



第5章 数字滤波基础

基本内容

- 离散系统的时域分析
- 离散系统的频域分析
- 离散系统的频率响应
- 模拟滤波器的设计
- 模拟滤波器的实现



数字滤波基础

信号处理最广泛的应用是滤波。

滤波器是以特定方式改变信号的频率特性，而实现信号变换的系统。

数字滤波，是指输入、输出均为离散时间信号，通过一定**运算关系**改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的**算法**。

数字滤波基础

相对模拟滤波器，数字滤波器优点如下：
精度高、稳定性高、灵活性高并能进行多维处理。

数字滤波器的局限性：

速度、频率不够高，复杂情况下尚不满足实时性要求，不适宜处理很高频率的信号。

简而言之，数字滤波器只不过是有一系列滤波器系数定义的方程，这些方程是数字滤波程序中算法的基础，滤波程序接收并处理原始数据，输出滤波后数据。

5.1 线性非移变离散系统时域分析

5.1.1 线性非移变离散系统

对于一个离散系统，输入是一序列，输出也是一序列，系统的功能是实现输入序列至输出序列的运算、变换，如图5.1所示，图中的 $T[\cdot]$ 表示运算变换的关系，即

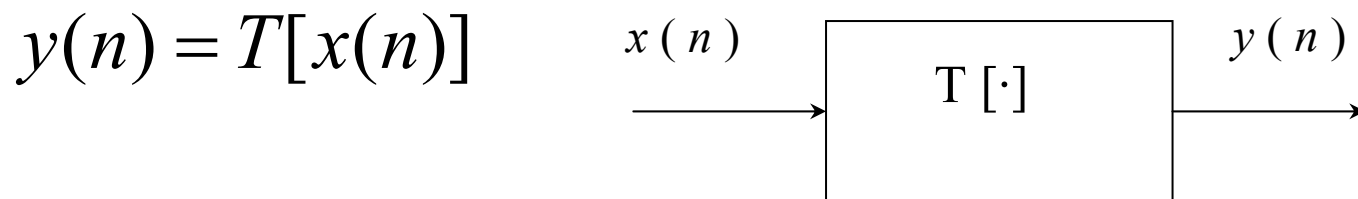


图5.1 离散系统的原理框图

对 $T[\cdot]$ 加以种种约束,可定义出各类离散时间系统 ➡

5.1.1 线性非移变离散系统

其中最重要、最基本的是“线性非移变（时不变）系统”，它是满足均匀性、叠加性和非移变性的离散系统。

若系统输入是 $x(n)$ 时，输出为 $y(n)$ ，则所谓系统的均匀性是指当输入为 $ax(n)$ 时，输出为 $ay(n)$ 。

5.1.1 线性非移变离散系统

而叠加性是指线性离散系统应满足叠加原理，即：若系统输入序列为 $x_1(n)$ 时，输出序列为 $y_1(n)$ ，输入序列为 $x_2(n)$ 时，输出序列为 $y_2(n)$ ，叠加性则是当输入为 $ax_1(n)+bx_2(n)$ 时，应有

$$\begin{aligned} T[ax_1(n)+bx_2(n)] &= aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)] \\ &= ay_1(n)+by_2(n) \end{aligned}$$

5.1.1 线性非移变离散系统

所谓非移变是指：离散系统的输入为 $x(n)$ ，输出为 $y(n)$ ，则当输入移位 N 位为 $x(n-N)$ 时，输出也移 N 位为 $y(n-N)$ ，是非移变系统。若 n 对应的是时间，非移变就是非时变或时不变，可表示为，若

$$T[x(n)] = y(n)$$

则

$$T[x(n-N)] = y(n-N) \quad (5.3)$$

式(5.3)中的 N 为任意整数。

5.1.2 离散系统的数学模型

一 差分方程的建立

在连续时间系统中，输入输出的信号均是连续时间变量的函数，描述其输入输出关系的数学模型一般用微分方程，方程中包含有输入信号 $x(t)$ 、输出信号 $y(t)$ 及其各阶导数的线性组合。



差分方程的建立

而在离散时间系统中，其输入输出的信号则是离散变量的函数，描述其输入输出关系的数学模型采用差分方程，其中包含有输入序列 $x(n)$ 、输出序列 $y(n)$ 及其各阶移位序列的组合。

差分方程的建立

例5.1 一个由计算机为中心构成的防空导弹系统，它控制导弹飞行高度的过程为：由雷达测得某一时刻的导弹实际飞行高度为 $y(n)$ ，同时由计算机根据敌方飞行器与我方导弹飞行参数计算出下一时刻导弹应有的理论飞行高度 $x(n+1)$ ，

差分方程的建立

系统按导弹 $y(n)$ 与 $x(n+1)$ 两者的偏差调整导弹的飞行高度，设导弹改变其高度的速度在 n 时刻为 $v(n)$ ， $v(n)$ 正比于偏差，即

$$v(n) = k[x(n+1) - y(n)]$$

式中的 k 为比例系数。若两次测量与计算的时间间隔是 T 秒，

差分方程的建立

则在 T 秒内，导弹飞行高度的改变量应为

$$y(n) + (kT - 1)y(n - 1) = kTx(n)$$

上式整理后得

$$y(n + 1) - y(n) = kT[x(n + 1) - y(n)] \quad (5.4)$$

也可以表示成

$$y(n + 1) + (kT - 1)y(n) = kTx(n + 1) \quad (5.5)$$



差分方程的建立

为了能用数字技术研究、分析和处理连续时间系统，要求用离散系统来模仿连续系统，从数学的角度来考虑，就是要建立离散系统的差分方程，模仿连续系统微分方程，并使差分方程成为微分方程的数值近似解。如有一个 RC 连续系统网络与对它进行模仿的离散系统如图5.2所示。

差分方程的建立

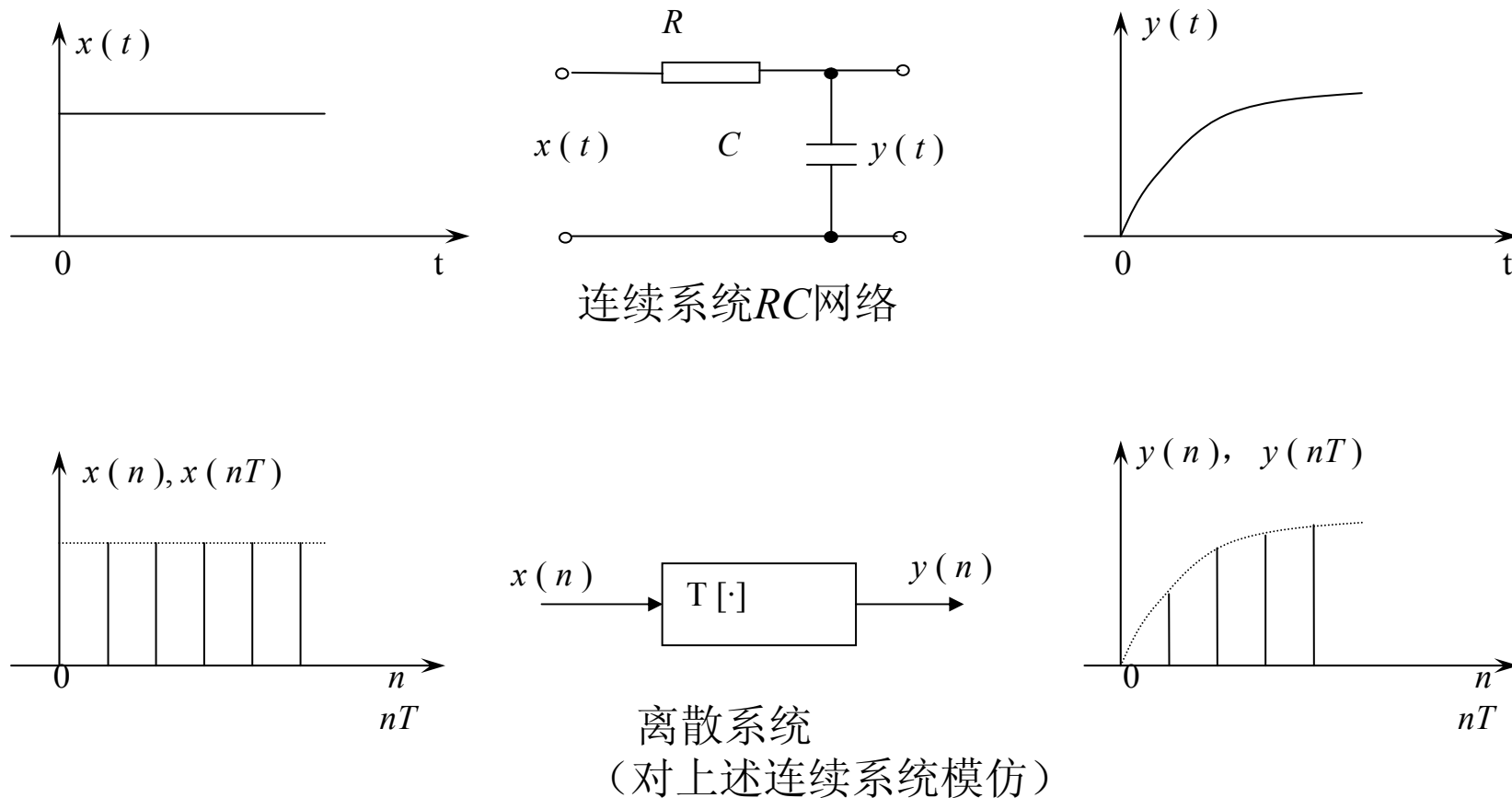


图5.2 离散系统模仿连续系统

差分方程的建立

上图中 RC 网络的微分方程为

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

以差分近似上式中的微分，可得差分方程

$$RC \frac{y(nT) - y[(n-1)T]}{T} + y(nT) = x(nT)$$

差分方程的建立

整理后得

$$\left(\frac{RC}{T} - 1\right)y(nT) - \frac{RC}{T}y[(n-1)T] = x(nT)$$

将上式简写为

$$b_0y(n) + b_1y(n-1) = a_0x(n)$$

由上例能够推得一般线性非移变离散系统的数学模型，可用下述线性常系数差分方程描述

差分方程的建立

$$b_0 y(n) + b_1 y(n-1) + \cdots + b_N y(n-N) = \\ a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \cdots + a_M x(n-M)$$

或

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M x(n-r)$$

上式中的 a_r 、 b_k 为方程中各项系数，未知序列移序的最大值与最小值之差称为差分方程的阶次，若上式中的输出序列为未知，则应是 N 阶差分方程。

5.1.3 离散系统时域分析

离散时间系统分析的基本任务，是在已知系统状态和输入激励信号下，求解系统的输出响应，都会涉及系统数学模型求解的问题，对系统数学模型进行求解的方法有多种，主要分为时域和变换域两类，如表5.1所示。

5.1.3 离散系统时域分析

表5.1 系统数学模型的求解方法

系统类型 基本方法	连续系统	离散系统
数学模型	微分方程	差分方程
时域分析	经典时域法（通解+特解） 拉氏变换（常用） 连续卷积	经典时域法（通解+特解） z 变换法（常用） 离散卷积，递推解法
变换域分析	傅氏变换 $H(j\Omega)$ 拉氏变换 $H(s)$	序列傅氏变换 $H(e^{j\omega})$ z 变换 $H(z)$

5.1.3 离散系统时域分析

1. 差分方程的递推解法

例5.2 一离散系统的差分方程为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

设系统的起始条件为： $n < 0$, $y(n) = 0$, 且输入为单位抽样序列 $x(n) = \delta(n)$, 试求离散系统的输出响应序列 $y(n)$ 。

5.1.3 离散系统时域分析

解： 用递推法求解

$$y(n) = x(n) + ay(n-1)$$

$$n = 0, \quad y(0) = x(0) + ay(-1) = 1 + a \cdot 0 = 1$$

$$n = 1, \quad y(1) = x(1) + ay(0) = 0 + a \cdot 1 = a$$

$$n = 2, \quad y(2) = x(2) + ay(1) = 0 + a \cdot a = a^2$$

$$n = 3, \quad y(3) = x(3) + ay(2) = 0 + a \cdot a^2 = a^3$$

.....

