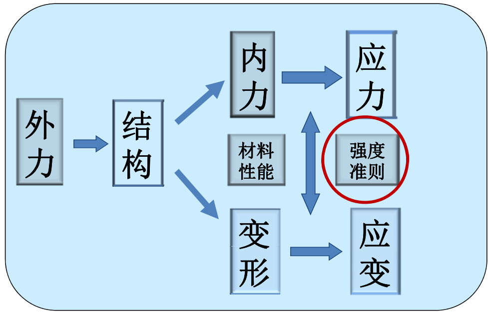
材料力学分析基本路径



强度条件：保证结构或构件不致因强度不够而破坏的条件。

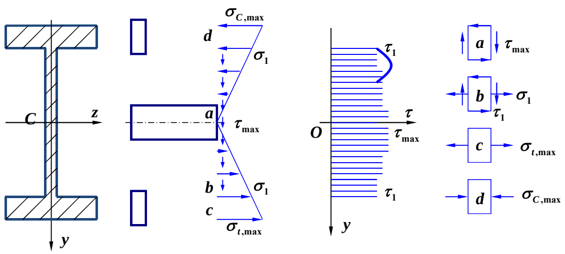
拉压杆强度条件： $\sigma_{max}=\left(\frac{F_N}{A}\right)_{max}\le[\sigma]$

圆轴强度条件： $\tau_{max}=\left(\frac{T}{W_p}\right)_{max}\le[\tau]$

梁的强度条件： $\sigma_{max}=\left(\frac{M}{W_z}\right)_{max}\le[\sigma]$ $\tau_{max}=\left(\frac{F_S S_{z,max}}{I_z\delta}\right)_{max}\le[\tau]$

