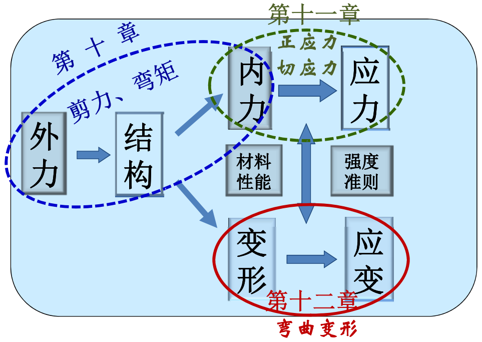
上次课内容

- 梁的合理强度设计依据： $\sigma_{max}=\dfrac{M}{W_z}$　$\sigma=\dfrac{My}{I_z}$　$\tau=\dfrac{F_S S_z}{I_z\delta}$
- 措施：增大 I_z，W_z，降低M
  1. 合理截面形状
  2. 变截面梁与等强度梁
  3. 梁的合理受力：约束安排，载荷分配，配重。
- 双对称截面梁的非对称弯曲　$\sigma=\dfrac{M_y z}{I_y}-\dfrac{M_z y}{I_z}$
- 弯拉组合应力：$\sigma=\sigma_N+\sigma_M=\dfrac{F}{A}+\dfrac{M_{max}y}{I_z}$

材料力学分析基本路径



Q1：为什么要研究弯曲变形(§12-1)

Q2：梁上任意一点的变形用什么参量来描述(§12-1)

Q3：这个参量与什么量有关系(§12-2)

Q4：如何求量分析这个参量(§12-3&4)

Q5：梁的设计中有何应用(§12-5&6)

Q1：为什么要研究弯曲变形(§12-1 引言)

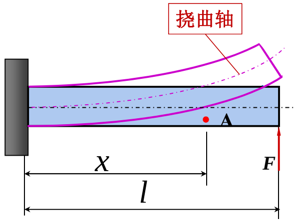
梁的刚度问题

静不定梁的求解

研究压杆稳定性问题的基础

Q2： 梁上任意一点的变形用什么参量来描述(§ 12-1 引言)

•弯曲变形的特点

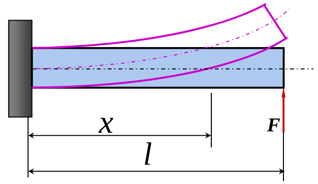


梁上任意一点A，
变形前（x,y,z）
变形后（x',y',z'）

以轴线变弯为主要特征的变形形式称为弯曲

● 轴线变为曲线，变弯后的梁轴 —挠曲轴

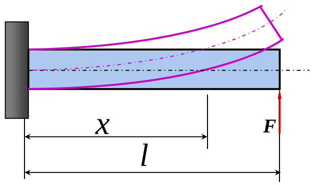
• 梁变形的描述：

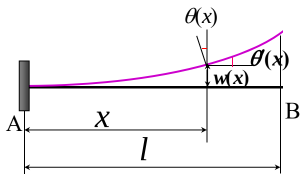


忽略形心轴轴向位移和截面翘曲，采用挠曲轴和截面转角描述截面上任一点的位移。

挠曲轴
- ➢ 挠曲轴是一条连续、光滑曲线；
- ➢ 对称弯曲时，挠曲轴为位于纵向对称面的平面曲线；
- ➢ 横力弯曲时，对于细长梁，剪力对弯曲变形影响一般可忽略不计，因而横截面仍保持平面，并与挠曲轴正交。

• 梁变形的描述：





忽略形心轴轴向位移和截面翘曲，描述截面上任一点的位移：

1. 形心轴的线位移 —— 挠度 w

2. 截面绕形心轴的角位移 —— 转角 θ

☞ 挠度随坐标变化的方程——挠曲轴方程 $w= w(x)$

☞ 忽略剪切变形 + 梁的转角一般很小—— $\theta = \theta \approx dw/dx$

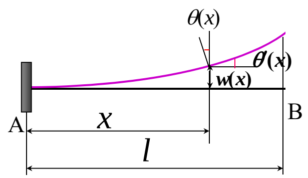
Q3： 这个参量与什么有关系(§ 12-2 挠曲轴微分方程)

