

第四章

离散时间信号分析

内容提要

- 序列的傅里叶变换 (DTFT)
- 拉氏变换、傅氏变换与 z 变换之间的关系
- 离散傅里叶级数 (DFS)
- 离散傅里叶变换 (DFT)
- 快速傅里叶变换 (FFT)
- 快速傅里叶变换的应用

离散时间信号分析

- 离散时间傅里叶变换 **DTFT**
 - 与连续时间傅里叶变换的关系
 - 性质
- 离散傅里叶变换 **DFT**
 - 定义
 - 性质
- 离散傅里叶变换的快速算法 **FFT**
 - 原理
 - 流程
 - 应用

离散时间信号的傅里叶分析

- 实际信号的特点：
 - 时域：
 - 连续时间信号； 持续时间较长
 - 频域：
 - 频谱是连续的
- 数字处理设备（计算机）的特点：
 - 存储空间有限 --- 只能存储有限多的数据
 - 离散的时间点
 - 有限长的时间范围
 - 表示空间有限 --- 只能表示有限多的数值
 - 取值在一定精度内
 - 取值在一定范围内

要解决的问题（面临的矛盾） 1

- 在时域如何对信号进行离散化？

要求保证信号的信息不受损！

- 信息不受损 == 可以恢复原信号
- 理论问题已在第二章解决
- 乘以冲激串信号，进行时域抽样
- 要求抽样过程满足抽样定理
- 信号频带有限，抽样频率是信号最高频率的两倍

矛盾1已基本解决

要解决的问题（面临的矛盾） 2

- 如何用抽样信号的频谱来恢复原信号的频谱？
 - 抽样信号频谱与原信号频谱是什么关系？
 - 理论上如何恢复？
 - 工程实践上如何实现？

要解决的问题（面临的矛盾） 3

- 抽样信号的频谱如何计算？
 - 得到抽样信号后，如何计算其频谱？
 - 输入：抽样信号（序列）
 - 输出：抽样信号的频谱
- 在工程上，计算机接受的输入是一系列数值

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 |
|----|----|----|----|----|----|

要解决的问题（面临的矛盾） 4

- 信号被截短时，频谱发生什么变化？
 - 有时信号持续时间超出处理能力
 - 时域信号需要被截断
 - 截断会不会影响对信号的分析？
 - 截断对信号的频谱有何影响？

要解决的问题（面临的矛盾） 5

- 有限长离散信号频谱的存储与计算
 - 频谱是连续周期的
 - 1. 只能存储有限长的频谱
 - 一个周期即可
 - 2. 只能存储有限多的频谱
 - 离散频率点处的频谱值
 - 离散频率点谱值的计算
 - 法一：先有连续谱，后有离散谱值（频域采样）
 - 法二：直接用时间抽样值计算离散谱值（公式）？

要解决的问题（面临的矛盾）6、7

- 如何由频谱恢复抽样信号？
 - 离散频谱值是有限的
 - 恢复抽样信号的计算公式
- 如何编程实现（如何进行快速计算）
 - 按定义实现 --- 计算量太大
 - 由离散信号计算离散频谱
 - 由离散频谱恢复离散信号

学习方法

❖ 从工程需要出发，理解信号频谱分析的实际问题。
即

❖ 在实践中领悟处理原理的意义

❖ 从解决问题出发，理解各种信号处理方法的目的是。
即

❖ 在矛盾中思考工程实现的背景

在解决的问题过程中感受知识的力量、体会学习的快乐

4.1 序列的傅里叶变换

1. 定义

$x(n)$ 的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

如果 $X(z)$ 在单位圆上是收敛的，则把在单位圆上的 z 变换定义为序列的傅里叶变换，表示为

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (4.1)$$

4.1 序列的傅里叶变换

相对应序列的傅里叶反变换，由 z 反变换的围线积分公式

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

若把积分围线 C 取在单位圆上，则有

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{z=e^{j\omega}} X(e^{j\omega}) (e^{jn\omega} e^{-j\omega}) d(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1 序列的傅里叶变换

2. 物理意义

把序列的傅里叶变换称作非周期序列的频谱，
为什么把序列的傅里叶变换和序列的频谱联系在一起？

→ 可以与连续信号的傅里叶变换进行对比进行分析。

已知连续信号的傅里叶变换为

$$F(\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

4.1 序列的傅里叶变换

$F(\Omega)$ 有频谱密度的意义，是频谱的概念，
在式 (4.1) 中， $X(e^{j\omega})$ 是序列的傅里叶变换，
与 $F(\Omega)$ 在连续信号傅里叶变换的表达式中一样起着
相同的作用，所以看作是序列的频谱。

$f(t)$ 和 $x(n)$ 的两个表达式都具有叠加重构（综合）时
域信号即傅里叶反变换的作用，
因此把式 (4.2) 称为序列的傅里叶反变换。

4.1 序列的傅里叶变换

将式 (4.1) 和 (4.2) 重写并表示为

$$\mathcal{F}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega} d\omega \quad (4.4)$$

4.1 序列的傅里叶变换

3. 特点

由式 (4.3) 知, 序列频谱 $X(e^{j\omega})$ 是 $e^{jn\omega}$ 的函数, 而 $e^{jn\omega}$ 是 ω 以 2π 为周期的函数, 并且由于序列在时域上是非周期的, 因而, 序列的频谱是周期的连续频谱。

同时 $X(e^{j\omega})$ 是 ω 的复函数, 可进一步表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} = \text{Re}[X(e^{j\omega})] + j \text{Im}[X(e^{j\omega})] \quad (4.5)$$

4.1 序列的傅里叶变换

其幅度谱如图4.1所示

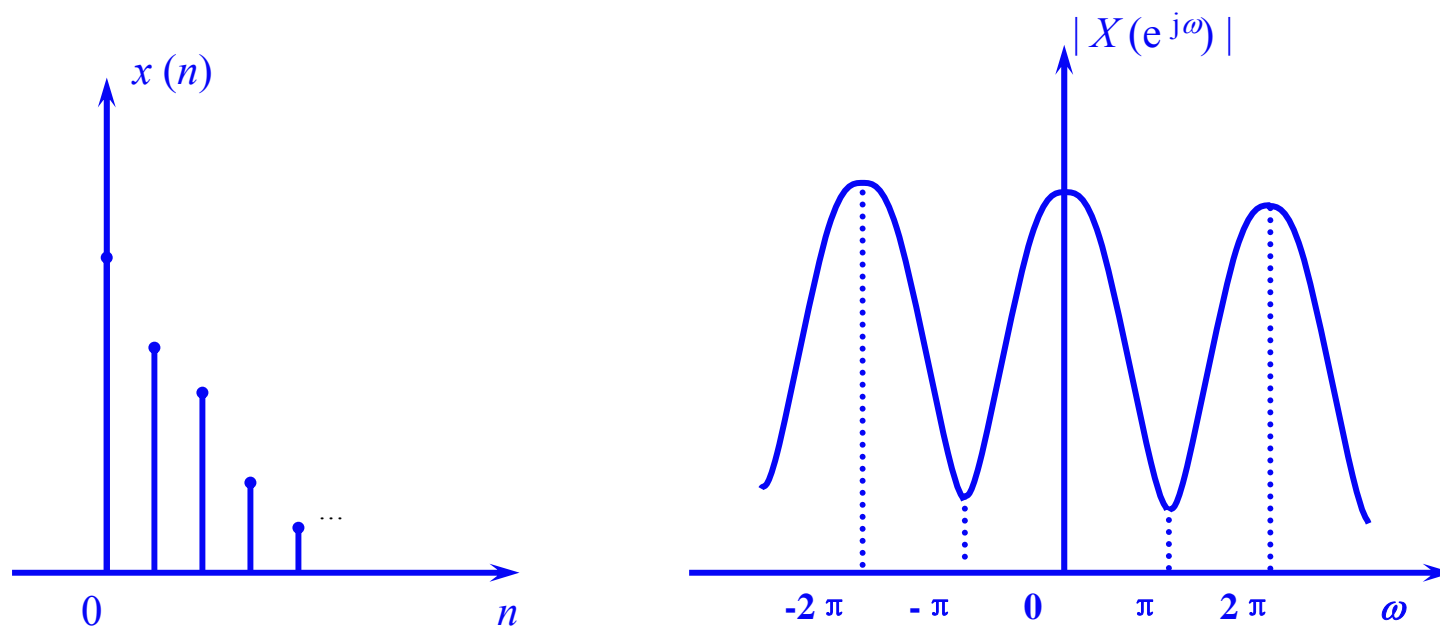


图4.1 序列及其幅谱图

4.1 序列的傅里叶变换

序列傅立叶变换存在的条件

- 由于序列的傅里叶变换是单位圆上的 z 变换，序列的 z 变换在单位圆上必须收敛是序列傅里叶变换存在的条件，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

- 上式表明，序列傅里叶变换存在的条件是：序列必须绝对可和。(充分条件)

