



第八章 轴向拉伸与压缩

§ 8-8 简单拉压静不定问题

§ 8-9 连接部分的强度计算

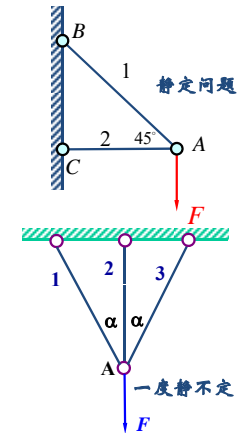


§ 8-8 简单拉压静不定问题

***静定问题：**由静力平衡方程可确定全部未知力(包括支反力与内力)的问题。

***静不定问题：**根据静力平衡方程不能确定全部未知力的问题。

***静不定度：**未知力数与有效平衡方程数之差。



2



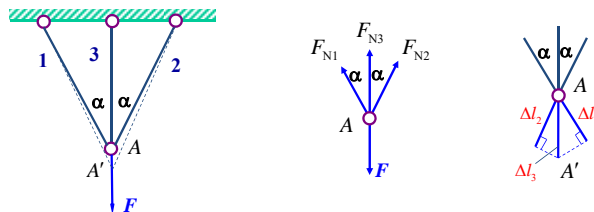
静不定问题求解思路

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{平衡方程} \quad f_i(F_{N1}, F_{N2}, \dots) = 0 \\ \text{协调方程} \quad g_i(\Delta l_1, \Delta l_2, \dots) = 0 \end{array} \right\} \text{求解}$$

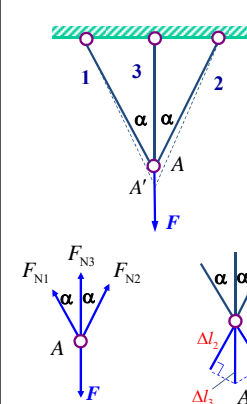
物理方程: $\Delta l_k \propto F_{Nk}$

$$g_i(\Delta l_1, \Delta l_2, \dots) = 0 \Rightarrow g_i(F_{N1}, F_{N2}, \dots) = 0$$

赘余反力数=协调条件数



3



解: 1、平衡方程

$$F_{N2} \sin \alpha - F_{N1} \sin \alpha = 0$$

$$F_{N1} \cos \alpha + F_{N2} \cos \alpha + F_{N3} - F = 0$$

2、变形协调方程

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$$

3、胡克定律

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1} l_1}{E_1 A_1} \quad \Delta l_3 = \frac{F_{N3} l_1 \cos \alpha}{E_3 A_3}$$

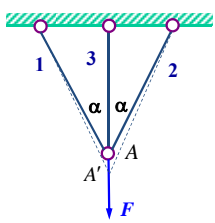
4、补充方程

$$F_{N1} = \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^2 \alpha F_{N3}$$

4

工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

5、联立求解平衡方程及补充方程



$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{F \cos^2 \alpha}{\frac{E_3 A_3}{E_1 A_1} + 2 \cos^3 \alpha}$$

$$F_{N3} = \frac{F}{1 + 2 \frac{E_1 A_1}{E_3 A_3} \cos^3 \alpha}$$

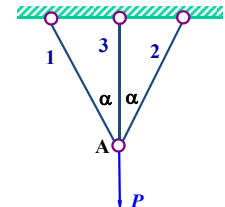
注意:

- 1、静不定问题需综合考虑静力学、几何与物理三方面;
- 2、静不定结构内力特点: 内力分配与杆件刚度有关, 某杆刚度增大, 轴力亦增大。

5

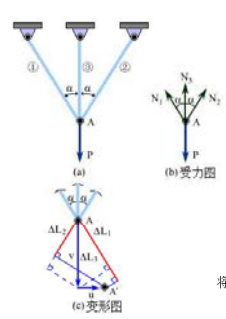
工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

设杆2、3的抗拉刚度为EA, 杆1的抗拉刚度为2EA, 求各杆内力



工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

设杆2、3的抗拉刚度为EA, 杆1的抗拉刚度为2EA, 求各杆内力



•平衡方程

$$\sum x = 0 \quad N_1 = N_2 \quad (1)$$

$$\sum y = 0 \quad (N_1 + N_2) \cos \alpha + N_3 = P \quad (2)$$

•变形协调方程:

利用节点垂直位移v和水平位移u与各杆变形之间的关系

$$\Delta L_3 = v; \quad \Delta L_2 = v \cos \alpha - u \sin \alpha;$$

$$\Delta L_1 = v \cos \alpha + u \sin \alpha$$

$$\longrightarrow \Delta L_1 + \Delta L_2 = 2 \Delta L_3 \cos \alpha \quad (3)$$

•补充方程 (物理方程)

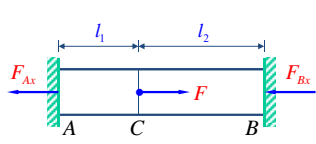
将 $\Delta L_1 = \frac{N_1 L}{2EA}$, $\Delta L_2 = \frac{N_2 L}{2EA \cos \alpha}$, $\Delta L_3 = \frac{N_3 L}{EA}$ 代入上式, 得

$$N_1 + 2N_2 = 4N_3 \cos^2 \alpha \quad (4)$$

$$N_1 = N_2 = \frac{4 \cos^2 \alpha}{3 + 8 \cos^2 \alpha} P; \quad N_3 = \frac{3}{3 + 8 \cos^2 \alpha} P$$

工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

例: 求杆两端的支反力。



解1: 1、静力学方面

$$F - F_{Ax} - F_{Bx} = 0$$

2、几何方面

$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0$$

3、物理方面

$$\Delta l_{AC} = \frac{F_{Ax} l_1}{EA}, \quad \Delta l_{CB} = -\frac{F_{Bx} l_2}{EA}$$

4、支反力计算

补充方程: $F_{Ax} l_1 - F_{Bx} l_2 = 0$

$$F_{Ax} = \frac{F l_2}{l_1 + l_2} \quad F_{Bx} = \frac{F l_1}{l_1 + l_2}$$

问题: $F_{Ax} = F_{Bx} = \frac{F}{2}$?

何条件下上式成立?

8

工程力学 一四课

例：求B端的支反力。

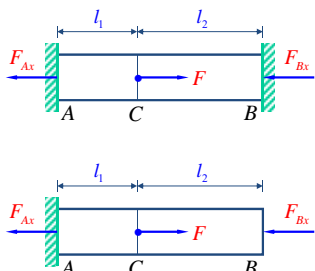
解2：1、几何方面 $\Delta_B = 0$

2、物理方面 $\Delta_B = \frac{Fl_1}{EA} - \frac{F_{Bx}(l_1+l_2)}{EA}$

3、求解 $F_{Bx} = \frac{Fl_1}{l_1+l_2}$

4、由平衡方程 $F_{Ax} = \frac{Fl_2}{l_1+l_2}$

— 基于各段变形叠加法



工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

上次课内容

拉压杆胡克定律：

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

EA 为拉压刚度， Δl 伸长为正，缩短为负

$$\Delta l = \int_l \frac{F_N(x)}{EA(x)} dx \quad (\text{变截面杆 变轴力杆}), \quad \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i} \quad \text{阶梯形杆}$$

拉压杆横向变形与泊松比：

$$\mu = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} \quad (0 \leq \mu \leq 0.5),$$

叠加原理及其应用范围：线弹性、小变形、几何线性

工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

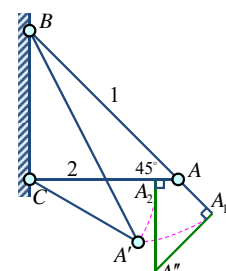
小变形问题实用（工程）解法

实用解法：

- *按结构原几何形状与尺寸计算约束反力与内力—小变形；
- *节点运动轨迹采用切线代曲线的方法确定节点位移。

工程分析方法：

- 1、精度略有降低；
- 2、分析极大简化。



工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

静不定问题求解思路

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{平衡方程} \quad f_i(F_{N1}, F_{N2}, \dots) = 0 \\ \text{协调方程} \quad g_i(\Delta l_1, \Delta l_2, \dots) = 0 \end{array} \right\} \text{求解}$$

物理方程： $\Delta l_k \propto F_{Nk}$

赘余反力数=协调条件数

- 1、画变形图，确定变形协调条件
- 2、根据变形图画受力图。

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

例：各杆拉压刚度 EA ，杆1, 2 长 l ，求各杆内力

解：1、画变形图，确定变形协调条件

设节点 C 位移至 C' ，过 C' 点向三杆作垂线

2、根据变形图画受力图，假设各杆均受拉。

13

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

解：1、平衡方程

$$-F_{N1} + F_{N3} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{N2} - F_{N3} \cos 45^\circ - F = 0$$