5.1.3 离散系统时域分析

由上述递推的规律，不难看出，输出序列应是

$$y(n) = a^n \varepsilon(n)$$

上例中输入与响应的图形如图5.3所示。

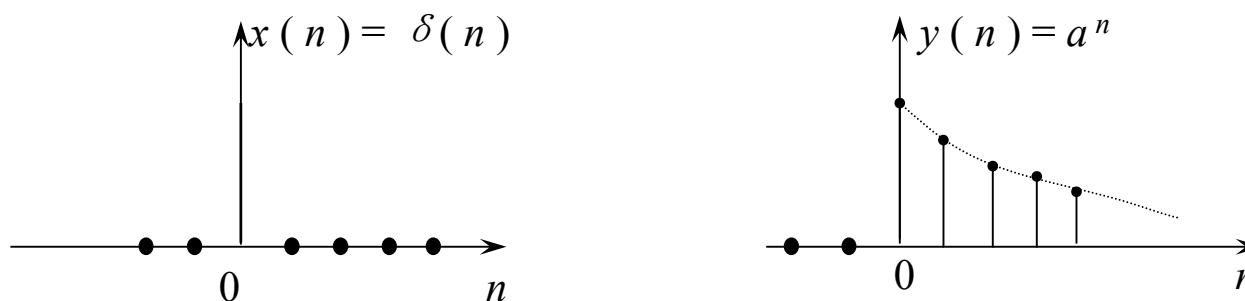


图5.1-3 例题中的输入与响应序列

5.1.3 离散系统时域分析

与连续系统相类似，也可用方框图，即所谓“运算结构图”来表示这一运算过程，同时也表明了一个离散系统所必须有的**基本运算部件**，应包括**加法器、乘法器和延时器**，例如一离散系统差分方程为：

$$y(n) = x(n) + (1/2)y(n-1)$$

上式中， $y(n)$ —现时刻输出；

$x(n)$ —现时刻输入；

$y(n-1)$ —前一时刻输出

5.1.3 离散系统时域分析

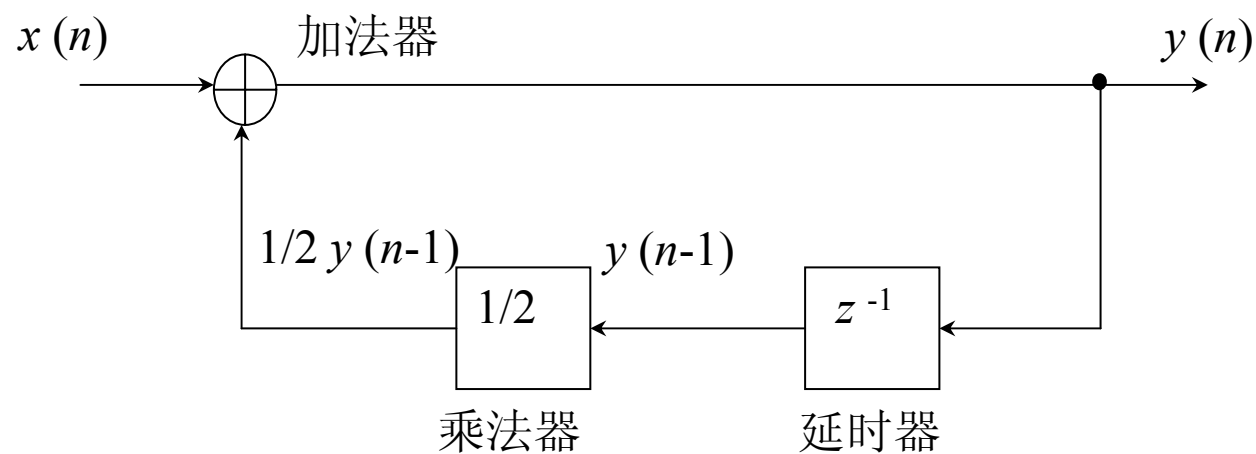


图5.4 离散系统框图表示

5.1.3 离散系统时域分析

(自学) 例5.3 试用MATLAB语言编写一通用程序，计算式(5.8)所表示的线性非移变离散系统差分方程，并利用所编写的通用程序计算下列差分方程所表示的离散系统的输出 $y(n)$ 。

$$\begin{aligned} & y(n) - y(n-1) + 0.9y(n-2) \\ & = 2\cos(0.5n) + 3\cos(0.5n-1) \quad 1 \leq n \leq 59 \end{aligned}$$

5.1.3 离散系统时域分析

为便于应用MATLAB计算，将式（5.8）改写为

$$b_1 y(n) + b_2 y(n-1) + \cdots + b_N y(n-N+1) = \\ a_1 x(n) + a_2 x(n-1) + \cdots + a_M x(n-M+1)$$

若给定系统的输入，系统的输出可表示为

$$b_1 y(n) = -b_2 y(n-1) - \cdots - b_N y(n-N+1) \\ + a_1 x(n) + a_2 x(n-1) + \cdots + a_M x(n-M+1)$$

5.1.3 离散系统时域分析

计算结果如图5.5所示。

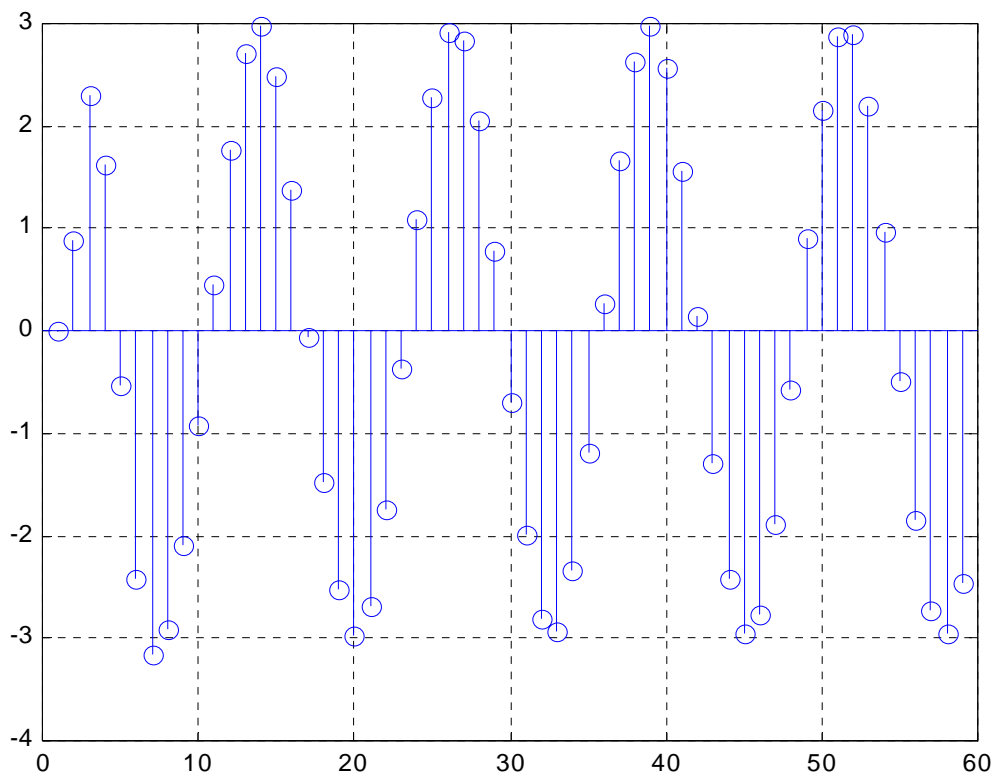


图5.5 差分方程递推计算结果

5.1.3 离散系统时域分析

2. 离散卷积解法

在连续系统（如图5.6）中，可以利用卷积的方法求系统的零状态响应，其原理是：

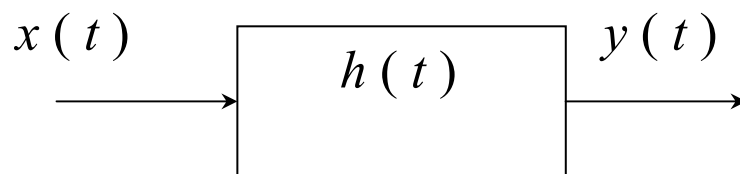


图5.6 连续系统框图

5.1.3 离散系统时域分析

其运算过程如下：

1.把激励信号（输入 $x(t)$ ）分解为冲激信号的叠加

$$x(\tau)\delta(t-\tau)\Delta\tau$$

2.求每一冲激信号单独作用时的冲激响应（ $t = \tau$ 时，冲激信号的强度为 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ ，由线性非时变性质，产生的响应为 $x(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$ ）

3.将单独的冲激响应叠加 $\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{\tau=0}^t x(\tau)\Delta\tau h(t-\tau)$

4.得系统的总响应（输出）——连续卷积

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

5.1.3 离散系统时域分析

相类似，离散系统也可以采用离散卷积法求系统响应，思路是：

1. 输入序列分解
2. 求分解后序列各个分量单独作用的响应
3. 将单独作用响应的叠加（求和，离散卷积和）
4. 离散系统总响应—离散卷积法

5.1.3 离散系统时域分析

下面对上述离散卷积求解系统响应的过程作具体的分析，并导出离散卷积的表达式。

(1) 输入序列分解

任一序列可以分解成一系列抽样序列 $\delta(n)$ 的延时并加权之和。例如，序列 $x(n]$:

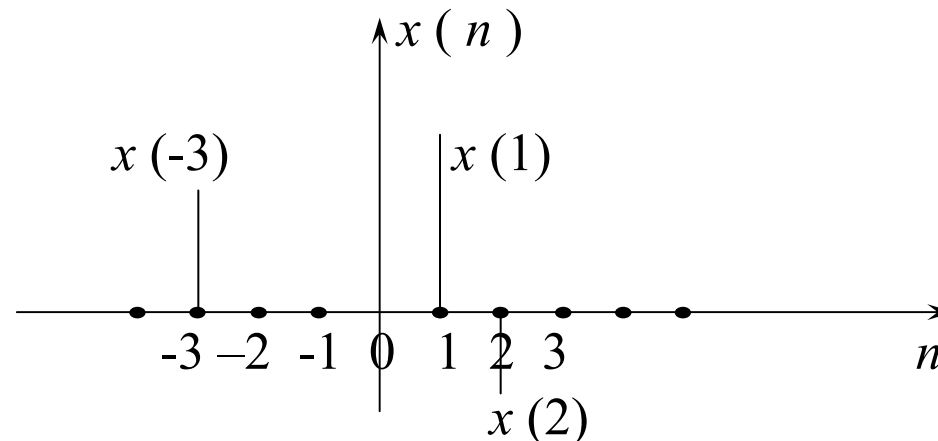


图5.7 序列分解示例

5.1.3 离散系统时域分析

图5.7 所示序列可表示成

$$x(n) = x(-3)\delta(n+3) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2)$$

按上述表示类推，对于任意一个序号 $n = m$ 处的序列值，可写成

$$x(m)\delta(n-m)$$

上式表示：单位抽样序列移序 m 位，幅度加权 $x(m)$ ，任意序列都可以表示成这一系列加权移序的单位抽样序列之和，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

5.1.3 离散系统时域分析

(2) 序列各分量单独作用的系统响应

系统在零状态下，线性非移变离散系统的输入（激励）与输出（响应）有如下关系

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

单位抽样响应

$$\delta(n-m) \rightarrow h(n-m)$$

系统非移变性质

$$x(m)\delta(n-m) \rightarrow x(m)h(n-m)$$

线性（均匀性）特性

5.1.3 离散系统时域分析

(3) 单独作用响应的叠加

根据系统叠加原理，将上述分序列单独作用响应叠加，就可得到由这些各序列分量合成的输入序列 $x(n)$ 的输出（响应） $y(n)$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

上式称为离散卷积和，简称离散卷积，并记为

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

由上式，说明离散系统的零状态响应是输入序列与系统单位抽样响应序列的离散卷积。

5.1.3 离散系统时域分析

离散卷积的运算规则（性质）与连续卷积相似。

（1）任意序列与单位抽样序列的离散卷积即为序列本身。由离散卷积定义与式（5.9），立即可以得出

$$x(n) = x(n) * \delta(n)$$

（2）服从分配律，即

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

5.1.3 离散系统时域分析

上式表明：两个**并联**的线性非移变系统**等效**于一个系统，它的单位抽样响应等于**两个并联系统单位抽样响应之和**，如图5.8。

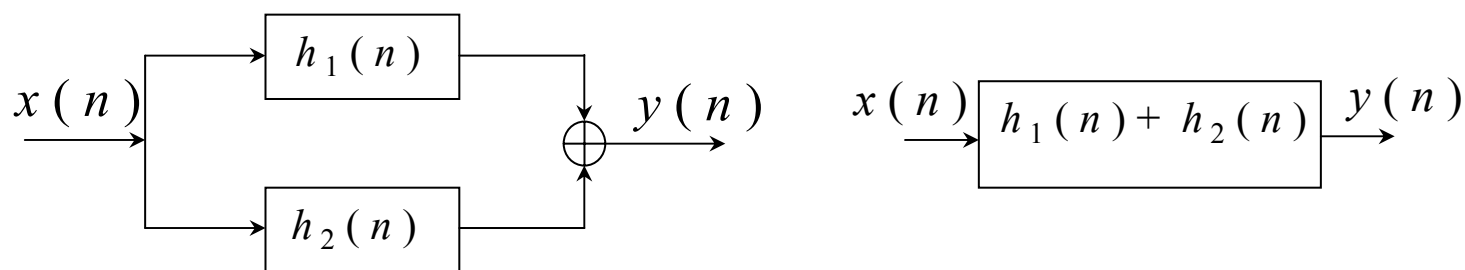


图5.8并联系统的等效系统

(3) 结合律

$$[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$$

5.1.3 离散系统时域分析

上式表明：两个**串联**的线性非移变系统与其级联次序无关，且可等效于一个系统，它的单位抽样响应是两个串联系统**单位抽样响应的卷积**，如图5.9所示。

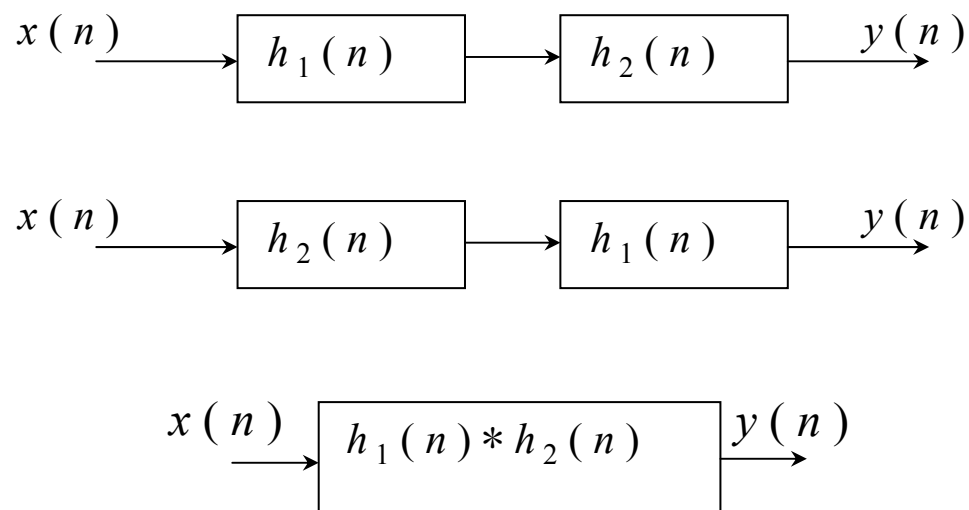


图5.9 串联系统的等效系统

5.1.3 离散系统时域分析

3. 离散卷积的计算及图解说明

为了更好地理解离散卷积的运算过程，我们举一个具体例子，用图形的变换作直观地说明。

$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$ 运算的过程包括：

$$x(n) \rightarrow x(m)$$

$$h(n) \rightarrow h(m) \Rightarrow h(-m) \Rightarrow h(n-m) \Rightarrow x(m)h(n-m) \Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