4.1 序列的傅里叶变换

- 例4.1 求出下列序列的傅里叶变换。

$$x_2(n) = \varepsilon(n+3) - \varepsilon(n-4)$$

解:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\varepsilon(n+3) - \varepsilon(n-4)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-3}^3 e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=-1}^{-3} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=1}^3 e^{j\omega n} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\omega n} + \left(\sum_{n=0}^2 e^{j\omega n} \right) \cdot e^{j\omega} \\ &= \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{1 - e^{j3\omega}}{1 - e^{j\omega}} e^{j\omega} = \frac{1 - e^{-j4\omega}}{1 - e^{-j\omega}} - \frac{1 - e^{j3\omega}}{1 - e^{j\omega}} = \frac{1 - e^{-j7\omega}}{1 - e^{-j\omega}} e^{j3\omega} \\ &= \frac{e^{-j\frac{7}{2}\omega} \left(e^{j\frac{7}{2}\omega} - e^{-j\frac{7}{2}\omega} \right)}{e^{-j\frac{1}{2}\omega} \left(e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega} \right)} e^{j3\omega} = \frac{\sin\left(\frac{7}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \end{aligned}$$

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

目的:

找出连续信号与离散信号各种变换的关系

变换关系的纽带:

冲激抽样信号 \longrightarrow 沟通连续和离散信号的桥梁

表 4.1 各种信号标识符

| 信号类 字符意义 | 连续信号 | 冲激抽样信号 | 序列(离散时间信号) |
|----------------|----------------|----------------|------------------|
| 信号的时域表示 | $x_a(t)$ | $x_s(t)$ | $x(n)$ |
| 拉氏变换 (z 变换) | $X_a(s)$ | $X_s(s)$ | $X(z)$ |
| 傅氏变换 | $X_a(j\Omega)$ | $X_s(j\Omega)$ | $X(e^{j\omega})$ |

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

1. 冲激抽样信号的拉氏变换 $X_s(s)$ 与连续信号的拉氏变换 $X_a(s)$ 之间关系:

拉氏变换的指数形式为

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-snT}$$

周期为T的周期冲激信号傅氏级数的表达式(周期延拓)为

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t}$$

见例2.12的证明

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为采样角频率，则冲激抽样信号可表示为

$$x_s(t) = x_a(t)\delta_T(t) = x_a(t) \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t}$$

可导出冲激抽样信号拉氏变换的另一种形式

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_s t} \right] e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-(s-jm\Omega_s)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(s - jm\Omega_s) \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

由此，可得到冲激抽样信号的拉氏变换有指数级数与周期延拓表示的两种等价表达式。

即

$$\begin{aligned} X_s(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)e^{-sTn} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(s - jm\Omega_s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

2. 冲激抽样信号的拉氏变换 $X_s(s)$ 与抽样序列的z变换 $X(z)$ 之间关系

z 与 s 变量之间的映射关系 $z = e^{sT}$ ，若离散时间信号为抽样序列，即 $x(nT) = x(n)$ ，并引入 $z = e^{sT}$ 时，得到序列z变换为

$$X(z) = X_s(s) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-snT} \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

上式表示， z 变换可以看成冲激抽样信号的拉氏变换由 s 平面映射到 z 平面的变换。

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

3. 冲激抽样信号的拉氏变换 $X_s(s)$ 与其傅氏变换 $X_s(j\Omega)$ 之间的关系为

$$X_s(s) \big|_{s=j\Omega} = X_s(j\Omega)$$

由, $s = \sigma + j\Omega$ 若 $\sigma = 0$, 而且拉氏变换收敛域包含虚轴时, 则虚轴上的拉氏变换即为其傅氏变换, 或者说, 冲激抽样信号的傅里叶变换是其在虚轴上的拉氏变换。

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

4. 冲激抽样信号的傅氏变换 $X_s(j\Omega)$ 与连续时间信号的傅氏变换 $X_a(j\Omega)$ 之间:

冲激抽样信号傅氏变换的指数级数的形式, 以及连续时间信号的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓形式, 对冲激抽样信号而言是等价的, 表示为

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega T n} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) \end{aligned}$$

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

5. 激励抽样信号傅氏变换的指数形式与序列的

傅里叶变换表达式：两相比较，若序列为抽样序列，有：
 $x(n) = x_a(nT)$ ，而且数字角频率与模拟角频率 Ω ，满足
 $\omega = \Omega T$ ，则相应频率点上的频谱值相等。

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

6. 序列z变换 $X(z)$ 与序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 之间:

$$X(z) \big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 为 $X(z)$ 在单位圆上的特例。

4.2 傅氏变换、拉氏变换与z变换的关系

把上述分析的结论，用图来形象地描绘如下：

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(s - jm\Omega_s) & = & X_s(s) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-sTn} & \xrightarrow[\substack{z=e^{sT} \\ x(n)=x_a(nT)}]{\quad} & X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \\ & & \downarrow s=j\Omega & & & & \downarrow z=e^{j\omega} \\ \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jm\Omega_s) & = & X_s(j\Omega) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega Tn} & \xrightarrow[\omega=\Omega T]{\quad} & X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn\omega} \end{array}$$

此图非常清晰地表明了：冲激抽样信号是沟通离散信号与连续信号各种变换的桥梁。

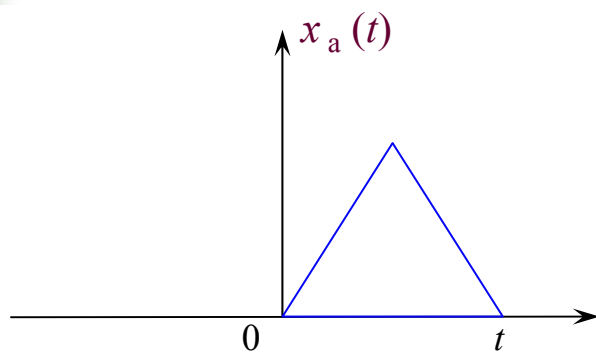
4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

4.3.1 傅里叶变换在时域和频域中的对称规律

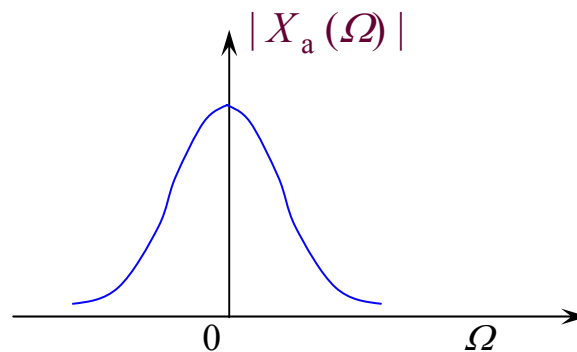
一连续非周期信号，由前述，其傅里叶变换（频谱） $X_a(\Omega)$ 是非周期的连续谱，时域上的非周期对应频域上的连续，或频域上的连续对应时域上的非周期，由此可以得到时、频域的第一个对称规律：

时域上的非周期将产生频谱的连续，或者说，频域的连续导致时域的非周期

总之一一个域中函数的连续对应另一个域的非周期。
如下图4.4（a）所示



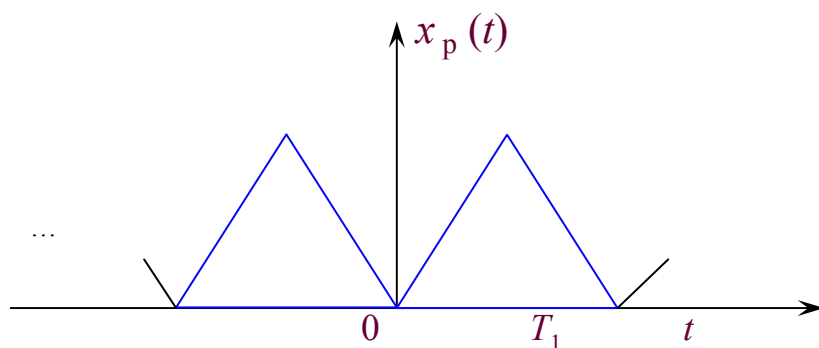
连续非周期信号



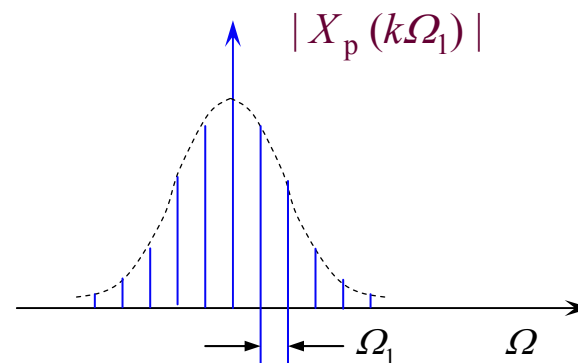
非周期连续频谱



(a)



连续周期信号



非周期离散频谱



(b)

