北京航空航天大学高等理工学院

2016-2017学年第一学期期中

《数学分析（III）》

试卷

班级_______________学号_______________.

姓名_______________成绩_______________.

参考答案及评分标准.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

每页反面作为草稿纸

注意事项：本试卷共8大题，卷面满分为100分．请在各题题目后书写解答.

2016年11月12日

一、(10分)计算

(1)设$f(x,y)$在(x_0,y_0)点可微, 在单位向量$\vec{a}=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\vec{b}=(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$上的方向导数分别为$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial a}=-2$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial b}=1$, 计算$df(x_0,y_0)$.

(2)求函数$u=x^2+y^2-xyz$在点$(1,1,1)$沿梯度方向的方向导数.

① 记 $A=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$, $B=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$. 则 $\nabla f(x_0,y_0)=(A,B)$. 据题意.

$$\begin{cases}\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{a}=-2\\ \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{b}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{A}{\sqrt{2}}-\frac{B}{\sqrt{2}}=-2\\ -\frac{A}{\sqrt{5}}+\frac{2B}{\sqrt{5}}=1\end{cases},\quad \begin{cases}A-B=-2\sqrt{2}\\ -A+2B=\sqrt{5}\end{cases},\quad B=\sqrt{5}-2\sqrt{2},\ A=B-2\sqrt{2}=\sqrt{5}-4\sqrt{2}.$$ 2分 2分

$\therefore df(x_0,y_0)=A\,dx+B\,dy=(\sqrt{5}-4\sqrt{2})\,dx+(\sqrt{5}-2\sqrt{2})\,dy$. 2分

② $u=x^2+y^2-xyz$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\left.(2x-yz)\right|_{(1,1,1)}=1$,

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\left.(2y-xz)\right|_{(1,1,1)}=1$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=\left.-xy\right|_{(1,1,1)}=-1$.

$\therefore \left.\nabla u\right|_{(1,1,1)}=(1,1,-1)$. 记 $\vec{n}=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, 则

$\frac{\partial u}{\partial n}=|\nabla u|=\sqrt{3}$. 4分

二、(10分)设$F(s,t), G(s,t)$可微，且$\begin{cases} F(y-x, y-z)=0 \\ G(xy, \frac{z}{y})=0 \end{cases}$ 决定$x = x(y)$, $z = z(y)$, 计算$\frac{dx}{dy}$, $\frac{dz}{dy}$.

$$F_1'(dy-dx)+F_2'(dy-dz)=0,$$

$$F_1'dx+F_2'dz=(F_1'+F_2')dy$$

$$G_1'(xdy+ydx)+G_2'\frac{ydz-zdy}{y^2}=0,$$

$$xy^2G_1'dy+y^3G_1'dx+yG_2'dz-zG_2'dy=0,$$

也可以 $\boxed{\begin{cases} F_1'(1-\frac{dx}{dy})+F_2'(1-\frac{dz}{dy})=0 \\ G_1'(x+y\frac{dx}{dy})+G_2'(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{dz}{dy})=0 \end{cases}}$

主体

……

$$\boxed{\begin{cases} F_1'dx+F_2'dz=(F_1'+F_2')dy \\ y^3G_1'dx+yG_2'dz=(zG_2'-xy^2G_1')dy \end{cases}}$$ 主体 ,

$$\begin{vmatrix} F_1' & F_2' \\ y^3G_1' & yG_2' \end{vmatrix} = yF_1'G_2'-y^3F_2'G_1'$$

$$\begin{vmatrix} F_1'+F_2' & F_2' \\ zG_2'-xy^2G_1' & yG_2' \end{vmatrix} = yF_1'G_2'+\underline{yG_2'F_2'-zF_2'G_2'}+xy^2F_2'G_1' = yF_1'G_2'+xy^2F_2'G_1'+(y-z)F_2'G_2'.$$

$$\begin{vmatrix} F_1' & F_1'+F_2' \\ y^3G_1' & zG_2'-xy^2G_1' \end{vmatrix} = zF_1'G_2'-\underline{xy^2F_1'G_1'-y^3F_1'G_1'}-y^3F_2'G_1' = zF_1'G_2'-y^3F_2'G_1'+y^2(x-y)F_1'G_1'.$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=\frac{yF_1'G_2'+xy^2F_2'G_1'+(y-z)F_2'G_2'}{yF_1'G_2'-y^3F_2'G_1'};\quad \frac{dz}{dy}=\frac{zF_1'G_2'-y^3F_2'G_1'+y^2(x-y)F_1'G_1'}{yF_1'G_1'-y^3F_2'G_1'}.$$

只要主体方程组写对，其他计算错误扣小分.

三、(15分)设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，研究$f(x,y)$在$(0,0)$点的连续性、偏导数的存在性、以及函数的可微性.

设 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$. $\because \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right| \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{2\rho^3}{\rho^2}=2\rho$.