• 拉压杆的变形的描述：

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

• 扭转轴的变形的描述：

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p}$$



1、形心轴的线位移 —— 挠度 w

2、截面绕形心轴的角位移 —— 转角 θ

w、θ 与 M 有关

w、θ 与 M 的关系

方程推导

- 中性层曲率表示的弯曲变形公式

$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$ （纯弯、等截面） $\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}$ （推广到非纯弯）

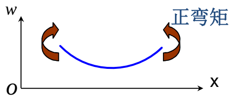
- 由高等数学知识

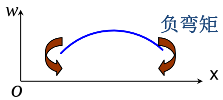
$$\frac{1}{\rho(x)}=\pm\frac{w''(x)}{\left(1+[w'(x)]^2\right)^{3/2}}$$ —— 二阶非线性常微分方程

- 挠曲轴微分方程

$$\frac{w''(x)}{\left(1+[w'(x)]^2\right)^{3/2}}=\pm\frac{M(x)}{EI}$$

$$\boxed{\frac{w''(x)}{\left(1+[w'(x)]^2\right)^{3/2}}=\pm\frac{M(x)}{EI}}$$





- 方程简化

•小变形时： $w'^2 \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2}=\pm\frac{M(x)}{EI}$$

•正负号确定：

坐标系： $\boxed{w\text{ 向上为正}}$ $\Rightarrow$ $w''>0$ 曲线下凹；$w''<0$ 曲线上凸

弯矩：

挠曲线下凹, 弯矩M为正, 与w'' 同号

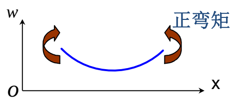
挠曲线上凸, 弯矩M为负, 与w'' 同号

$\Rightarrow$ 方程取正号 $\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$

小结

- 挠曲轴的近似微分方程

$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}$$



- 应用条件：

❶ $\sigma_{\max}\le\sigma_p$ ❷ 小变形

❸ 坐标轴 w 向上，弯矩下凹为正

•土木建筑部门，采用坐标轴 w 向下坐标系

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EI}$$

Q4：如何求得这个描述变形的参量(§12-3&4)

§12-3 计算梁位移的积分法

一、梁的挠曲轴方程

$$w''=\frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{dw}{dx}=\theta=\int\frac{M(x)}{EI}dx+C$$

$$w=\iint\frac{M(x)}{EI}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+Cx+D$$

C、D为积分常数，它们由位移边界与连续条件确定。

$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} \mathrm{d}x\mathrm{d}x + Cx + D$$

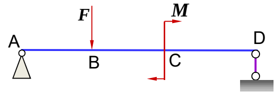
C、*D*为积分常数，它们由位移边界条件与连续光滑条件确定

➢位移边界条件

自由端：无位移边界条件。

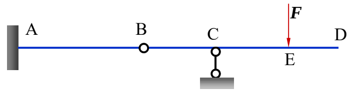
➢位移连续与光滑条件

挠曲轴在B、C点连续且光滑



连续：$w_B^{左} = w_B^{右}$　　光滑：$\theta_B^{左} = \theta_B^{右}$

例1：写出梁的挠曲轴方程的边界条件和连续条件



边界条件：

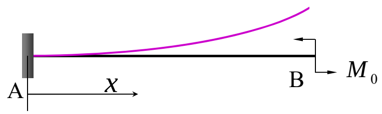
固定端：$w_A = 0,\ \theta_A = 0$　　自由端：无位移边界条件

连续条件：　E点：　$w_E^{左} = w_E^{右},\ \theta_E^{左} = \theta_E^{右}$

中间铰B：　$w_B^{左} = w_B^{右}$

中间支撑C：$w_C^{左} = 0 \quad w_C^{右} = 0 \quad \theta_C^{左} = \theta_C^{右}$

例2：已知*EI*，建立该梁的挠曲轴方程



$$w(x) = \frac{M_0}{2EI}x^2$$
$$\theta(x) = \frac{M_0}{EI}x$$

解：　1、弯矩方程：$M(x) = M_0$

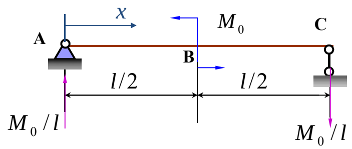
2、挠曲轴近似微分方程　$w''(x) = \frac{M_0}{EI}$

$$\theta = w'(x) = \frac{M_0}{EI}x + C \qquad w(x) = \frac{M_0}{2EI}x^2 + Cx + D$$