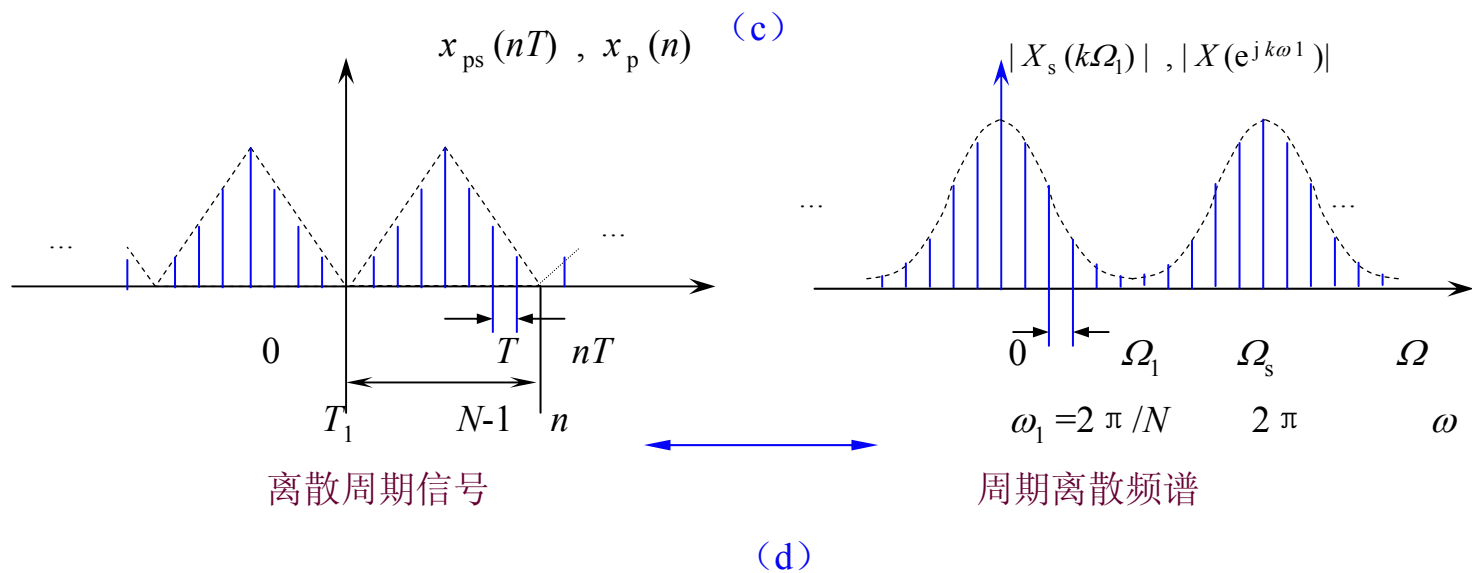
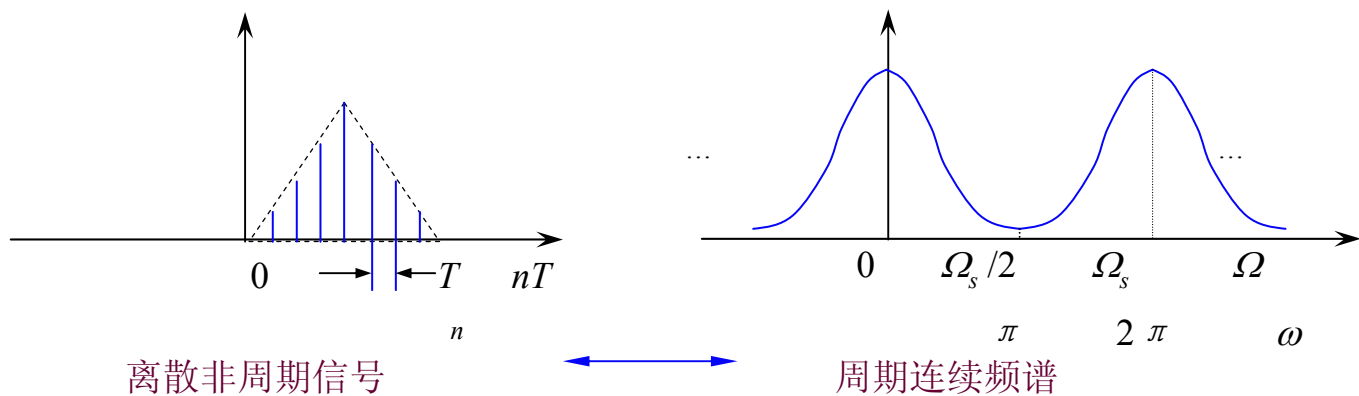


图4.4 信号在时、频域中的对称规律

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

如图4.4 (b)，一周期信号 $x_p(t)$ ，其频谱是离散谱 $X_p(k\Omega_1)$ 。可以从另一个角度来理解： $X_p(k\Omega)$ 正是对图4.4 (a)中的频谱 $X_a(\Omega)$ 以采样频率 Ω_1 进行抽样，即频域被离散化，则在时域上产生单周期信号 $x_a(t)$ 的周期延拓，延拓周期为 $T_1 = 2\pi/\Omega_1$ ，形成周期延拓波形 $x_p(t)$ 。

时、频域的第二个对称规律：

时域上的周期化将产生频谱的离散化，或者说，频域的离散化导致时域的周期化，总之，一个域的离散化对应另一个域的周期化。

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

各种信号傅里叶变换在时域、频域上对称性的一规律可概括归纳为：

1. 在某一个域（时域或频域）中是连续的，相应地在另一个域（频域或时域）中肯定是非周期性的。
2. 在某一个域（时域或频域）中是离散的，相应地在另一个域（频域或时域）中肯定是周期性的。

上述规律是由傅里叶变换的对称性（对偶性）所决定的。

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

4.3.2 离散傅里叶级数DFS

对于连续周期函数 $x_p(t)$ ，有

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k\Omega_1) e^{jk\Omega_1 t}$$

$$X_p(k\Omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} x_p(t) e^{-jk\Omega_1 t} dt$$

对 $x_p(t)$ 进行抽样，变成了离散时间周期信号 $x_{ps}(nT)$ 或 $x_p(n)$ (以抽样序列 $x_p(n)$ 为例)，周期序列在时域可用复指数序列形式的傅里叶级数来表示，将 $t = nT$ 、 $X_p(k\Omega_1) = X_p(k)$ 代入上式中，得

$$x_p(nT) = x_p(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{jk(\frac{\omega_1}{T})nT} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{jk\omega_1 n}$$

$$\omega_1 = \Omega_1 T = \frac{\pi}{N}$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad T_1 = NT$$

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

从而有

$$e^{jk\omega_1 n} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\Phi_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

记作

$$\Phi_{k+rN}(n) = \Phi_k(n)$$

由于复指数序列的周期性，显然有

$$\begin{aligned} x_p(nT) = x_p(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{jk(\frac{\omega_1}{T})nT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) e^{jk\omega_1 n} \end{aligned}$$

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

由上述分析可知：周期离散信号在时、频域上均为周期序列，根据周期信号的特点，当 k 变化一个 N 的整数倍时，得到的是完全一样的序列，所以，一个周期序列可以表示成一个有限项（ N 项）指数序列分量的叠加（即用任一个周期的序列情况，可以描述、代表所有其他周期序列的情况），则

$$\begin{aligned}x_p(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k) \Phi_{k+rN}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) \Phi_k(n) \\&= \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\end{aligned}$$

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

习惯上表示为

$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

上式就是离散傅里叶级数 (DFS) 的定义式，是反变换的概念。

根据反变换的表达式来导出正变换 $X_p(k)$ 的解析表达式

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

4.3 离散傅里叶级数 (DFS)

傅里叶级数的正变换以符号DFS[.]表示，
离散傅里叶级数的反变换，符号IDFS[.]表示，
写成

$$X_p(k) = \text{DFS}[x_p(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.26)$$

$$x_p(n) = \text{IDFS}[X_p(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (4.27)$$

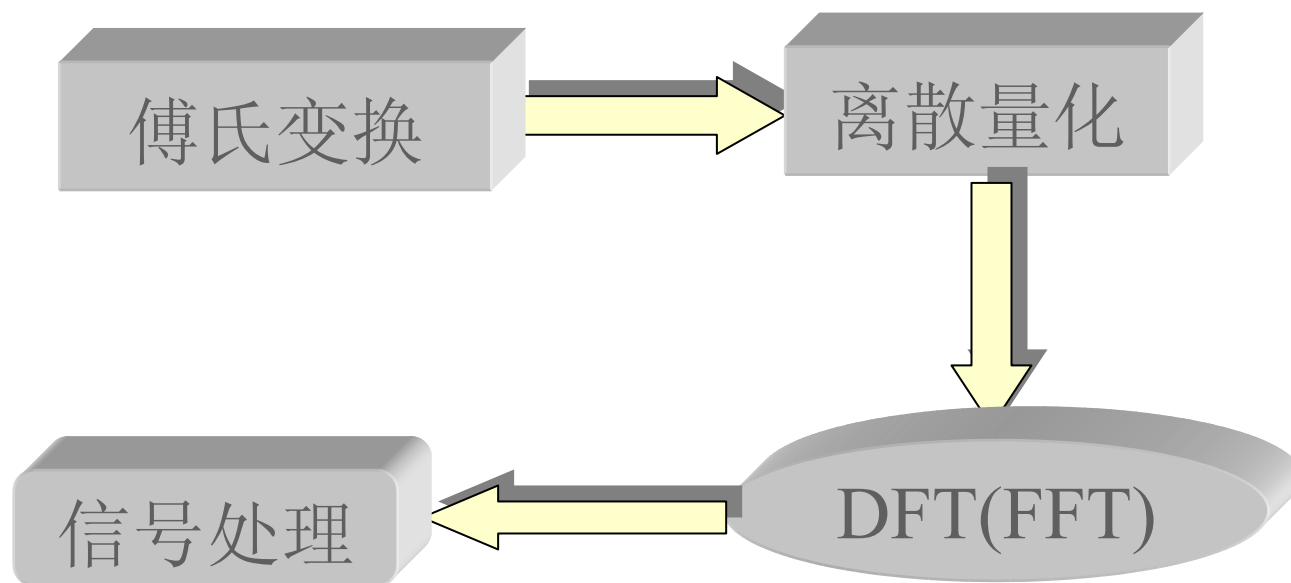
为表达简洁,引入符号

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

DFT要解决两个问题：

- 一是离散与量化，
- 二是快速运算。



4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

一.DFT是重要的变换

- 1.分析有限长序列的有用工具。
- 2.在信号处理的理论上具有重要意义。
- 3.在运算方法上起核心作用，谱分析、卷积、相关都可以通DFT在计算机上实现。

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

4.4.1 离散傅里叶变换DFT定义式

对于一个周期为 N 的周期序列 $x_p(n)$ ，把它的一个周期的有限长序列定义为这一周期序列的**主值序列**，用 $x(n)$ 表示

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$x_p(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