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$ 5分 $\therefore f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处连续.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x^2}{x}=\lim_{x\to0}\sin x^2=0.$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{y\sin y^2}{y}=\lim_{y\to0}\sin y^2=0$$

5分

$$\because f(x,y)-f(0,0)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)=\frac{\rho^3(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}{\rho^2}\sin\rho^2=\rho\sin\rho^2[\sin^3\theta+\cos^3\theta].$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y=0,$$

$$\therefore \delta=f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y=\rho\sin\rho^2[\sin^3\theta+\cos^3\theta]$$

5分

$\because \lim\limits_{\rho\to0}\frac{\delta}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\sin\rho^2[\sin^3\theta+\cos^3\theta]=0$，即 $\delta=o(\rho)$，$(\rho\to0)$

$\therefore f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处可微.

四、(15分)设$z=\int_x^y e^{-(x^2+y^2+t^2)}dt$, 计算$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$z = e^{-x^2-y^2}\int_x^y e^{-t^2}dt.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2xz + e^{-x^2-y^2}\cdot(-e^{-x^2}) = -2xz - e^{-2x^2-y^2},$$ 3分

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2yz + e^{-x^2-y^2}\cdot(e^{-y^2}) = -2yz + e^{-x^2-2y^2},$$ 3分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2z - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - e^{-2x^2-y^2}(-4x) = -2z - 2x\left[-2xz - e^{-2x^2-y^2}\right] + 4xe^{-2x^2-y^2}$$

$$= (4x^2-2)z + 2xe^{-2x^2-y^2} + 4xe^{-2x^2-y^2} = (4x^2-2)z + 6xe^{-2x^2-y^2}.$$ 3分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2x\frac{\partial z}{\partial y} - e^{-2x^2-y^2}(-2y) = -2x\left[-2yz + e^{-x^2-2y^2}\right] + 2ye^{-2x^2-y^2}$$

$$= 4xyz - 2xe^{-x^2-2y^2} + 2ye^{-2x^2-y^2}.$$ 3分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2z - 2y\frac{\partial z}{\partial y} + e^{-x^2-2y^2}\cdot(-4y) = -2z - 2y\left[-2yz + e^{-x^2-2y^2}\right] - 4ye^{-x^2-2y^2}$$

$$= (4y^2-2)z - 2(z+2y)e^{-x^2-2y^2}.$$ 3分

过程正确，计算错误扣小分.

五、(15分)

(1)请构造一个二元函数使得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$存在而$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都不存在.

(2)请构造一个二元函数使得$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 和$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 都存在, 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

(3)有没有可能$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$都存在但不相等? 若可能, 给出一个例子.

① $f(x,y)=(x+y)\left(\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}\right)$

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在 $\therefore \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在, 同理 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在

但是 $0\le |f(x,y)|\le 2(|x|+|y|)$, $\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

② $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$; $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$

但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 k,

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

③ 不可能. 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 若都存在, 必相等

各5分. 举例可多种形式.

③可不说明原因.

六、(10分)确定函数$f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$在区域$x^2+y^2\le 25$上的最大值和最小值.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2x-12=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+16=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=6 \\ y_0=-8 \end{cases}$$

可微函数

$(6,-8)$是$f(x,y)$的唯一驻点，

但$(6,-8)\notin D=\{x^2+y^2\le 25\}$.

所以，$f(x,y)$于D上的的最大最小值只在边界上达到. 2分

现求$f(x,y)$在约束$x^2+y^2=25$下的条件极值.

令$F(x,y,\lambda)=(x^2+y^2-12x+16y)+\lambda(x^2+y^2-25)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=2x-12+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y+16+2\lambda y=0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-25=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x_0=\frac{6}{1+\lambda} \\ y_0=\frac{-8}{1+\lambda} \end{cases},\quad \begin{cases} x_1=3, \\ y_1=-4, \end{cases} \begin{cases} x_2=-3 \\ y_2=4 \end{cases}$$

$\frac{36+64}{(1+\lambda)^2}=25$, $\Rightarrow (1+\lambda)^2=4$, $1+\lambda=\pm 2$, $\lambda_1=1, \lambda_2=-3$

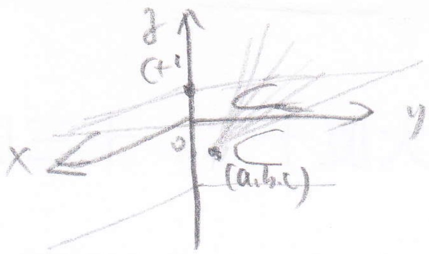
~~$\lambda=1$时，于$f(x,y)$~~ $\because A=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2(1+\lambda)$, $B=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0$, $C=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2(1+\lambda)$.

$\lambda=1$时，$A=4, B=0, C=4$, $AC-B^2>0$, $A>0$ $\therefore f(3,-4)$极小$=9+16-36-64=-75$

$\lambda=-3$时，$A=-4, B=0, C=-4$, $AC-B^2>0$, $A<0$ $\therefore f(-3,4)$极大$=9+16+36+64=125$

所以，$f(x,y)$于D上的最大值为125，最小值为-75. 各4分

没有比较，只说问题有最大最小值，计算两个值后直接说最大最小值的，扣分≤ 2.