建立强度条件的依据？

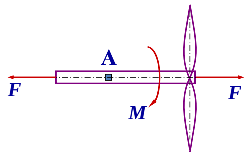
➢ 弯曲问题（工字梁）



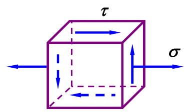
a 点处: 纯剪切； *c* , *d* 点处: 单向应力；

b 点处: *s* ,*t* 联合作用

✈ 组合变形（螺旋桨轴）



微体A



采用拉伸强度条件、扭转强度条件，还是分别满足？

进行对应实验，工作量与难度？

复杂应力状态下（一般情况下），如何建立强度条件？

建立强度条件的依据？ 材料基本实验

低碳钢和铸铁的拉伸与扭转实验

	低碳钢	铸 铁
拉伸实验		
扭转实验		

由对应实验建立强度条件

建立复杂应力状态强度条件的研究思路：

材料应力状况（寻找特征参量）
材料失效机理+关联单轴拉伸实验
} → 建立强度条件

第十三章 应力状态分析

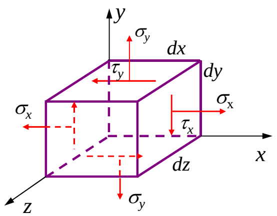
第十四章 复杂应力状态强度问题

- 应力状态的概念

同一横截面上不同点的应力各不相同，此即应力的点的概念。

过同一点的不同面上的应力也不相同，此即应力的面的概念。

应 力 指明 哪一点？
过这一点的哪个方向面？



通过构件内一点，所作各微截面的应力状况，称为该点处的应力状态

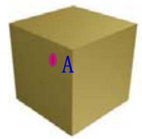
- 应力状态的描述

微 体：围绕一点A作一个微长方体

长宽高分别为 **dx ，dy ，dz**

（尺度趋于无穷小）

此微长方体称为微单元体，简称微体



由于微体的尺寸无穷小，可认为微体每个面上的应力都是均匀分布的，且相对面上应力值相同

*微体三对平行表面上的应力代表了过A点的互相垂直的三个平面上应力状况，一点的应力可用该点微体各面的应力来描述。

物质点应力微体

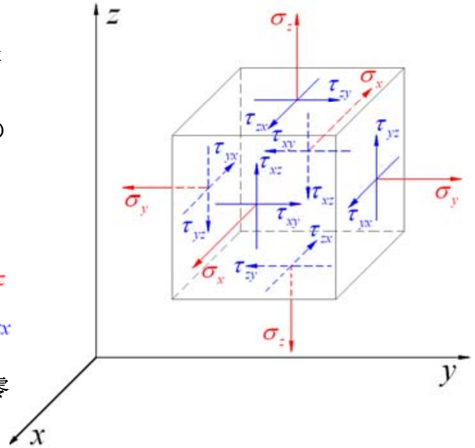
一般情况（三维）

独立6分量

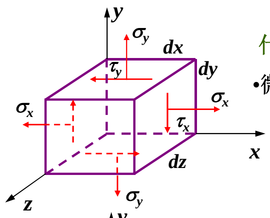
$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z$

$\tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}$

如果z面应力为零



§ 13-2 平面应力状态应力分析

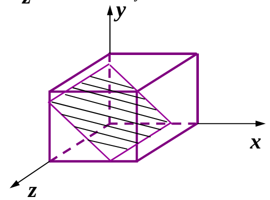


什么是平面应力状态？

•微体有一对平行表面不受力的应力状态。

由此推断

- 微体仅有四个面作用有应力
- 应力作用线均平行于不受力表面

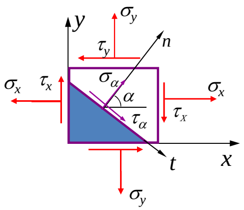


平面应力状态的应力分析

问题：已知σ_x，σ_y，τ_x，τ_y，求任意平行于z轴的斜截面上的应力。

解决该问题的意义何在？

- 应力分析的解析法：微体中取分离体平衡。

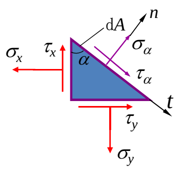


$$\sum F_n = 0$$

$$\sigma_\alpha dA + \tau_x dA\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) - \sigma_x dA\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \tau_y dA\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sigma_y dA\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = 0$$

$$\sum F_t = 0$$

$$\tau_\alpha dA - \tau_x dA\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sigma_x dA\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + \tau_y dA\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha) + \sigma_y dA\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) = 0$$



应用切应力互等定理和三角函数知识整理，得：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha) - \tau_x \sin(2\alpha)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin(2\alpha) + \tau_x \cos(2\alpha)$$

应力转轴公式（斜截面上的应力公式）

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

符号规定：σ—拉伸为正；τ—使微体顺时针转者为正

α—以x轴为始边，指向沿逆时针转者为正

应力转轴公式的意义？

应力转轴公式的适用范围？

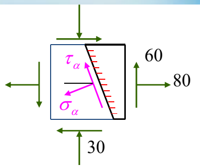
上述关系式是建立在静力学基础上，与材料性质无关。

即：它既适用于各向同性与线弹性情况，也适用于各向异性、非线弹性与非弹性问题。

例 求图示 τ_α, σ_α

已知 $\sigma_x = 80$ MPa　$\sigma_y = -30$ MPa

$\tau_x = -60$ MPa　$\alpha = 210^\circ$



解： $$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

单位：MPa

$$\sigma_\alpha = \frac{80+(-30)}{2} + \frac{80-(-30)}{2}\cos 60^\circ - (-60)\sin 60^\circ = 104.46\text{MPa}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{80-(-30)}{2}\sin 60^\circ + (-60)\cos 60^\circ = 17.6\text{MPa}$$

问 α 还可取何值？ $\alpha = -150^\circ$；　$\alpha = 30^\circ$（x轴向左）

$\alpha \pm N \times 180^\circ$ 不改变 σ_α　τ_α

- 应力转轴公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

- 在 $\sigma - \tau$ 平面上，σ_α，τ_α 的轨迹？
- 应力转轴公式形式变换

$$\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha - 0 = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

应力圆

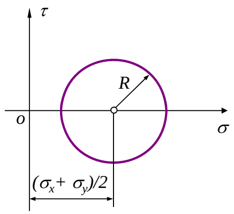
$$\Rightarrow (\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2$$

$$(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^2 = (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2$$

