第三章

离散时间序列及其z变换

z变换是离散信号分析和处理，离散系统设计和实现中一种重要的数学工具，它在离散系统中的地位与作用，相当于连续系统中的拉氏变换，应用它可以把离散系统的数学模型即差分方程转换为简单的代数方程，使求解过程简化。本章内容是数字信号处理的基础之一。

基本内容

- 序列概念
- z变换定义
- z变换收敛域
- z反变换
- 常用序列的z变换
- z变换的性质

3.1 离散时间信号－序列

3. 1. 1　　序列

在离散信号的分析与处理时，通常把按一定先后次序排列，在时间上不连续的一组数的集合，称之为“序列”。因此，序列可以用一集合符号:$\{x(n)\}$来表示。

其中：**n**为整数表示序列的序号

花括号中的**x (n)**是表示序号第**n**个离散时间点的序列值，

3. 1. 1 序列

$$\{x(n)\}=\{x(-\infty),\cdots,x(-2),x(-1),x(0),x(1),\cdots,x(\infty)\}$$

为简化书写，通常可直接用通项 $x(n)$ 代替序列 $\{x(n)\}$ 的集合符号。序列的图形表示如图3.1所示

3.1.1 序列

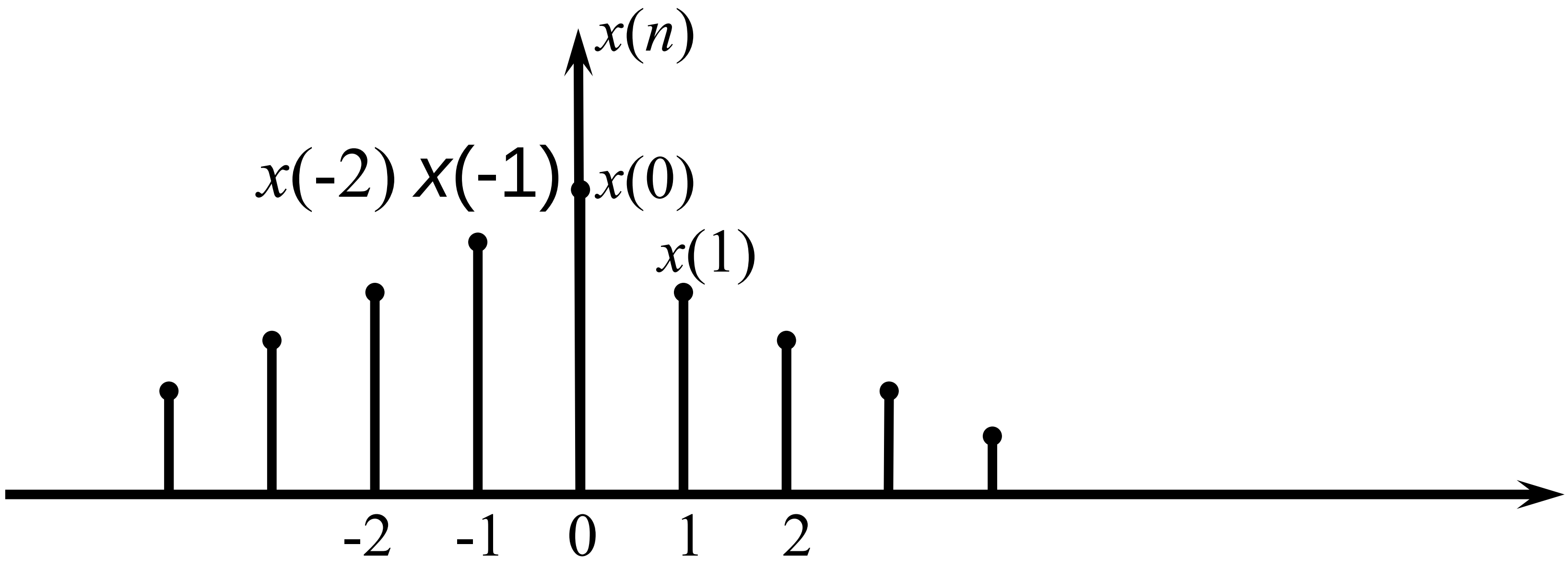


图3.1　　序列的图形表示

n在实际离散信号中，是表示信号的时间（或空间）变量，***x*(*n*)**是时刻 ***n***时的信号值。

3.1.1 序列

需要特别指出：抽样序列与冲激抽样信号表示的是性质完全不同的两种信号。

当序列是由时域连续信号经均匀抽样转换得到时，即在抽样的瞬间保留了原连续信号的幅度值，把这种信号称抽样数据信号，也称为抽样序列，表示为$x(n)$，抽样序列$x(n)$在离散瞬时，其函数值为有限值，而在其它时刻的函数值不能理解为零值，并无定义。

3.1.1 序列

冲激抽样信号是由一系列冲激构成的，在出现冲激处的离散瞬时，其函数值趋于无穷在其它时刻函数值是零，是有定义的，可表示为 $x_s(nT)$ 。

严格意义上说，序列才是真正的离散时间信号的表征，而冲激抽样信号是一系列连续脉冲脉宽趋于零的极限情况，仍然属于连续时间信号，也称为冲激串信号，它能够作用于连续系统产生连续的输出信号响应，序列则不能作用于连续系统，只能作用在离散系统上而产生离散输出响应。

3.1.1 序列

通过适当的数学处理（今后经常用到），可以把冲激抽样信号转换为抽样序列，即

$$x(n)=x_{s}(nT),\quad -\infty<n<\infty \qquad \textbf{(3.1)}$$

式（**3.1**）中，***T***是抽样周期。转换的原理如图**3.2**（**a**）所示，其中的***x***(***t***)是输入的连续时间信号，δ***T*** (***t***)是周期单位冲激信号。

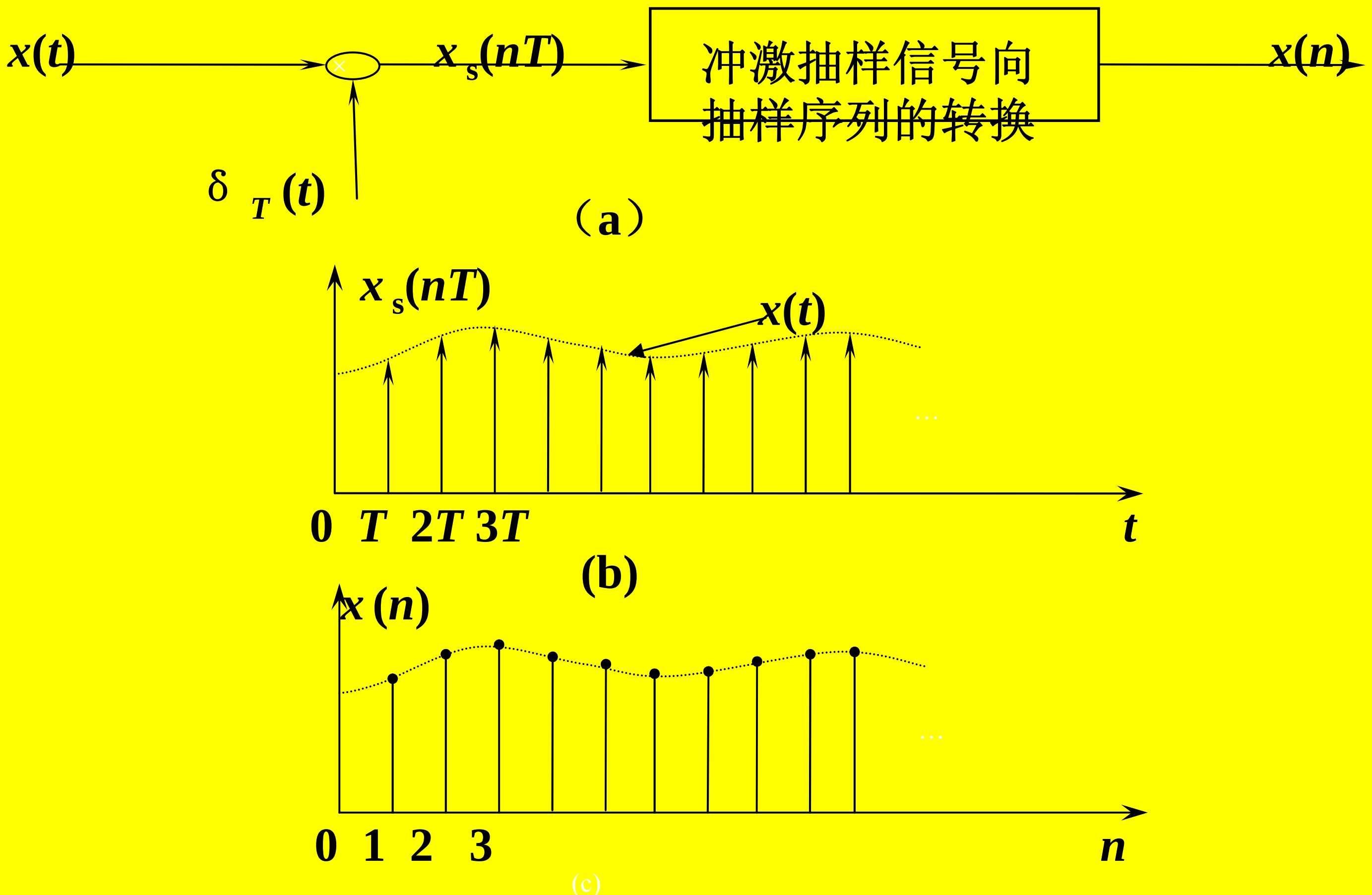


图3.2　连续时间信号通过冲激抽样转换为抽样序列

3.1.1 序列

上述从连续时间信号到序列转换是一种理想转换，是数学分析和处理的需要，实现转换的实际装置，就是A/D转换器，它是理想转换的近似。

3.1.2 基本序列

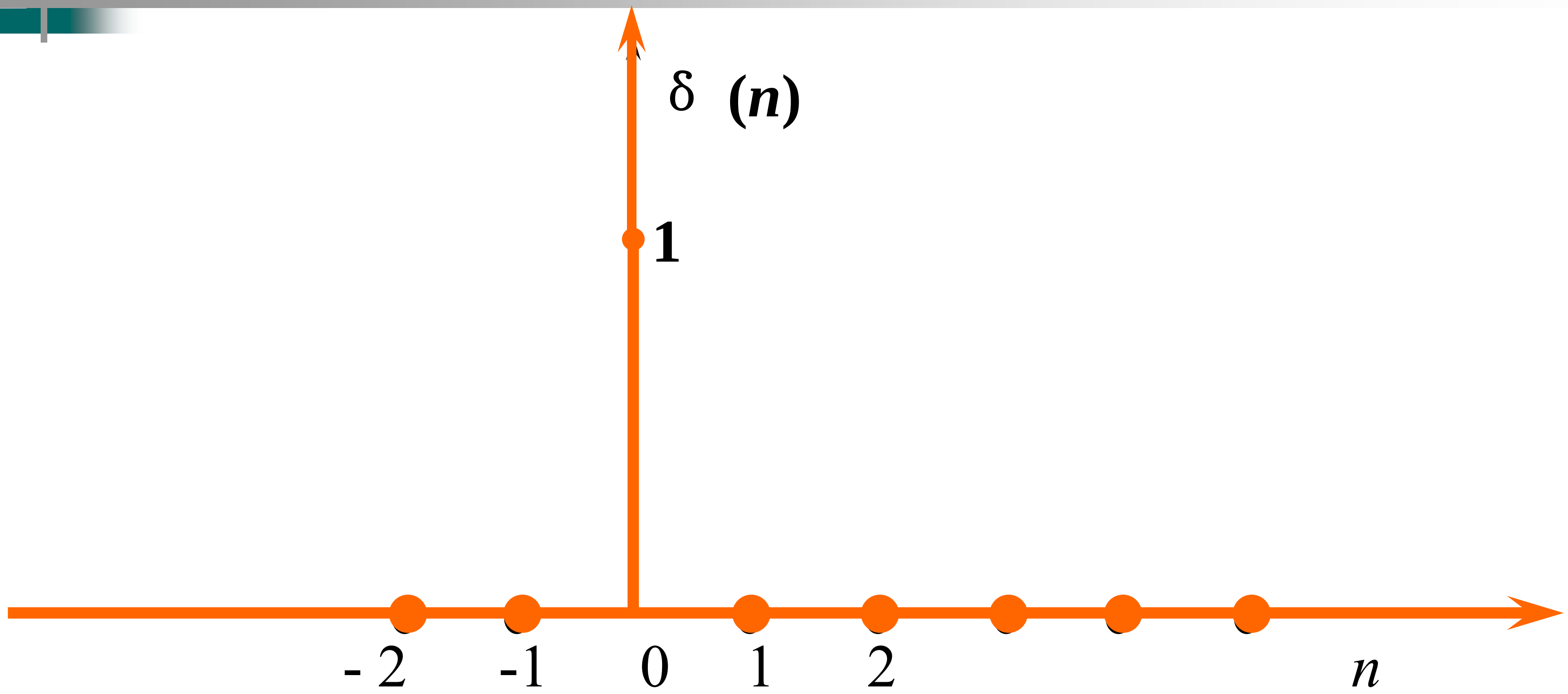
与常见的连续时间信号相对应，作为基本的离散时间信号－基本序列有以下几种:

