自动控制原理

拉氏变换

北航仪器学院 魏彤

weitong@buaa.edu.cn

一、拉普拉斯变换的定义

对于 $t \geq 0$上有定义的函数$f(t)$，其拉氏变换(若存在)为关于复数$s=\delta+j\omega$的新函数：

$$F(s) = L[f(t)] = \int_{0-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

象函数　　原函数

若$f(t)$不包含$\delta(0)$，0-可改为0

拉氏变换存在条件：

因此$f(t)=1/t$的拉氏变换不存在

(1) $f(t)$在 $t \geq 0$上至少是分段连续的；

(2) $t \to +\infty$时$|f(t)|$增大速度不超过某个指数函数Me^{ct}，

则$L[f(t)]$在$\mathrm{Re}(s)>c$的范围存在且解析；

二、拉氏变换计算方法

1、定义法

例：阶跃函数 $1(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

$$L\left[1\left(t\right)\right]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=\frac{-1}{s}\left[e^{-st}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{-1}{s}\left(0-1\right)=\frac{1}{s}$$

，仅当**Re(*s*)>0** (否则对应的拉氏变换不存在)

例：指数函数 $f(t)=e^{-at}$

$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(s+a)t}dt$$

$$=\frac{-1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{s+a}(0-1)=\frac{1}{s+a}$$，**Re(*s*)>*a***

例：正弦函数 $f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin\omega t & t\geq 0\end{cases}$

$$L[f(t)]=\int_0^{+\infty}\sin\omega t\cdot e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2j}\left[e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}\right]\cdot e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^{+\infty}\left[e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$，**Re(*s*)>0**

2、定理法

拉氏变换的重要定理：

1）线性性质 $L\left[af_1(t)\pm bf_2(t)\right]=aF_1(s)\pm bF_2(s)$

2）微分定理 $L\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0-)$

$f^{(-1)}(t)=\int f(t)dt$

3）积分定理 $L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$

4）位移定理 $L\left[e^{At}f(t)\right]=F(s-A)$

5）延迟定理 $L\left[f(t-\tau)\right]=e^{-\tau s}F(s)$

前提：$\tau>0$，且$t<0$时$f(t)=0$

6）初值定理 $\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$

7）终值定理 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$

前提：$sF(s)$的极点都在s左半平面(不含虚轴)

8）卷积定理 $L[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s)$

其中 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$

关于微分定理：$L\left[f'(t)\right]=sF(s)-f(0-)$，**其高阶形式为：**

$$\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n\text{-}1}f(0-)-s^{n\text{-}2}f^{(1)}(0-)-\cdots-sf^{(n-2)}(0-)-f^{(n-1)}(0-)$$

零初条件下简化为：$\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)$

例： 求 $L\left[\delta(t)\right]=?$

解： $\delta(t)=1'(t)$

$$\Rightarrow L\left[\delta(t)\right]=L\left[1'(t)\right]=s\cdot\frac{1}{s}-1(0-)=1-0=1$$

例： 求 $L\left[\cos(\omega t)\right]=?$

解： $\cos\omega t=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\omega t)$

$$\Rightarrow L\left[\cos\omega t\right]=\frac{1}{\omega}L\left[\sin'\omega t\right]=\frac{1}{\omega}\cdot s\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

关于积分定理： $L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{s}F(s)+\frac{1}{s}f^{(-1)}(0)$，**其高阶形式：**

$$L\left[\underbrace{\iint\cdots\int}_{n个} f(t)dt^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0)+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0)$$

零初始条件下简化为： $L\left[\underbrace{\iint\cdots\int}_{n个} f(t)dt^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)$

例：求$L[t]$=?

解： $t=\int 1(t)dt \Rightarrow L[t]=L\left[\int 1(t)dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s}t\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^2}$

例：求 $L\left[t^2/2\right]=?$

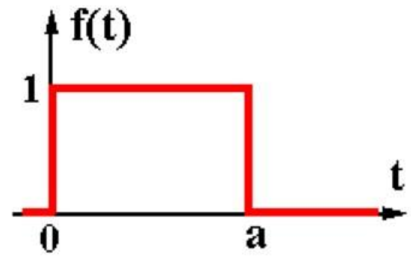
解： $\frac{t^2}{2}=\int t\,dt \Rightarrow L\left[t^2/2\right]=L\left[\int t\,dt\right]=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{s^3}$