5.1.3 离散系统时域分析

求解的是两个序列

$$x(n) = \delta(0) + \delta(1) + \delta(2) + \delta(3) + \delta(4)$$

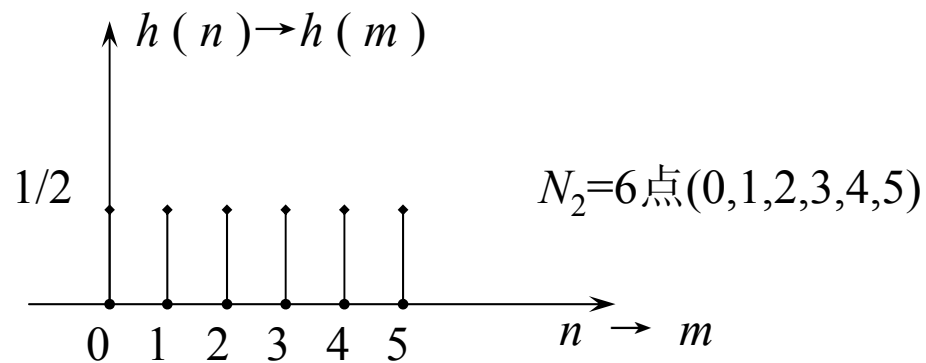
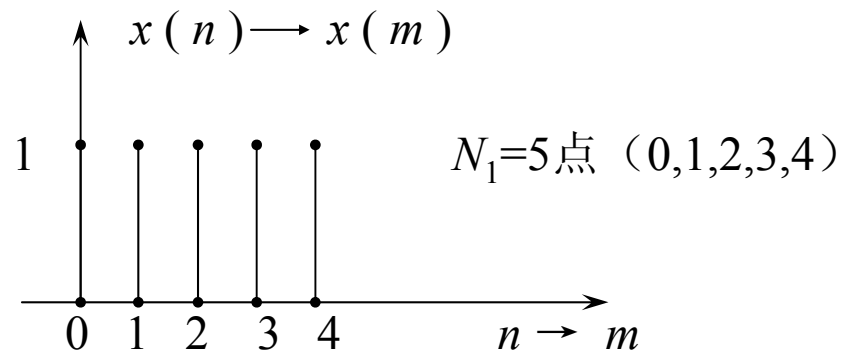
与

$$h(n) = (1/2)[\delta(0) + \delta(1) + \delta(2) + \delta(3) + \delta(4) + \delta(5)]$$

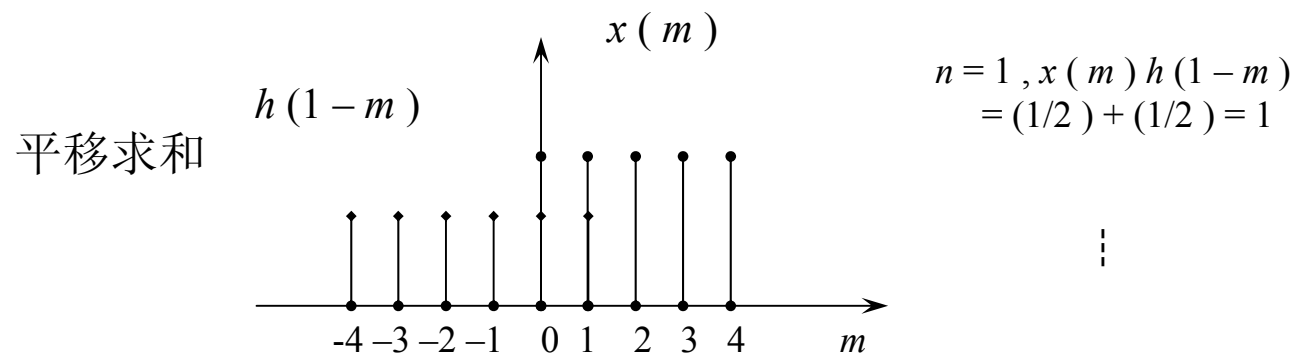
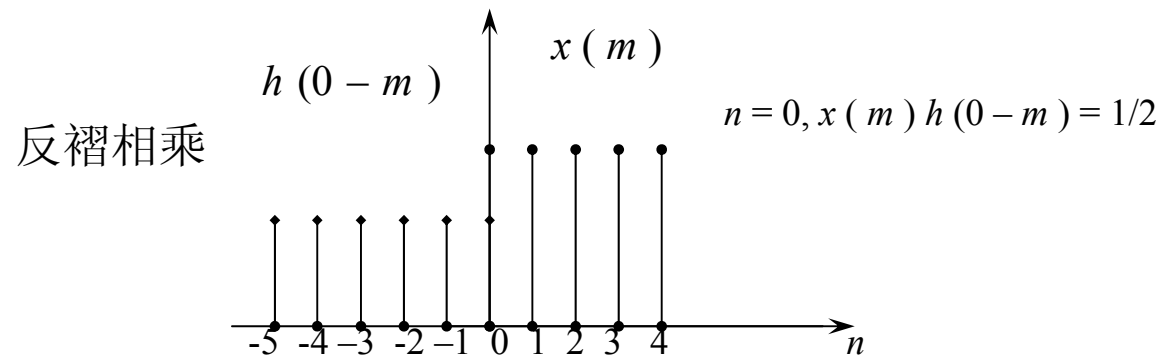
的离散卷积 $y(n)$ ，
运算过程的图解说明如下图（图5.10）所示。

5.1.3 离散系统时域分析

变量置换

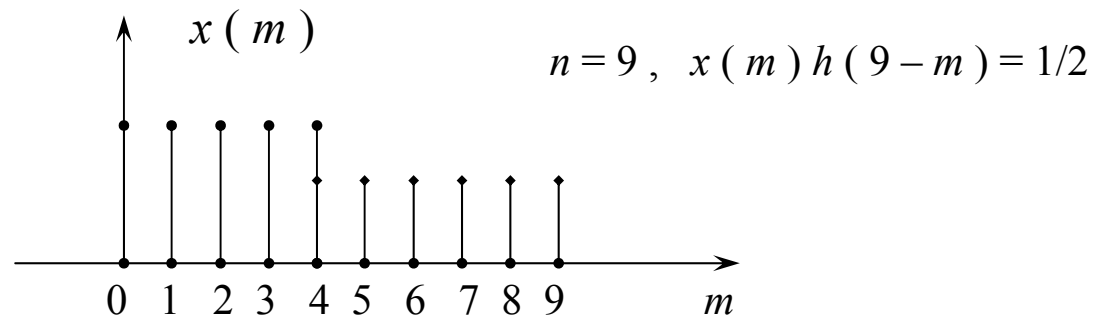


5.1.3 离散系统时域分析



5.1.3 离散系统时域分析

类推至 $n = 9$,



卷积结果

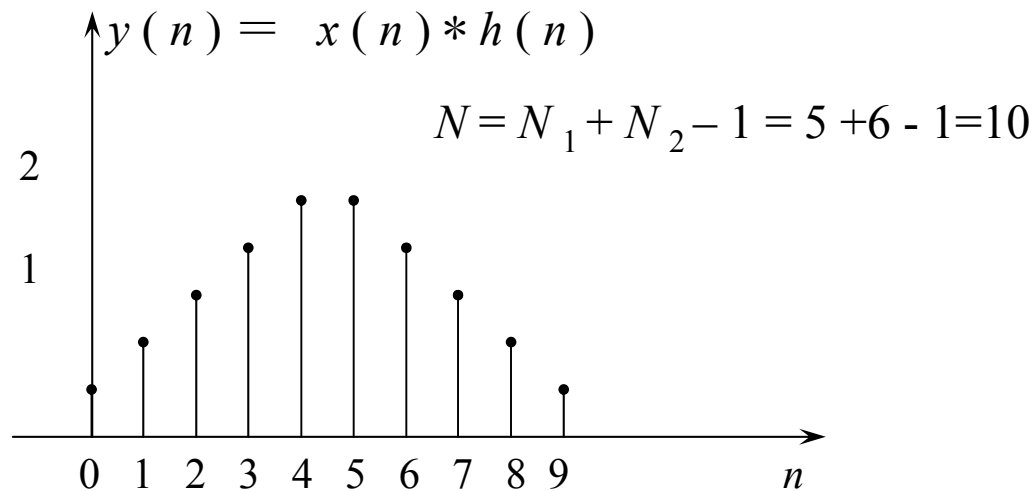


图5.10 求离散卷积的图解说明

5.1.3 离散系统时域分析

例5.4 设离散系统的单位抽样响应为 $h(n) = a^n \varepsilon(n)$ 试求当输入为单位阶跃序列 $x(n) = \varepsilon(n)$ 时的零状态响应 $y(n)$ 。

(1) 直接用卷积定义式求解

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon(m)a^{n-m}\varepsilon(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^n a^{n-m} = a^n \sum_{m=0}^n a^{-m} = a^n \left[\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} \right] = \frac{1}{1-a} (1-a^{n+1}) \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

5.1.3 离散系统时域分析

(2) 利用z变换时域卷积定理

$$Y(z) = X(z)H(z) = Z[x(n)]Z[a^n \varepsilon(n)] = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-a}$$

对 $Y(z)$ 作部分分式分解, 并查z变换表可得

$$Y(z) = \frac{1}{1-a} \frac{z}{z-1} - \frac{a}{1-a} \frac{z}{z-a}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \frac{1}{1-a} \varepsilon(n) - \frac{a}{1-a} a^n \varepsilon(n) \\ &= \frac{1}{1-a} [1 - a^{n+1}] \varepsilon(n) \end{aligned}$$

由上可见, 上述两种方法求解结果是相同的。

5.1.3 离散系统时域分析

4. 离散系统为因果稳定系统的时域条件

(1) 因果系统

所谓因果系统就是输出变化不领先于输入变化的系统。
线性非移变离散系统满足因果系统的充要条件是

$$\begin{aligned} & h(n) = 0, \quad n < 0 \\ \text{或} \quad & h(n) = h(n) \varepsilon(n) \end{aligned}$$

由此，也将

$$x(n) = 0 \quad n < 0$$

的序列称为因果序列。

5.1.3 离散系统时域分析

(2) 稳定系统

稳定系统是指：只要输入有界，输出必有界的系统。
判断稳定系统的充要条件是单位抽样响应绝对可和，
可表示成

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

总之，一个离散系统为因果稳定系统的充分必要条件是：单位抽样响应 $h(n)$ 为右边有界序列，即

$$\begin{cases} h(n) = h(n)\varepsilon(n) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \end{cases}$$

稳定因果系统是工程上有意义而且能够实现的系统，
是系统设计的基本目的。

5.1.3 离散系统时域分析

例5.5 有一离散系统的差分方程为

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

当给定初始条件为 $y(n) = 0, n < 0$ ，在输入 $x(n) = \delta(n)$ 时，例5.1中用递推解法求得单位抽样响应 $h(n)$ 为

$$h(n) = a^n \varepsilon(n)$$

可见， $h(n)$ 为因果序列，系统是因果系统。若当 $|a| < 1$ 时， $h(n)$ 收敛，绝对可和，是稳定系统，否则是不稳定系统。

5.1.3 离散系统时域分析

但如果给定的起始条件是 $y(n) = 0, n > 0$ ，输入 $x(n) = \delta(n)$ 时，应用递推解法，可得出

$$h(n) = -a^n \varepsilon(-n-1)$$

显然， $h(n)$ 为非因果序列，系统是非因果系统。当 $|a| > 1$ 时， $h(n)$ 收敛，绝对可和，是稳定系统，否则是不稳定系统。

5.2 离散系统的 z 域分析

离散系统时域分析的方法，可以作为离散系统计算机实现的依据，但作系统分析和综合时，则不如 z 域分析方法简便。

所谓 z 域分析方法是利用 z 变换的位移特性，将时域表示的差分方程变换为 z 域表示的代数方程，使求解分析大为简化。

5.2.1 差分方程的z变换解法

例5.6 设描述某一离散系统的差分方程为

$$y(n) - by(n-1) = x(n)$$

若系统输入 $x(n) = \varepsilon(n)$ ，起始值为 $y(-1)$ ，求系统响应 $y(n)$ 。

对上述差分方程两边取单边z变换，并应用z变换的位移特性，有

$$Y(z) - bz^{-1}Y(z) - by(-1) = X(z)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - bz^{-1}} + \frac{by(-1)}{1 - bz^{-1}}$$

5.2.1 差分方程的z变换解法

$$X(z) = Z[\varepsilon(n)] = \frac{z}{z-1}$$

则

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-b)} + \frac{by(-1)z}{z-b}$$

将上式展成部分分式，并进行反变换得到

$$Y(z) = \frac{1}{1-b} \frac{z}{z-1} - \frac{b}{1-b} \frac{z}{z-b} + \frac{by(-1)z}{z-b}$$

$$y(n) = \frac{1}{1-b} \varepsilon(n) - \frac{1}{1-b} b^{n+1} \varepsilon(n) + y(-1)b^{n+1} \varepsilon(n)$$