1. 单位抽样序列（单位脉冲序列）δ (*n*)

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \qquad (3.2)$$

这一序列只在***n*** **= 0**处的值为**1**，其余各点都为零，如图**3.3**所示。它在离散系统中的作用类似于连续系统中的单位冲激函数δ (***t***)。

单位抽样序列



2、单位阶跃序列ε(n)

ε(n)定义为

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

如图3.4所示。它与连续系统中的单位阶跃信号类似，但ε(t)在t = 0处为跳变点，其左、右极限不相等，而 ε(n)则在n = 0处明确定义为1。

单位阶跃序列ε(n)

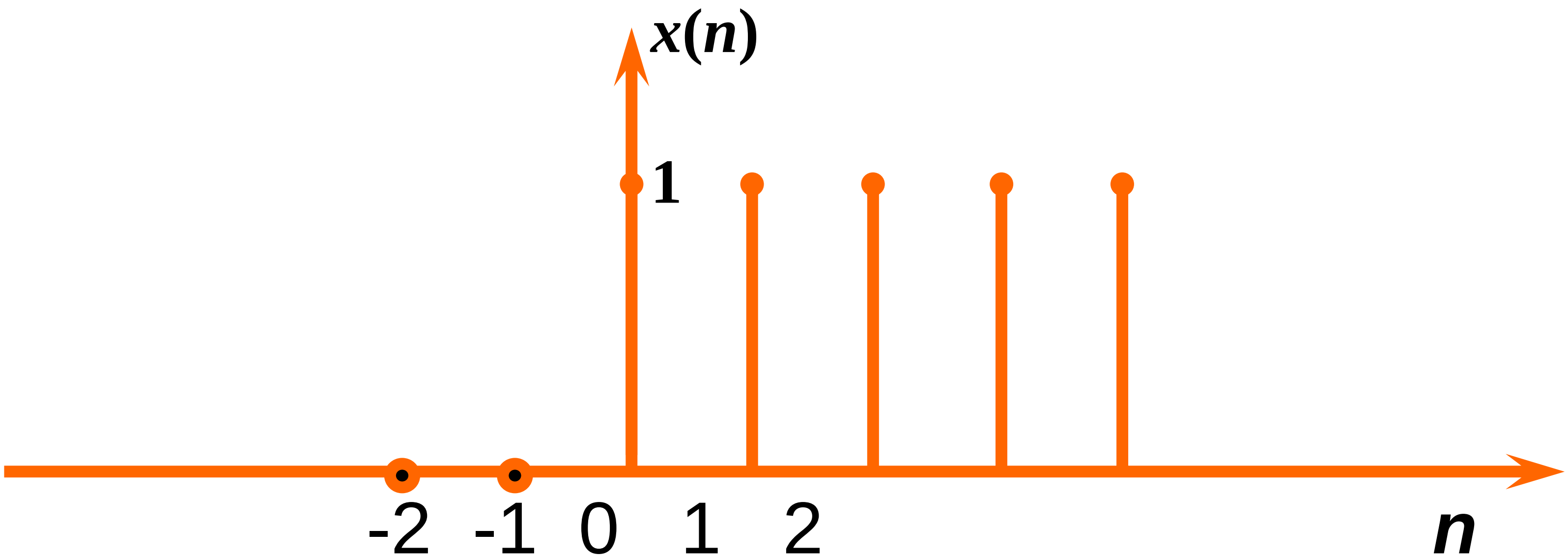


图3.4　　单位阶跃序列

单位阶跃序列 ε（n）

单位阶跃序列也可表示为：

$$\varepsilon(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) \qquad \textbf{(3.4)}$$

单位抽样序列则可表示为：

$$\delta(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n-1) \qquad （\textbf{3.5}）$$

ε (**n**)与连续信号中的 ε (**t**)类似，可把一个序列限定为单边序列，如 **x** (**n**) ε (**n**)，表示**x** (**n**)为单边序列（序列从**n** = **0**开始，严格的单边序列定义见后）。

3. 矩形序列

矩形序列定义为

$$\mathrm{R}_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & \text{其它}n\end{cases}\qquad(3.6)$$

它从n = 0开始，直至n = N-1，共N个幅度为1的序列值，其余均为零，如图3.5所示。如果将它表示为$R_N(n-m)$，则表示序列取值为1的范围是：$m \le n \le N+m-1$，它在离散系统中的作用类似于连续系统中的矩形脉冲。

矩形序列

矩阵序列也可由阶跃序列表示:

$$\mathrm{R}_N(n) = \varepsilon(n) - \varepsilon(n - N) \qquad (3.7)$$

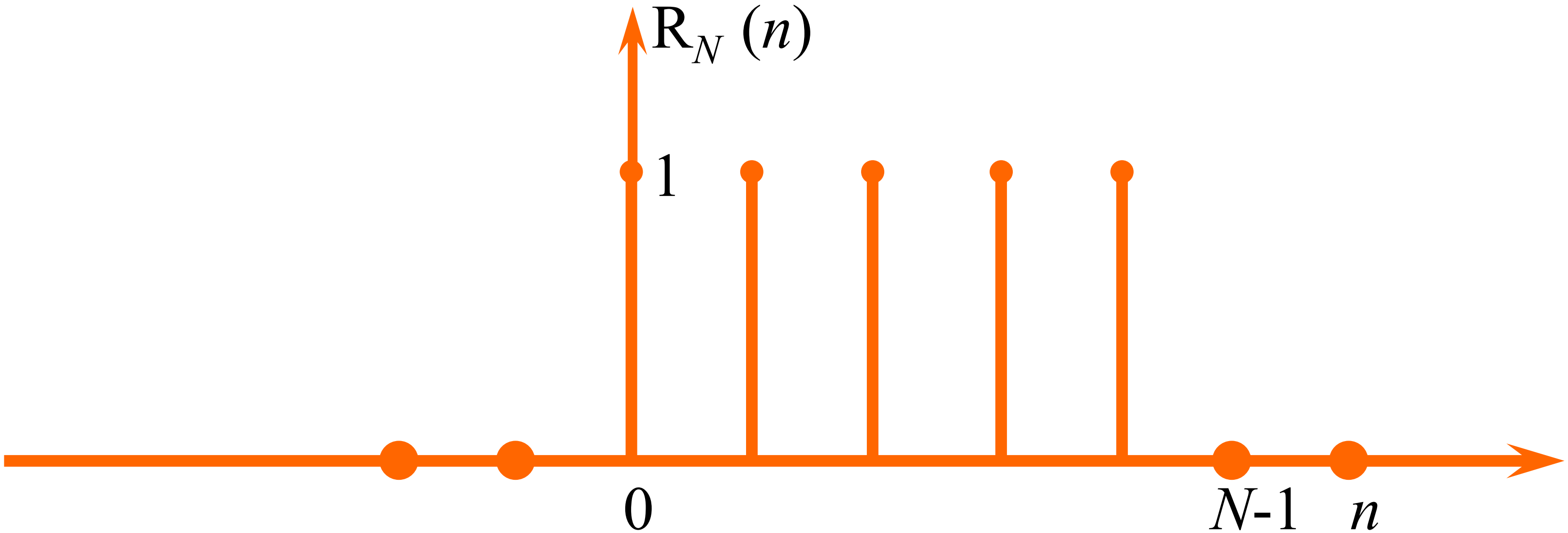


图3.5　矩形序列

4. 单边指数序列

可表示为

$$x(n) = a^{n}\varepsilon(n) \qquad (3.8)$$

根据a的不同，序列值有多种不同的情况：当| a |>1，序列发散；| a |<1，序列收敛；a > 0，序列值均为正；a < 0，则序列值正负摆动，如图3.6所示。

单边指数序列

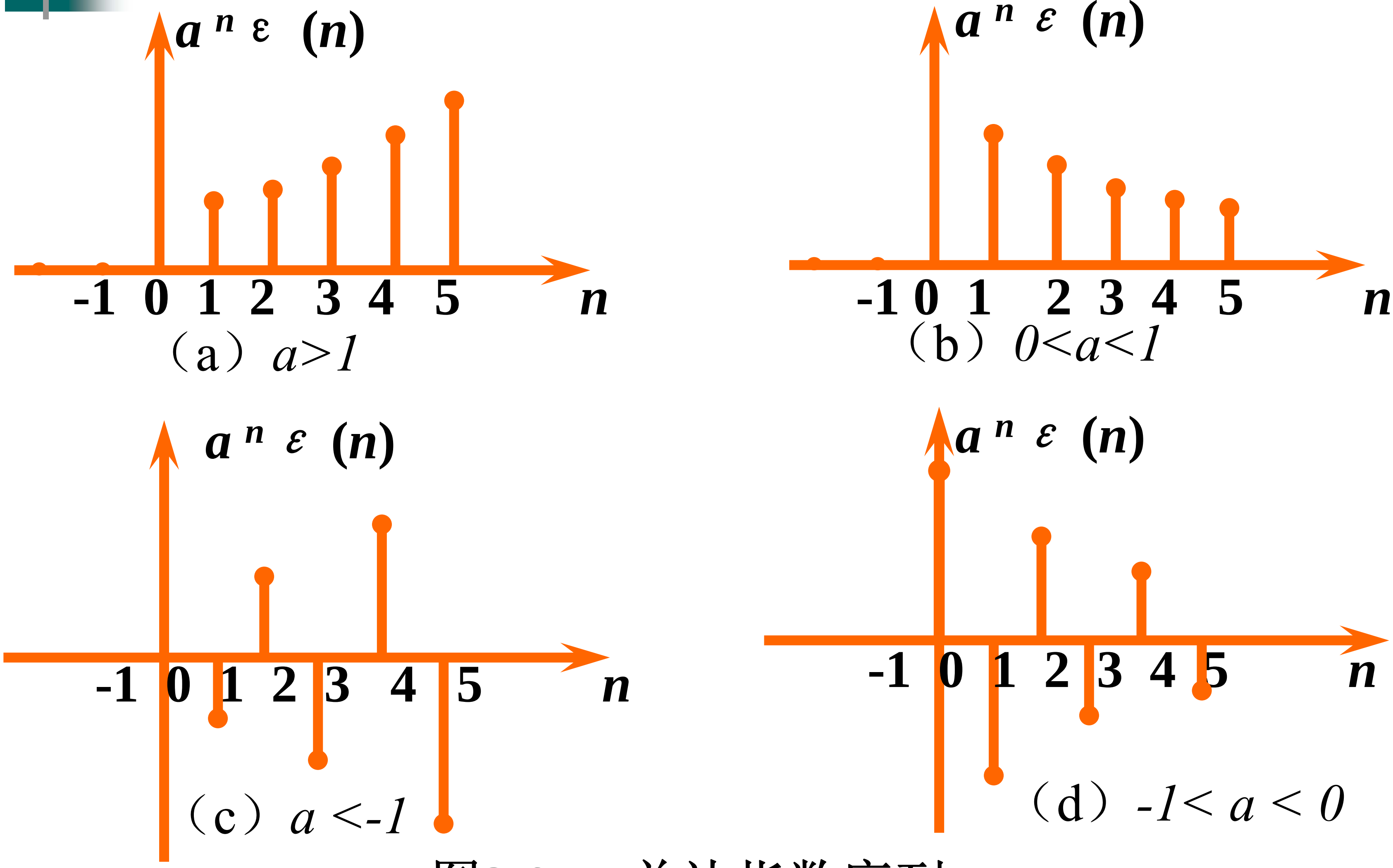


图3.6　单边指数序列

斜变序列$r(n)$

5. 斜变序列*r* (*n*)

$$r(n) = n\varepsilon(n) \qquad (3.9)$$

如图3.7所示，与连续斜变信号$r(t) = t\varepsilon(t)$相似。

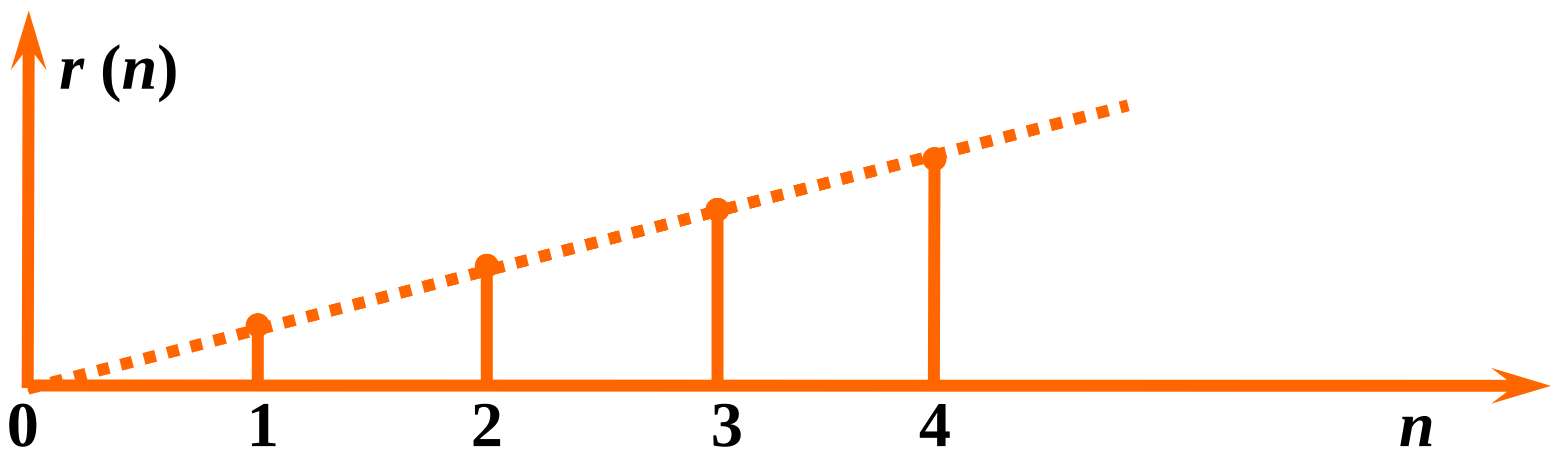


图3.7 斜变序列*r* (*n*)