3、积分常数的确定　$w(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

$w'(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

例3：已知*EI*，建立该梁的挠曲轴方程　　$w'' = \frac{M(x)}{EI}$



解：计算约束反力，建立坐标系。

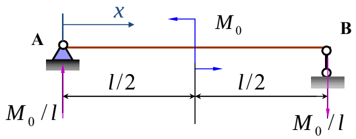
AB段　$M(x) = \frac{M_0}{l}x$　　BC段　$M(x) = \frac{M_0}{l}x - M_0$

$$w_1'' = \frac{M_0}{EI}\frac{x}{l} \qquad w_2'' = \frac{M_0}{EI}\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$w_1 = \frac{M_0}{6EI}\frac{x^3}{l} + C_1 x + D_1 \qquad w_2 = \frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{6l} - \frac{x^2}{2}\right) + C_2 x + D_2$$

$$w_1=\frac{M_0}{6EI}\frac{x^3}{l}+C_1x+D_1$$

$$w_2=\frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{6l}-\frac{x^2}{2}\right)+C_2x+D_2$$



边界和连续条件：

$$w_1(0)=0 \qquad w_2(l)=0$$

$$w_1\left(\frac{l}{2}\right)=w_2\left(\frac{l}{2}\right) \qquad w_1'\left(\frac{l}{2}\right)=w_2'\left(\frac{l}{2}\right)$$

四个方程定4个常数

$$w_1(x)=\frac{M_0x}{24lEI}\left(4x^2-l^2\right) \qquad w_2(x)=\frac{M_0}{EI}\left(\frac{x^3}{6l}-\frac{x^2}{2}+\frac{11}{24}lx-\frac{l^2}{8}\right)$$

绘制梁挠曲轴的大致形状：

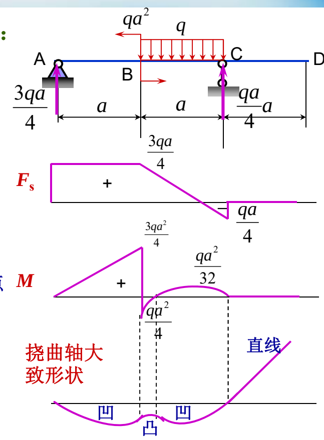
- 曲线，直线？
- 上凸，下凹？
- 特征点的θ，w 以及拐点位置

1. 绘制弯矩图。

- 弯矩图符号定挠曲轴凹凸性
- 弯矩图过零点处为挠曲轴拐点

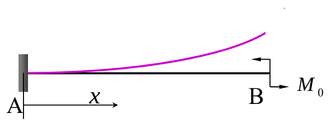
2. 绘制挠曲轴的大致形状

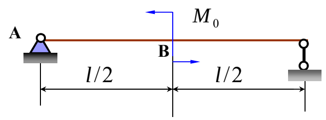
- 支座性质定该处线和或角位移

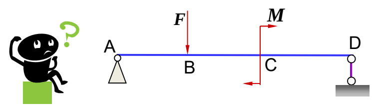


挠曲轴形状判断原则

- 挠曲轴是一条连续而光滑的曲线（中间铰除外，该处只连续不光滑），须满足连续光滑条件。
- 挠曲轴须符合梁的边界条件。
- 弯矩为正的梁段是一条凹曲线；弯矩为负的梁段是一条凸曲线；弯矩为零的梁段，为一条直线。
- 弯矩图由正变负或由负变正必经的零点处，挠曲轴出现拐点。





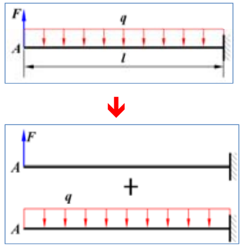


§12-4 计算梁位移的叠加法

一、载荷叠加法

分解载荷 → 分别计算位移 → 求位移之和

w_A=?