关于位移定理： $L\left[e^{At}f(t)\right]=F(s-A)$

例： $L\left[e^{-3t}\cos 5t\right]=\left.\dfrac{\widehat{s}}{\widehat{s}^{2}+5^{2}}\right|_{\widehat{s}=s+3}=\dfrac{s+3}{(s+3)^{2}+5^{2}}$

关于延迟定理：$L\left[f(t-\tau)\right]=e^{-\tau s}F(s)$

例：$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0< t<a\\ 0 & t>a\end{cases}$，求$F(s)$



解：$f(t)=1(t)-1(t-a)$

$$\Rightarrow L\left[f(t)\right]=L\left[1(t)-1(t-a)\right]=\frac{1}{s}-e^{-as}\frac{1}{s}=\frac{1-e^{-as}}{s}$$

关于延迟定理的常见错误：

例： $L\left[e^{-2t}\cos(5t-\frac{\pi}{3})\right]=L\left\{e^{-2t}\cos\left[5(t-\frac{\pi}{15})\right]\right\}$

（错误） $=\left.\left(e^{-\frac{\pi}{15}\hat{s}}\frac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}\right)\right|_{\hat{s}=s+2}=e^{-\frac{\pi}{15}(s+2)}\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}$

例： $L\left[e^{-2t}\cos(5t-\frac{\pi}{3})\right]=L\left[e^{-2t}(\frac{1}{2}\cos 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5t)\right]$

（正确） $=\left.\left(\frac{1}{2}\frac{\hat{s}}{\hat{s}^2+5^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\omega}{\hat{s}^2+5^2}\right)\right|_{\hat{s}=s+2}=\frac{1}{2}\frac{s+2+\sqrt{3}\omega}{(s+2)^2+5^2}$

关于初值定理： $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sF(s)$

例：求$f(t)=t$的初值

$$F(s)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow f(0)=\lim_{s\to\infty} sF(s)=\lim_{s\to\infty} s\cdot\frac{1}{s^2}=0$$

关于终值定理： $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$ （若存在）

例：求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$ 原函数的终值

解：$f(+\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}=\dfrac{1}{ab}$

例：求 $F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ 原函数的终值

解：$f(+\infty)=\sin\omega t\big|_{t\to+\infty}$ 不存在（而不是 $=\lim\limits_{s\to 0} s\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}=0$）

3、查表法

	$f(t)$	$F(s)$
（1）单位脉冲	$\delta(t)$	1
（2）单位阶跃	$1(t)$	$1/s$
（3）单位斜坡	t	$1/s^2$
（4）单位加速度	$t^2/2$	$1/s^3$
（5）指数函数	e^{-at}	$1/(s+a)$
（6）正弦函数	$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
（7）余弦函数	$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

三、拉氏反变换的定义

从象函数$F(s)$求原函数$f(t)$的运算称为拉氏反变换：

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F(s)e^{st}ds$$

其中实常数 $c>\{F(s)$所有极点的实部$\}$

注：若$F(s)=\dfrac{M(s)}{D(s)}$，则 $\begin{cases} M(s)=0\text{的解}——F(s)\text{零点} \\ D(s)=0\text{的解}——F(s)\text{极点} \end{cases}$

四、拉氏反变换的计算

若$F(s)$为有理代数分式，即$F(s)=\dfrac{M(s)}{D(s)}$且分母阶数高于分子，则反变换方法包括：

- 展开法：留数法、配方法、待定系数法；
- 查表法；

1、留数法：有两种情形

（1）$F(s)$只有n个相异极点 $p_{\mathrm{i}}(i=1, 2, \ldots, n)$

令 $$F(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{M(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_i)}$$

$$=\frac{c_1}{(s-p_1)}+\frac{c_2}{(s-p_1)}+\cdots+\frac{c_i}{(s-p_i)}$$

注：可验证一定可以变换为这种形式；

则 $$\boxed{c_i=[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_i)]_{s=p_i}=[\frac{M(s)}{D'(s)}]_{s=p_i}}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{p_i t}$$

例：求 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$ 的拉氏逆变换

解：令 $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\dfrac{c_1}{s+1}+\dfrac{c_2}{s-2}+\dfrac{c_3}{s+3}$

$$\Rightarrow c_1=[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s+1)]_{s=-1}=-\frac{1}{6}$$

$$c_2=[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s-2)]_{s=2}=\frac{1}{15}$$

$$c_3=[\frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}\cdot(s+3)]_{s=-3}=\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow F(s)=-\frac{1}{6}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{15}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{10}\frac{1}{s+3}$$

$$\Rightarrow f(t)=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{15}e^{2t}+\frac{1}{10}e^{-3t}$$