2、变形协调方程

$$\Delta l_2 - \Delta l_1 = \sqrt{2} \Delta l_3$$

3、物理方程

$$\Delta l_i = \frac{F_{Ni} l_i}{EA}$$

14

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

4、解答

$$F_{N1} = \frac{(\sqrt{2}-1)F}{2} \quad F_{N2} = \frac{(3-\sqrt{2})F}{2}$$

$$F_{N3} = \frac{(2-\sqrt{2})F}{2}$$

5、强度校核

(设 $A = 200 \text{ mm}^2, F = 40 \text{ kN}, [\sigma] = 160 \text{ MPa}$)

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A} = 158.6 \text{ MPa} \leq [\sigma] \quad \text{符合强度要求}$$

能否根据此计算结果对A1、A2、A3分别设计？

15

工程力学 一四 题

比较变形图画法

(画法1：先画受力图，再定变形正负，找交点。)

(画法2：设节点 C 位移至 C' ，过 C' 点向三杆作垂线再根据变形图画受力图，假设各杆均受拉。)

思考：总结画受力画变形图注意事项。

16

工程力学 一四课

先画变形图，再画受力图，注意两者协调

关于变形图的画法

- 若能直接判断出真实变形趋势，则按此趋势画变形图；
- 若不能直接判断出真实变形趋势，则画出任意可能变形图均可。
- 对于不能判断出真实变形趋势的情况，一般可假设各杆均产生拉伸变形，即内力为正（设正法）。若计算结果为负，则说明真实方向与所设方向相反。

17

工程力学 一四课

例：求各杆的轴力。

原则上可画出任意可能的变形图，但必须确保内力方向与变形方向一致。

18

工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

例：钢丝绳(l, A, E)不能承压，初拉力 $F_{N0} = 20\text{kN}$, $F = 30\text{kN}$ ，求绳拉力。(a) $H = 3l/4$, (b), $H = l/4$ 。

问题：如何建立变形协调条件？下述变形协调条件是否正确？

$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0$$

分析：上述变形协调条件的错误在于遗漏了初应力。正确的变形协调条件是：

$$\text{当 } F_{NCB} > 0, \quad \Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = \Delta l_0 = \frac{F_{N0}l}{EA}$$

思考：如果求得 $F_{NCB} < 0$ ，如何处理？

19

工程力学 一第八章 轴向拉伸与压缩

例：钢丝绳(l, A, E)不能承压，初拉力 $F_{N0} = 20\text{kN}$, $F = 30\text{kN}$ ，求绳拉力。(a) $H = 3l/4$, (b), $H = l/4$ 。

解：(1) 变形协调条件

$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = \Delta l_0 = \frac{F_{N0}l}{EA}$$

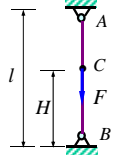
设 $H = \alpha l$ 代入物理方程

$$\frac{F_A(1-\alpha)l}{EA} + \frac{F_B\alpha l}{EA} = \frac{F_{N0}l}{EA}$$

$$F_A(1-\alpha) + F_B\alpha = F_{N0}$$

20


工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩



$$F_A(1-\alpha) + F_B\alpha = F_{N0}$$

(2) 平衡方程 $F_A - F_B = F$
 $\therefore F_A = F_{N0} + \alpha F$
 $F_B = F_{N0} - (1-\alpha)F$

(3) 解答: (a) $\alpha = 3/4$
 $F_A = 42.5\text{kN}, F_B = 12.5\text{kN}$
 (b) $\alpha = 1/4$
 $F_A = 27.5\text{kN}, F_B = -2.5\text{kN}$ (不合题意, 舍去)
 $F_B = 0$, 由平衡: $F_A = 30\text{kN}$