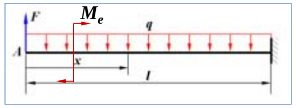
$$w_{A,F}=\frac{Fl^3}{3EI}\ (\uparrow)$$

$$w_{A,q}=-\frac{ql^4}{8EI}\ (\downarrow)$$

$$w_A=w_{A,F}+w_{A,q}=\frac{Fl^3}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI}\ (\uparrow)$$

当梁上作用几个载荷时，任一横截面的总位移，等于各载荷单独作用时在该截面引起的位移的代数和或矢量和

理论依据



$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI}$$

（小变形, 比例极限内）

$$M(x)=M_F(x)+M_q(x)+M_e$$

（小变形）

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{EI}\left(M_F(x)+M_q(x)+M_e\right)\Rightarrow$$

$$w=\frac{1}{EI}\iint M_F(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+C_Fx+D_F \quad \Leftarrow w_F(x)$$

$$+\frac{1}{EI}\iint M_q(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x+C_qx+D_q \quad \Leftarrow w_q(x)$$

$$+\frac{1}{EI}\iint M_e\mathrm{d}x\mathrm{d}x+C_ex+D_e \quad \Leftarrow w_e(x)$$

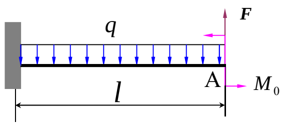
故： $w=w_F+w_q+w_e$

理论依据：
线性常微分方程
M是F，q，M_e的线性齐次函数

叠加法适用条件：
小变形,比例极限内

载荷叠加法的应用

例4：EI =常数，
求 w_A，θ_A

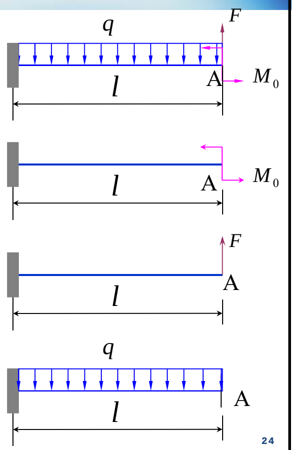


分析方法：

载荷由集中力F，均布力q和力偶M_0构成，分别查表（附录D），然后将各个载荷在A端引起的位移叠加。

查表（附录D）

	θ_A	w_A
M_0	$\frac{M_0 l}{EI}$	$\frac{M_0 l^2}{2EI}$
F	$\frac{Fl^2}{2EI}$	$\frac{Fl^3}{3EI}$
q	$\frac{-ql^3}{6EI}$	$\frac{-ql^4}{8EI}$

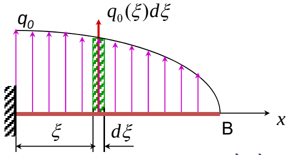


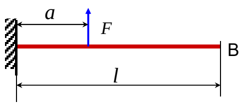
叠加：

$$w_A=\frac{M_0l^2}{2EI}+\frac{Fl^3}{3EI}-\frac{ql^4}{8EI}(\uparrow)$$

$$\theta_A=\frac{M_0l^2}{EI}+\frac{Fl^2}{2EI}-\frac{ql^3}{6EI}$$

例5：载荷集度为 $q(x)=q_0\cos\frac{\pi x}{2l}$，求自由端挠度 w_B





查表：$w_B^F=\dfrac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$

分析方法：

将任意分布载荷看作无穷微集中力的叠加。

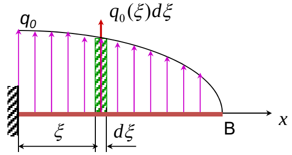
$$dw_B=\frac{dF\xi^2}{6EI}(3l-\xi)$$

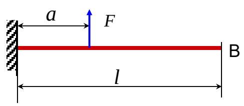
$$=\frac{q_0\cdot\cos\frac{\pi\xi}{2l}d\xi\cdot\xi^2}{6EI}(3l-\xi)$$