（2）$F(s)$有l重极点 p_1，其余极点互异

令 $$F(s)=\frac{M(s)}{D(s)}=\frac{M(s)}{(s-p_1)^l(s-p_{l+1})\cdots(s-p_n)}$$

$$=\frac{b_l}{(s-p_1)^l}+\frac{b_{l-1}}{(s-p_1)^{l-1}}+\cdots+\frac{b_1}{s-p_1}+\frac{c_{l+1}}{s-p_{l+1}}+\cdots+\frac{c_n}{s-p_n}$$

则 $$\boxed{b_{l-i}=\frac{1}{i!}\left\{\frac{d^i}{ds^i}\left[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_1)^l\right]\right\}_{s=p_1}\text{，其中}\ i=0,1,\ldots,l-1}$$

$$c_j=\left[\frac{M(s)}{D(s)}(s-p_j)\right]_{s=p_j}$$，其中$j=l+1, l+2, \ldots, n$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{l-1}\frac{b_{l-i}}{(l-i-1)!}t^{l-i-1}e^{p_1t}+\sum_{j=l+1}^{n}c_je^{p_jt}$$

例：求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^3}$ 的拉氏逆变换

解：$F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^3}=\dfrac{b_3}{(s+1)^3}+\dfrac{b_2}{(s+1)^2}+\dfrac{b_1}{(s+1)}+\dfrac{c}{s}$

$$\Rightarrow b_3=[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]_{s=-1}=-1$$

$$b_2=\left\{\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]\right\}_{s=-1}=(-\frac{1}{s^2})\Big|_{s=-1}=-1$$

$$b_1=\frac{1}{2!}(\frac{2}{s^3})\Big|_{s=-1}=-1 \qquad c=\frac{1}{s(s+1)^3}s\Big|_{s=0}=1$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{(s+1)^3}+\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1}$$

$$\Rightarrow f(t)=1-\frac{1}{2}t^2e^{-t}-te^{-t}-e^{-t}$$

2、配方法

若$F(s)$只有共轭极点，则配方，再用正余弦拉氏变换和位移定理

例：求 $F(s)=\dfrac{s+5}{s^2+4s+5}$ 的拉氏逆变换

解：$F(s)=\dfrac{s+5}{s^2+4s+5}=\dfrac{s+5}{(s+2)^2+1}$

$$=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{3}{(s+2)^2+1}$$

$$\Rightarrow y=e^{-2t}\cos t+3e^{-2t}\sin t$$

注：用留数法也可求出(胡寿松第四版P607例A-6)，但繁琐；

3、待定系数法

（1）极点数不超过3个，且无共轭情形

例：求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉氏逆变换

解：令 $F(s)=\dfrac{a}{s}+\dfrac{b}{s-1}+\dfrac{c}{(s-1)^2}$

$$\Rightarrow a(s-1)^2+bs(s-1)+cs=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -2a-b+c=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\Rightarrow f(t)=1-e^{t}+te^{t}$$