周期序列 $X_p(k)$ 、 $x_p(n)$ 换成主值序列 $X(k)$ 、 $x(n)$ ，这样就得到了两个有限长序列的变换对，并表示为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (4.35)$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.36)$$

式(4.35)称为离散傅里叶正变换，以符号 $\text{DFT}[\cdot]$ 表示，式(4.36)是离散傅里叶反变换，以符号 $\text{IDFT}[\cdot]$ 表示

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

DFT[·] , IDFT[·]可简写为:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{W}^{nk} \mathbf{x}(n) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{x}(n) = \frac{1}{N} \mathbf{W}^{-nk} \mathbf{X}(k) \quad (4.40)$$

式中, $\mathbf{X}(k)$ 与 $\mathbf{x}(n)$ 分别为 N 行的列矩阵,
而 \mathbf{W}^{nk} 与 \mathbf{W}^{-nk} 分别为 $N \times N$ 的对称方阵。

例 4.2 用矩阵形式求矩形序列 $x(n) = R_4(n)$ 的DFT, 再由所得 $X(k)$ 经IDFT求 $x(n)$, 验证所求结果的正确性。

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

4.4.2 离散傅里叶变换DFT与序列傅里叶变换的关系

设一有限长序列 $x(n)$ 长度为 N 点，其 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

因序列为有限长，满足绝对可和的条件，其 z 变换的收敛域为整个 z 平面，必定包含单位圆，则序列的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega}$$

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)

现以 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 为间隔，把单位圆（表示为 $e^{j\omega}$ ）均匀

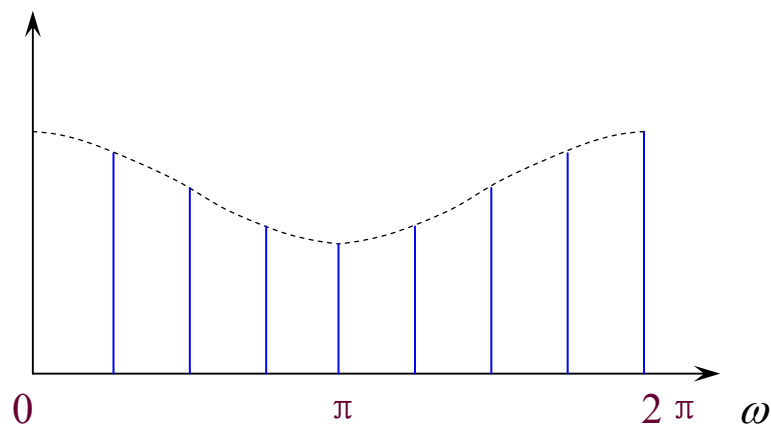
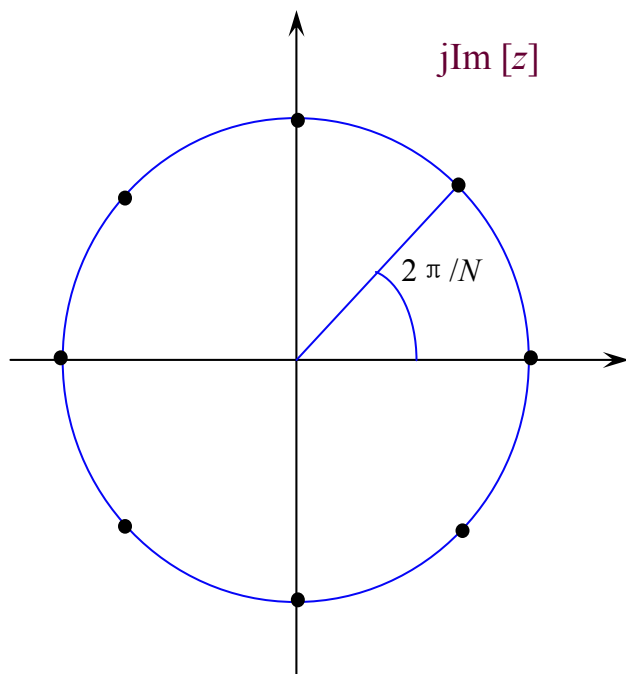
等分为N个点，则在第k个等分点

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \text{DFT}[x(n)] = X(k)$$

$$\text{或 } X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

由上式可以得出：有限长序列的DFT就是序列在单位圆上的z变换（即序列傅里叶变换）在单位圆上以 $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ 为间隔的抽样值，参见下图。

4.4 离散傅里叶变换 (DFT)



DFT与序列傅里叶变换对比

4.5 离散傅里叶变换的性质

1. 线性特性

若： $X(k) = DFT[x(n)]$ ， $Y(k) = DFT[y(n)]$
则： $DFT[ax(n) + by(n)] = aX(k) + bY(k)$

式中，a、b为任意常数。如果两个序列的长度不相等，以最长的序列为基准，对短序列要补零，使序列长度相等，才能进行线性相加，经过补零的序列频谱会变密，但不影响问题的性质。