斜变序列$r(n)$

序列$r(n)$与 $\varepsilon(n)$之间存在下列关系：

$$r(n)=\sum_{m=0}^{n}\varepsilon(m-1) \tag{3.10}$$

$$\varepsilon(n-1)=r(n)-r(n-1) \tag{3.11}$$

正弦（余弦）序列

6. 正弦（余弦）序列

正弦序列表示为

$$x(n)=\sin n\omega_0 \tag{3.12}$$

余弦序列表示为

$$x(n)=\cos n\omega_0 \tag{3.13}$$

式中 ω_0 是正弦序列的频率，称为数字角频率，以周期序列为例，来理解它的意义，它反映序列值依次按正弦包络线变化的速率，例如 $\omega_0 = 0.2\pi$，则序列值每隔10个重复一次，$\omega_0 = 0.02\pi$，则序列值要隔100个才重复一次。

正弦（余弦）序列

正弦序列的图形参见图3.8。

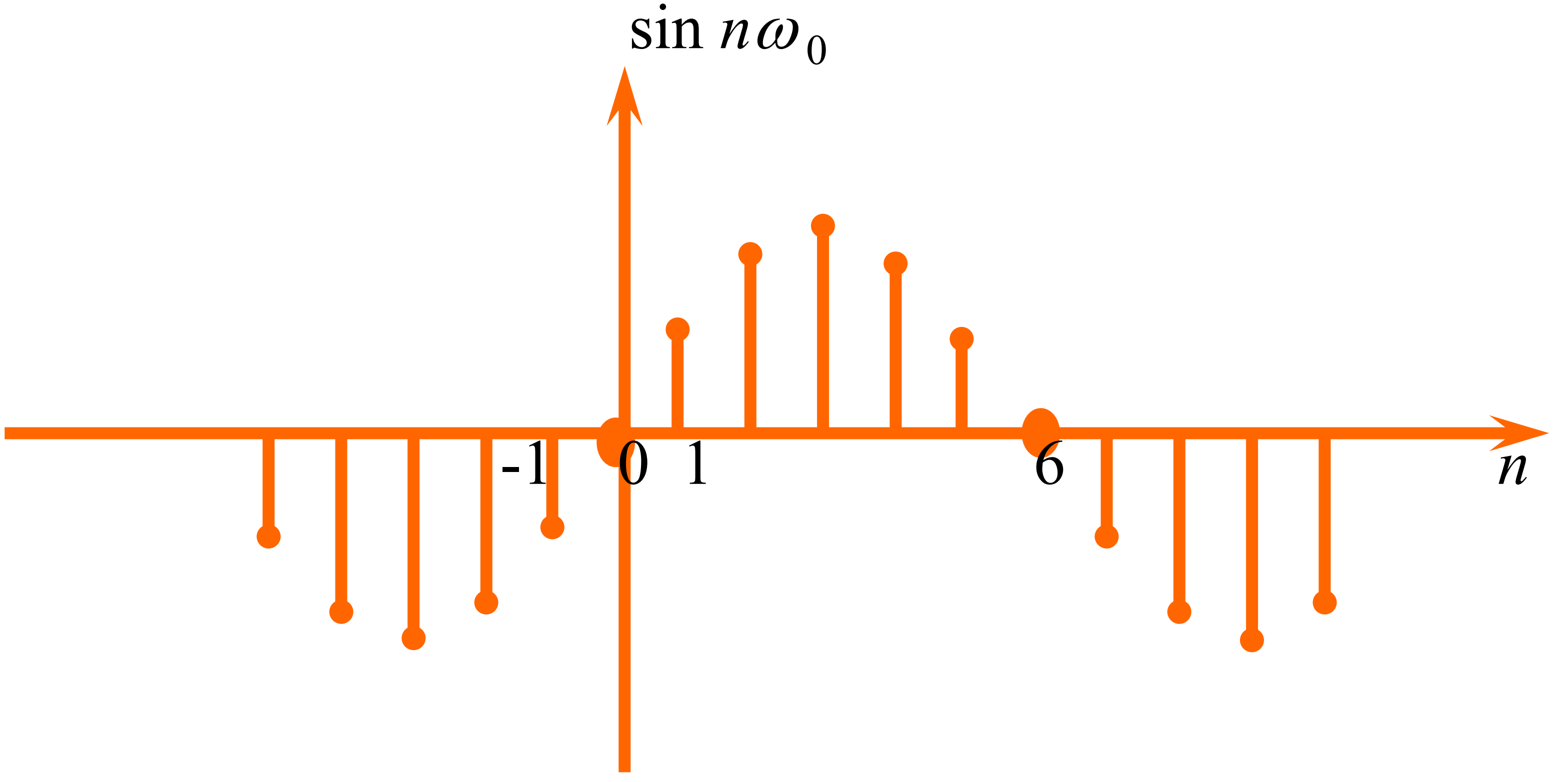


图3.8　正弦序列

正弦（余弦）序列

若对连续的正（余）弦信号进行抽样并经转换，可得正（余）弦序列。设连续余弦信号为

$$f(t) = \cos(\Omega_0 t)$$

它的抽样信号（抽样周期是T）是

$$f(nT) = \cos(n\Omega_0 T)$$

余弦抽样序列即为

$$x(n) = \cos\omega_0 n = \cos(n\Omega_0 T)$$

从而有 $\omega_0 = \Omega_0 T$

正弦（余弦）序列

需要特别注意的是：尽管连续正（余）弦信号必定是周期信号，但正（余）弦序列不一定是周期序列。

原因：这一重要区别是因为连续正弦信号时域参数*t*是连续变量，而序列中的对应参数*n*限定为整数引起的，

周期序列：

对于所有整数*n*，如果序列存在以下关系：

$$x(n)=x(n+N)\quad ,N\text{为整数}\qquad (3.14)$$

称*x*（*n*）为周期序列，*N*是周期。

正弦（余弦）序列

由式（3.14），对于正弦序列，若是周期序列，应有

$$\sin n\omega_0 = \sin(n+N)\omega_0$$

则

$$N\omega_0 = 2\pi m$$

即

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$$

或

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} m$$

因此，**2 π /ω_0 必须为整数或有理数时**，正弦序列才是周期序列

正弦（余弦）序列

例

$$\sin\frac{\pi}{6}n \quad , \quad N=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\pi/6}=12$$

***N*为整数，所以是周期序列；**

$$\sin\frac{1}{6}n \quad , \quad N=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{1/6}=12\pi$$

***N*为无理数，不存在周期，所以是非周期序列。**

7. 复指数序列

序列值是复数的称复序列，复指数序列是常用的复序列，表示为

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0}=\cos n\omega_0+\mathrm{j}\sin n\omega_0 \qquad (3.16)$$

与正弦序列相同，只有满足式 **(3.15)**的复指数序列才是周期序列。

复指数序列

另外由于n是整数，对复指数（或正弦）序列，还可以得到数字角频率ω_0与模拟角频率另一个不同的重要特性，下面来讨论这个问题。

复指数序列

设复指数序列中，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2k\pi)n}$$ ***k*:** 正整数

即：在数字频率轴上相差**2**π整数倍的所有复指数序列值都相同，即复指数序列在频域上是以**2**π为周期的周期函数（不一定是序列），换言之，ω_0有效取值区间只限于

$$-\pi\le\omega_0\le\pi$$

或

$$0\le\omega_0\le 2\pi$$

而连续指数信号中，不同　的对应不同频率的连续信号，的取值区间不受限制，可以是$-\infty<\Omega_0<\infty$。

复指数序列

重要性质：

如果把正弦或复指数信号经过取样，变换为离散时间信号（序列），就相应地把无限的频率范围（对于连续信号）映射（变换）到有限的频率范围。它表明：

在进行数字信号分析和处理时，序列的频率只能在$-\pi \le \omega_0 \le \pi$ 或 $0 \le \omega_0 \le 2\pi$ 的区间内取值

复指数序列

由于复指数序列与连续时间信号中的 $e^{j\Omega t}$ 一样，有着重要作用，必然影响到数字信号分析处理的过程。但不管复指数（或正弦）序列是否为周期序列，ω 都称数字角频率。