七、(15分)设$f(x,y)$可微, $a,b,c\in\mathbb{R}$, 证明曲面$f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任意一点的切平面都通过一定点, 并给出此定点坐标. 进一步, 给出本题结果的几何解释.

$\Sigma: f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$, $\vec{n}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1'\frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=f_2'\frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial f}{\partial z}=f_1'\frac{-(x-a)}{(z-c)^2}+f_2'\frac{-(y-b)}{(z-c)^2}$.

$\forall (x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 此点法向量为

$$\vec{n}=\left(\frac{f_1'}{z_0-c},\frac{f_2'}{z_0-c},\frac{-(x_0-a)}{(z_0-c)^2}f_1'+\frac{-(y_0-b)}{(z_0-c)^2}f_2'\right)$$

∴切平面方程为 $(x-x_0)\frac{f_1'}{z_0-c}+(y-y_0)\frac{f_2'}{z_0-c}+(z-z_0)\left[\frac{-(x_0-a)}{(z_0-c)^2}f_1'+\frac{-(y_0-b)}{(z_0-c)^2}f_2'\right]=0$.

显见点(a,b,c)满足上方程, 即Σ上各点的切平面均过点(a,b,c). 10分

几何解释：

下述解释只要有意义的, 酌情给分.

曲面Σ是由平面曲线 $C: f(x,y)=0$ 演化而来.

① $\forall (x_0,y_0)\in C$, 即 $f(x_0,y_0)=0$, 则直线 $l: \frac{x-a}{z-c}=x_0, \frac{y-b}{z-c}=y_0$ 属于Σ.

而直线l的方程为 $\frac{x-a}{x_0}=\frac{y-b}{y_0}=\frac{z-c}{1}$, 即过(a,b,c)点以$(x_0,y_0,1)$为方向的直线.

∴ $\forall (x_0,y_0)\in C$, 则过定点(a,b,c)的直线 $l\in\Sigma$.

② $\forall (x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则它必在某条(过定点(a,b,c))的直线$l$上.

事实上, $(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma\Rightarrow f(\frac{x_0-a}{z_0-c},\frac{y_0-b}{z_0-c})=0 \Rightarrow \exists (x_1,y_1)\in C$ s.t. $\frac{x_0-a}{z_0-c}=x_1$, $\frac{y_0-b}{z_0-c}=y_1$, 即(x_0,y_0,z_0)在直线 $l: \frac{x-a}{x_1}=\frac{y-b}{y_1}=\frac{z-c}{1}$上.

综上两点, 曲面Σ是一个锥面, 此锥面以点(a,b,c)为其尖点.

(注意Σ在(a,b,c)点没有定义), 所以Σ的所有切平面都过点(a,b,c).

八、(10分)

(1) 设$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 请解释: 在计算$n$元函数$y=f(\vec{x})$在约束条件
$\begin{cases}\varphi_1(\vec{x})=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi_m(\vec{x})=0\end{cases}$ $(m<n)$下的极值时, 为什么要求$rank(\dfrac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)})=m$.

(2) 设$\vec{x}_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)^T$, $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 若对二次连续可微函数$f(\vec{x})$有$\nabla f(\vec{x}_0)=0$, 且Hessian矩阵$H_f(\vec{x}_0)$半正定, 是否可以确定$f(\vec{x}_0)$为极小值? 若可以, 证明你的结论; 若不可以, 请举例说明你的结论.

① $J=\dfrac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\cdots x_n)}=\begin{pmatrix}\nabla\varphi_1\\ \vdots\\ \nabla\varphi_m\end{pmatrix}$. 如果 rank(J)<m. 则 $\exists\, i,j,k$ s.t.

$\nabla\varphi_i=k\nabla\varphi_j$, $i\neq j$, $1\le i,j\le m$. 即 $\nabla(\varphi_i-k\varphi_j)=0$,

$\varphi_i-k\varphi_j=C$, 但 $\varphi_i=0$. $\varphi_j=0$ ∴ $C=0$ ∴ $\varphi_i(\vec{x})=k\varphi_j(\vec{x})$. k为常数

即 约束条件中有两个是成比例的, 是重复约束, 可以舍去. 从而假定 rank(J)=m.

② 对 $f(\vec{x})$, $\nabla f(\vec{x}_0)=0$, $H_f(\vec{x}_0)$半正定时. 无法确定 它是否为极值点. 比如.

$f(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$, $g(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^4$.

都以(0,0)为驻点, 且 H_f, H_g 都在(0,0)半正定, 但是

$f(0,0)$ 不是极值 (原点附近 $x+y$ 可正可负).

$g(0,0)$ 是极小值. ($g(x,y)\geq 0$).

—试题结束— 试题结束—试题结束—

各5分. ① 说得不准确的. 酌情给分.

② 举例不当的, 扣分 ≤ 2.

回答正确,