21

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

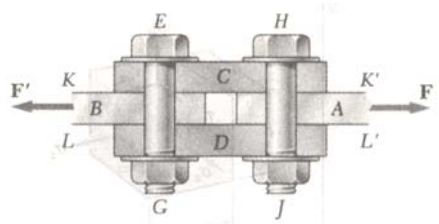
§ 8-9 连接部分的强度计算

一、工程实例



22

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

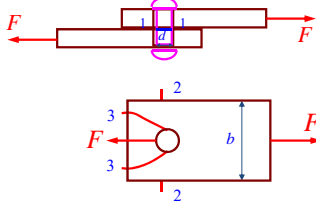


分析方法: 连接件受力与变形一般很复杂, 精确分析困难、不实用, 通常采用简化分析法。实践表明, 只要简化合理, 有充分实验依据, 在工程中是实用有效的。—实用计算法

23

工程力学 第八章 轴向拉伸与压缩

二、连接件破坏形式分析



- 剪断(1-1截面)
- 拉断(2-2截面), 按拉压杆强度条件计算
- 剪断(3-3截面), 边距大于孔径2倍可避免
- 挤压破坏(连接件接触面)

本节主要讨论1-1截面的剪断与连接件接触面间挤压破坏的假定计算法。

24



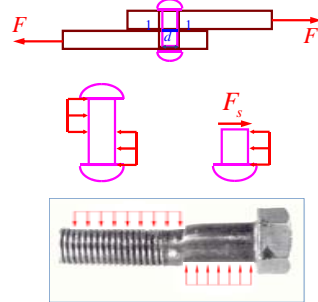
三、剪切与剪切强度条件

- 假定剪切面上的切应力均匀分布

$$\tau = \frac{F_s}{A}$$

- 剪切强度条件

$$\frac{F_s}{A} \leq [\tau]$$



剪切失效例子

25



四、挤压与挤压强度条件

1. 挤压失效实例



26



2. 挤压强度条件:

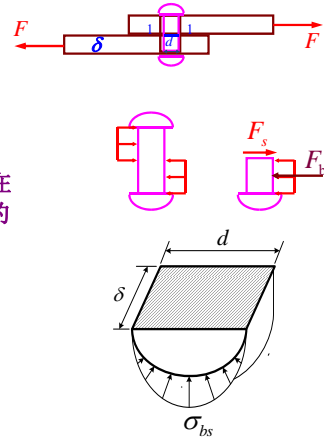
挤压应力 $\sigma_{bs} \approx \frac{F_b}{\delta d}$

其中: F_b —— 挤压力;

$A_b = \delta l$ —— 受压圆柱面在相应径向平面上的投影面积;

挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{F_b}{A_{bs}} = \frac{F_b}{\delta d} \leq [\sigma_{bs}]$$



27



对工程应用的两点注释

双剪

钉剪切力 $F_s = F/2$

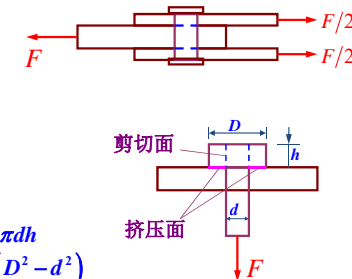
外板挤压力 $F_b = F/2$

里板挤压力 $F_b = F$

钉拉断

剪切面: 圆柱面 $A = \pi dh$

挤压面: 圆环 $A_{bs} = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$



28

工程力学 一 第八章 轴向拉伸与压缩

第八章 轴向拉伸与压缩 小结

- § 8-2 轴力与轴力图
- § 8-3 拉压杆的应力与圣维南原理
- § 8-4 材料拉伸时的力学性能
- § 8-5 应力集中的概念
- § 8-6 许用应力与强度条件
- § 8-7 胡克定律与拉压杆的变形
- § 8-8 简单拉压静不定问题
- § 8-9 连接部分的强度计算

29

工程力学 一 第八章 轴向拉伸与压缩

第八章 轴向拉伸与压缩 小结

- § 8-2 轴力与轴力图 ——画法
- § 8-3 拉压杆的应力与圣维南原理
- § 8-4 材料拉伸时的力学性能
- § 8-5 应力集中的概念
- § 8-6 许用应力与强度条件
- § 8-7 胡克定律与拉压杆的变形 $\sigma = E\varepsilon$
- § 8-8 简单拉压静不定问题 ——变形图
- § 8-9 连接部分的强度计算

30

工程力学 一 回顾

材料力学应力分析的基本方法:

31

工程力学 一 第八章 轴向拉伸与压缩

作业

8- 18, 24, 26(b), 30

32