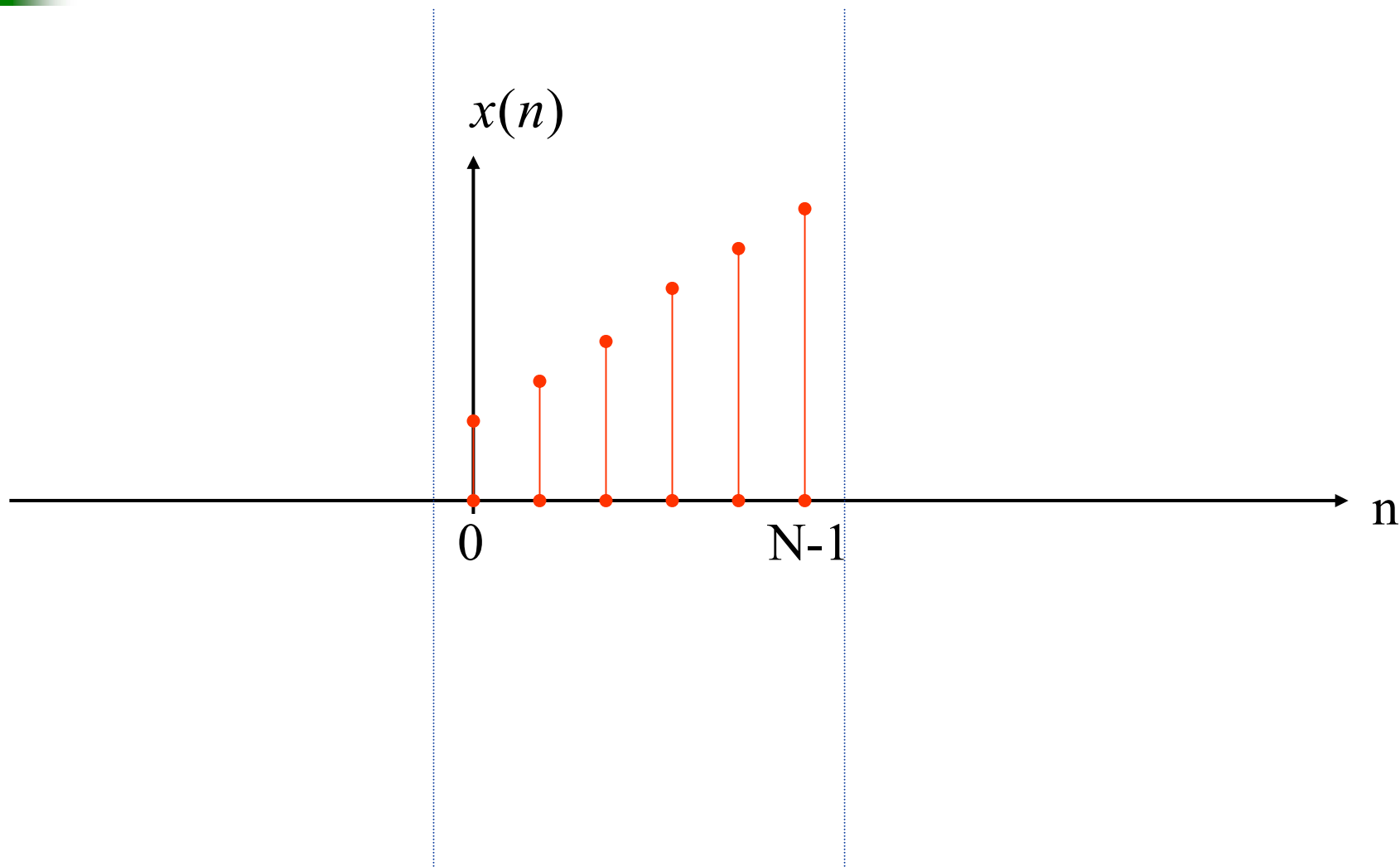
4.5 离散傅里叶变换的性质

2 . 时移特性

(1) 圆周移位

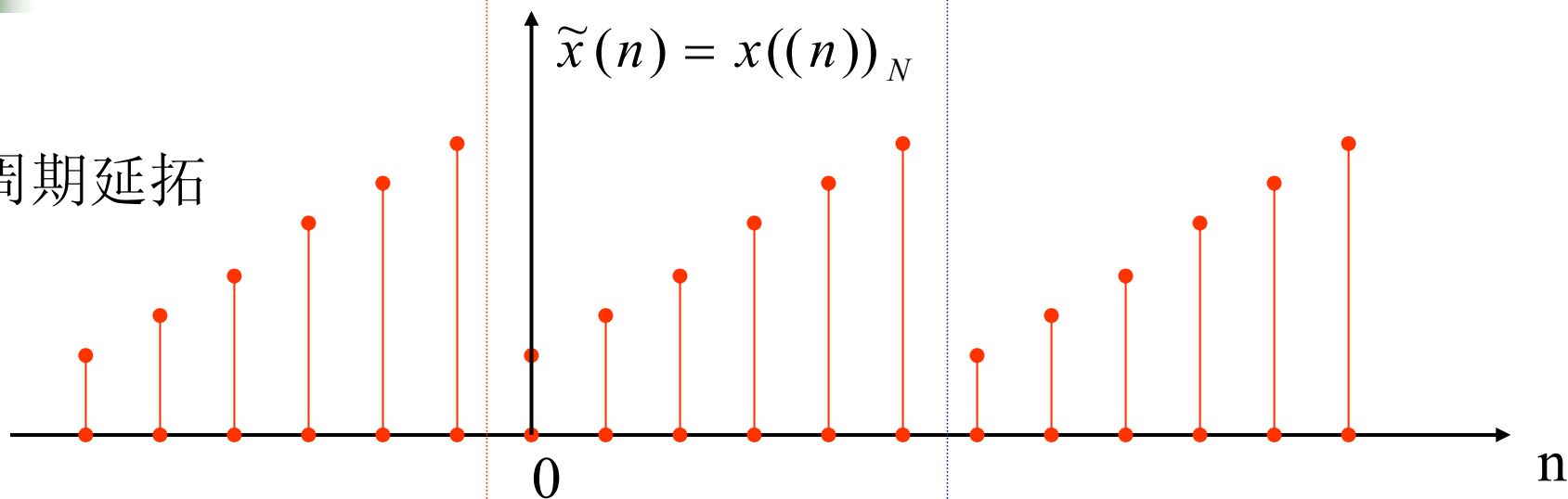
圆周移位也叫循环移位，简称圆移位。它是序列的这样一种移位：将一有限长序列 $x(n)$ ，进行周期延拓，周期为 N ，构成周期序列 $x_p(n)$ ，然后对周期序列 $x_p(n)$ 作 m 位移位处理得移位序列 $x_p(n-m)$ ，再取其主值序列（ $x_p(n-m)$ 与一矩形序列 $R_N(n)$ 相乘），得 $x_p(n-m)R_N(n)$ ，就是所谓的圆周移位序列。