注意(1)a 取为变量x

(2)载荷向上为正

例5：载荷集度为 $q(x)=q_0\cos\frac{\pi x}{2l}$，求自由端挠度 w_B





$$dw_B=\frac{q_0}{6EI}\cdot\cos\frac{\pi\xi}{2l}\cdot\xi^2(3l-\xi)d\xi$$

$$w_B=\int_0^l dw_B=\int_0^l\frac{q_0}{6EI}\cdot\cos\frac{\pi\xi}{2l}\cdot\xi^2(3l-\xi)d\xi$$

$$=\frac{2q_0l^4(\pi^3-24)}{3\pi^4EI}(\uparrow)$$

例6：EI=常值，求 w_C

分析：

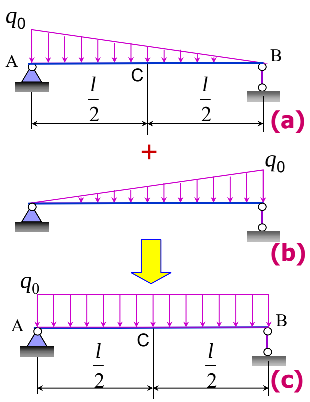
$w_c^a=w_c^b$ 为什么？

$w_c^a+w_c^b=w_c^c$

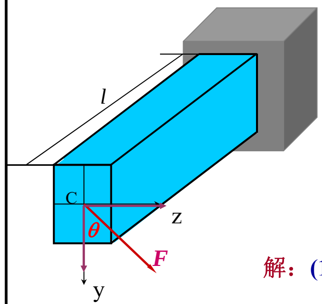
$$w_c^c=-\frac{5}{384EI}ql^4$$

故：

$$\boxed{w_c^a=\frac{1}{2}w_c^c=-\frac{5}{768EI}q_0l^4}$$



例7：矩形截面梁斜弯曲问题——求挠曲轴方程与端点C位移



分析思路：

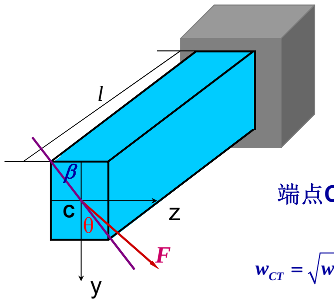
1. 载荷沿两对称轴分解：分解为对称弯曲问题
2. 求解各分载荷作用下的挠曲轴方程与C点位移
3. 合成为总的挠曲轴方程与总的C点位移

解：(1) 载荷分解

$F_y=F\cos\theta\qquad F_z=F\sin\theta$

工程力学—第十二章 弯曲变形

(2) 分力挠曲轴方程与端点位移



$$w_y = \frac{F\cos\theta \cdot x^2(x-3l)}{6EI_z}$$

$$w_z = \frac{F\sin\theta \cdot x^2(x-3l)}{6EI_y}$$

端点C：$w_{Cy} = \frac{F_y l^3}{3EI_z}$ $\quad w_{Cz} = \frac{F_z l^3}{3EI_y}$

$$w_{CT} = \sqrt{w_{Cy}^2 + w_{Cz}^2} = \frac{Fl^3}{3EI_z}\sqrt{\cos^2\theta + \frac{I_z}{I_y}\sin^2\theta}$$

$F_y = F\cos\theta$

$F_z = F\sin\theta$

方位角 $\beta = arctg\frac{w_z}{w_y} = arctg\left(\frac{I_z}{I_y}tg\theta\right)$

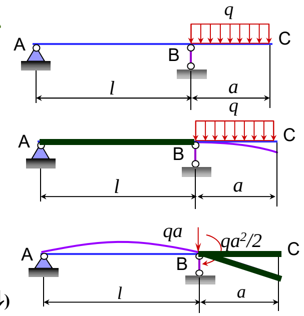
☞ 一般 $\beta \neq \theta$，弯曲变形不发生在外力作用面内。

29

工程力学—第十二章 弯曲变形

二、逐段变形效应叠加法

例8: 求图示外伸梁C点的挠度和转角



仅考虑BC段变形(刚化AB，可视BC为悬臂梁)

$w_{C1} = \frac{qa^4}{8EI}(\downarrow)$ $\quad \theta_{C1} = \frac{qa^3}{6EI}(\lrcorner)$

仅考虑AB段变形(刚化BC)

$\theta_{C2} = \theta_{B2} = \frac{qa^2 l}{6EI}(\lrcorner)$ $\quad w_{C2} = \theta_{B2} a = \frac{qa^3 l}{6EI}(\downarrow)$

总挠度和转角 $w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$ $(\downarrow)$

$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = \frac{qa^2}{6EI}(a+l)$ $(\lrcorner)$