5.2.1 差分方程的z变换解法

由上式可见，输出响应 $y(n)$ 中包含了三个分量：
其中的第一项是输入激励引起的系统响应中的强迫分量（**稳态分量**），第二项是系统响应中的自由分量（**暂态响应**），这两项称为零状态响应，第三项则是由系统起始状态决定的分量（**瞬态分量**），称为零输入响应。

5.2.2 离散系统的系统函数

1. 系统函数的定义

由前述，线性非移变系统可用差分方程来描述，即

$$b_0 y(n) + b_1 y(n-1) + \cdots + b_N y(n-N) = \\ a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + \cdots + a_M x(n-M)$$

或

$$\sum_{k=0}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

当系统处于零状态下，对上式两边取 z 变换并利用 z 变换的位移特性可得

$$Y(z) \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} = X(z) \sum_{r=0}^M a_r z^{-r}$$

5.2.2 离散系统的系统函数

定义系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

它表示系统在零状态下，输出序列的 z 变换与输入 z 变换之比。因此系统函数 $H(z)$ 反映了零状态下，系统输入输出的传输关系，有

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) X(z) \\ y(n) &= Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1}[H(z) X(z)] \end{aligned}$$

5.2.2 离散系统的系统函数

2. 系统函数与差分方程

系统函数 $H(z)$ 与差分方程的各项系数有关，所以和差分方程一样，也是描述系统特征的数学模型，并且如果已知 $H(z)$ ，由式（5.18），交叉相乘并进行反变换，立即可以写出系统的差分方程。

5.2.2 离散系统的系统函数

(1). 若 $1 \leq r \leq M$, $a_r = 0$, 即只有 $a_0 \neq 0$ 时,

$$H(z) = \frac{a_0}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

系统只含有 N 个极点, 无有限零点, 其值取决于系数 b_k , 称之为全极型系统, 记为 AR 模型。这种系统的单位抽样响应为无限长序列, 习惯上称为无限冲激响应 (IIR) 离散系统, 信号处理中作为一种典型的数字滤波器。

5.2.2 离散系统的系统函数

(2). 若 $1 \leq k \leq M$, $b_k = 0$, 即只有 $b_0 \neq 0$ 时,

$$H(z) = \frac{1}{b_0} \sum_{r=0}^M a_r z^{-r}$$

若设 $b_0 = 1$, 则

$$H(z) = \sum_{r=0}^M a_r z^{-r}$$

系统只含有 N 个零点, 无有限极点, 其值取决于系数 a_r , 称之为全零型系统, 记为MA模型。这种系统的单位抽样响应为有限长序列, 习惯上称为有限冲激响应 (FIR) 离散系统, 信号处理中也是一种典型的数字滤波器。

5.2.2 离散系统的系统函数

(3). 系统同时具有零点和极点, $H(z)$ 即为式(5.19)所示。称为极—零型系统, 记为ARMA模型, 也称为自回归滑动平均模型。

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}$$

5.2.2 离散系统的系统函数

3. 系统函数 $H(z)$ 与单位抽样响应 $h(n)$

若：一离散系统的输入 $x(n) = \delta(n)$ ，则 $X(z) = 1$ ，系统的单位冲激响应为

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \delta(n) = h(n)$$

从而有

$$\begin{aligned} Y(z) &= \mathcal{Z} [h(n)] \\ Y(z) &= H(z)X(z) \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{1} = Y(z) \\ &= \mathcal{Z} [h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} \end{aligned}$$

5.2.2 离散系统的系统函数

即

$$\begin{aligned} H(z) &= Z [h(n)] \\ h(n) &= Z^{-1} [H(z)] \end{aligned}$$

表明：系统函数 $H(z)$ 与系统单位抽样响应 $h(n)$ 是一对 z 变换，如果要求 $h(n)$ ，通过求解 $H(z)$ 的反变换是最方便的。

5.2.2 离散系统的系统函数

例5.7 已知一离散系统的差分方程为

$$y(n) - by(n-1) = x(n)$$

试求：系统函数 $H(z)$ 和单位抽样响应 $h(n)$ 。

解：对上述方程进行双边 z 变换，可得

$$Y(z) - bz^{-1}Y(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

5.2.2 离散系统的系统函数

根据收敛域的不同， $h(n)$ 可以是左或右序列：

$|z| > b$ ， $h(n) = b^n \varepsilon(n)$ 是因果（右边）序列。

$|z| < b$ ， $h(n) = -b^n \varepsilon(-n-1)$ 是非因果（左边）序列。

由 $H(z)$ 可以看出：它是全极型系统，相应地其单位脉冲响应 $h(n)$ 是一无限长序列，即“无限冲激响应”。

5.2.2 离散系统的系统函数

4.因果稳定离散系统的z域条件

因果离散系统的时域条件，是 $h(n)$ 为右边序列，因此其z变换 $H(z)$ 的收敛域应是一圆外域，并包含无穷远点。

如果系统是稳定的，其单位抽样响应 $h(n)$ 必须是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

5.2.2 离散系统的系统函数

当 $|z| = 1$ 时，上式等价于

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty$$

显然，若系统是稳定的，系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须包括单位圆。同时根据 z 变换收敛域内不能有极点的性质，说明极点必须在单位圆内。所以，离散系统因果稳定的 z 域条件是：系统函数 $H(z)$ 的收敛域必须是圆外域（包括单位圆和无穷远点），并且所有极点必须在单位圆内。

5.2.3 离散系统的频率响应

1. 定义

系统函数 $H(z)$ 在单位圆上的取值，就是离散系统的频率响应，表示为 $H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$

由前述， $H(z)$ 是 $h(n)$ 的 z 变换，有

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

如果 $x(n)$ 、 $y(n)$ 和 $h(n)$ 满足绝对可和的条件，则相应地 $X(z)$ 、 $Y(z)$ 和 $H(z)$ 均在单位圆上收敛，这些序列的傅里叶变换存在（参见第4章），显然当 $z = e^{j\omega}$ 时有

5.2.3 离散系统的频率响应

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r e^{-jr\omega}}{\sum_{k=0}^N b_k e^{-jk\omega}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega} \end{aligned}$$

由上式可见，离散系统的频率响应有下列性质：

1. 它是输出、输入序列的傅里叶变换之比；
2. 它与差分方程的系数（系统参数）有关；
3. 频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是系统单位抽样响应 $h(n)$ 在单位圆上的z变换，即 $h(n)$ 的傅里叶变换。

5.2.3 离散系统的频率响应

2. 物理意义

与连续系统的频率响应物理意义相似，离散系统的频率响应，也是反映离散系统对输入正弦序列作用下的响应能力。

设：**线性非移变因果稳定系统**的单位抽样响应为 $h(n)$ ，输入复指数序列为

$$x(n) = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$$

根据离散卷积定义，系统输出响应 $y(n)$ 为

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} \end{aligned}$$

5.2.3 离散系统的频率响应

上式可写成

$$y(n) = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

由上式可见，在复指数序列输入下，系统响应仍为同频率的复指数序列，而它的复振幅是由系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 所决定的， $H(e^{j\omega})$ 为数字角频率 ω 的函数，一般情况下是复数，可以表示成幅度、相位的形式

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 称为离散系统的幅频响应， $\phi(\omega)$ 称为相频响应。当输入为正弦序列时，它可以表示为复指数序列的叠加

5.2.3 离散系统的频率响应

$$x(n) = A \sin \omega n = \frac{A}{2j} (e^{j\omega n} - e^{-j\omega n})$$

$$= \frac{A}{2j} e^{j\omega n} - \frac{A}{2j} e^{-j\omega n}$$

输出响应为上式右端两项响应的叠加，对于 $\frac{A}{2j} e^{j\omega n}$

的响应 $y_1(n)$ 为 $y_1(n) = H(e^{j\omega}) \frac{A}{2j} e^{j\omega n}$

$\frac{A}{2j} e^{-j\omega n}$ 的响应 $y_2(n)$ 为

$$\begin{aligned} y_2(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \frac{A}{2j} e^{-j(n-m)\omega} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) e^{j\omega m} \right] \frac{A}{2j} e^{-j\omega n} \\ &= H(e^{-j\omega}) \frac{A}{2j} e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

5.2.3 离散系统的频率响应

考虑到： $h(n)$ 为实序列， $H(e^{j\omega})$ 与 $H(e^{-j\omega})$ 为共轭复数

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{jm\omega} = H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\phi(\omega)}$$

故总的响应为 $y(n)$ 为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) - y_2(n) \\ &= \frac{A}{2j} \{ |H(e^{j\omega})| e^{j[\omega n + \phi(n)]} - |H(e^{j\omega})| e^{-j[\omega n + \phi(n)]} \} \\ &= A |H(e^{j\omega})| \cdot \left(\frac{1}{2j} \right) \{ e^{j[\omega n + \phi(n)]} - e^{-j[\omega n + \phi(n)]} \} \\ &= A |H(e^{j\omega})| \sin[\omega n + \phi(\omega)] \end{aligned}$$

5.2.3 离散系统的频率响应

由式（5.27）可见：当离散系统输入为正弦序列时，稳态响应也是同频率的正弦序列，其幅度和相位的变化将取决于系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。如令

$$x(n) = A \sin(n\omega + \theta_1)$$

$$y(n) = B \sin(n\omega + \theta_2)$$

$$\frac{B}{A} = |H(e^{j\omega})| \quad (5.28)$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \phi(\omega) \quad (5.29)$$

上式说明：输入的正弦序列通过系统后，其幅度衰减程度幅频响应 $|H(e^{j\omega})|$ 的值，而相移则取决于相频响应 $\phi(\omega)$ 的值，如图5.11所示。

5.2.3 离散系统的频率响应

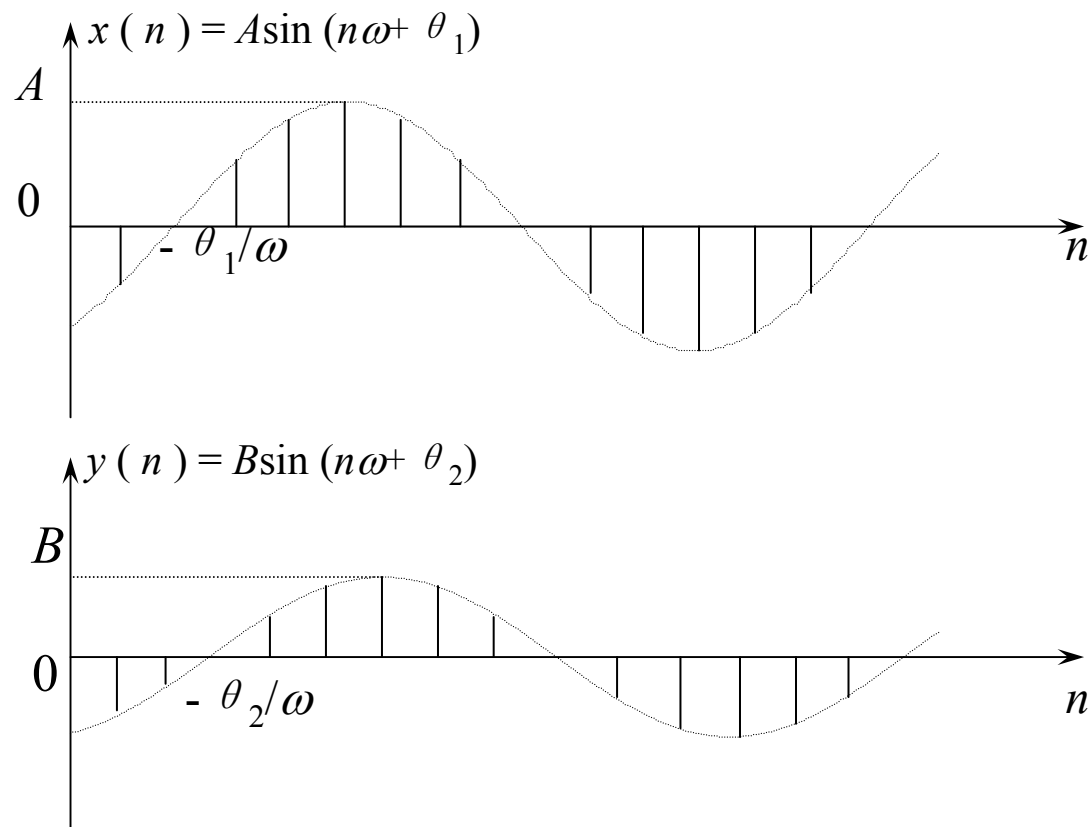


图5.11离散系统频率响应的物理意义

5.2.3 离散系统的频率响应

3. 频率响应的几何确定法

离散系统的频率响应除了可以根据上式定义直接求解外，还可以根据 $H(z)$ 的零极点分布用几何方法直观地确定。

若 $H(z)$ 的零极点分布的表示式为

$$H(z) = \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)}$$

则系统频响

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - p_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

5.2.3 离散系统的频率响应

$$e^{j\omega} - z_r = A_r e^{j\psi_r}$$

$$e^{j\omega} - p_k = B_k e^{j\theta_k}$$

从而幅频特性为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\prod_{r=1}^M A_r}{\prod_{k=1}^N B_k}$$

