{cases} y(0) \stackrel{(119)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{\varphi_k(0)}_{\stackrel{(122)}{=} 0} = 0 \\ y(T) \stackrel{(119)}{=} \sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{\varphi_k(T)}_{\stackrel{(122)}{=} 0} = 0 \end{cases} \quad (123)$$

3. С целью найти (неизвестные) неопределенные коэффициенты (119) подставим данное представление в обыкновенное дифференциальное уравнение (116). В результате такой подстановки получаем:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{?} \varphi''_k(x) + p(x) \sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{?} \varphi'_k(x) + q(x) \sum_{k=1}^n \underbrace{a_k}_{?} \varphi_k(x) = f(x) \quad (124)$$

Приведём подобные слагаемые в левой части функционального равенства:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{[\varphi''_k(x) + p(x) \cdot \varphi'_k(x) + q(x) \varphi_k(x)]}_{\text{функции}} = \underbrace{f(x)}_{\text{функция}} \quad (125)$$

С тем чтобы “размочьнить” функциональное уравнение (125) до системы скалярных уравнений, введём на отрезке $[0, T]$ следующий набор узлов:

$$[0, T] : \quad 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < T, \quad x_{k+1} - x_k = h \quad (126)$$

И спроектируем уравнение (125) на введённые узлы:

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot [\varphi''_k(x_j) + p(x_j) \cdot \varphi'_k(x_j) + q(x_j) \varphi_k(x_j)] = f(x_j), \quad j = 1, n \quad (127)$$

По своей алгебраической природе числовые равенства (127) представляют собой СЛАУ размерности $n \times n$ относительно искомых коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n .

Соответственно, решив вспомогательную систему (127) (методом Гаусса, методом простой итерации; метод прогонки здесь не подходит), мы сможем найти искомые коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n .

Соответственно, найдя коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n и подставив их в искомое представление (119), мы получим явную аналитическую формулу искомого решения краевой задачи (116)-(117):

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^n a_k \cdot \varphi_k(x) \quad (128)$$

9 Радел 4 Численные методы решения интегральных уравнений

9.1 решение интегрального уравнения Фредгольма в случае вырожденного ядра

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$y(x) + \lambda \cdot \int_a^b A(x, t)y(t) dt = f(x) \quad — \text{интегральное уравнение Фредгольма относительно } y(x) = ? \forall x \in [a, b] \quad (129)$$

где λ — спектральный параметр, $A(x, t)$ — “ядро”, определено и непрерывно на $[a, b] \times [a, b]$ по совокупности переменных x и t , a и b — известные пределы интегрирования, $f(x)$ — определенная и непрерывная на $[a, b]$ функция.

Подробнее об уравнении (129) смотри Петровский, лекции по теории интегральных уравнений.

Далее будем считать, что интегральное уравнение Фредгольма (129) на отрезке $[a, b]$ имеет единственное решение $y(x)$ (другими словами, λ отличен от так называемых характеристических чисел).

В этом параграфе будем рассматривать интегральное уравнение Фредгольма (129) с вырожденным ядром, т.е. ядерная функция может быть представлена в следующем виде:

$$A(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x) \cdot b_k(t) \quad (130)$$

Таким образом, мы имеем следующее уравнение (после подстановки ядра (130) в уравнение (129)):

$$y(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t) \right) \cdot y(t) dt = f(x) \quad (131)$$

Применив свойство аддитивности определенного интеграла, получаем:

$$\underbrace{y(x)}_{?} + \lambda \sum_{k=1}^n \left(a_k(x) \cdot \underbrace{\int_a^b y(t) \cdot}_{?} \underbrace{b_k(t)}_{\text{определим } q_k, k=1,n} dt \right) = f(x) \quad (132)$$

Подвернем уравнение (132) следующим преобразованиям:

1. Умножим функциональное равенство (132) на $b_1(x)$ и результат проинтегрируем по $[a, b]$;
2. Умножим функциональное равенство (132) на $b_2(x)$ и результат проинтегрируем по $[a, b]$;
3. ...
- n. Умножим функциональное равенство (132) на $b_n(x)$ и результат проинтегрируем по $[a, b]$;

В результате получим систему следующих скалярных равенств:

$$\underbrace{\int_a^b y(x)b_j(x) dx}_{=q_j} + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\int_a^b a_k(x)b_j(x) dx}_{\alpha_{kj}} \cdot \underbrace{\int_a^b y(t)b_k(t) dt}_{q_k} \right) = \underbrace{\int_a^b f(x)b_j(x) dx}_{\varphi_j}, \quad j = 1, n \quad (133)$$

С учетом сделанных обозначений равенство (133) можно переписать в следующем виде:

$$q_j + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \cdot q_k = \varphi_j, \quad j = 1, n \quad (134)$$

По алгебраической природе равенство (134) представляет собой СЛАУ $n \times n$ относительно неизвестных скалярных величин q_1, q_2, \dots, q_n . Соответственно, перепишем (134) в эквивалентном матричном виде:

$$\begin{cases} q_1 + \lambda(\alpha_{11}q_1 + \alpha_{21}q_2 + \dots + \alpha_{n1}q_n) = \varphi_1 \\ q_2 + \lambda(\alpha_{12}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots + \alpha_{n2}q_n) = \varphi_2 \\ \dots \\ q_n + \lambda(\alpha_{1n}q_1 + \alpha_{2n}q_2 + \dots + \alpha_{nn}q_n) = \varphi_n \end{cases} \Leftrightarrow \quad (135)$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{21} & \dots & \lambda\alpha_{n1} \\ \lambda\alpha_{12} & 1 + \lambda\alpha_{22} & \dots & \lambda\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{1n} & \lambda\alpha_{2n} & \dots & 1 + \lambda\alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad (136)$$

Решив СЛАУ (136) методом Гаусса (или методом простой итерации, но он “неточный”, хотя сопоставим с методом Гаусса; метод прогонки не подойдёт), мы узнаем числовые значения q_1, q_2, \dots, q_n .