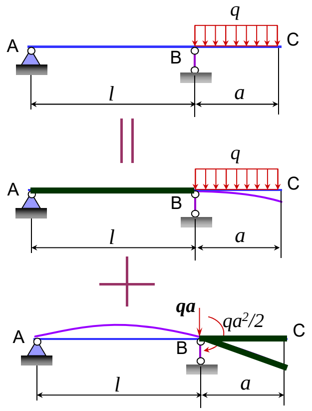
30

工程力学—第十二章 弯曲变形

方法说明

$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{qa^3}{24EI}(3a+4l)$ $(\downarrow)$

$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = \frac{qa^2}{6EI}(a+l)$ $(\lrcorner)$



逐段变形效应叠加法：

静定梁或刚架的任一横截面的总位移，等于各梁段单独变形（其余梁段刚化）在该截面引起的位移的代数和或矢量和。

31

工程力学—第十二章 弯曲变形

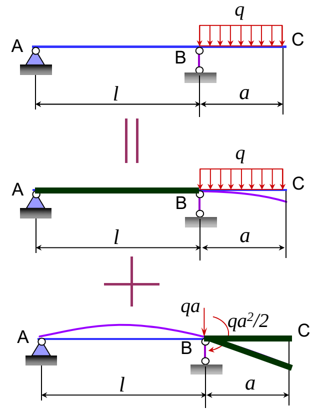
逐段变形效应叠加法的基础

三、两类叠加法比较

1. 两类叠加法的联系

（求w_C，θ_C）

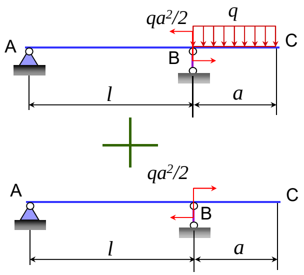
思考：右图的逐段变形效应叠加法所对应的载荷叠加法是什么？

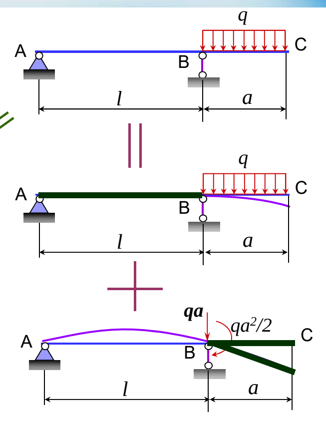


32

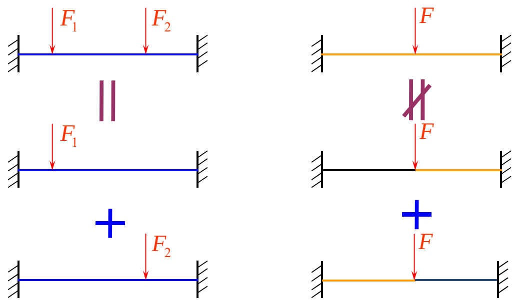
2. 两类叠加法对应关系实例

两种叠加法的异同？





3. 逐段变形效应叠加法与载荷叠加法适用范围不同

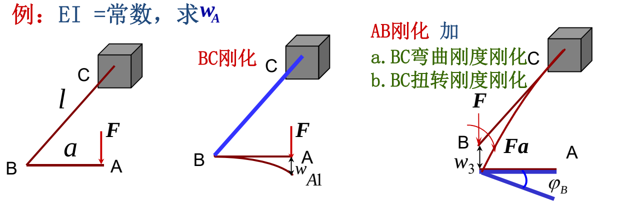


右图的叠加法为什么不成立？

4\. 两类叠加法适用范围比较

载荷叠加法	逐段变形效应叠加法
静定与静不定结构，包括杆、板、壳及一般三维体	静定杆系与刚架
小变形	小变形
线弹性	线弹性、非线弹性与非弹性

例：EI =常数，求w_A



1. AB弯曲（BC刚化）

$$w_{A1}=\frac{Fa^3}{3EI}(\downarrow)$$

2. BC扭转（AB刚化，BC弯曲刚度刚化）

$$w_{A2}=\varphi_B\cdot a=\frac{Fal}{GI_p}\cdot a=\frac{Fa^2l}{GI_p}(\downarrow)$$