相频特性为

$$\phi(\omega) = \sum_{r=1}^M \psi_r - \sum_{k=1}^N \theta_k$$

5.3 模拟滤波器的基本概念其及设计方法

5.3.1 基本概念

根据有用信号与噪声不同的特性，抑制不需要的噪声或干扰，提取出有用信号的过程称为滤波。

根据滤波器所处理的信号不同，可以分为模拟滤波器与数字滤波器，本章讨论模拟滤波器的一般设计问题。

一般线性非移变系统模拟滤波器的系统如图5.24所示

5.3.1 基本概念

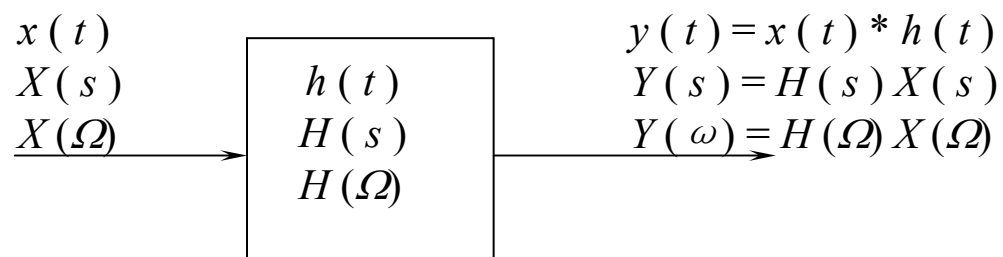


图5.24 模拟滤波器系统框图

滤波器的传输特性可以分为频域和时域表示两种。在频域上可以用系统函数 $H(s)$ 或频率响应 $H(\Omega)$ 来表示，在时域上可用滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 表示。

5.3.2 信号通过线性系统无失真传输的条件

所谓信号无失真传输是指：输入信号通过系统后，输出信号的幅度是输入信号的**比例放大**，在出现的时间上**允许有一定滞后**，**但没有波形上的畸变**，如图5.24。

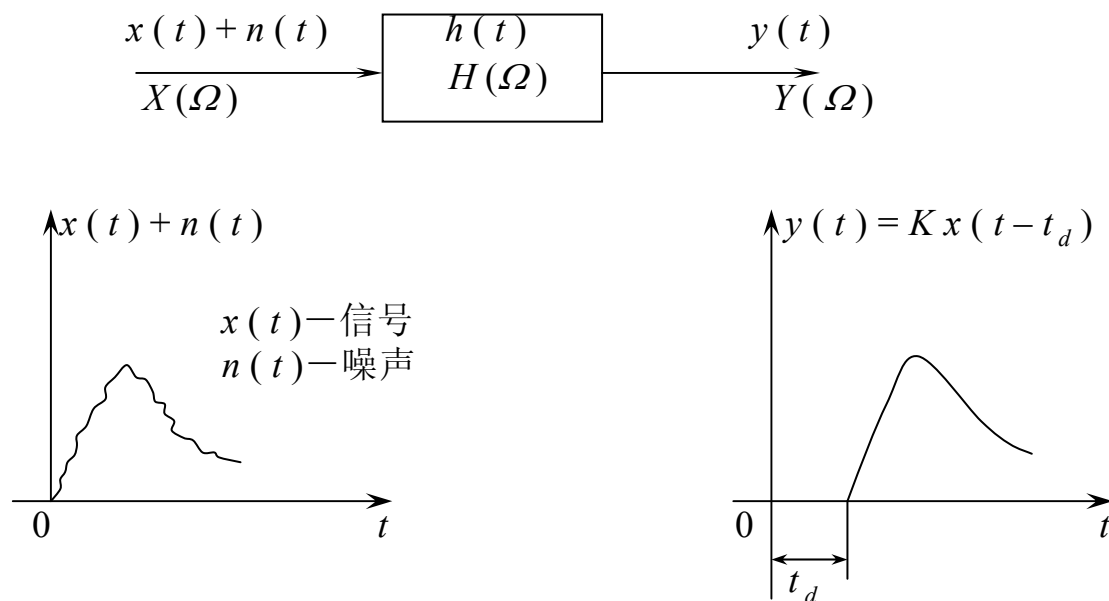


图5.24无失真传输时输入输出信号的波形

5.3.2 信号通过线性系统无失真传输的条件

因而，输入信号 $x(t)$ 与输出信号 $y(t)$ 之间的关系为

$$y(t) = K x(t - t_d)$$

上式为无失真传输的时域条件。下面再来看频域条件，对上式两边作傅氏变换，并应用傅里叶变换的延时特性，可得输出与输入信号的频谱关系为

$$Y(\Omega) = K e^{-j\Omega t_d} X(\Omega)$$

从而滤波器的频率响应

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = K e^{-j\Omega t_d} = |H(\Omega)| e^{j\phi(\Omega)}$$

5.3.2 信号通过线性系统无失真传输的条件

$$\begin{cases} |H(\Omega)| = K \\ \phi(\Omega) = -\Omega t_d \end{cases}$$

上式即为线性系统无失真传输的频域条件：要使信号通过滤波器这样的线性系统传输不失真，要求在信号全部频带上，系统的幅频特性 $|H(\Omega)|$ 应为一常数，而其相频特性 $\phi(\Omega)$ 与频率成正比，这一条件可用图5.25所示。



图5.25 无失真传输系统的幅频相频特性

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

理想滤波器的特性要求对有用信号应无失真传输，而能完全抑制无用信号，对于频率选择滤波器，要求有用信号和无用信号（噪声、干扰）频率不在同一频带内。理想特性可归纳为

- (1) 有用信号频带内，应当是常值幅频，线性相频；
- (2) 有用信号频带外，幅频立即下降到零，相频特性如何无关紧要；
- (3) 特性分为通带和阻带：
 - 通带：信号能通过滤波器的频带；
 - 阻带：信号受滤波器抑制的频带。

理想特性如图5.26所示，图中的 Ω_c 为通带截止频率。

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

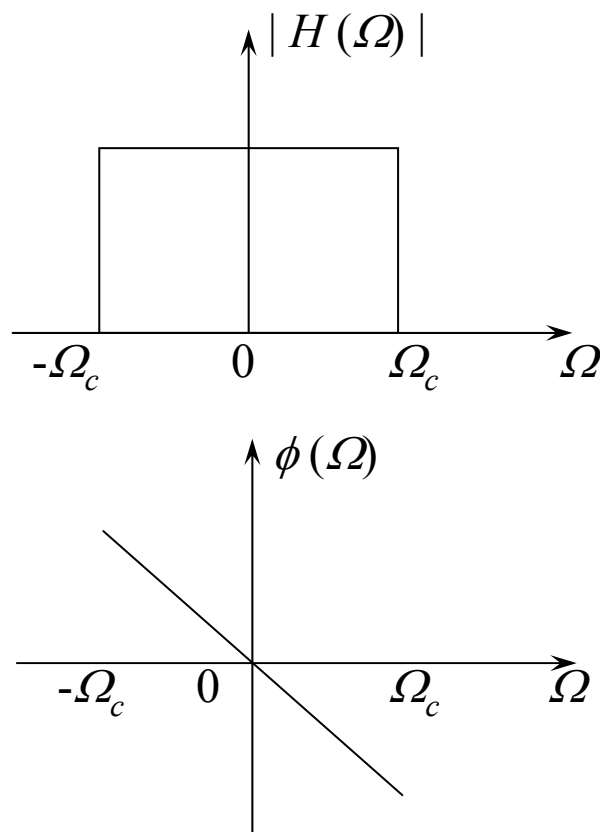


图5.26 低通滤波器的理想特性

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

根据通带和阻带位置不同，可分为四种理想滤波器的特性：**低通、高通、带通、带阻四种**，如图5.27所示。在各种情况下，通带内的相位特性均应是线性的。

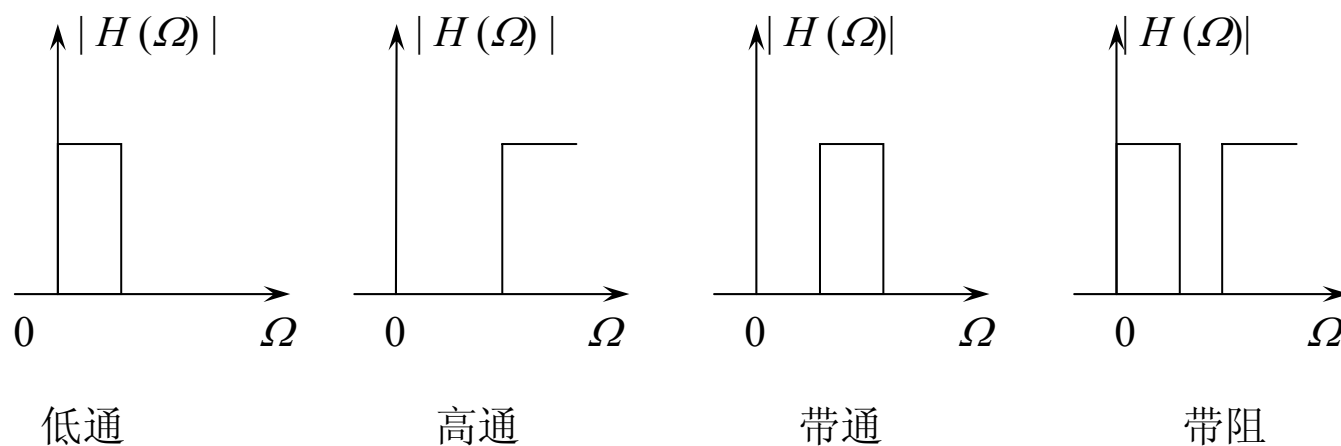


图5.27 滤波器四种理想特性

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

但是理想的滤波器是一个非因果系统，是物理不可实现的，我们以理想低通滤波器为例来说明这一点。理想低通滤波器的频率特性表示为

$$H(\Omega) = \begin{cases} Ke^{j\Omega t_d} & , \quad |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & , \quad |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

下面来看理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$ 。为简化起见，设 $K=1$ ，则 $h(t)$ 为

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

$$\begin{aligned} h(t) &= F^{-1}[H(\Omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \Omega(t - t_d) + j \sin \Omega(t - t_d)] d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \Omega(t - t_d) d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_c} \cos \Omega(t - t_d) d\Omega \\ &= \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin \Omega_c(t - t_d)}{\Omega_c(t - t_d)} \end{aligned} \quad (5.41)$$

画出上述时域单位冲激的输入和单位冲激响应的图形如图5.30

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

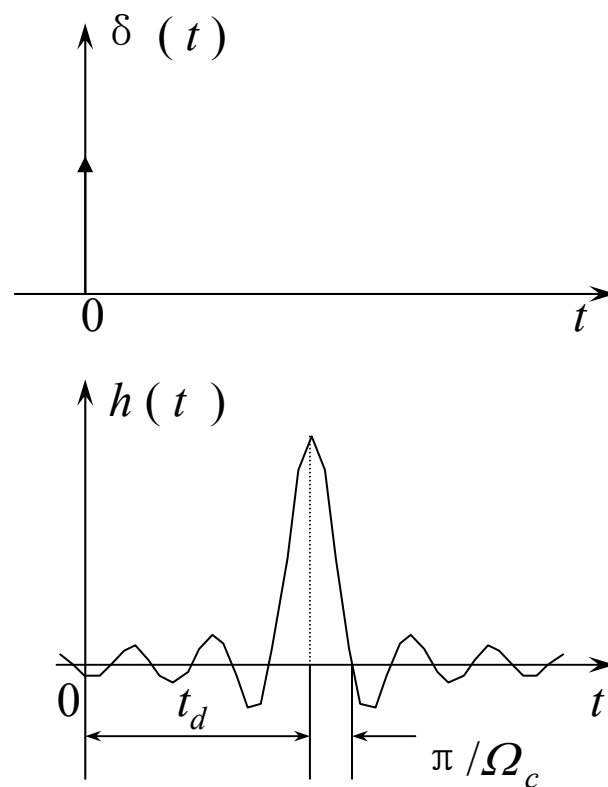


图5.30 理想低通滤波器的冲激响应

5.3.3 滤波器的理想特性与实际特性

一个实际低通滤波器的特性应如图5.31所示。

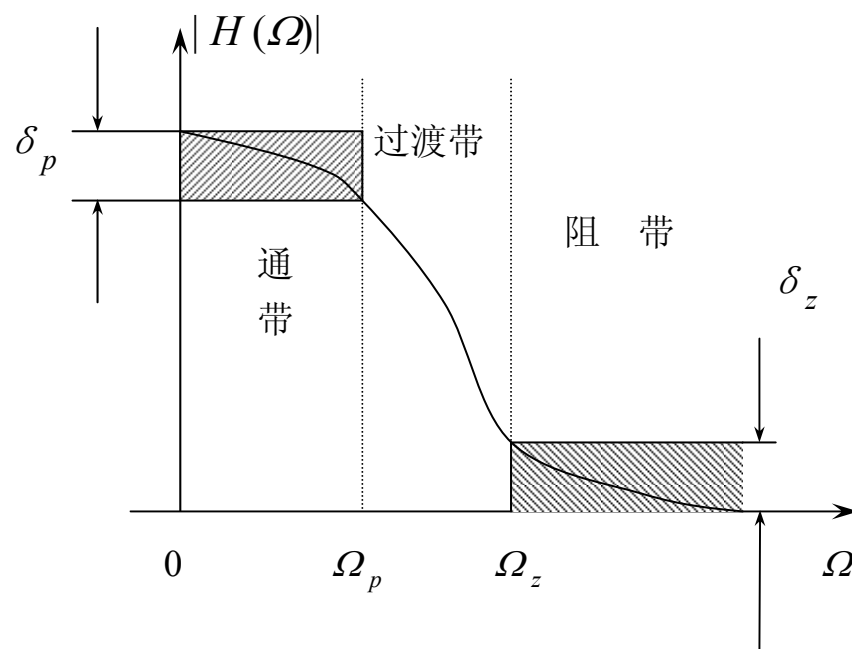


图5.31低通滤波器实际特性

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

模拟滤波器的设计一般包括两个方面：首先是根据设计的技术指标即滤波器的幅频特性要求，**确定滤波器的传递函数 $H(s)$** ，其次是设计实际网络（通常为电网络）**实现这一传递函数**。