注：也可用留数法第二种情形；

（2）含多种极点，需要分组的情形

例： 求 $F(s)=\dfrac{s^4+3s^3-8s^2+9s+5}{s(s-1)^2(s^2+4s+5)}$ 的拉氏逆变换

解： 令 $F(s)=\dfrac{a}{s}+\dfrac{bs+c}{(s-1)^2}+\dfrac{ds+e}{s^2+4s+5}$

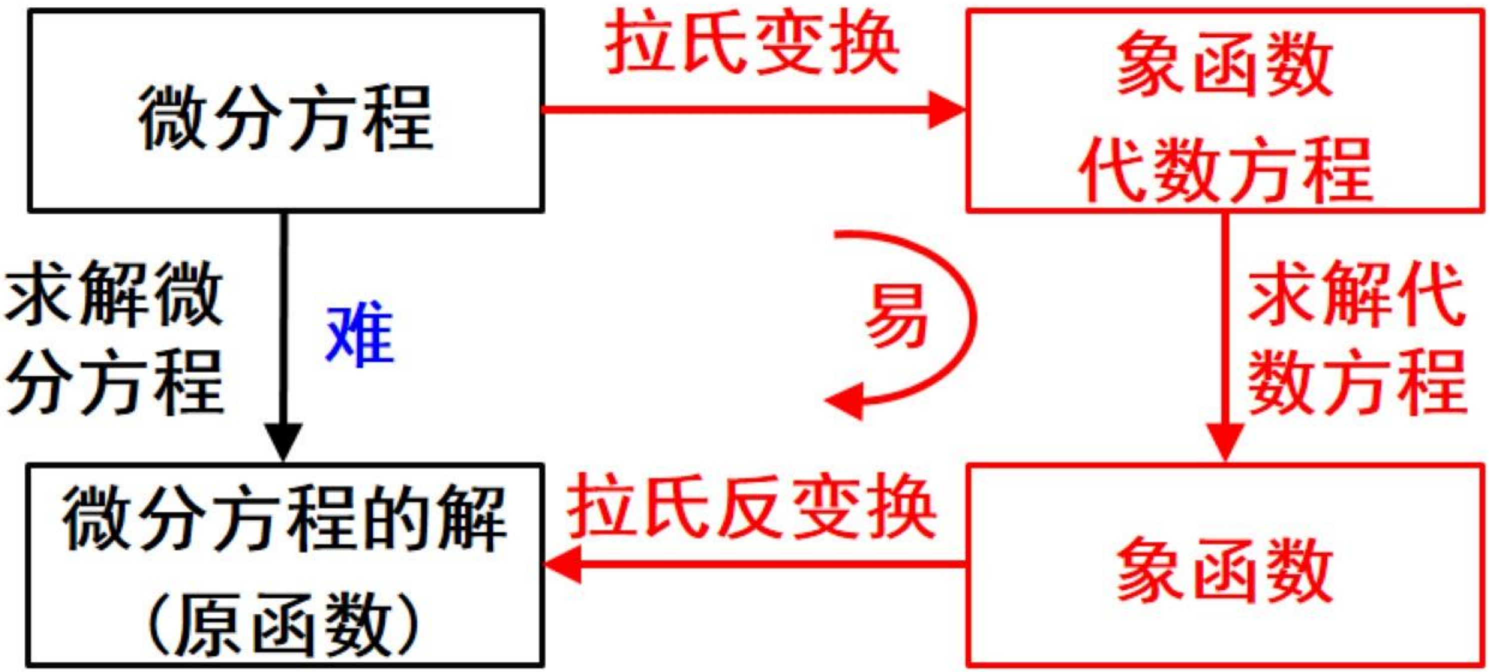
$$\Rightarrow a(s-1)^2(s^2+4s+5)+(bs+c)s(s^2+4s+5)+(ds+e)s(s-1)^2=s^4+3s^3-8s^2+9s+5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+d=1 \\ 2a+4b+c-2d+e=3 \\ -2a+5b+4c+d-2e=-8 \\ -6a+5c+e=9 \\ 5a=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=1 \\ e=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s}+\frac{-s+2}{(s-1)^2}+\frac{s+5}{s^2+4s+5}$$

(之后用留数法和配方法求出$f(t)$，略)

五、微分方程的拉氏变换解法



例：求解微分方程 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

解：微分方程两边取拉氏变换

$$\Rightarrow s^3Y(s) + 3s^2Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = 1/s$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \frac{b_3}{(s+1)^3} + \frac{b_2}{(s+1)^2} + \frac{b_1}{(s+1)} + \frac{c}{s}$$

$$\Rightarrow b_3 = [\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]_{s=-1} = -1$$

$$b_2 = \left\{\frac{d}{ds}[\frac{1}{s(s+1)^3}(s+1)^3]\right\}_{s=-1} = (-\frac{1}{s^2})|_{s=-1} = -1$$

$$b_1 = \frac{1}{2!}(\frac{2}{s^3})\Big|_{s=-1} = -1 \qquad c = \frac{1}{s(s+1)^3}s\Big|_{s=0} = 1$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{(s+1)^3} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{-1}{s+1} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}$$

例：求解微分方程 $3y''+3y'+2y=1,\ y(0)=y'(0)=1$

解：取拉氏变换得 $s^2Y(s)-s-1+3sY(s)-3+2Y(s)=1/s$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s+4+1/s}{s^2+3s+2}=\frac{s^2+4s+1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s+2}$$

$$\Rightarrow c_1=\left.\frac{s^2+4s+1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0}=\frac{1}{2}$$

$$c_2=\left.\frac{s^2+4s+1}{s(s+2)}\right|_{s=-1}=2$$

$$c_3=\left.\frac{s^2+4s+1}{s(s+1)}\right|_{s=-2}=-\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}+2e^{-t}-\frac{3}{2}e^{-2t}$$