3.1.3 序列的运算

序列的基本运算，主要有：

1. 序列的相加及累加

序列相加定义为两个序列同序号（同一时刻）的序列值对应相加得到新序列的运算，表示为

$$z(n)=x(n)+y(n) \tag{3.17}$$

序列的累加运算为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \tag{3.18}$$

序列的相乘和数乘

2. 序列的相乘和数乘

序列相乘定义为两个不同序列同序号的序列值对应相乘而得到新序列的运算，表示为

$$z(n)=x(n)\cdot y(n) \tag{3.19}$$

数乘序列运算是

$$y(n)=a\cdot x(n) \tag{3.20}$$

如果*a*为实数，则根据*a*是否大于1，表示得到的新序列的序列值是原序列值的放大或缩小。

序列的移位

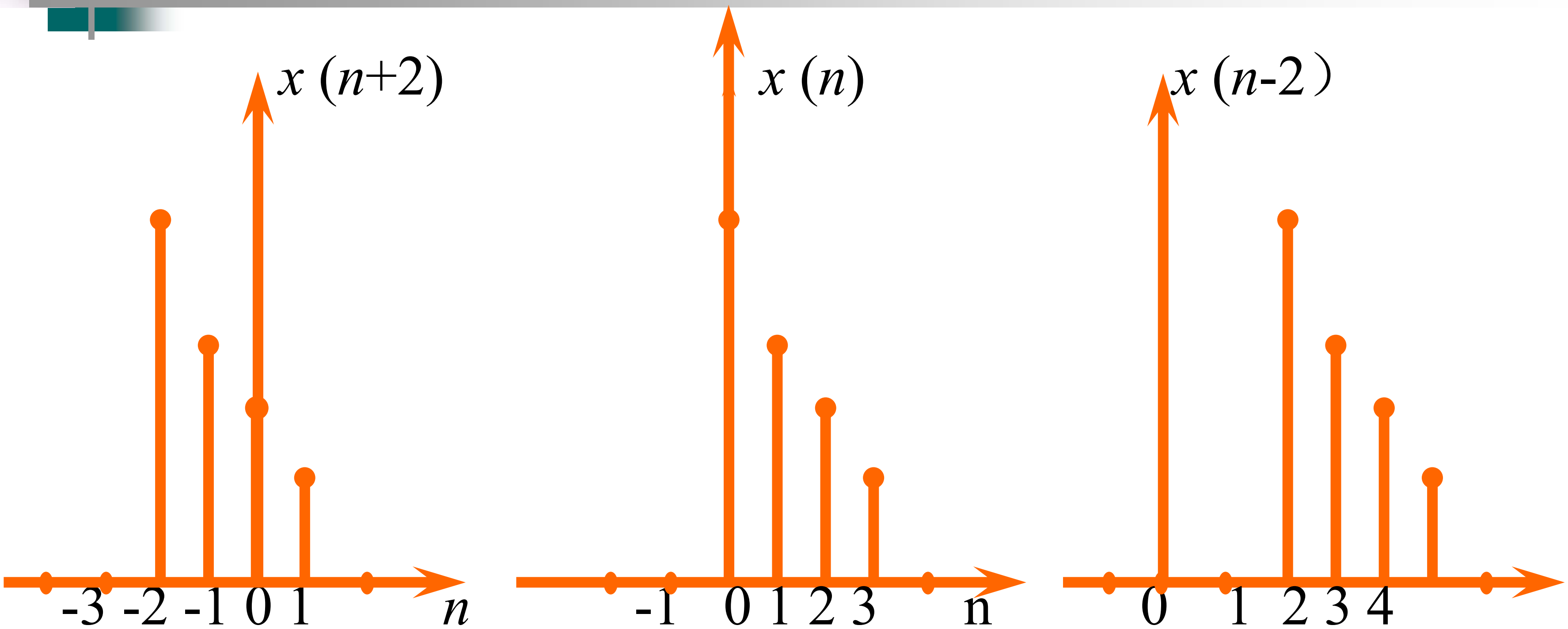
3. 序列的移位（延时）

所谓序列的延时（移位），是这样一种运算，例如

$$z(n) = x(n-m) \qquad (3.21)$$

则$z(n)$是$x(n)$的移位序列，若$n \ge 0$时，m为正时是右移，为负时是左移，如图3.9示。

序列的移位



（a）序列左移　　（b）原序列　　（c）序列右移

图3.9　序列的移位

差分运算

4. 差分运算

指同一个序列中相邻序列号的两个序列值之差，根据所取序列相邻次序的不同分为前向差分和后向差分，前向差分的运算用符号Δ表示，后向差分则用∇，从而有

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{3.22}$$

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \tag{3.23}$$

高阶差分运算是对序列作连续多次的差分运算，例如**m**阶差分：

$$\nabla^m x(n) = \nabla\left[\nabla^{m-1} x(n)\right] \tag{3.24}$$

$$\Delta^m x(n) = \Delta\left[\Delta^{m-1} x(n)\right] \tag{3.25}$$

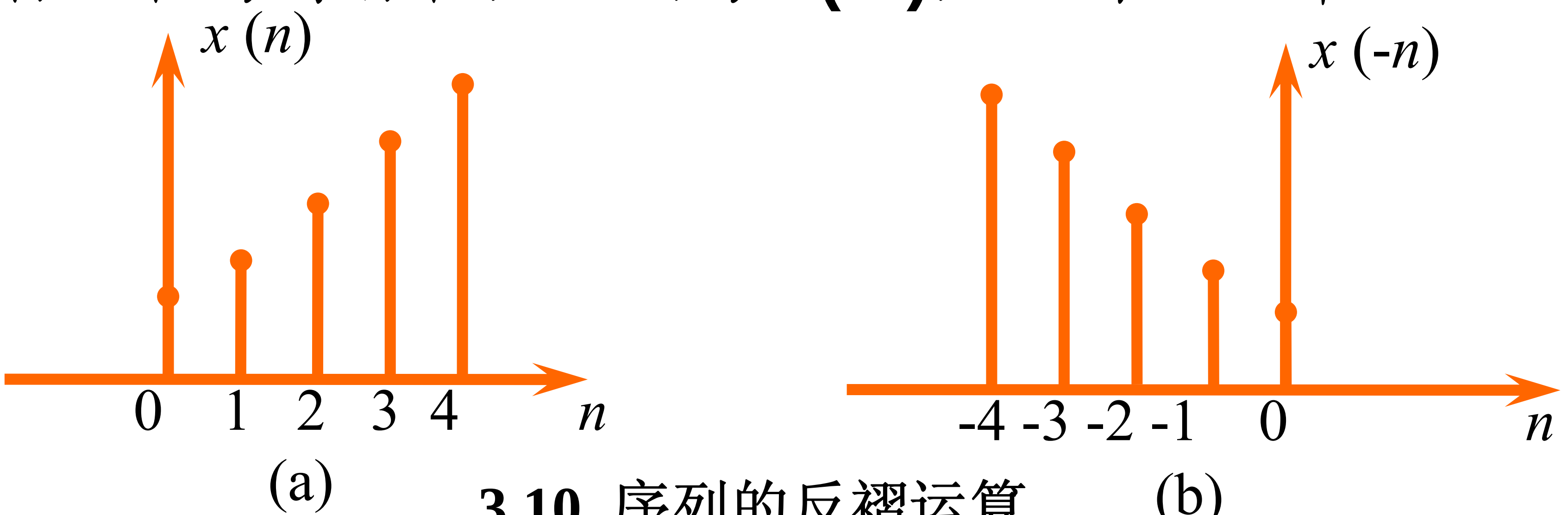
差分运算

例如二阶后向差分可由式（3.22）得出:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 x(n) &= \nabla[\nabla x(n)] \\
&= \nabla[x(n) - x(n-1)] \\
&= \nabla x(n) - \nabla x(n-1) \\
&= [x(n) - x(n-1)] - [x(n-1) - x(n-2)] \\
&= x(n) - 2x(n-1) - x(n-2)
\end{aligned}
$$

5. 序列的反褶（转置）

序列的反褶运算是把序列**x**（***n***）中的***n***，代之以**-*n***，即序列变换为**x (-*n*)**，相当于序列**x**（***n***）的图形以***n*** **= 0**座标纵轴为对称轴，反褶为**x (-*n*)**，如图**3.10**所示。



3.10 序列的反褶运算

6. 序列的压缩和扩展

这种运算相当于连续信号中的尺度变换运算。序列的压缩也称为序列的抽取，这一运算是把序列中的某些值去除，将剩下的序列值按次序重新排列，其结果将使序列缩短。序列的抽取表示为

$$y(n) = x(An)\text{，}A\text{为正整数} \qquad (3.26)$$

序列的压缩和扩展

序列的扩展则和序列的压缩相反，是在原序列的相邻序号之间插入零值，也称序列的延伸或序列的内插零值或序列的补零，重新排列的结果将使原序列延长。序列的扩展可表示为

$$y(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{A}\right), & n=Ak, k=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ 0, & n\neq Ak \end{cases} \tag{3.27}$$

序列的压缩和扩展

图3.11中说明了序列的压缩和扩展运算，设$A = 2$。图（a）是原序列，图（b）是序列的压缩，图（c）是序列的扩展。

序列的压缩和扩展

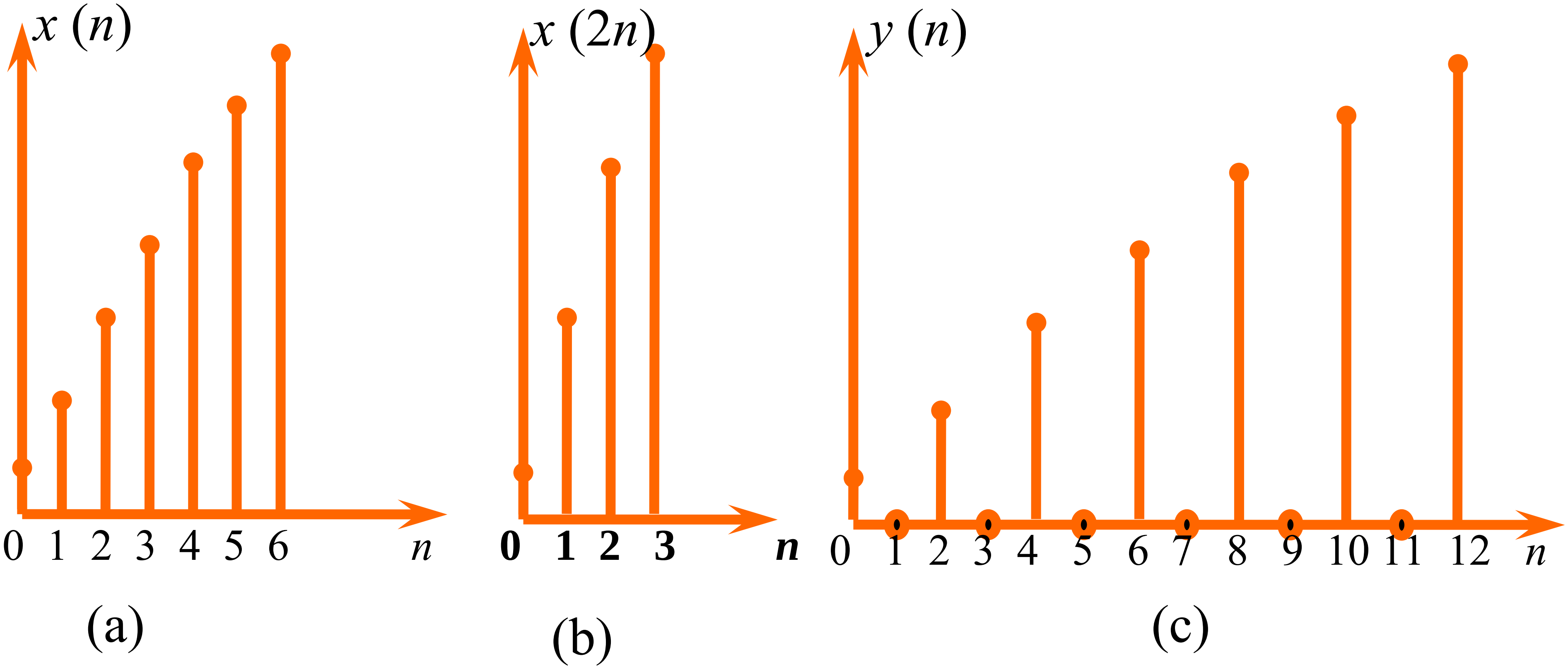


图3.11 序列的压缩和扩展

序列的压缩和扩展

- 序列还有两个重要的运算，离散卷积和序列的相关，将在后面有关的章节中介绍。

3.2.1　z变换的定义

定义一：z变换的定义可以对模拟信号进行冲激抽样经拉氏变换引出；常用于自动控制采样系统的分析。

定义二：也可直接给出数学定义；定义二则用于数字信号处理中。

- 理解两种定义方法的区别与联系，
- 更好地理解z变换、拉氏变换与傅氏变换之间的关系

由冲激抽样信号的拉氏变换来定义

1. 由冲激抽样信号的拉氏变换来定义

若对一模拟信号作冲激抽样，得到其冲激抽样信号，表示为 $x_s(t) = x_a(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$

对上式两边进行（双边）拉氏变换，得的拉氏变换 $X_s(s)$

$$X_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)]e^{-st}dt$$

由冲激抽样信号的拉氏变换来定义

将上式中的积分与求和的运算次序对调，然后利用冲激函数的抽样性，可得

$$X_{\mathrm{s}}(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_{\mathrm{a}}(t)\mathrm{e}^{-st}]\delta(t-nT)\mathrm{d}t \qquad (3.28)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\mathrm{e}^{-snT}$$

对上式引入复变量 $z=e^{sT}$，得到一个**z**的函数***X*（*z*）**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)z^{-n} \qquad (3.29)$$

由冲激抽样信号的拉氏变换来定义

对离散时间信号来说，令$T=1$，并不失一般性，即nT和n表示相同的时刻，式(3.29)可直接写为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n) z^{-n}$$

上式即为冲激抽样信号的双边z变换定义式。

考虑因果信号，即 = 0，$t<0$，单边z变换定义式:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(n) z^{-n} \qquad (3.31)$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x_a(n) z^{-n}$$

由冲激抽样信号的拉氏变换来定义

2. 直接定义

由于序列是严格意义上的离散信号，它在时间上是不连续的，因此是不存在拉氏变换的，把序列的z变换直接定义为

$$[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

上式 为双边**z**变换，单边**z**变换则可定义为

$$[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

直接定义

直接定义，**是把z变换定义为离散信号由时域到z域的数学映射，是复变量z^{-1}的幂级数**，即罗朗级数。

顺便指出：**z**是一个连续复变量，具有实部分量**Re (z)**和虚部分量**jIm (z)**，所构成的平面为**z**平面。**z**也可以用极坐标表示，$z = |z| e^{j\phi}$，通常把$|z| = 1$的所有复变量形成的圆称单位圆，所以，单位圆可表示成

$$z = e^{j\phi}$$

3.2.2 z变换的收敛域

z变换是复变量z^{-1}的幂级数，一般是无穷级数，只有级数收敛时，z变换才有意义。与收敛直接相关的是收敛域问题，通常把使级数在z平面上收敛的所有点z_i集合，称之为z变换的收敛域（定义域）。

由级数理论可知，所谓级数收敛，是对于级数

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

z变换的收敛域

当z在z平面上取值z_i，求出级数前n项的和，记为$S_n(z)$，若下式成立，即

$$X(z)|_{z=z_i}=S(z) \quad (3.34)$$

则称级数$X(z)$收敛，记为

$$\lim_{n\to\infty}S_n(z)|_{z=z_i}=S(z)<\infty$$

仍根据级数理论，级数收敛的充分条件是级数绝对可和，即级数满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)z^{-n}|<\infty \quad (3.35)$$

z变换的收敛域

式 (3.35) 就把一般无穷级数收敛的判定转换为相对应正项级数的收敛判定，通常可以用比值判定法或根值判定法来判定正项级数的收敛性，从而求出收敛域。

比值判定法：若有一正项级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|$，设其后项与前项比值的极限为$R$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R \qquad (3.36)$$

则有： $R<1$时，级数收敛；$R>1$时，级数发散，$R=1$时，不定，可能收敛，也可能发散。

z变换的收敛域

根值判定法： 对于级数的一般项 a_n，若 $|a_n|$ 的 n 次根的极限为 R，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=R \qquad (3.36)$$