3. BC弯曲（AB刚化，BC扭转刚度刚化）

$$w_{A3}=w_B=\frac{Fl^3}{3EI}(\downarrow)$$

$$\therefore w_A=w_{A1}+w_{A2}+w_{A3}$$

$$=\frac{Fa^2l}{GI_p}+\frac{Fl^3}{3EI}+\frac{Fa^3}{3EI}$$

例：E 常数，$I_2=2I_1$ ，求 w_C，θ_C

1. BC段变形效应（刚化AB段）

$$\theta_{C1}=\frac{Fa^2}{2EI_1}\qquad w_{C1}=\frac{Fa^3}{3EI_1}$$

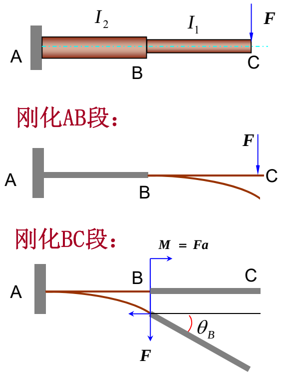
2. AB段变形效应（刚化BC段）

$$\theta_{C2}=\theta_B=\theta_{B,F}+\theta_{B,M}$$

$$=\frac{Fa^2}{2EI_2}+\frac{Fa\cdot a}{2EI_1}=\frac{3Fa^2}{4EI_1}$$

$$w_{C2}=w_{B,F}+w_{B,M}+\theta_B\cdot a$$

$$=\frac{Fa^3}{3EI_2}+\frac{Fa^3}{2EI_2}+\frac{3Fa^3}{4EI_1}=\frac{7Fa^3}{6EI_1}$$



例：E 常数，$I_2=2I_1$ ，求 w_C，θ_C

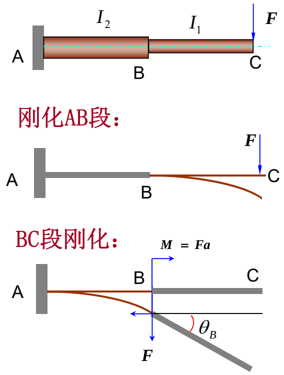
$$\theta_{C1}=\frac{Fa^2}{2EI_1}\qquad w_{C1}=\frac{Fa^3}{3EI_1}$$

$$\theta_{C2}=\frac{3Fa^2}{4EI_1}\qquad w_{C2}=\frac{7Fa^3}{6EI_1}$$

3. 总转角和挠度

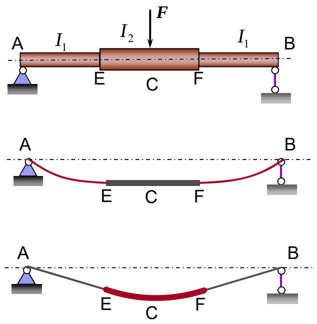
$$\theta_C=\theta_{C1}+\theta_{C2}=\frac{5Fa^2}{4EI_1}$$

$$w_C=w_{C1}+w_{C2}=\frac{3Fa^3}{2EI_1}$$

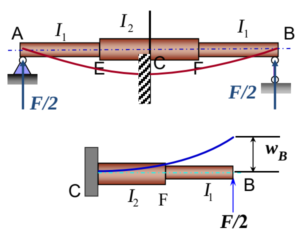


例：E 常数，$I_2=2I_1$ ，求 w_C，θ_B

•逐段变形效应叠加法



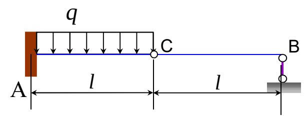
•对称性的应用



$$\therefore\quad w_C=w_B$$

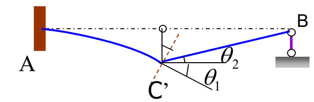
例：组合梁的变形分析，

求：$\theta_{C左/右}$



解：梁挠曲轴如图

AC悬臂梁



$$\theta_1=\frac{ql^3}{6EI}$$

CB保持直线 $\quad\theta_2=\frac{w_C}{l}\qquad w_C=\frac{ql^4}{8EI}$

$$\therefore\quad \theta_{C左/右}=\theta_1+\theta_2=\frac{7ql^3}{24EI}$$

作业：

12-2(d) 、5、7