幅度特性 $|H(\Omega)|$ 也可写成 $|H(j\Omega)|$ ，而 $|H(j\Omega)|$ 许多情况下不是有理函数，给设计和实现造成不便，因此，通常用幅度平方函数 $A(\Omega^2)$ 来确定传递函数 $H(s)$ ，所谓幅度平方函数为

$$A(\Omega^2) = |H(j\Omega)|^2$$

任意一个复数模的平方可以表示为该复数与其共轭复数的积，即

$$|H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H^*(j\Omega)$$

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

$$\begin{aligned} A(\Omega^2) &= |H(j\Omega)|^2 = H(j\Omega)H(-j\Omega) \\ &= H(s)H(-s) \big|_{s=j\Omega} \end{aligned}$$

而 $H(s)$ 一般表示为具有实系数的有理函数形式，式（5.47）表明幅度平方函数 $A(\Omega^2)$ 是以 Ω^2 为变量的有理函数。显然也可以把 $A(\Omega^2)$ 表示成

$$A(\Omega^2) = A(-s^2) \big|_{s=j\Omega} = A(\Omega^2) \big|_{\Omega^2=-s^2}$$

由式（5.47）和（5.48）可得

$$A(-s^2) = H(s)H(-s)$$

从而有

$$A(\Omega^2) \big|_{\Omega^2=-s^2} = A(-s^2) = H(s)H(-s)$$

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

由式(5.50)可知：当已知幅度平方函数 $A(\Omega_2)$ 时，以 $\Omega_2 = -s_2$ 代入，即可得到变量 s_2 的有理函数 $A(-s_2)$ ，然后求出其零极点并作适当分配，分别作为 $H(s)$ 和 $H(-s)$ 的零极点，就可以求得 $H(s)$ 。

主要的问题是如何分配零极点。由 $A(-s^2) = H(s)H(-s)$

若 $H(s)$ 有一零点或极点时，则 $H(-s)$ 必然有一异号但大小相等的零点或极点与其对应，因此 $A(-s_2)$ 的零极点具有象限对称性。若 $H(s)$ 有一零点或极点在负实轴上，则 $H(s)$ 必有一零点或极点落在正

实轴上，若 $H(s)$ 有一零点或极点为 $a \pm jb$ （如图5.30中的极点 p_2 、 p_3 和零点 r_2 、 r_3 ），则 $H(-s)$ 必有相应的零点或极点为 $-a \mp jb$

（ p_2' 、 p_3' 和 r_2' 、 r_3' ），而在虚轴上的零极点必然是两阶的（如二阶零点 $r_1(2)$ 、 $r_1'(2)$ ），在 s 平面上的零极点分布如图5.30所示。图中的对称形式称为象限对称，字符 p 表示极点， r 为零点，在 $j\Omega$ 轴上零点处括号中的数字表示零极点的阶次，如（2）表示二阶，上标、下标的字符表示相对称的零极点。

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

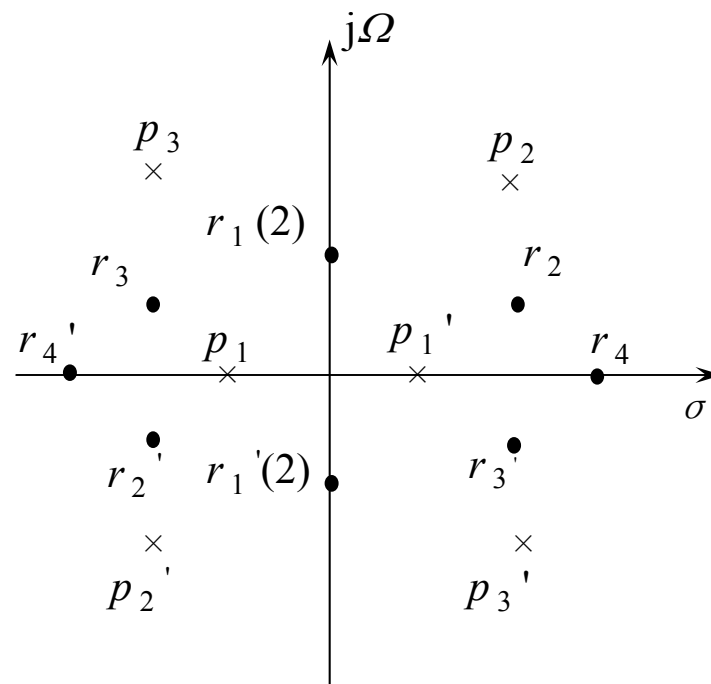


图5.30 $H(s)$ 与 $H(-s)$ 零极点的象限对称性

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

如何从 $A(-s^2)$ 的零极点分布来组合 $H(s)$ 的零极点呢？为了使滤波器稳定，其极点必须落在 s 平面的左半平面，因此所有落在左半平面的极点都属于 $H(s)$ ，落在右半平面的极点都属于 $H(-s)$ 。而零点的选取原则上并无这种限制，任取其中的一半零点即可，其解一般并不是惟一的。但是如果要求 $H(s)$ 是具有最小相移的传递函数，左半平面的零点引向虚轴 $j\Omega$ 上任一点矢量的相位角（即滤波器的频率响应 $H(j\Omega)$ 的相频特性情况）要比右半平面零点的小，因此零点也应全部选在左半平面，这样零点的选择也就成为惟一了。

5.3.4 模拟滤波器的一般设计方法

例5.12 $A(\Omega^2) = \frac{2 + \Omega^2}{1 + \Omega^4}$ 试求 $H(s)$ 。

$$\begin{aligned} A(-s^2) &= A(\Omega^2) \big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{2 - s^2}{1 + s^4} \\ &= \frac{(\sqrt{2} - s)(\sqrt{2} + s)}{(s - \frac{1+j}{\sqrt{2}})(s + \frac{1+j}{\sqrt{2}})(s - \frac{1-j}{\sqrt{2}})(s + \frac{1-j}{\sqrt{2}})} \end{aligned}$$

若按稳定性的要求选取极点，按最小相位条件来选取零点，零极点应全部选在左半平面，则滤波器传递函数应为

$$H(s) = \frac{\sqrt{2} + s}{(s + \frac{1+j}{\sqrt{2}})(s + \frac{1-j}{\sqrt{2}})}$$

5.4 模拟滤波器的设计

5.4.1 巴特沃思滤波器

巴特沃思（Butterworth）滤波器是以巴特沃思近似逼近函数作为滤波器的传递函数，该函数以最高阶台劳级数形式来逼近理想矩形特性，其幅度平方函数为

$$|H(j\Omega)|^2 = A(\Omega^2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}$$

巴特沃思滤波器的幅度平方函数具有下列特点：

由式（5.51）可知，在 $\Omega = 0$ 处，其幅度平方函数的前 $2n - 1$ 阶的导数全部为零，所以在 $\Omega = 0$ 附近的低频范围，具有最大平坦幅度特性。

5.4.1 巴特沃思滤波器

通带和阻带内的函数是单调下降的。

取任意阶次 n ，其带宽都相等，即幅度平方函数均下降 $1/2$ ，即带宽为3dB带宽。阶次愈高，特性愈接近矩形。

传递函数无零点。它的极点成等角度分布在以 $|s| = \Omega_c$ 为半径的圆周上，这个圆称为巴特沃思圆。

其幅度平方函数随 Ω 变化的曲线如图5.32（a）所示。

5.4.1 巴特沃思滤波器

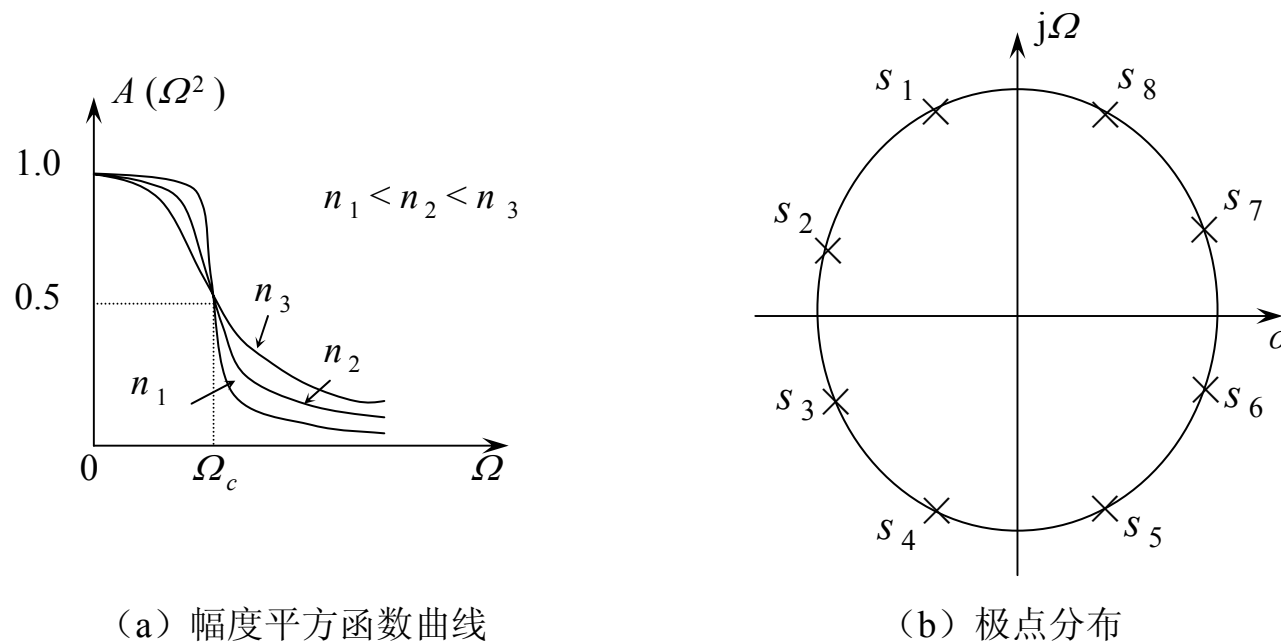


图5.32 巴特沃思低通滤波器幅度平方函数及其极点分布

5.4.1 巴特沃思滤波器

根据前面所讲的，要由幅度平方函数来确定传递函数 $H(s)$ ，则式（5.51）可表示为

$$A(-s^2) = \frac{1}{1 + \left(\frac{-s^2}{\Omega_c^2}\right)^n} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2n}}$$

上式中极点可由分母的根确定，其极点应为 $2n$ 个，即

$$\left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2n} = -1 = e^{j(\pi+2k\pi)}$$

整理变换后得

$$s = j\Omega_c e^{j\frac{2k+1}{2n}\pi}$$

5.4.1 巴特沃思滤波器

而 j 可以表示成 $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ 则上式可改写为

$$s = e^{j\frac{\pi}{2}} \Omega_c e^{j\frac{2k+1}{2n}\pi} = \Omega_c e^{j\pi(\frac{2k+1}{2n} + \frac{1}{2})}$$

若设滤波器阶次为8，即 $n = 4$ ，将 $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ 代入上式，可以得到8个极点分别为

5.4.1 巴特沃思滤波器

$$k=0, \quad s_1 = \Omega_c e^{j\frac{5}{8}\pi}$$

$$k=1, \quad s_2 = \Omega_c e^{j\frac{7}{8}\pi}$$

$$k=2, \quad s_3 = \Omega_c e^{j\frac{9}{8}\pi}$$

$$k=3, \quad s_4 = \Omega_c e^{j\frac{11}{8}\pi}$$

$$k=4, \quad s_5 = \Omega_c e^{j\frac{13}{8}\pi}$$

$$k=5, \quad s_6 = \Omega_c e^{j\frac{15}{8}\pi}$$

$$k=6, \quad s_7 = \Omega_c e^{j\frac{1}{8}\pi}$$

$$k=7, \quad s_8 = \Omega_c e^{j\frac{3}{8}\pi}$$

5.4.1 巴特沃思滤波器

上述极点分布如图5.32 (b) 所示。实际滤波器应是一稳定因果系统，根据前述极点分布的原则，滤波器的传递函数 $H(s)$ 的极点应在 s 平面的左半部，从而可以直接写出 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

由 $H(s)|_{s=j\Omega=0} = 1$

$$K = (-s_1)(-s_2)(-s_3)(-s_4) = \Omega_c^4$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\Omega_c^4}{(s - \Omega_c e^{j\frac{5}{8}\pi})(s - \Omega_c e^{j\frac{7}{8}\pi})(s - \Omega_c e^{j\frac{9}{8}\pi})(s - \Omega_c e^{j\frac{11}{8}\pi})} \\ &= \frac{1}{(\frac{s}{\Omega_c} - e^{j\frac{5}{8}\pi})(\frac{s}{\Omega_c} - e^{j\frac{7}{8}\pi})(\frac{s}{\Omega_c} - e^{j\frac{9}{8}\pi})(\frac{s}{\Omega_c} - e^{j\frac{11}{8}\pi})} \end{aligned}$$

5.4.1 巴特沃思滤波器

为便于工程应用，在进行滤波器设计时，不考虑频率和元件参数具体值的变化，可以把频率变量进行归一化，通常以各频率相对截止频率 Ω_c 进行归一化，为此引入归一化频率

$$s' = \frac{s}{\Omega_c}$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(s' - e^{j\frac{5}{8}\pi})(s' - e^{j\frac{7}{8}\pi})(s' - e^{j\frac{9}{8}\pi})(s' - e^{j\frac{11}{8}\pi})} \\ &= \frac{1}{(s')^4 + 2.613(s')^3 + 3.414(s')^2 + 2.613(s') + 1} \end{aligned}$$

由上式可以看出，对于归一化频率，任意n阶巴特沃思滤波器的传递函数的极点是固定值，其归一化形式可以表示为

5.4.1 巴特沃思滤波器

$$H(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) \cdots (s - s_n)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2s^2 + a_1s + 1}$$

上述两个表达式中的极点和分母多项式中的系数已经被计算好，作成了表格（参见表5.1-5.3），可直接根据滤波器的阶次查出，显然，低通巴特沃思滤波器设计问题，可以归结为确定滤波器的阶次。但要注意的是在查表时，所得到的是归一化频率的传递函数。