则有：

$R<1$ 时，级数收敛；$R>1$ 时，级数发散，$R=1$ 时，不定，可能收敛，也可能发散。

z变换的收敛域

判定z变换收敛域的必要性还在于：对于双边z变换，只有明确指定z变换的收敛域，才能单值确定其所对应的序列。下面来看一个例子，从中可以非常清楚地理解这一点。

例3.1 求出下列两个不同序列的z变换及其收敛域。

$$x_1(n)=\begin{cases}a^n, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$x_2(n)=\begin{cases}0, & n\ge 0\\ -a^n, & n<0\end{cases}$$

z变换的收敛域

解：$x_1(n)$的z变换$X_1(z)$为

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$
$$=1+az^{-1}+a^2z^2+\cdots \qquad (3.38)$$

由比值判定法，这一级数收敛的条件为

$$|\ az^{-1}\ |<1$$

即$|z|>|a|$

则级数收敛于

$$X_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a| \qquad (3.39)$$

z变换的收敛域

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| < |a|$$

- 上述运算结果表明：两个不同的序列可以对应相同的z变换，而收敛域并不同，因此，为了使序列和z变换是一对一的对应，在给出序列z变换的同时，必须指定其收敛域。

收敛域通常也用图形来形象表示:

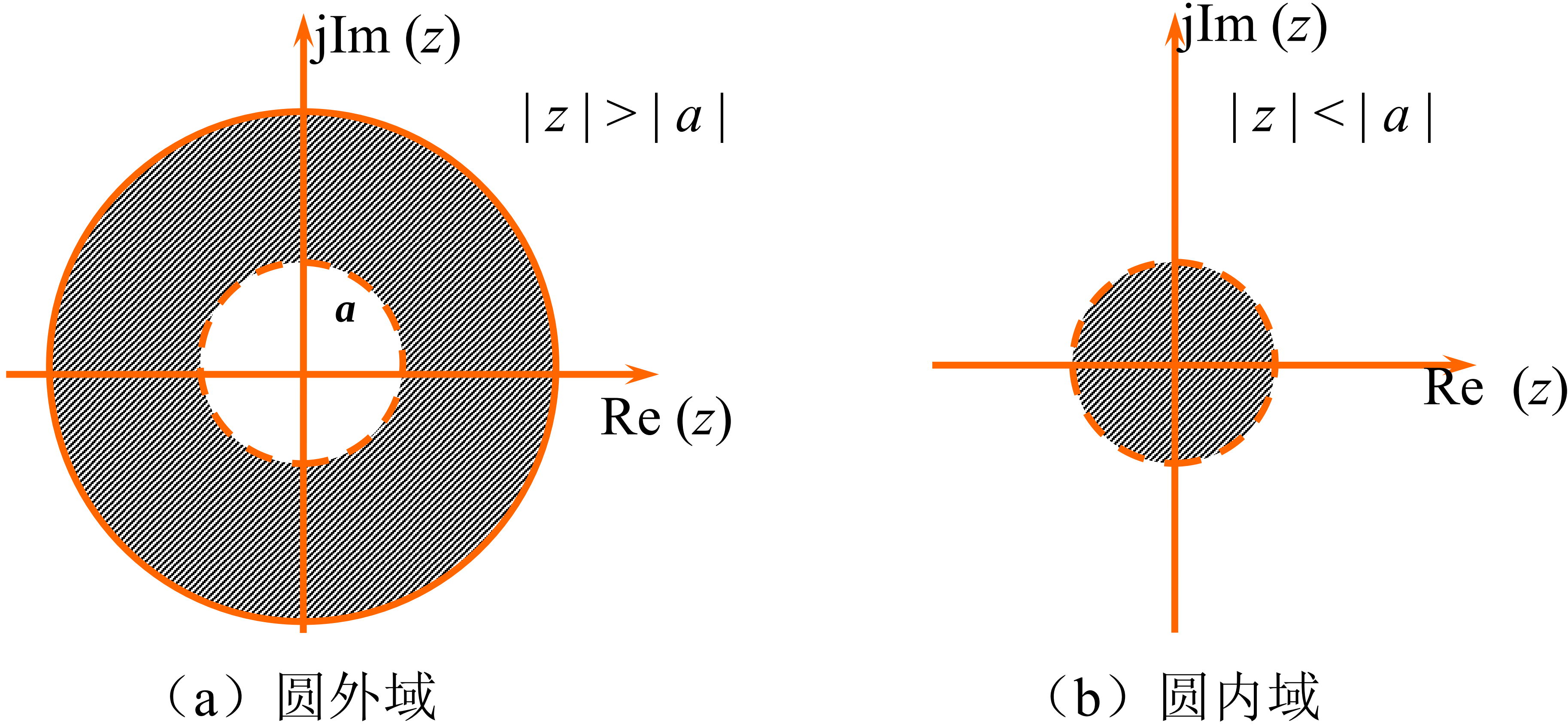


图3.12 收敛域的图形表示

几类常见序列z变换的收敛域

1. 有限长序列（有始有终序列）

这类序列只在有限区间内（$n_1 \leqslant n \leqslant n_2$）具有非零值，根据$n_1$和$n_2$相对于零点的位置不同有三种情况:

（1）$n_1 < 0$, $n_2 > 0$;

（2）$n_1 \geqslant 0$， $n_2 > 0$;

（3）$n_1 < 0$， $n_2 \leqslant 0$。

有限长序列

分析第（1）种情况:

$$x(n)=\begin{cases}x(n), & n_1\le n\le n_2\ (n_1<0\,,n_2>0)\\ 0\ , & n<n_1\ ,\quad n>n_2\end{cases}$$

则其z变换

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n} \qquad \textbf{(3.41)}$$

式 **(3.41)**是一有限项级数，是否收敛, 根据级数收敛的定义，只要看z^{-n}就能确定。

有限长序列

若$n_1 < 0$，有：$|z^{-n}| = |z|^{|n|}$，当$z = \infty$，$X(z) \to \infty$，收敛域不包括$z = \infty$；

又若$n_2 > 0$，则 $|z^{-n}| = \dfrac{1}{|z|^n}$，$z = 0, X(z) \to \infty$，

收敛域不包括$z = 0$。所以除$z = 0$和 $z = \infty$ 外，有限长序列$x(n)$在z平面上处处收敛。

有限长序列

序列和收敛域的情况参见图**3.13(a)**所示。其它两种情况请读者自行思考和分析，他们的序列和收敛域情况，分别如图**3.13(b)**、**3.13(c)**所示。

图3.13　有限长序列及其z变换的收敛域

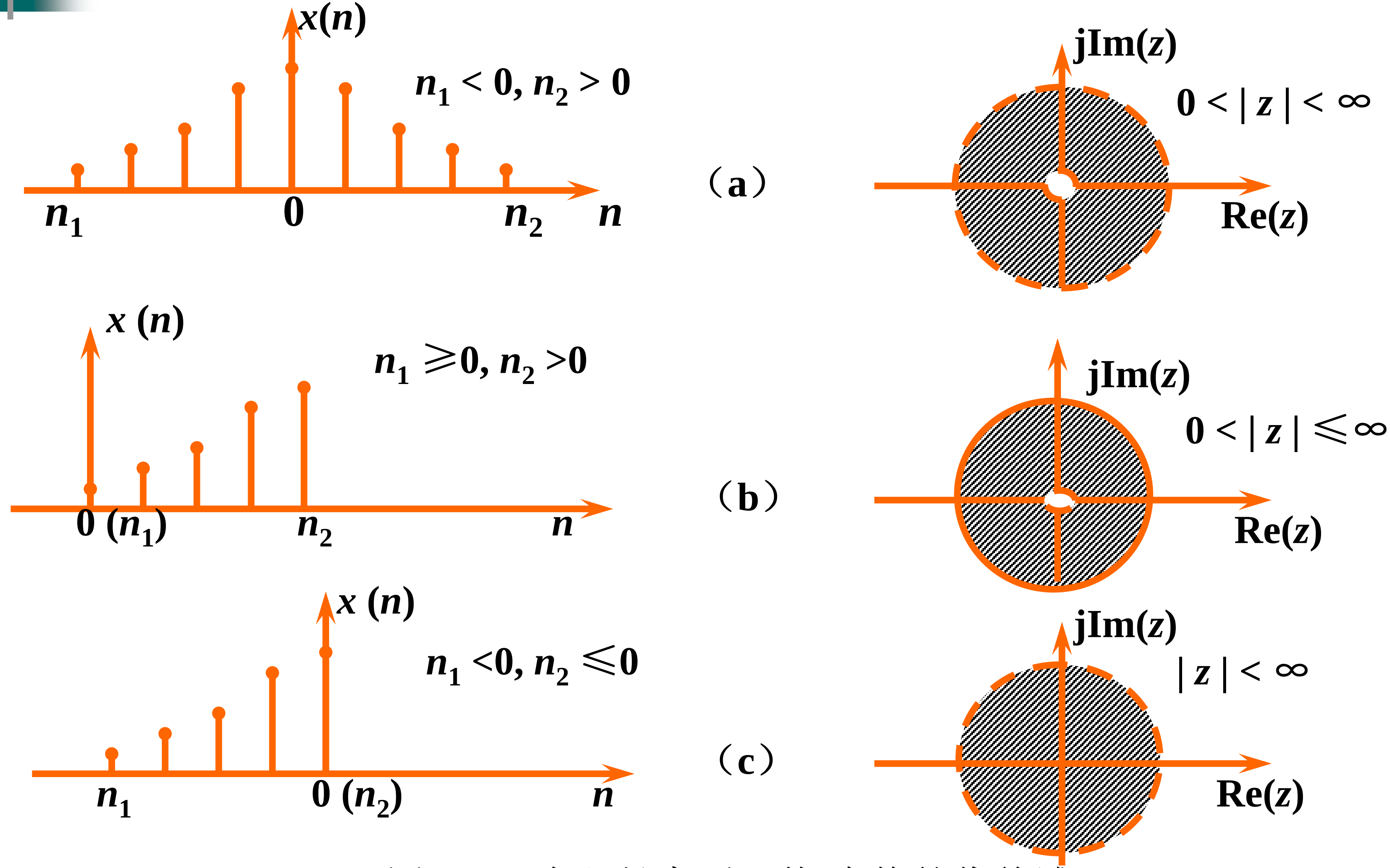


图3.13　有限长序列及其z变换的收敛域

右边序列

2. 右边序列（有始无终序列）

右边序列是指序列 $x(n)$，当 $n < n_1$ 时，$x(n) = 0$。序列与其z变换可表示为

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & n \geq n_1 \\ 0, & n < n_1 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

由根值判定法，上述z变换要收敛，应满足

$$|z| > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x(n)|} = R_n$$

右边序列

式中的R_n为级数的收敛半径，因此右边序列的收敛域是以R_n为半径的圆外域。当 $n_1 = 0$，右边序列为因果序列，是实际中最常见的一类序列，其收敛域包括$z = \infty$，序列与其收敛域示于图3.14。

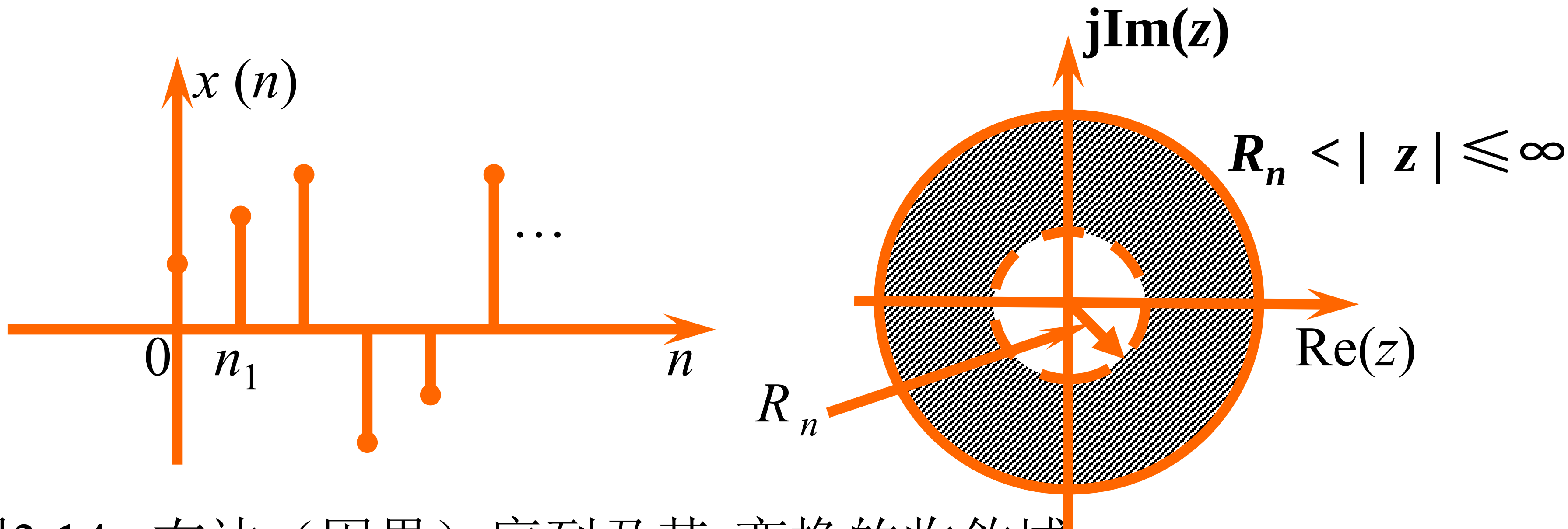


图3.14 右边（因果）序列及其z变换的收敛域

右边序列

若$n_1 \geqslant 0$，则收敛域也应包括$z = \infty$，即收敛域为$R_{n} < |z| \leqslant \infty$。但若$n_1 < 0$，则不应包括$z = \infty$，即 $R_{n} < |z| < \infty$。