σ—τ坐标系下的圆方程

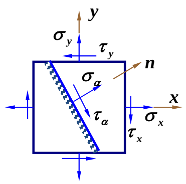
圆心坐标： $(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0)$

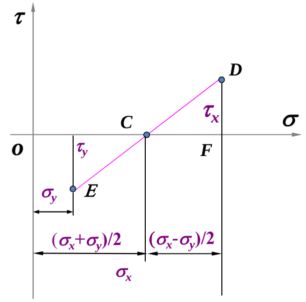
半径： $R = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_x^2}$



结论：平面应力状态下各方向的应力轨迹为一个圆　——应力圆

应力圆上的点与微体截面方位的对应关系？



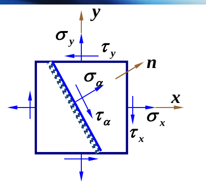


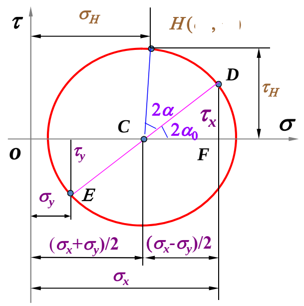
•分析

设x面和y面的应力分别为 $D(\sigma_x, \tau_x)$，$E(\sigma_y, \tau_y)$，

由于$\tau_x = -\tau_y$，故DE中点坐标 $C(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0)$

为圆心，DE为直径。





•绘图：以*ED*为直径，*C*为圆心作圆

考察*H*点应力

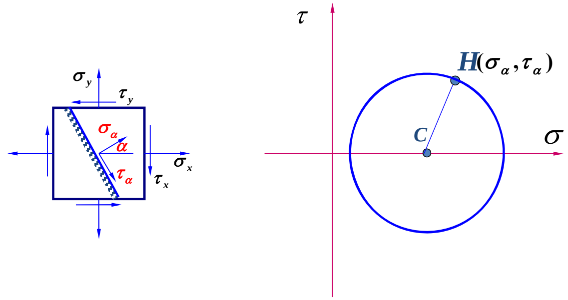
$$\sigma_H=\overline{OC}+\overline{CH}\cos(2\alpha_0+2\alpha)=\overline{OC}+\overline{CD}\cos2\alpha_0\cos2\alpha-\overline{CD}\sin2\alpha_0\sin2\alpha$$

$$\sigma_H=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha-\tau_x\sin2\alpha=\sigma_\alpha$$

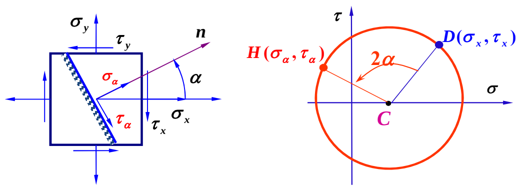
同理： $\tau_H=\tau_\alpha$

应力圆点与微体截面应力对应关系

- 点面对应：微体截面上的应力值与应力圆上点的坐标值一一对应。



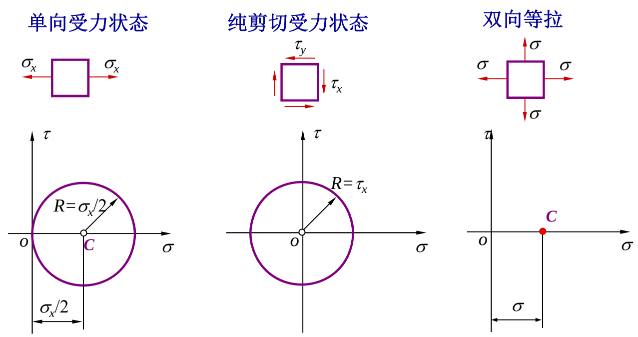
- 二倍角对应：应力圆半径转过的角度是微体截面方位角变化的两倍，且二者转向相同。