Соответственно, обратившись к ранее полученному соотношению (132):

$$y(x) + \lambda \cdot \sum_{k=1}^n a_k(x)q_k = f(x) \Rightarrow y(x) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^n q_k \cdot a_k(x) \quad (137)$$

Таким образом, из вышеизложенного получаем следующий алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром (130):

1. По данным интегрального уравнения Фредгольма (129) и ядра (130) строим вспомогательную СЛАУ (136);
2. Решаем СЛАУ (136) \rightarrow находим q_1, \dots, q_n ;
3. Получаем решение интегрального уравнения Фредгольма (129) с ядром (130) по явной аналитической формуле (137).

10 Квадратурный метод решения интегрального уравнения

Предварительно (с целью последующего применения) получим (обобщенную) квадратурную формулу левых прямоугольников, взяв за основу “каноническую” формулу левого прямоугольника.

По Риману, если задан некоторый отрезок $[a, b]$ и некоторая функция $F(x)$, то геометрический смысл интеграла:

$$\int_a^b F(x) dx = ?, \quad (138)$$

т.е. площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $F(x)$.

Например:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^0 \dots dx + \int_0^{\pi} \dots dx = 0. \quad (139)$$

Каноническая квадратурная формула левого прямоугольника:

$$\int_a^b F(x) dx \approx F(a)(b-a). \quad (140)$$

Обобщенная (многоточечная) квадратурная формула левых прямоугольников получается разбиением отрезка $[a, b]$ на части:

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x) dx \approx \sum_{j=1}^{n-1} F(x_j)(x_{j+1}-x_j) \stackrel{\text{путь}}{=} h \sum_{j=1}^{n-1} h \cdot F(x_j). \quad (141)$$

Приближенная формула (141) становится все более точной, если шаг разбиения h устремить к нулю.

Применение к интегральному уравнению Фредгольма

Теперь снова вернемся к решению интегрального уравнения Фредгольма:

$$y(x) + \lambda \int_a^b A(x, t)y(t) dt = f(x) \quad \text{— интегральное уравнение Фредгольма II рода.} \quad (142)$$

Сутью квадратурного решения интегрального уравнения Фредгольма (142) является замена интегрального слагаемого в левой части уравнения (142) соответствующей квадратурной формулой.

Другими словами, применим к интегралу $\int_a^b A(x, t)y(t) dt$ обобщенную квадратурную формулу левых прямоугольников, заметив, что данная формула должна быть применена по второй переменной ядерной функции $A(x, t)$.

Поскольку квадратурная формула (141) является приближенной, то запланированная “замена” преобразует точное функциональное равенство (142) в следующее приближенное равенство:

$$\underbrace{y(x)}_{\text{? функция}} + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n-1} h \cdot A(x, t_j) \underbrace{y(t_j)}_{\text{? неизв. узловое значение функции}} \right) \approx f(x), \quad (143)$$

где t_j — разбиение от $a = t_1$ до $b = t_n$ с шагом $h = t_{j+1} - t_j$, $\forall j = 1, n - 1$.

По своей алгебраической природе равенство (143) представляет собой функционально-скалярное уравнение относительно неизвестной функции $y(x)$ и неизвестных числовых значений $y(t_j)$, $j = 1, n - 1$.

Замечание: Почему до $n - 1$? Потому что используются значения во всех точках, кроме последней. Это следствие квадратурной формулы левых прямоугольников. Если бы использовалась формула правых прямоугольников, то была бы исключена самая левая точка. Меняя квадратурную формулу, мы не только можем менять ее точность, но и набор используемых узлов, а подставляя эти узлы в формулу, мы меняем ее значение.

“Размножим” (увеличим количественно) функционально-скалярное уравнение (143) до следующей системы скалярных равенств. В уравнении (143) последовательно будем подставлять $x = x_1$, затем $x = x_2$, и так далее до $x = x_n$, осуществив n подстановок. В результате получим:

$$y(x_k) + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} h \cdot A(x_k, t_j)y(t_j) = f(x_k). \quad (144)$$

Значения x_k и t_k равны в случае, если они используются в функциях одного аргумента. В случае, если они находятся в ядерной функции $A(x_k, t_j)$, то они имеют разное значение.

Переобозначив $y(t_j)$ как $y(x_j)$, перепишем последнее равенство в следующем виде:

$$y(x_k) + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} h \cdot A(x_k, t_j) y(x_j) = f(x_k), \quad \forall k = 1, n-1. \quad (145)$$

По своей алгебраической природе скалярное равенство (145) представляет собой СЛАУ размерности $(n-1) \times (n-1)$ относительно искомых неизвестных $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n-1})$ (точка x_n вышла из оборота в результате использованной квадратурной формулы (141). В разбиении эта точка участвовала, но в последнем слагаемом точка потеряла свое значение).