左边序列

3. 左边序列（无始有终序列）

这类序列当 $n > n2$ 时, $x(n) = 0$，可表示为

$$x(n)=\begin{cases} x(n)\,, & n\le n_2 \\ 0\quad\;, & n>n_2 \end{cases}$$

其z变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

左边序列

把上式改写为

$$X(z)=\sum_{n=-n_2}^{\infty} x(-n)z^{n}$$

由根值判定法，可知上述级数收敛的条件为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)z^{n}|}<1$$

有

$$|z|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}}=R_m$$

左边序列

可见：左边序列收敛域为以收敛半径R_m的圆内域。

若$n_2 > 0$，收敛域不包含$z=0$点，即$0<|z|<R_m$；

若$n_2 \leqslant 0$，收敛域包含$z=0$点，即$|z|<R_m$，

如图3.15 。

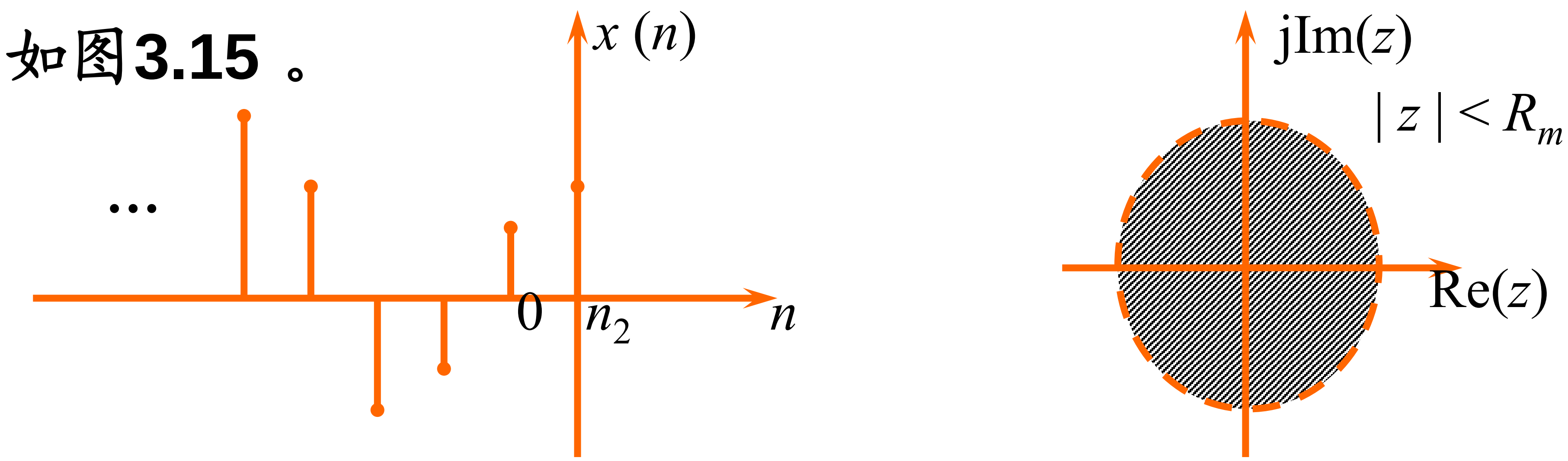


图3.15　左边序列及其z变换的收敛域

左边序列

由以上序列收敛域的讨论，可以得出：序列z变换的收敛域与序列的类型有关，最常见的序列为右边序列（包括因果序列），其z变换的收敛域为圆外域。

左边序列

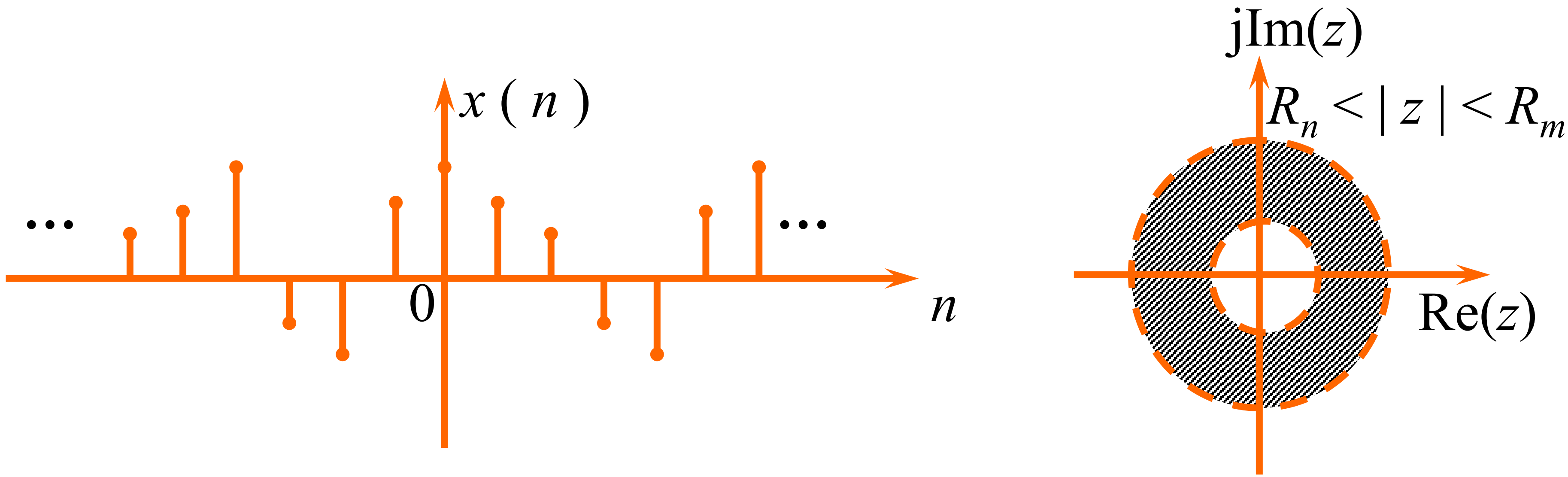


图3.16　双边序列及其z变换的收敛域

例3.2

例**3.2**　求双边序列的

$$x(n)=a^n\varepsilon(n)-b^n\varepsilon(-n-1)$$

双边**z**变换及收敛域（设***a*** **> 0**， ***b*** **> 0** **,** ***b*** **>** ***a***）。

解：
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a^n\varepsilon(n)-b^n\varepsilon(-n-1)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^nz^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}+1-\sum_{n=0}^{\infty}b^{-n}z^n$$

例3.2

上式右边的第一项为右边序列的z变换，收敛域为$|z|>a$，第二、三项是左边序列的z变换，收敛域为$|z|<b$，从而可得

$$X(z)=\frac{z}{z-a}+1-\frac{1}{1-b^{-1}z}$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$

$$=\frac{2z^2-(a+b)z}{z^2-(a+b)z+ab}$$

由上式，$X(z)$有两个零点：$z=0$ 和$z=(a+b)/2$，两个极点：$z=a$ 和$z=b$，其收敛域为一环状域（$a<|z|<b$），并且以极点为边界，如图3.17。

例3. 2

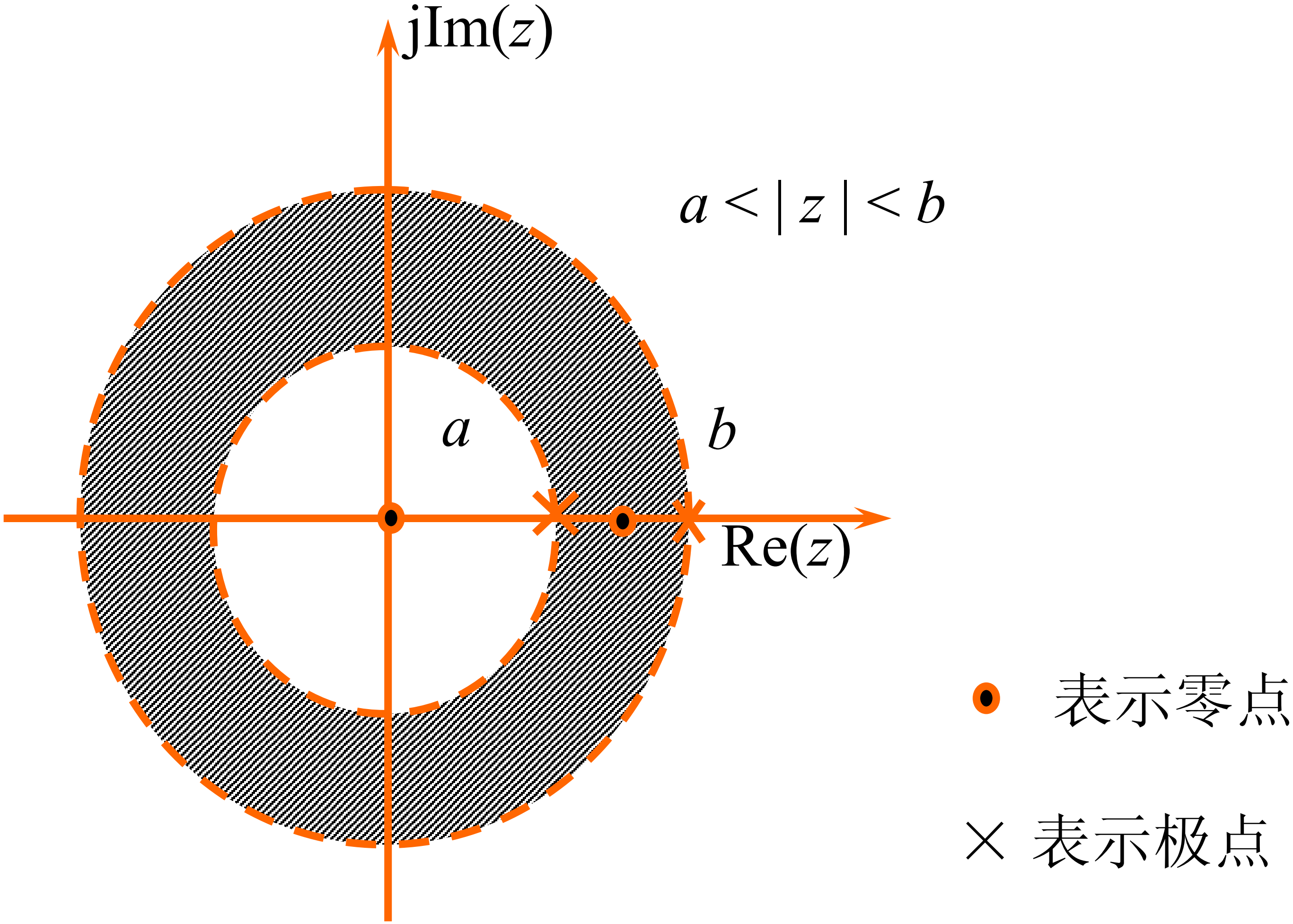


图3.17 例3.2中的z变换收敛域与零、极点分布

3.2.3 典型离散时间信号（序列）的z变换

1. 单位抽样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

$$Z[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) z^{-n} = 1$$

收敛域为整个z平面，$0 \leqslant |z| \leqslant \infty$。

2. 单位阶跃序列

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

由根值判定法，有**|z-1|<1**，即：**|z|>1**时，上述**z**变换收敛，并且其**z**变换等于

$$Z[\varepsilon(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varepsilon(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

$$Z[\varepsilon(n)]=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \qquad \textbf{(3.43)}$$

矩形序列

3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其它\,n\end{cases}$$

$$Z[R_N(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-(N-1)}$$

$$=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad \textbf{(3.44)}$$

矩形序列为有限长序列，由上述级数和可知:

其收敛域为 $0<|z|\leqslant\infty$。

矩形序列为有限长序列，由上述级数和可知:

其收敛域为 $0<|z|\leqslant\infty$。

斜变序列

4. 斜变序列

斜变序列为

$$x(n) = n\varepsilon(n)$$

其*z*变换为

$$Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

不好直接求解，采用间接方法，由式(3.41)可知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad (|z|>1)$$

斜变序列

将上式两边对**z -1** 求导，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$$

上式两边再各乘**z -1**，作相应整理后，即可得到斜变序列的**z**变换为

$$Z[n\varepsilon(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2} \qquad \textbf{(3.45)}$$