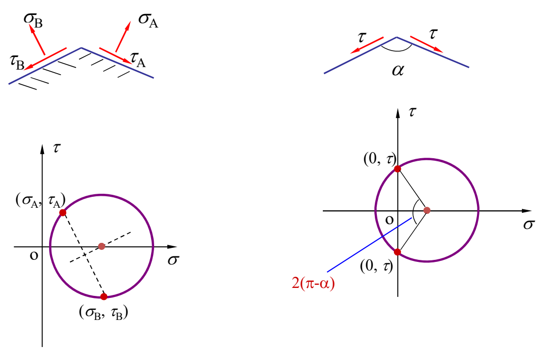
微体互垂截面，对应应力圆同一直径两端

微体平行对边，对应应力圆同一点

➢ 几种简单受力状态的应力圆



➢ 绘制应力圆两例

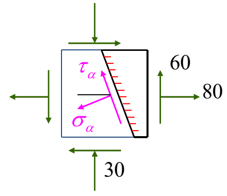


利用应力圆解前例题（图解法）

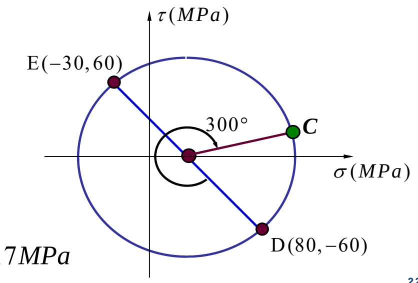
已知 $\sigma_x = 80$ MPa　$\sigma_y = -30$ MPa　求图示 τ_α　σ_α

$\tau_x = -60$ MPa　$\alpha = 210^\circ$

比例尺：1cm=20MPa



单位：MPa



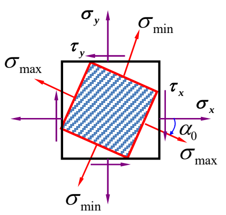
量得 *C* 点的应力为:

$\sigma_n = 105MPa$　$\tau_n = 17MPa$

§ 13-3 极值应力与主应力

一、平面应力状态的极值应力

问题：如何确定微体内最大与最小正应力？最大与最小切应力？微体内最大正应力与切应力方位？



$(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$

其中 $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{a}{b}$

方法一：求三角函数极值

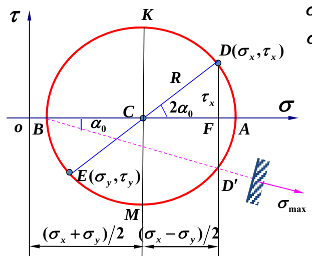
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

方法二：利用应力圆



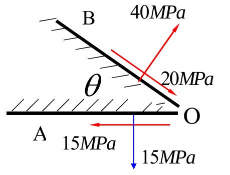
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\} = \overline{OC} \pm \overline{CA} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\tan\alpha_0 = -\frac{\overline{FD'}}{\overline{BF}} = -\frac{\tau_x}{\sigma_x-\sigma_{min}} = -\frac{\tau_x}{\sigma_{max}-\sigma_y}$$

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\overline{CK} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

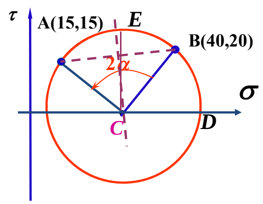
例：平面应力状态下，物体内一点O在*A*、*B*两截面上的应力如图所示，求该点的最大正应力和切应力及*A,B*两截面的夹角 θ



图解法：按比例尺画出应力圆

$1cm = 10MPa$

最大正应力点在*D*点，进行测量；
最大切应力点在*E*点，进行测量；
对*A*、*B*两截面的夹角进行测量



$\sigma_{\max} = 53MPa \quad \tau_{\max} = 22MPa$

$\theta = \alpha = 36^\circ$

解析法：构造如图所示微体

$$\begin{cases} \sigma_B = \dfrac{15+\sigma_x}{2} + \dfrac{\sigma_x - 15}{2}\cos 2(90^\circ - \theta) + 15\sin 2(90^\circ - \theta) = 40MPa \\ \tau_B = \dfrac{\sigma_x - 15}{2}\sin 2(90^\circ - \theta) - 15\cos 2(90^\circ - \theta) = 20MPa \end{cases}$$