5.4.1 巴特沃思滤波器

例5.16 试确定一低通巴特沃思滤波器的传递函数 $H(s)$ 。要求在通带截止频率 $f_c = 2 \text{ kHz}$ ($\Omega_c = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ rad/s}$)处, 衰减 $\delta_c \leq 3\text{dB}$, 阻带始点频率 $f_z = 4 \text{ kHz}$ ($\Omega_z = 2\pi \times 4 \times 10^3 \text{ rad/s}$)处, 衰减 $\delta_z \geq 15\text{dB}$, 各项指标参见图5.33。

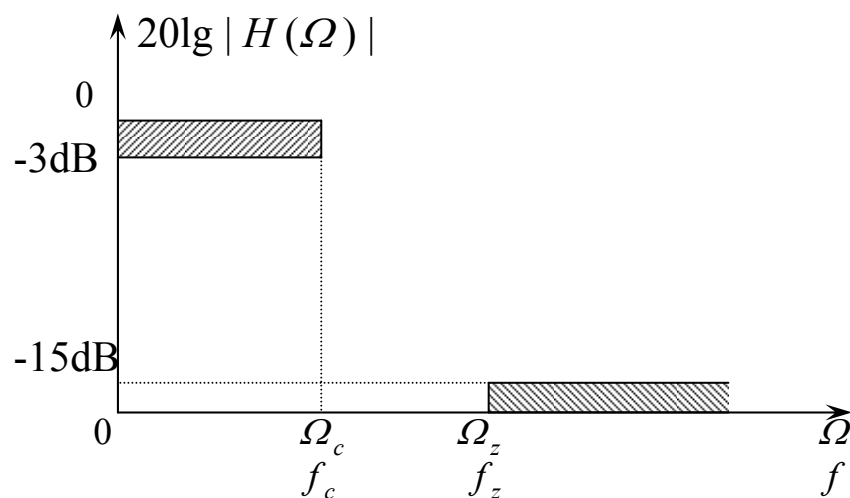


图5.33 例5.13设计指标示意图

5.4.1 巴特沃思滤波器

衰减 $\delta(\Omega)$ 的一般表示式为

$$\begin{aligned}\delta(\Omega) &= -20 \lg |H(\Omega)| = -10 \lg |H(\Omega)|^2 \\ &= 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2n} \right]\end{aligned}$$

因为所有的巴特沃思滤波器一般设计中，通带均为3dB带宽，任何的设计都能满足通带要求，因此应按给定的阻带指标确定满足要求的滤波器阶次，从而有

$$10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2n} \right] \geq \delta_z$$

$$n \geq \frac{\lg(10^{0.1\delta_z} - 1)}{2 \lg \frac{\Omega_z}{\Omega_c}}$$

5.4.1 巴特沃思滤波器

$$n \geq \frac{\lg(10^{0.1 \times 15} - 1)}{2 \lg \frac{2\pi \times 4 \times 10^3}{2\pi \times 2 \times 10^3}} = 2.468$$

n 取整，令 $n = 3$ ，可用3阶巴特沃思滤波器实现指标要求，在4 kHz处的衰减将优于-15dB。由表5.3，按 $n = 3$ 可查得 $H(s)$ 的归一化形式，即可写出 $H(s)$ 的表示式为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{(\frac{s}{\Omega_c} + 1)} \times \frac{1}{(\frac{s}{\Omega_c})^2 + (\frac{s}{\Omega_c}) + 1} \\ &= \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} \times \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \Omega_c s + \Omega_c^2} \\ &= \frac{4\pi \times 10^3}{s + 4\pi \times 10^3} \times \frac{16\pi^2 \times 10^6}{s^2 + 4\pi \times 10^3 s + 16\pi^2 \times 10^6} \end{aligned}$$

5.4.1 巴特沃思滤波器

得到了滤波器的传递函数 $H(s)$ 后，通常可采用无源网络或有源网络来实现。在工业测控系统中，要求不太高的场合，采用 RC 无源网络居多，要求较高时，可采用有源滤波。对于本例中的3阶巴特沃思滤波器，可以用一个一阶与一个二阶有源滤波器串联实现，如图5.34。

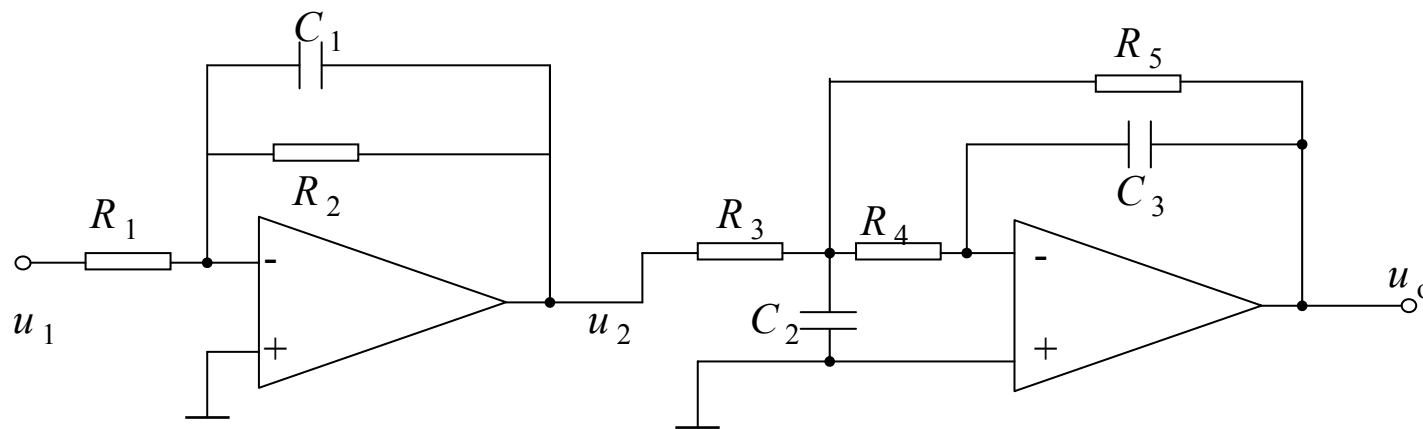


图5.34 有源模拟滤波器的实现

5.4.1 巴特沃思滤波器

由运算放大器电路原理可以求出两个串联环节的传递函数分别为

$$H_1(s) = -\frac{\frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_1}}$$

$$H_2(s) = -\frac{\frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_3}}{s^2 + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) s + \frac{1}{R_4 R_5 C_2 C_3}}$$

将式（5.58）、（5.59）与式（5.57）作对比，可以写出如下的方程组

5.4.1 巴特沃思滤波器

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1 C_1} = 4\pi \times 10^3 \\ \frac{1}{R_2 C_1} = 4\pi \times 10^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R_3 R_4 C_2 C_3} = 16\pi^2 \times 10^6 \\ \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = 4\pi \times 10^3 \\ \frac{1}{R_4 R_5 C_2 C_3} = 16\pi^2 \times 10^6 \end{cases}$$

5.4.2 切比雪夫滤波器

1. 切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

切比雪夫多项式的定义为

$$C_n(x) = \cos[n(\arccos x)], \quad |x| \leq 1$$

令 $\phi = \arccos x$

有 $C_n(x) = \cos n\phi$

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\phi &= \cos n\phi \cos \phi - \sin n\phi \sin \phi \\ &= \cos n\phi \cos \phi + \frac{1}{2} \cos(n+1)\phi - \frac{1}{2} \cos(n-1)\phi \end{aligned}$$

5.4.2 切比雪夫滤波器

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x)$$

式(5.65)即为“三项递推公式”，利用它可求任意阶次的切比雪夫多项式，现列出1-10阶的切比雪夫多项式，参见表5.4，其1-5阶曲线如图5.36所示。由表、图可以看出切比雪夫多项式有以下特点：

当 n 为偶数， $C_n(x)$ 为偶次式， n 为奇数时， $C_n(x)$ 为奇次式。

当 x 在 $-1 \leq x \leq 1$ 范围内变化时，多项式值在+1与-1间变化，

呈等起伏波动特性。

$x = 1$ 时， $C_n(x) = 1$ ， $x = -1$ ，若 n 为奇数，

$C_n(x) = 0$ ，为偶数， $C_n(x) = 1$ 或 -1 。

当 $|x| > 1$ 时， $C_n(x)$ 的值随 $|x|$ 增大而迅速增大， n 越大，其增长越快。

5.4.2 切比雪夫滤波器

2. 切比雪夫滤波器的幅度平方函数

切比雪夫滤波器也是一种全极型滤波器，相比巴特沃思滤波器，在通带内有更为均匀的特性，是所有全极型滤波器中过渡带最窄的滤波器。切比雪夫滤波器可分为 I 型和 II 型两种，它们的差异只是前者通带内具有等波纹起伏特性，而后者是阻带内有起伏特性，通带内是单调下降、平滑的，设计的方法是一样的，下面只介绍 **I 型切比雪夫滤波器**。I 型低通切比雪夫滤波器 N 阶幅度平方函数为

$$|H(\Omega)|^2 = A(\Omega^2) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

5.4.2 切比雪夫滤波器

例5.19 绘制出阶数分别为2, 4, 6, 8的切比雪夫模拟低通滤波器的平方幅频响应曲线。

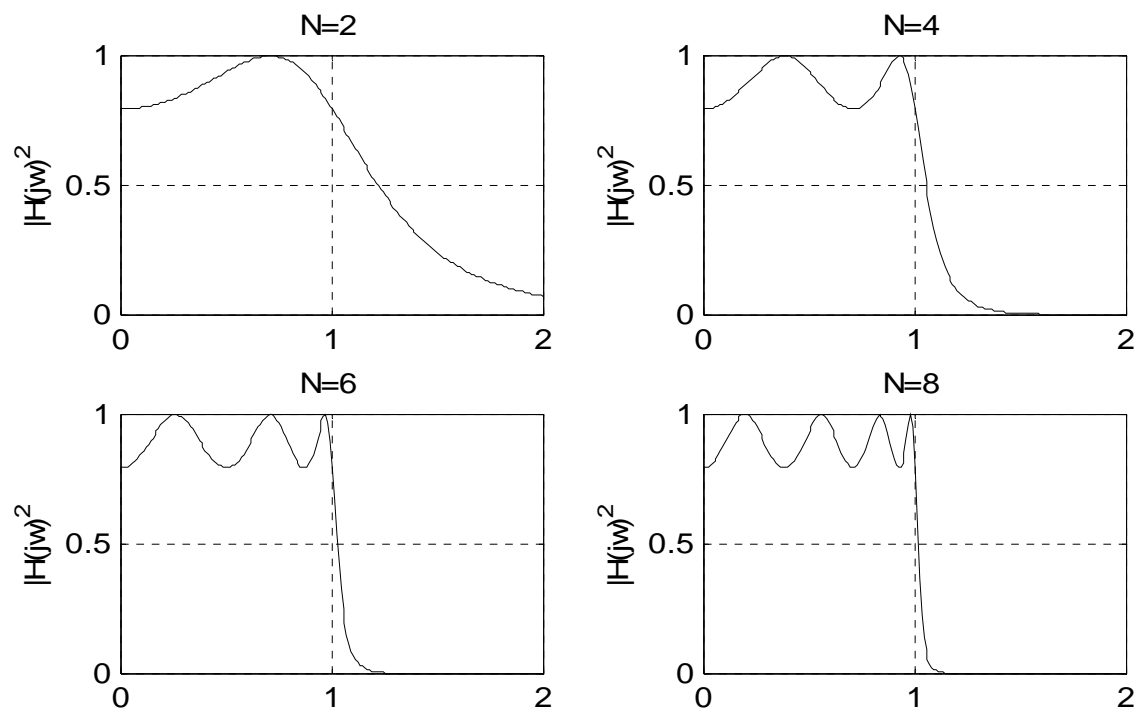


图5.37切比雪夫不同阶次的幅度平方函数

5.4.2 切比雪夫滤波器

例5.20 设计一切比雪夫低通滤波器的传递函数 $H(s)$ ，要求为通带边界频率 $f_c = 2\text{kHz}$ ($\Omega_c = 2\pi \times 2 \times 10^3 \text{ rad/s}$)，通带波纹 $\delta_1 = 1\text{dB}$ ，阻带始点频率 $f_z = 4\text{kHz}$ ($\Omega_z = 4\pi \times 2 \times 10^3 \text{ rad/s}$)，在 Ω_z 处幅度衰减 $\delta_z > 15\text{dB}$ 。
通带波纹的定义 δ_1 为

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 20\lg \frac{|H(\Omega)|_{\max}}{|H(\Omega)|_{\min}} = 10\lg \frac{|H(\Omega)|_{\max}^2}{|H(\Omega)|_{\min}^2} \\ &= 10\lg \frac{[A(\Omega^2)]_{\max}}{[A(\Omega^2)]_{\min}}\end{aligned}$$

由切比雪夫多项式可知，有

$$0 \leq C_n^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right) \leq 1$$

5.4.2 切比雪夫滤波器

则幅度平方函数的值为 $\frac{1}{1+\varepsilon^2} \leq A(\Omega^2) \leq 1$

将上式中的最大值和最小值代入 δ_1 ，可得

$$\delta_1 = 10 \lg(1 + \varepsilon^2)$$

代入已知数据得

$$\varepsilon^2 = 10^{0.1 \times 1} - 1$$

下面根据 Ω_z 处的衰减指标确阶次 n 。

$$\begin{aligned} -20 \lg |H(\Omega_z)| &= -10 \lg |H(\Omega_z)|^2 \\ &= -10 \lg A(\Omega_z^2) \geq \delta_z \end{aligned}$$