斜变序列

采用类似的方法，对式（3.45）两边对z -1 求导，还可进一步得到:

$$Z\left[n^2\varepsilon(n)\right]=\frac{z(z+1)}{(z+1)^3}$$

$$Z\left[n^3\varepsilon(n)\right]=\frac{z(z^2+4z+1)}{(z+1)^4}$$

……

单边指数序列

5. 单边指数序列

$$x(n)=a^n\varepsilon(n)$$

其z变换在例3.1中已求出，是

$$Z[a^n\varepsilon(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\varepsilon(n)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a \qquad (3.46)$$

若令a = e^{b} ，则有

$$Z[\mathrm{e}^{bn}\varepsilon(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{b}},\quad |z|>\mathrm{e}^{b} \qquad (3.47)$$

再令a = $e^{\pm j\omega}$，则有

$$Z[\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega n}\varepsilon(n)]=\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega}},\quad |z|>|\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega}| \qquad (3.48)$$

单边指数序列

将式 **(3.46)**中 $\frac{z}{z-a}$ 写成 $\frac{1}{1-az^{-1}}$，并对式 **(3.44)**两边对***z*-1** 求导，有

$$Z[n^2 a^n \varepsilon(n)] = \frac{a\,z(z+a)}{(z-a)^3} \qquad \textbf{(3.49)}$$

类推可得 $$Z[na^n \varepsilon(n)] = \frac{a\,z^{-1}}{(1-a\,z^{-1})^2} = \frac{a\,z}{(z-a)^2} \qquad \textbf{(3.50)}$$

另外，若令**a** = $\beta e^{\pm j\omega}$ ，则有

$$Z[\beta^n e^{\pm j\omega n} \varepsilon(n)] = \frac{1}{1-\beta\, e^{\pm j\omega} z^{-1}} \qquad \textbf{(3.51)}$$

其收敛域为$|\beta\ e^{\pm j\omega} z^{-1}| < 1$，即 $|z| > |\beta|$。

6. 正弦与余弦序列

正、余弦序列可以应用欧拉公式分别分解为两个复指数序列相加，它们的z变换为两个相应复指数序列z变换的相加，即

$$\cos(n\omega)\varepsilon(n)=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}]\varepsilon(n)$$

$$\sin(n\omega)\varepsilon(n)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}]\varepsilon(n)$$

则正、余弦序列的z变换分别为

$$Z[\cos(n\omega)\varepsilon(n)]=\frac{1}{2}[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}] \quad (3.52)$$

$$=\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}, \qquad |z|>1$$

正弦与余弦序列

$$Z[\sin(n\omega)\varepsilon(n)] = \frac{1}{2\mathrm{j}}[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}]$$

$$= \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}, \quad |z|>1 \qquad \textbf{(3.53)}$$

由以上两式和式 **(3.51)**可得指数衰减（$\beta<1$）或增幅（$\beta>1$）的正、余弦序列的**z**变换为

$$Z[\beta^n\cos(n\omega)\varepsilon(n)] = \frac{z(z-\beta\cos\omega)}{z^2 - 2\beta z\cos\omega + \beta^2}, \quad |z|>|\beta| \qquad \textbf{(3.54)}$$

$$Z[\beta^n\sin(n\omega)\varepsilon(n)] = \frac{z\beta\sin\omega}{z^2 - 2\beta z\cos\omega + \beta^2}, \quad |z|>|\beta| \qquad \textbf{(3.55)}$$

3.3 z变换的性质

在离散时间信号的分析和处理中，常常要对序列进行相加、相乘、延时和卷积等运算，z变换的特性对于简化运算非常有用。由于z变换的性质与拉氏变换和傅氏变换所具有的性质相类似，下面将从应用的角度（不给出证明），讨论某些后述内容中要涉及到的特性，其它性质将在表3.1中列出。

1. 线性

若： $Z[x(n)]=X(z)\,,\quad R_{xn}<|z|<R_{xm}$

$Z[y(n)]=Y(z)\,,\quad R_{yn}<|z|<R_{ym}$

则： $Z[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z)\,,\quad R_n<|z|<R_m$ **(3.56)**

式中***a***、***b***为任意常数。

线性特性说明***z***变换具有叠加性和均匀性，是一种线性变换。

线性

两个序列线性组合后的序列，其z变换收敛域一般是两个序列收敛域的重叠部分，R_n 取R_{xn} 和R_{yn} 中较大者，R_m 取R_{xm} 和R_{ym} 中较小者，表示为

$$\max(R_{xn}, R_{yn}) < |z| < \min(R_{xm}, R_{ym})$$

当序列线性组合中z变换出现零、极点相互抵销时，则收敛域可能会扩大，看一个例子。

线性

例3.3　序列 $a^n\varepsilon(n)-a^n\varepsilon(n-1),a>0$ ，求其z变换。

解：设$x(n)=a^n\varepsilon(n)$, $y(n)=a^n\varepsilon(n-1)$

其z变换

$$X(z)=\frac{z}{z-a},\quad |z|>a$$

$$Y(z)=\frac{a}{z-a},\quad |z|>a$$

由线性特性

$$Z[a^n\varepsilon(n)-a^n\varepsilon(n-1)]=Z[x(n)-y(n)]$$

$$=X(z)-Y(z)=\frac{z}{z-a}-\frac{a}{z-a}=1$$

线性

由于$x(n)$和$y(n)$线性组合序列的z变换，在$z=a$处的零、极点相互抵消，收敛域由$|z|>a$，扩大至整个z平面。

双边z变换的时移特性

2. 时移特性（位移性）

时移特性表征序列时移后的z变换与时移前原序列z变换的关系。这种关系对单边、双边z变换有所不同，分别加以讨论。

（1）双边z变换的时移特性

若序列$x(n)$的双边z变换为

$$Z[x(n)]=X(z)$$

则序列右移后，其双边z变换为

$$Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z) \tag{3.57}$$

双边z变换的时移特性

序列左移后的双边z变换为

$$Z[x(n+m)] = z^{m} X(z) \tag{3.58}$$

式中**m**为任意正整数。

由上述特性表达式可见：如果原序列z变换的收敛域包括z = 0或z = ∞，则序列位移后z变换的零极点可能有变化；如果原序列z变换的收敛域不包括z = 0或z = ∞，则序列位移后z变换的零极点不会发生变化，例如序列为双边序列，其z变换的收敛域为圆环域，序列的移位不影响收敛域。

单边z变换的时移特性

（2）单边z变换的时移特性

若序列$x(n)$的单边z变换为

$$Z[x(n)\varepsilon(n)]=X(z)$$

则序列左移后的单边z变换为

$$Z[x(n+m)\varepsilon(n)]=z^{m}X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{m-k} \tag{3.59}$$

序列右移后的单边z变换为

$$Z[x(n-m)\varepsilon(n)]=z^{-m}X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-m-k} \tag{3.60}$$

单边z变换的时移特性

式中***m***为任意正整数，对于***m* = 1**和**2**，可由上两式写出具体的表达式为

$$Z[x(n+1)\varepsilon(n)] = zX(z) - z\,x(0)$$

$$Z[x(n+2)\varepsilon(n)] = z^2X(z) - z^2\,x(0) - z\,x(1)$$

$$Z[x(n-1)\varepsilon(n)] = z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$Z[x(n-2)\varepsilon(n)] = z^{-2}X(z) + z^{-1}\,x(-1) + x(-2)$$

如果序列***x*** **(** ***n*** **)**为因果序列，右移后的单边***z***变换，由于式（**3.60**）右边第二项均为零，则应为

$$Z[x(n-m)\varepsilon(n)] = z^{-m}X(z) \qquad \textbf{(3.61)}$$

单边z变换的时移特性

由于实际中经常应用的是因果序列，所以上述两式最为常用。

例3.4 已知单边（右边）周期序列 $x_p(n)=x(n+kN)$，k为正整数，**N**为周期，**N > 0**，设该周期序列的第一个周期（称为主值序列）为**x1 (n)**，并有

$$Z[x_1(n)]=X_1(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)z^{-n}\,,\quad |z|>0$$

求周期序列 $x_p(n)$的**z**变换。

单边z变换的时移特性

解：$x_p(n)$可看作$x_1(n)$右移N，$2N$，…，而构成的，可表示为 $x_p(n)=x_1(n)+x_1(n-N)+x_1(n-2N)+\cdots$

利用z变换的时移特性，可得

$$X_p(z)=X_1(z)[1+z^{-N}+z^{-2N}+\cdots]=X_1(z)\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}$$

若$|z^{-N}|<1$，即$|z|>1$，则上述级数收敛，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}z^{-mN}=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^N}{z^N-1}$$

因此可得 $X_p(z)=\dfrac{z^N}{z^N-1}X_1(z)$，$\quad |z|>1$

z域微分特性

3. z域微分特性

若：　$Z[x(n)] = X(z)$

则　$$Z[n\,x(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) \qquad (3.63)$$

还可进一步得出

$$Z[n^k x(n)] = (-z)^k(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^k X(z) \qquad (3.64)$$

例3.5　已知序列的z变换 $x(n) = a^n\varepsilon(n)$ ，即 $X(z) = \frac{z}{z-a}$ ，试求序列的z变换。

解：　由微分特性可得

$$Z[na^n\varepsilon(n)] = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\frac{z}{z-a}) = \frac{za}{(z-a)^2}$$

z域尺度变换特性

其结果与前面单边指数序列中所推得的结果相同，参见式（3.47）。

4. *z*域尺度变换特性

若：
$$Z[x(n)] = X(z), \qquad R_n < |z| < R_m$$
则：
$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad R_n < \left|\frac{z}{a}\right| < R_m \tag{3.65}$$

上式表明：***x*** **(*n*)**乘以指数序列 a^n，相应于***z***平面的尺度变化为（$\frac{z}{a}$）。还有下列类似的关系式：

$$Z[a^{-n} x(n)] = X(az) \qquad R_n < |az| < R_m \tag{3.66}$$

以及 $Z[(-1)^n x(n)] = X(-z) \qquad R_n < |z| < R_m$ **(3.67)**

例3.6 试求 $y(n) = e^{jn\omega_0}\varepsilon(n)$ 的**z**变换***Y*** **(*z*)**。

解：设 $a = e^{j\omega_0}$，则 $y(n) = a^n \varepsilon(n)$，而ε **(*n*)**的**z**变换

E (*z*)应为 $E(z) = \dfrac{z}{z-1}$

所以有

$$Y(z) = Z[y(n)] = E\left(\frac{z}{e^{j\omega_0}}\right) = \frac{(z/e^{j\omega_0})}{(z/e^{j\omega_0})-1} = \frac{z}{z-e^{j\omega_0}}$$

收敛域均为**| *z* | > 1**。

z域尺度变换特性

由这个例子可以看出：原序列**E (z)**的原极点为***z* =1**，而***Y* (z)**的极点，相当于原极点逆时针旋转了ω_0弧度。可以认为，当用乘以原序列时，其**z**变换的极点与原极点相比，幅值不变，相角增加了ω_0弧度，所以该特性也称为频移特性。

5. 时域卷积特性

若：　$Z[x(n)]=X(z) \quad R_{xn}<|z|<R_{xm}$

$Z[h(n)]=H(z) \quad R_{hn}<|z|<R_{hm}$

则：$Z[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$　　(3.68)

一般情况下，其收敛域为

$$\max(R_{xn},R_{hn})<|z|<\min(R_{xm},R_{hm})$$

若位于某一z变换收敛域的极点被另一z变换收敛域的零点抵消，则收敛域将扩大。

时域卷积特性

例3.7　试求两序列

$$x(n)=\varepsilon(n)\,,\,h(n)=a^n\varepsilon(n)-a^{n-1}\varepsilon(n-1)\,,\,a<1$$

的卷积。

解:

$$X(z)=Z[\varepsilon(n)]=H(z)=Z[a^n\varepsilon(n)-a^{n-1}\varepsilon(n-1)]=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-a}z^{-1}$$

$$=\frac{z-1}{z-a},\qquad |z|>|a|$$

由时移卷积特性可得

时域卷积特性

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z-a} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$y(n) = h(n) * x(n) = Z^{-1}[Y(z)] = a^n \varepsilon(n)$$

上述例子中，***X* (*z*)**的极点***z* = 1**，被***H* (*z*)**的零点所抵消，因此***Y* (*z*)**的收敛域将由***X* (*z*)**与***H* (*z*)**收敛域的重叠部分**| *z* | > 1**扩大为**| *z* | > *a***。如图**3.18**所示，图中的网格部分是***X* (*z*)**与***H* (*z*)**收敛域的重叠部分，单斜线部分为两序列卷积后收敛域的扩大部分。