4.5 离散傅里叶变换的性质

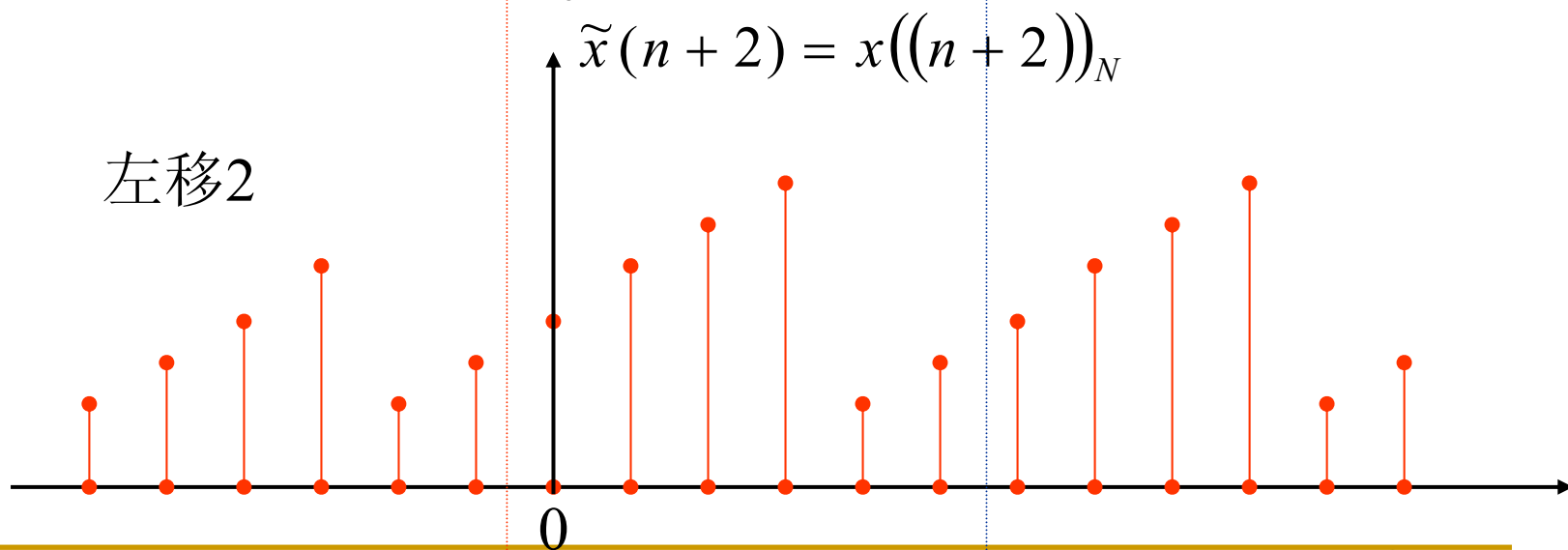


4.5 离散傅里叶变换的性质

周期延拓



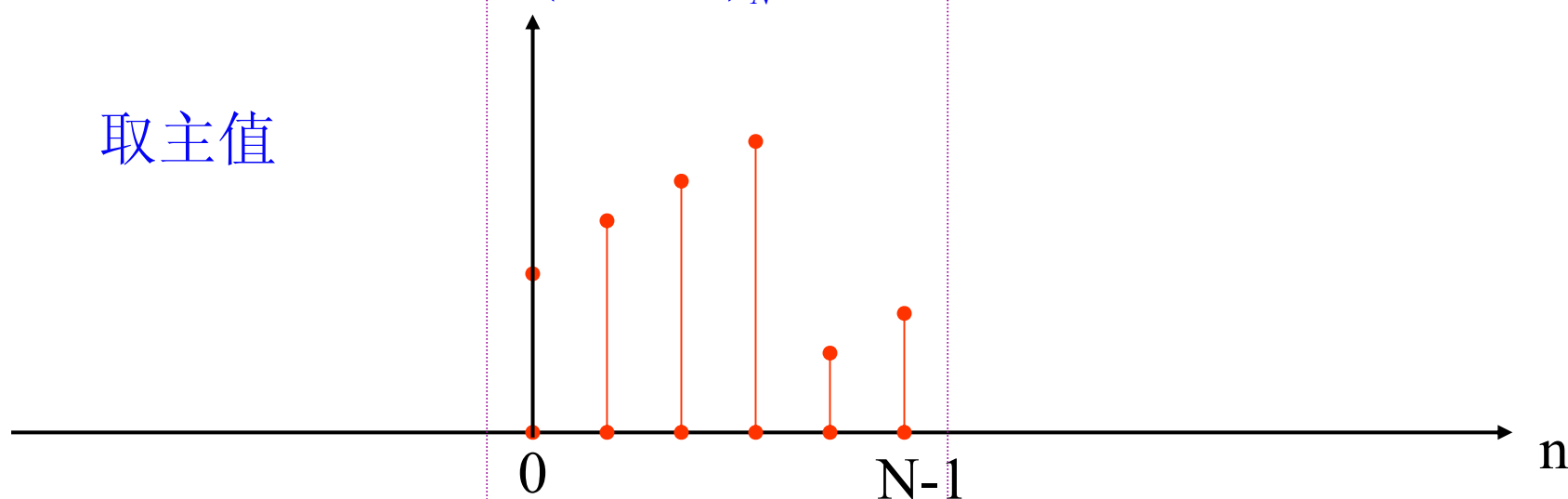
左移2



4.5 离散傅里叶变换的性质

取主值

$$x((n+2))_N R_N(n)$$

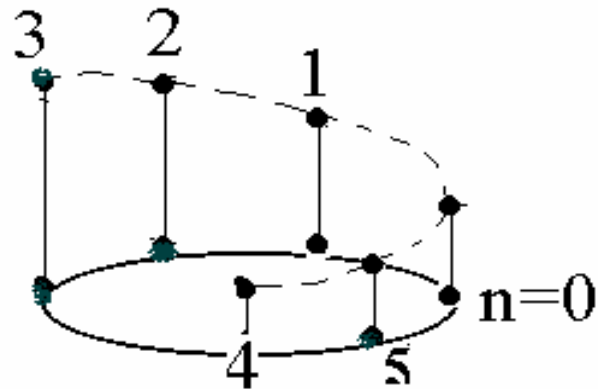
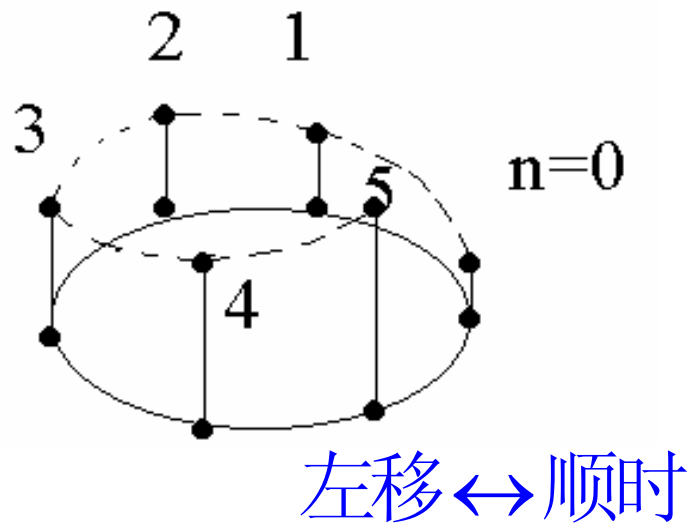
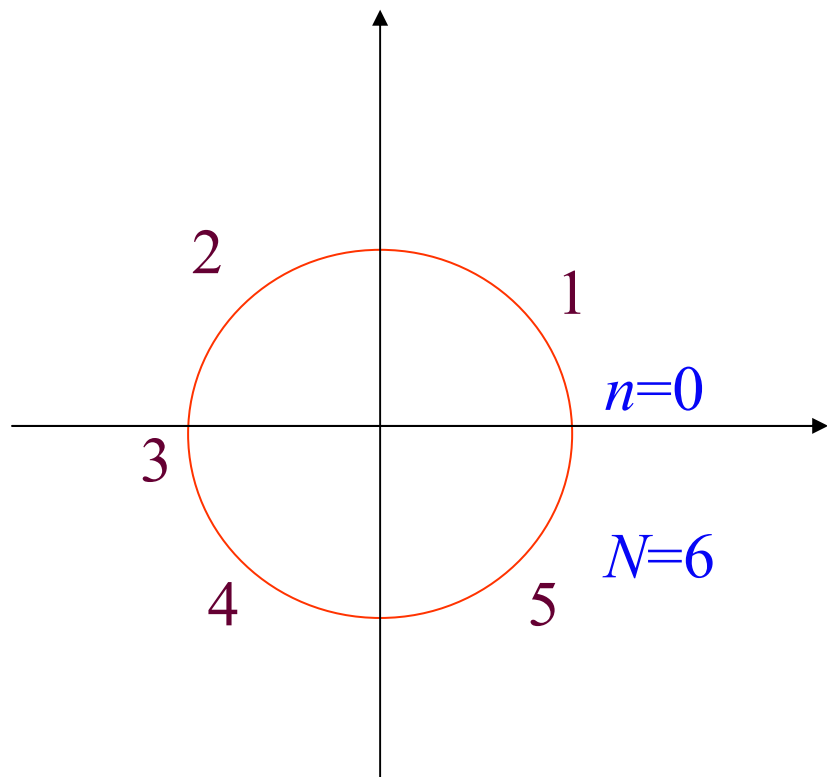


4.5 离散傅里叶变换的性质

2. 圆周位移的含义

由于我们取主值序列，即只观察 $n=0$ 到 $N-1$ 这一主值区间，当某一抽样从此区间一端移出时，与它相同值的抽样又从此区间的另一端 $x(n)$ 进来。如果把 $x(n)$ 排列一个 N 等分的圆周上，序列的移位就相当于 $x(n)$ 在圆上旋转，故称作圆周移位。当围着圆周观察几圈时，看到就是周期序列： $\tilde{x}(n)$ 。

4.5 离散傅里叶变换的性质



4.5 离散傅里叶变换的性质

(2) 时移定理

所谓时移定理是指：

$$\begin{aligned} \text{若 } \text{DFT} [x(n)] &= X(k) \\ \text{则 } \text{DFT} [x_p(n-m)R_N(n)] &= W_N^{mk} X(k) \end{aligned}$$

时移定理表明：序列在时域上圆周移位，频域上将产生附加相移。

4.5 离散傅里叶变换的性质

3. 频移特性

若 $\text{DFT} [x(n)] = X(k)$

则 $\text{DFT} [x(n)W_N^{-ln}] = X_p(k-l)R_N(k)$

并 $\text{IDFT} [X_p(k-l)R_N(k)] = x(n)W_N^{-ln}$

上述特性表明：若序列在时域上乘以复指数

序列 $W_N^{-ln} = e^{j\frac{2\pi}{N}ln}$ ，则在频域上， $X(k)$ 将圆

周移位 l 位，这可以看作调制信号的频谱搬移，因而又称“调制定理”。

4.5 离散傅里叶变换的性质

4. 圆周卷积特性

(1) 时域圆周卷积

若对N点的序列有 $X(k) = DFT[x(n)]$, $H(k) = DFT[h(n)]$,
 $Y(k) = DFT[y(n)]$, $Y(k) = X(k)H(k)$

则
$$y(n) = IDFT[Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h_p(n-m)R_N(n)$$

若 $x(m)$ 保持不移位, 则 $h_p(n-m)R_N(n)$ 正是圆周移

位, 故称
$$\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h_p(n-m)R_N(n)$$
为圆周卷积。
即

$$y(n) = x(n) \otimes h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h_p(n-m)R_N(n)$$

4.5 离散傅里叶变换的性质

(2) 频域圆卷积

若: $y(n) = x(n) h(n)$

则:

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) H_p(k-l) R_N(k)$$

DFT变换的性质

$$\text{IDFT}[X(k)Y(k)] = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \overline{y(n-m)} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))$$

反褶 → 循环移位 → 相乘 → 相加⁰

也是一种卷积！为了突出新“卷积”与“旧”卷积的不同，同时也为了突出它们之间的相同，称过去传统的卷积为**线卷积**，而称此“新卷积”为序列的圆周卷积，简称**圆卷积**。

$$\Rightarrow x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y((n-m))$$

- 频域卷积

编程实现容易

$$\text{DFT}[x(n)y(n)] = \frac{1}{N} X(k) \otimes Y(k)$$

4.5 离散傅里叶变换的性质

5. 奇偶性

(1) 实数序列

设 $x(n)$ 为实序列, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \frac{2\pi}{N}nk - j \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin \frac{2\pi}{N}nk \\ &= X_R(k) + jX_I(k) \end{aligned}$$

可知: $X(k)$ 的实部为 k 的偶函数, $X(k)$ 的虚部是 k 的奇函数。

4.5 离散傅里叶变换的性质

$X(k)$ 的幅度和相位分别为

$$|X(k)| = \sqrt{X_R^2(k) + X_I^2(k)}$$

$$\arg[X(k)] = \arctan \frac{X_I(k)}{X_R(k)}$$

设 $x(n)$ 是实序列，其DFT可写成

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} \right]^* = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(N-n) W_N^{k(N-n)} \right]^*$$

$$= X^*(N-k) \quad (4.53)$$

4.5 离散傅里叶变换的性质

从而有

$$\left\{ \begin{aligned} |X(k)| &= |X^*(N-k)| = |X(N-k)| \end{aligned} \right. \quad (4.54)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \arg[X(k)] &= \arg[X^*(N-k)] = -\arg[X(N-k)] \end{aligned} \right. \quad (4.55)$$

由上述式子表明：

实数序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$ ，在 0 至 N 的范围内，对于 $N/2$ 点， $|X(k)|$ 呈半周期偶对称分布， $\arg[X(k)]$ 呈半周期奇对称分布。但由于长度为 N 的 $X(k)$ 有值区间是 $0 \sim (N-1)$ ，而在式 (4.53) 中增加了第 N 点的数值，因此所谓的对称性并不是很严格。

4. 5 离散傅里叶变换的性质

(2) 复数序列

对于共轭复数序列。若有限长序列 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的共轭复数序列，并设

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n)$$

$$x^*(n) = x_R(n) - jx_I(n)$$

$$\begin{cases} x_R(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_I(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