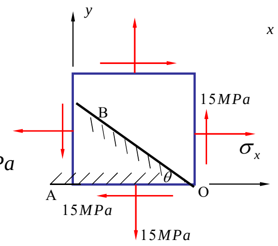
两个未知数， 两个方程，求解得：

$$\begin{cases} \sigma_x = 47MPa \\ \theta = 35.5^\circ \end{cases}$$

故：

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 52.9MPa$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = 21.9MPa$$



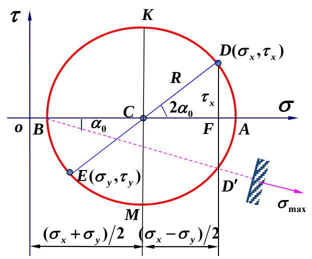
思考：

对于平面应力状态：

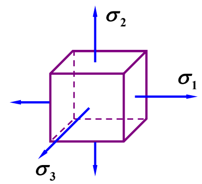
•是否一定存在正应力为零的面？

•是否一定存在切应力为零的面？

•正应力最大与最小的面上，切应力有什么性质？



二、主平面与主应力



主平面—切应力为零，同时正应力取得最大或最小值的截面

主应力—主平面上的正应力

主平面微体—由三对互垂主平面构成的特殊的六面形微体

不论一点处的应力状态如何复杂，都存在一个主平面微体，即任何一点都有三个主平面和主应力。

主应力符号与规定— $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ （按代数值排列）
（平面应力状态下有一个主应力为零）

应力状态分类:

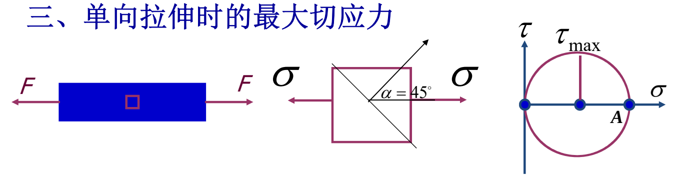
单向应力状态：仅一个主应力不为零的应力状态

二向应力状态：两个主应力不为零的应力状态

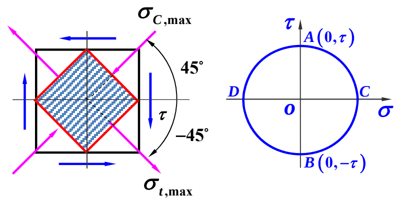
三向应力状态：三个主应力均不为零的应力状态

复杂应力状态：二向与三向应力状态

三、单向拉伸时的最大切应力



四、纯剪切状态的最大应力



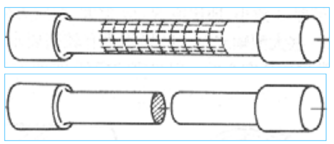
$\sigma_{t,\max} = \sigma_C = \tau$

$\sigma_{c,\max} = |\sigma_D| = \tau$

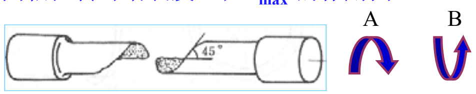
$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \quad \sigma_2 = 0$

例：纯剪应力状态下不同的断裂机理：

低碳钢材料圆轴扭转时滑移与剪断发生在$\tau_{\max}$的作用面：



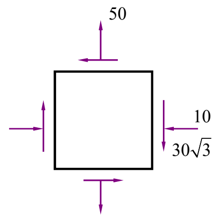
铸铁材料圆轴扭转时断裂发生在$\sigma_{\max}$ 的作用面：



思考：1. 如何扭才能造成上图所示的断裂面？A 还是B？

2. 如果两端再加上一些拉力，则断裂面的角度大于还是小于45?

例 试用解析法与图解法确定主应力的大小和方向



解：1.解析法

$\sigma_x = -10\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 50\text{ MPa}$

$\tau_x = 30\sqrt{3}\text{MPa}=51.96\text{MPa}$

单位：MPa

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2} = \frac{-10+50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10-50}{2}\right)^2+\left(30\sqrt{3}\right)^2} = \begin{matrix}80\text{MPa}\\ -40\text{MPa}\end{matrix}$$