时域卷积特性

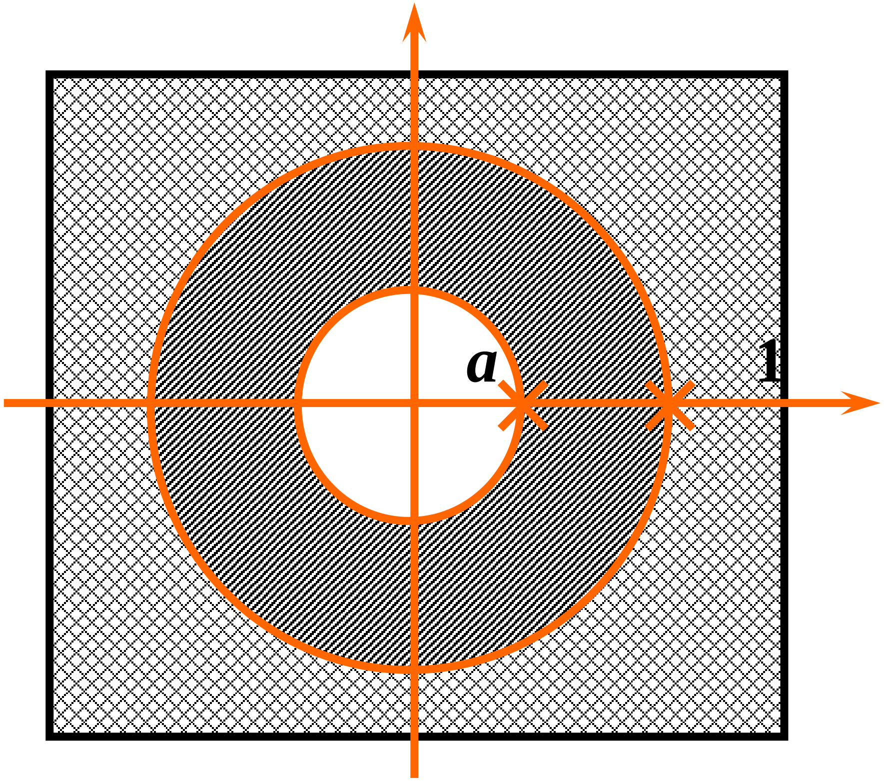


图3.18序列卷积的收敛域

3.4 z反变换定义

已知序列$x(n)$的z变换为$X(z)$，则由$X(z)$及其收敛域求出所对应序列的运算，称为z反变换，记作

$$x(n)=z^{-1}[X(z)]$$

z反变换通常有围线积分法（留数法）、幂级数展开法（长除法）和部分分式展开法等三种求解方法。还有简便的基本序列与其z变换对关系求解法。

例如，我们已经得到

$$Z\left[a^n\varepsilon(n)\right]=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

z反变换

如果要求以下z变换的反变换:

$$X(z)=\frac{z}{z-0.2} \qquad |z|>0.2$$

就可以直接得到序列:

$$x(n)=(0.2)^n\varepsilon(n)$$

还可以把序列的z变换分解为几项基本z变换的和，分别得出相应的 z反变换，再代数相加。

围线积分法

围线积分法是确定z反变换最基本的方法，由复变函数理论，可得到计算z反变换的围线积分公式。

若已知X (z)及其收敛域（参见图3.19），

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad R_n<|z|<R_m$$

将上式两端各乘以z^{m-1}，然后沿一围线C积分，积分路径C是一条在X (z)收敛域（R_n，R_m）以内，逆时针方向围绕原点一周的闭合曲线，通常选择z平面收敛域内以原点为中心的圆，如图3.19所示。

围线积分法

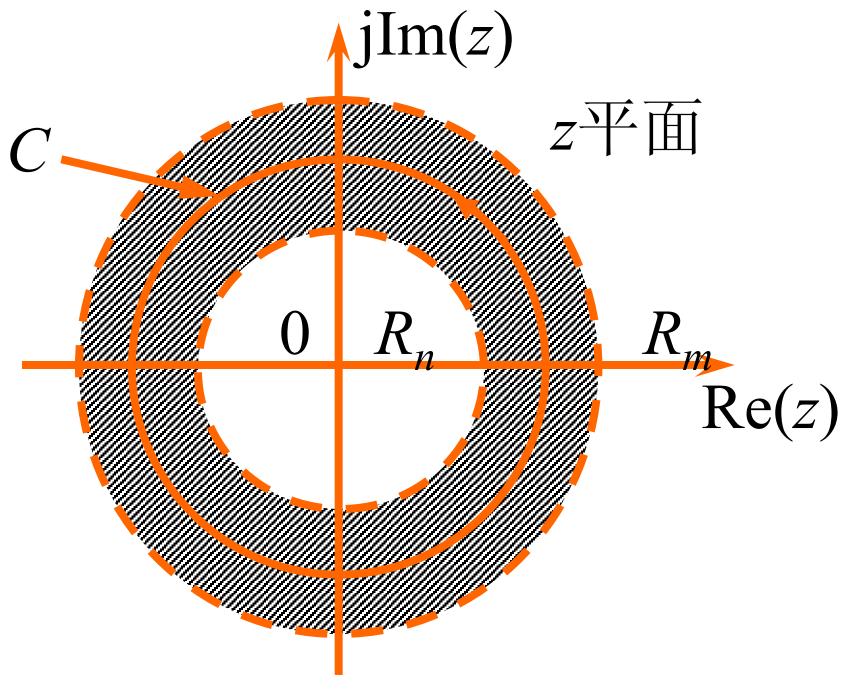


图3.19围线积分路径

围线积分表示为，可得 $\oint_C X(z)z^{m-1}\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\oint_C z^{m-n-1}\mathrm{d}z$

围线积分法

由复变函数中的柯西定理，有

$$\oint_C z^{k-1}\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{j} & (k=0)\\ 0 & (k\neq 0)\end{cases}$$

从而，式(3.69)的右端仅**m = n** 一项有值，其余各项都为零，式(3.69)变成

$$\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{j}x(n)$$

经整理最后可得:

$$x(n)=Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z,\ C\in(R_n,R_m) \qquad (3.70)$$

围线积分法

对于有理z变换来说，围线积分通常可用留数定理来计算，即

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z =\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]\big|_{z=z_m} \qquad (3.71)$$

上式中的**Res**表示极点的留数，z_m 为$X(z)$ 极点，该式说明$X(z)$的反变换序列 $x(n)$是$X(z)$ 在围线C内各极点的留数和。

围线积分法

$X(z)z^{n-1}$ 在$z = z_m$ 处有s阶极点，其留数可用下式计算

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]|_{z=z_m}$$

$$=\frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}z^{s-1}}[(z-z_m)^s X(z)z^{n-1}]\right\}_{z=z_m} \quad (3.72)$$

若为一阶极点，即s = 1，上式可简化为

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}=[(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (3.73)$$

围线积分法

在应用上述各式时，

1、注意收敛域内所包围的极点情况，以及对于不同的n值，在 $z = 0$处的极点可能具有不同的阶次。

2、留数法由于求解过程复杂，在离散非移变系统中并不常用。

同一个z变换的表达式，收敛域不同，对应的序列就不同，选择积分围线也不相同，应在相应的收敛域内（圆外、圆内或圆环域）选择。

幂级数展开法

3.4.2 幂级数展开法

由z变换的定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

若把已知的X (z)在给定的收敛域内展开成z的幂级数之和，则该级数的系数就是序列x (n)的对应项。

X (z)在一般多为有理分式，可表示为

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$$

通过长除法可将 X (z)展成幂级数形式

幂级数展开法

应注意：

在进行长除前，应先根据给定的收敛域是圆外域还是圆内域，确定$x(n)$是右边还是左边序列，才能明确$X(z)$是按z的降幂还是升幂排列来长除，右边序列按z的降幂（或z^{-1}的升幂），左边序列顺序则反之。

例3.8　求 $X(z)=\dfrac{z}{z-a},|z|>|a|$ 的z反变换。

幂级数展开法

解： 由于给定收敛域 $|z|>|a|$ 是圆外域，则 $x(n)$ 应是右序列，$X(z)$ 的分子分母应按 z 的降幂排列进行长除。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\cdots \\
\hline
z-a & z \\
 & \underline{z-a} \\
 & \quad a \\
 & \quad \underline{a-a^{2}z^{-1}} \\
 & \qquad a^{2}z^{-1} \\
 & \qquad \underline{a^{2}z^{-1}-a^{3}z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad a^{3}z^{-2} \\
 & \qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

幂级数展开法

长除后得 $X(z)=\dfrac{z}{z-a}=1+az^{-1}+a^{2}z^{-2}+\cdots$

因此 $x(n)=\{x(0),x(1),x(2),\cdots\}=\{1,a,a^{2},\cdots\}=a^{n}\varepsilon(n)$

例**3.9** 求 $X(z)=\dfrac{z}{z-a},|z|<|a|$ 的**z**反变换。

解:

由于给定收敛域 **| z | < | a |**是圆内域，则***x*** **(*n*)**应是左序列，***X*** **(z)**的分子分母应按**z**的升幂排列进行长除。

幂级数展开法

$$-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-a^{-3}z^{3}$$

$$-a+z\,\big|\,z$$

$$\underline{z-a^{-1}z^{2}}$$

$$a^{-1}z^{2}$$

$$\underline{a^{-1}z^{2}-a^{-2}z^{3}}$$

$$a^{-2}z^{3}$$

$$\underline{a^{-2}z^{3}-a^{-3}z^{4}}$$

$$a^{-3}z^{4}$$

$$\cdots$$

幂级数展开法

长除后得

$$X(z)=\frac{z}{z-a}=-a^{-1}z-a^{-2}z^{2}-a^{-3}z^{3}-\cdots$$

因此，最后可得 $x(n)=\{x(-1)\,,x(-2)\,,x(-3)\,,\cdots\}$

$$=\{-a^{-1}\,,-a^{-2}\,,-a^{-3}\,,\cdots\}$$

$$=-a^{n}\varepsilon(-n-1)$$

由上述两个例子也不难看出：同一X (z)，由于收敛域不同，对应不同的序列。

3.4.3 部分分式展开法

部分分式展开法是先将**X (z)**展成简单的部分分式之和，这些部分分式由于简单，可以直接或者通过查表获得各部分分式的反变换，然后相加即可得到序列**x (n)** 。

考虑到**z**变换的基本形式为 $\frac{z}{z-a}$，因此通常的做法是先对 $\frac{X(z)}{z}$展开，然后乘以**z**，就把**X (z)**展成了 $\frac{z}{z-a}$ 的基本形式，最后得到序列**x (n)** 。

如果 $\frac{X(z)}{z}$ 为有理真分式，并且只含一阶极点，$\frac{X(z)}{z}$ 可以展开为

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{z-z_m}$$

部分分式展开法

即 $X(z)=\sum_{m=1}^{k}\frac{A_m z}{z-z_m}$

(3.75)

式中，z_m是$\frac{X(z)}{z}$的极点，A_m是z_m的留数，即

$$A_m=\mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}=\left[(z-z_m)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_m}$$

(3.76)

如果中除含有***M***个一阶极点外，在***z = zi*** 处还含有一个**s**阶高阶极点，则应展成

$$\frac{X(z)}{z}=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j}{(z-z_i)^j}$$

（3.77）

部分分式展开法

即
$$X(z)=\sum_{m=1}^{M}\frac{A_m z}{z-z_m}+\sum_{j=1}^{s}\frac{B_j z}{(z-z_i)^j}\qquad\textbf{(3.78)}$$

式中，A_m与上同，B_j 则为

$$B_j=\frac{1}{(s-j)!}\left[\frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}}(z-z_i)^s\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_i}\qquad\textbf{(3.79)}$$

当展成部分分式之后，可以得到各部分分式的反变换，相加即可得到***x*** **(*n*)**。

部分分式展开法

例3.10 求 $\frac{X(z)}{z}=\frac{5z^3-8z^2+4}{z(z-1)(z-2)^2}$ 对应的序列。

解:

由 $\frac{X(z)}{z}=\frac{5z^3-8z^2+4}{z(z-1)(z-2)^2}$ 可知:

在 $\frac{X(z)}{z}$ 中，有两个一阶极点 $z_1=0$，$z_2=1$，

有一个二阶极点 $z_i=2$，根据式 **(3.77)**可以展成

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{B_1}{z-2}+\frac{B_2}{(z-2)^2}$$

部分分式展开法

对一阶极点，按式(3.76)可得

$$A_1 = \mathrm{Res}\left[z\frac{X(z)}{z} \right]_{z=0} = -1$$

$$A_2 = \mathrm{Res}\left[(z-1)\frac{X(z)}{z} \right]_{z=1} = 1$$

对二阶极点，按式(3.79)可得

$$B_1 = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{dz}(z-2)^2 \cdot \frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = 5$$

$$B_2 = \left[(z-2)^2 \cdot \frac{X(z)}{z} \right]_{z=2} = 6$$

部分分式展开法

可得 $X(z)=-1+\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{5z}{z-2}+\dfrac{6z}{(z-2)^2}$

由于收敛域为 **| z | >2**，序列应为因果序列，查表**3.2**可得

$$x(n)=-\delta(n)+\varepsilon(n)+5\cdot 2^n\varepsilon(n)+6n2^{n-1}\varepsilon(n)$$
$$=\varepsilon(n-1)+5\cdot 2^n\varepsilon(n)+3n2^n\varepsilon(n)$$

若给定的收敛域是圆内域或圆环域，则其反变换对应的是左序列或双边序列，同样可用部分分式法来处理，但必须清楚哪些极点对应左序列，哪些极点对应右序列。