4.5 离散傅里叶变换的性质

则

$$X_R(k) = \text{DFT}[x_R(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \quad (4.57)$$

$$X_I(k) = \text{DFT}[jx_I(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \quad (4.58)$$

$$X(k) = X_R(k) + X_I(k) \quad (4.59)$$

利用式（4.57）、（4.58）可以计算出一个N点复序列DFT的同时，计算出两个N点实序列的DFT。

4.5 离散傅里叶变换的性质

6. 帕斯瓦尔定理

若 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$

则

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

上式左端代表离散信号在时域中的能量，右端是代表在频域中的能量，表明变换过程中能量是守恒的。

计算DFT的快速算法 -- FFT

$$\text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

计算DFT的计算量：

每算一个 $X(k)$ ，需要 N 次复数乘法， $N-1$ 次加法。因此， N 点DFT需要 $N*N$ 次复数乘法， $N(N-1)$ 次复数加法。



直接计算DFT的复杂度为 $O(N^2)$

尽管预先算好并保存旋转因子 W_N^k 可以节省部分运算，但按定义求DFT的运算量仍然很大。

4.6 快速傅里叶变换 (FFT)

4.6.1 DFT直接运算的问题和改进思路

1. DFT直接运算的工作量

直接对DFT进行计算的基本问题是运算量大，很难实现信号的实时处理，如某序列

$x(n)$, $N = 4$, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, 则序列 $x(n)$ 的DFT为

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

4.6 快速傅里叶变换 (FFT)

若要求 $X(k)$ 的 $N=4$ 个值,

复数乘的次数: $N^2 = 4^2 = 16,$

复数加的次数: $N \times (N-1) = 12,$

这样简单的DFT计算, 其计算量已经不小。

如果 $N = 2^{10} = 1024,$

则复数乘的次数: $N^2 = 1,048,576,$

复数加次数: $\approx N^2 = 1,048,576,$

难以实现信号的实时处理, 若 N 大大增加, 运算量也会随之大大增加, 实时处理几乎就变得不可能了, 因此必须改进DFT的算法。

4.6 快速傅里叶变换 (FFT)

2. 改进思路

DFT的定义式为 $X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

(1) W_N^{nk} 的周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{(n+lN)k} = W_N^{(k+mN)n}$$

(2) W_N^{nk} 的对称性

$$\therefore W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}} = -1$$

$$\therefore W_N^{(nk+\frac{N}{2})} = W_N^{nk} W_N^{\frac{N}{2}} = -W_N^{nk}$$

4.6 快速傅里叶变换 (FFT)

将上述 (1)、(2) 中的结果, 代入矩阵 W , 可以简化为

$$\begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix}$$

- (1) 矩阵 W 中, 许多元素是相等的, 可明显减少计算量。
- (2) 由于运算量正比于 N^2 , 因此可以把大点数 (大 N) DFT 的计算化为小点数 (如 $N/2$), 又可进一步地把 DFT 计算量大幅度减下来。

综合应用上述的改进思路, 实现傅里叶变换的快速计算的算法, 就是快速傅里叶变换, FFT (Fast Fourier Transform)。

FFT的原理

特别说明：FFT是DFT的快速算法，不是新的变换方法。其算法基础是： W 的两个性质。

1. W 具有周期性

$$W_N^{nk} = W_N^{(k+mN)n}$$

2. W 具有对称性

$$W^{(nk+\frac{N}{2})} = -W^{nk}$$

经过周期性与对称性简化之后，
容易发现DFT运算中存在着不必要的重复计算，避免这种重复，
是简化运算的关键。



N点DFT运算可以分解为两组N/2点DFT运算，然后再取和。

DFT的复杂度与点数N有关！

4.6 快速傅里叶变换 (FFT)

4.6.2 基2按时间抽取的FFT算法（时析型）

1. 算法原理

“基2”——序列 $x(n)$ ，设： $N = 2^M$ （ M 为整数），如果 N 不是2的幂次，应在序列后面补零到 2^M ，这是“基2”的意思。

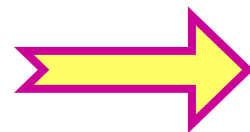
随后按照 n 的奇偶性以及时间的先后抽取序列值，把序列分成奇数序号与偶数序号两组序列之和（大点数化为小点数），这也就是所谓的“按时间抽取”的基本含意。

FFT的原理

$$X(k) = \sum_{\text{偶数}n} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\text{奇数}n} x(n)W_N^{nk}$$
$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)(W_N^2)^{rk}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{rk}$$

$$\begin{cases} y(r) = x(2r) \\ z(r) = x(2r+1) \end{cases} \quad r = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$



FFT的原理

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} y(r)W_{N/2}^{rk} = Y(k) \\ \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{N/2}^{rk} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} z(r)W_{N/2}^{rk} = Z(k) \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

W_N^k

注意Y(k)与Z(k)的周期是N/2 !!!

FFT的原理

$$Y(\frac{N}{2} + k) = Y(k)$$

$$Z(\frac{N}{2} + k) = Z(k)$$

$$W_N^{(\frac{N}{2}+k)} = W_N^{\frac{N}{2}} \cdot W_N^k = -W_N^k$$

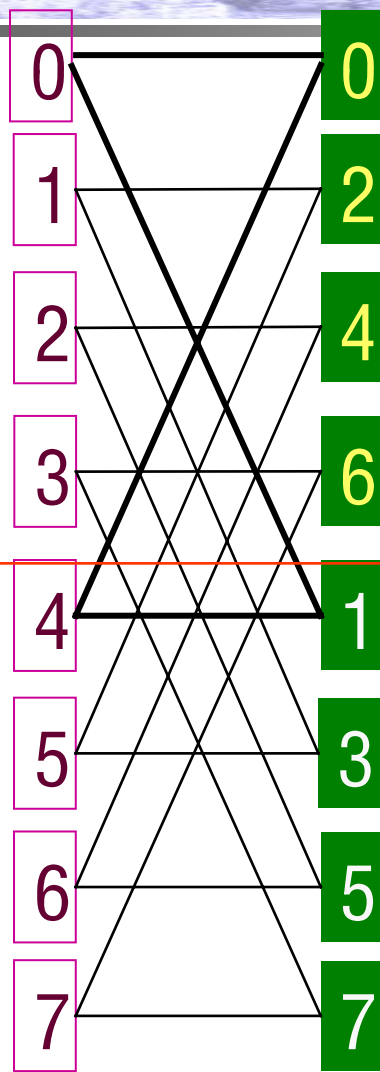
于是，N点X(k)可用N/2点的Y(k)和Z(k)来计算：

$$X(k) = \underline{Y(k) + W_N^k Z(k)}$$

$$\begin{aligned} X(\frac{N}{2} + k) &= Y(\frac{N}{2} + k) + W_N^{(\frac{N}{2}+k)} Z(\frac{N}{2} + k) \\ &= \underline{Y(k) - W_N^k Z(k)} \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

FFT的原理8点示例



$$X(k) = Y(k) + W_N^k Z(k)$$

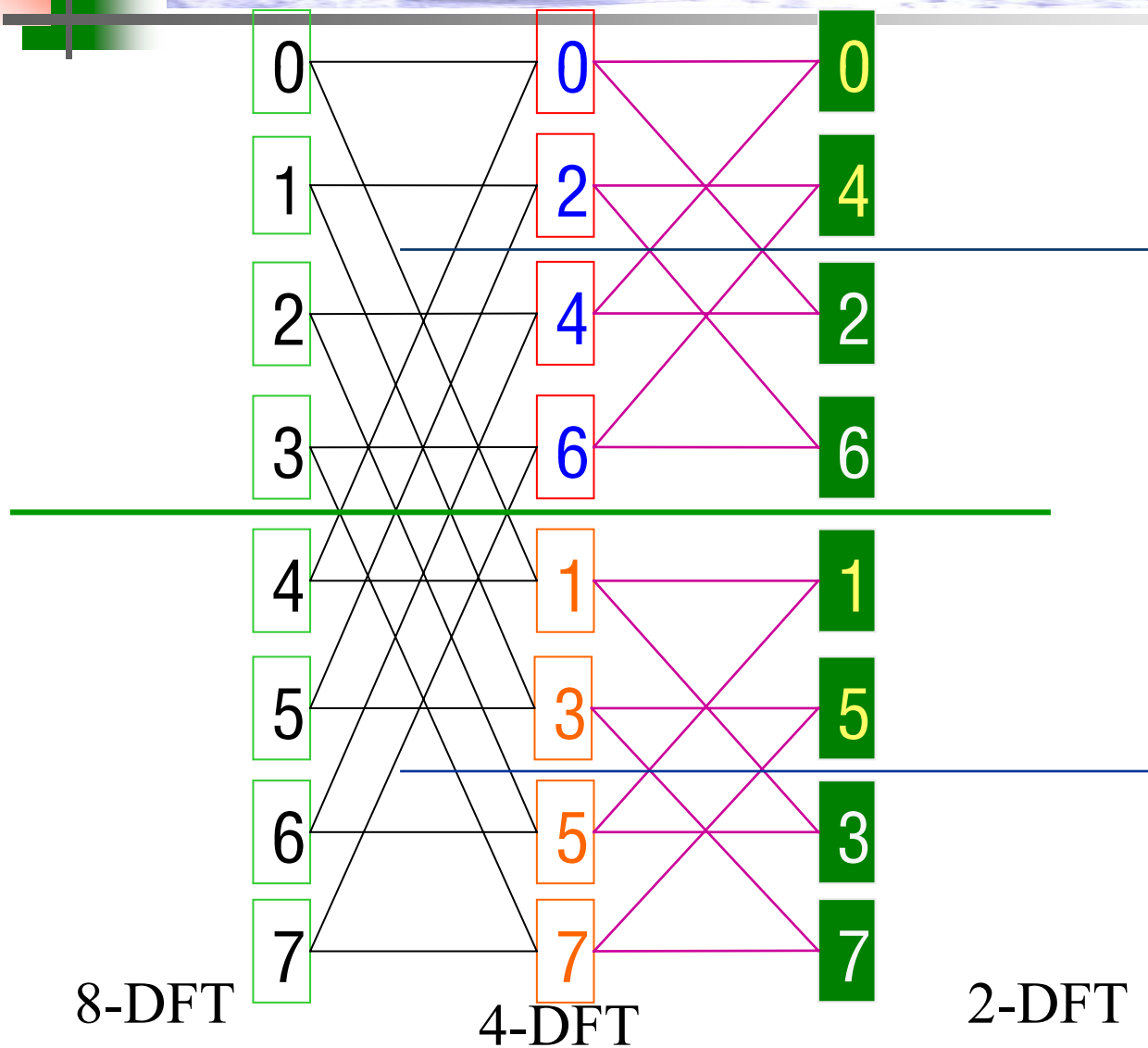
$$X(\frac{N}{2} + k) = Y(k) - W_N^k Z(k)$$