代入数据得

5.4.2 切比雪夫滤波器

$$A(\Omega_z^2) \leq 10^{-0.1\delta_z} = 10^{-0.1 \times 15} = 0.0316227$$

$$A(\Omega_z^2) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\frac{\Omega_z}{\Omega_c})}$$

$$C_n(\frac{\Omega_z}{\Omega_c}) = \text{ch}[n \text{arch}(\frac{\Omega_z}{\Omega_c})]$$

$$C_n(\frac{\Omega_z}{\Omega_c}) = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{A(\Omega_z^2)} - 1}$$

$$\text{ch}[n \text{ch}^{-1}(\frac{\Omega_z}{\Omega_c})] = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{A(\Omega_z^2)} - 1}$$

5.4.2 切比雪夫滤波器

$$n \geq \frac{\operatorname{arch}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{A(\Omega_z^2)} - 1}\right]}{\operatorname{arch}\left(\frac{\Omega_z}{\Omega_c}\right)}$$

代入已知数据得

$$n \geq \frac{\operatorname{arch}\left[\frac{1}{0.508847} \sqrt{\frac{1}{0.0316227} - 1}\right]}{\operatorname{arch}\left(\frac{2\pi \times 4 \times 10^3}{2\pi \times 2 \times 10^3}\right)} = 2.337$$

归一化

$$H(s) = \frac{1}{\left[1.00582\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2 + 0.49706\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 1\right]} \times \frac{1}{\left[2.02355\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) + 1\right]}$$

5.4.3 频率变换

1. 频率的映射

高通、带通和带阻模拟滤波器的频率响应如图5.38所示，

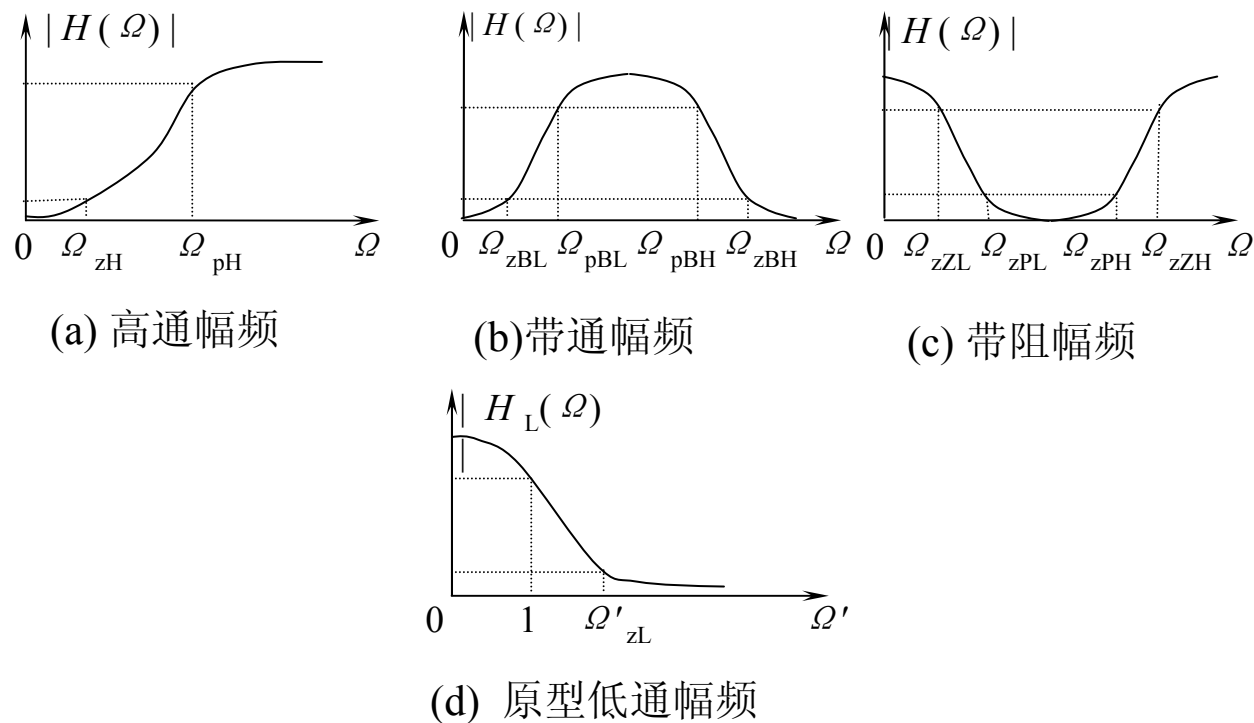


图5.38 频率转换中的频率映射

5.4.3 频率变换

对带通和带阻滤波器，引入参数

带宽: $B = \Omega_{pBH} - \Omega_{pBL}$

中心频率: $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{pBH} \cdot \Omega_{pBL}}$

则可得相互间的频率转换公式为

高通——低通: $\Omega'_{zL} = \frac{\Omega_{pH}}{\Omega_{zH}}$

带通 —— 低通:
$$\begin{cases} \Omega'_{zL1} = \left| \frac{-\Omega_{zBL}^2 + \Omega_0^2}{B\Omega_{zBL}} \right| \\ \Omega'_{zL2} = \left| \frac{\Omega_{zBH}^2 - \Omega_0^2}{B\Omega_{zBH}} \right| \end{cases}$$

$$\Omega'_{zL} = \min(\Omega'_{zL1}, \Omega'_{zL2})$$

5.4.3 频率变换

2. 传递函数的转换

原型低通: $H_L(p)$

高通、带通和带阻模拟滤波器: $H(s)$

以下各式包括了去归一化, 即 $\Omega' = \frac{\Omega}{\Omega_c}$

低通——高通:
$$p = \frac{\Omega_{pH}}{s}$$

低通——带通:
$$p = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$$

低通——带阻:
$$p = \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}$$



5.4.3 频率变换

3. 设计举例

例5.22 试设计一巴特沃思模拟带通滤波器，设计要求为：通带频率 $2\text{kHz} \sim 3\text{kHz}$ ，两边的过渡带宽为 0.5kHz ，若通带波纹 1dB ，阻带衰减大于 100dB 。

5.4.3 频率变换

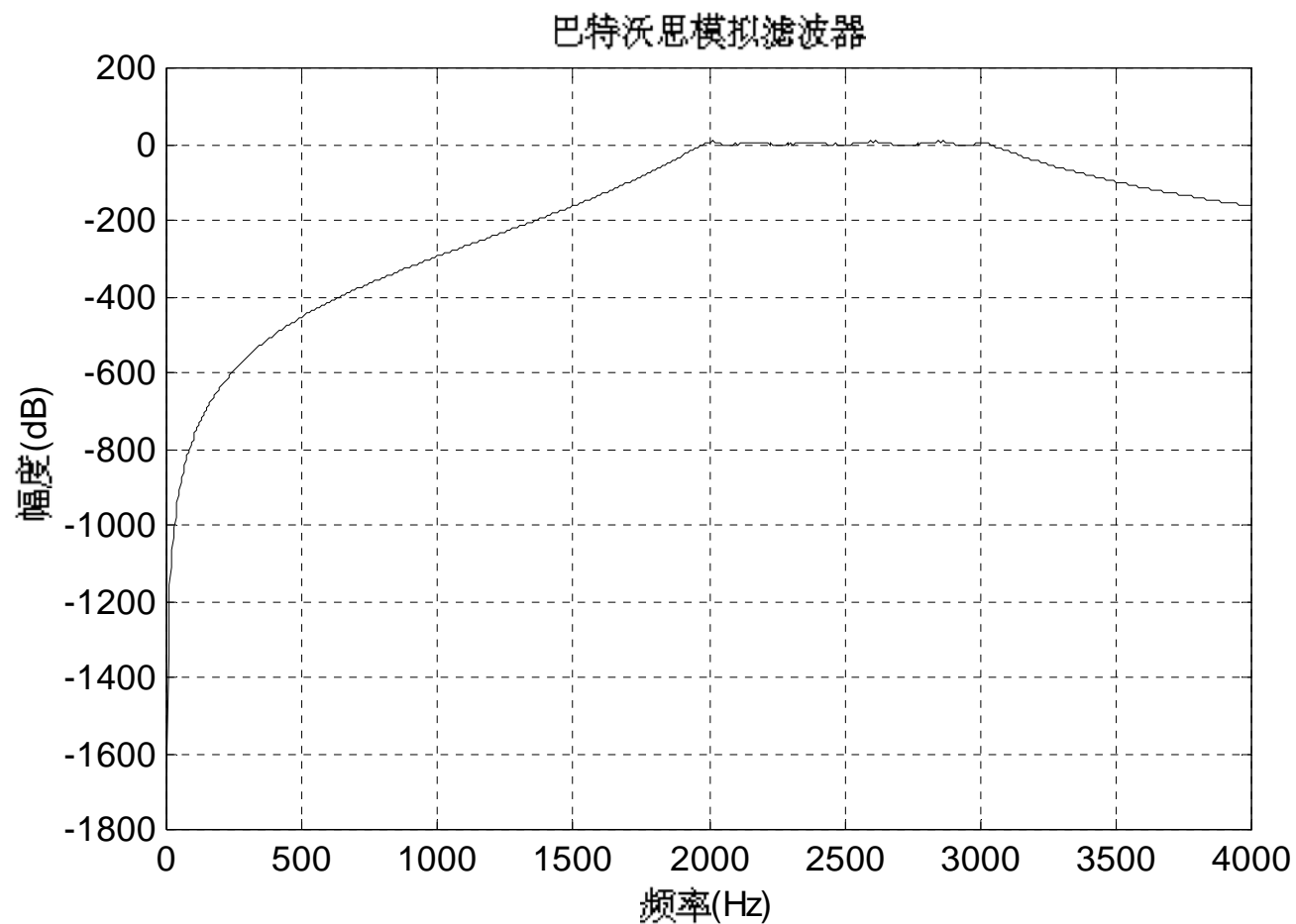


图5.39 巴特沃思带通滤波器的幅频特性



5.4.3 频率变换

例5.23 试设计一个切比雪夫模拟带阻滤波器。要求的指标为：阻带上、下边界频率为2kHz与3kHz，两侧过渡带为0.5kHz，通带波纹1dB，阻带衰减大于60dB。

5.4.3 频率变换

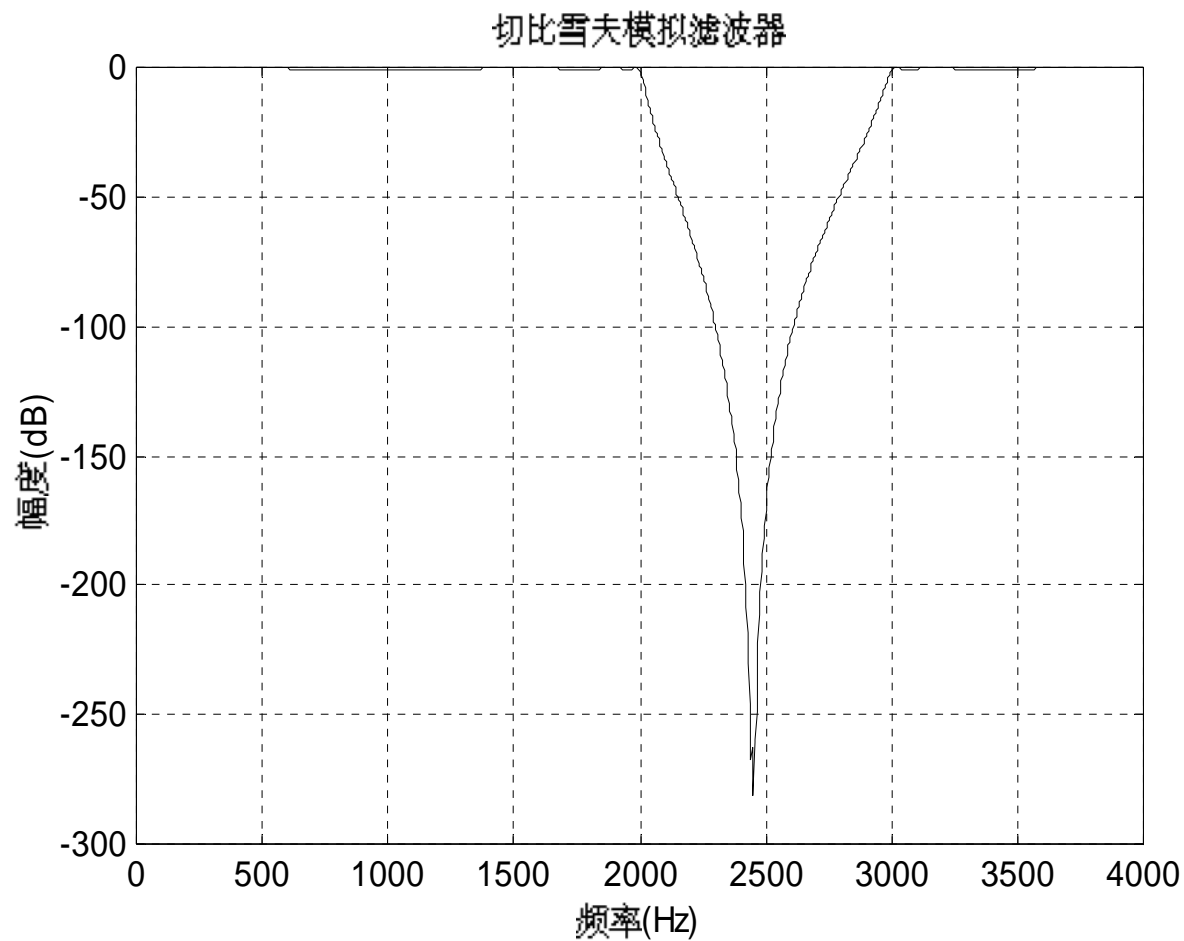


图5.40 切比雪夫带阻滤波器的幅频特性