$$k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

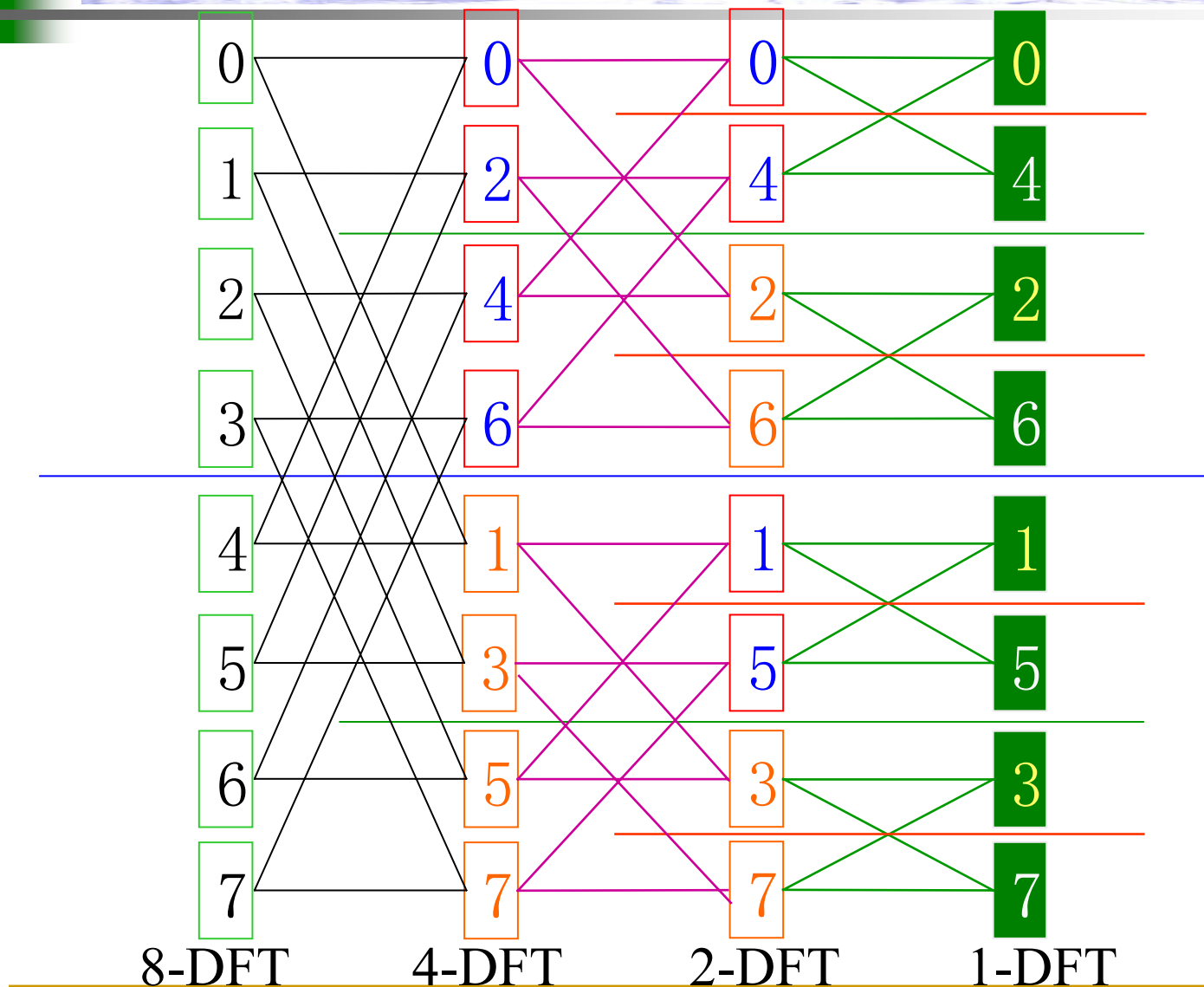
8点DFT

4点DFT (先按奇偶序分组, 再求4点DFT)

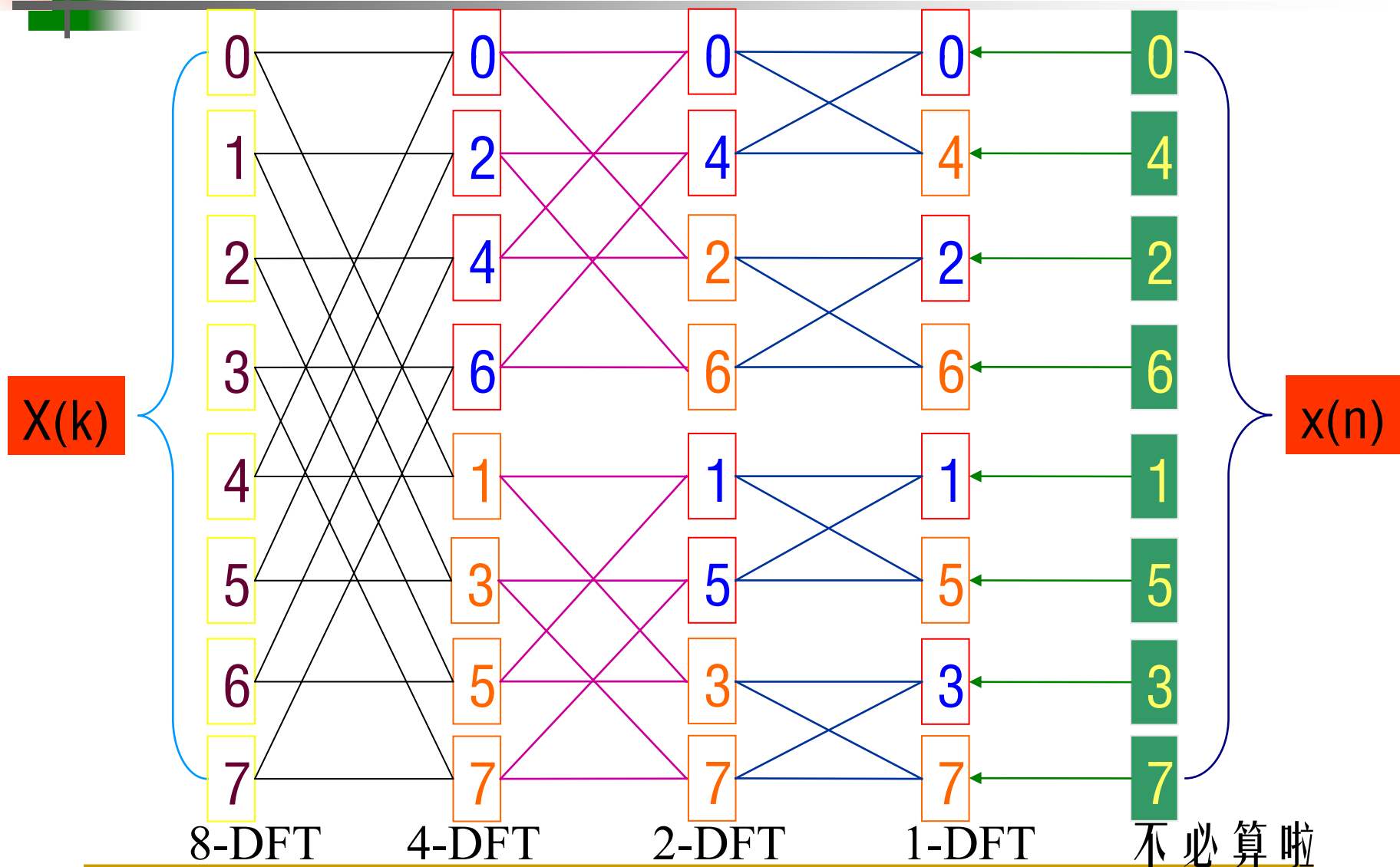
FFT的原理 8点示例



FFT的原理 8点示例

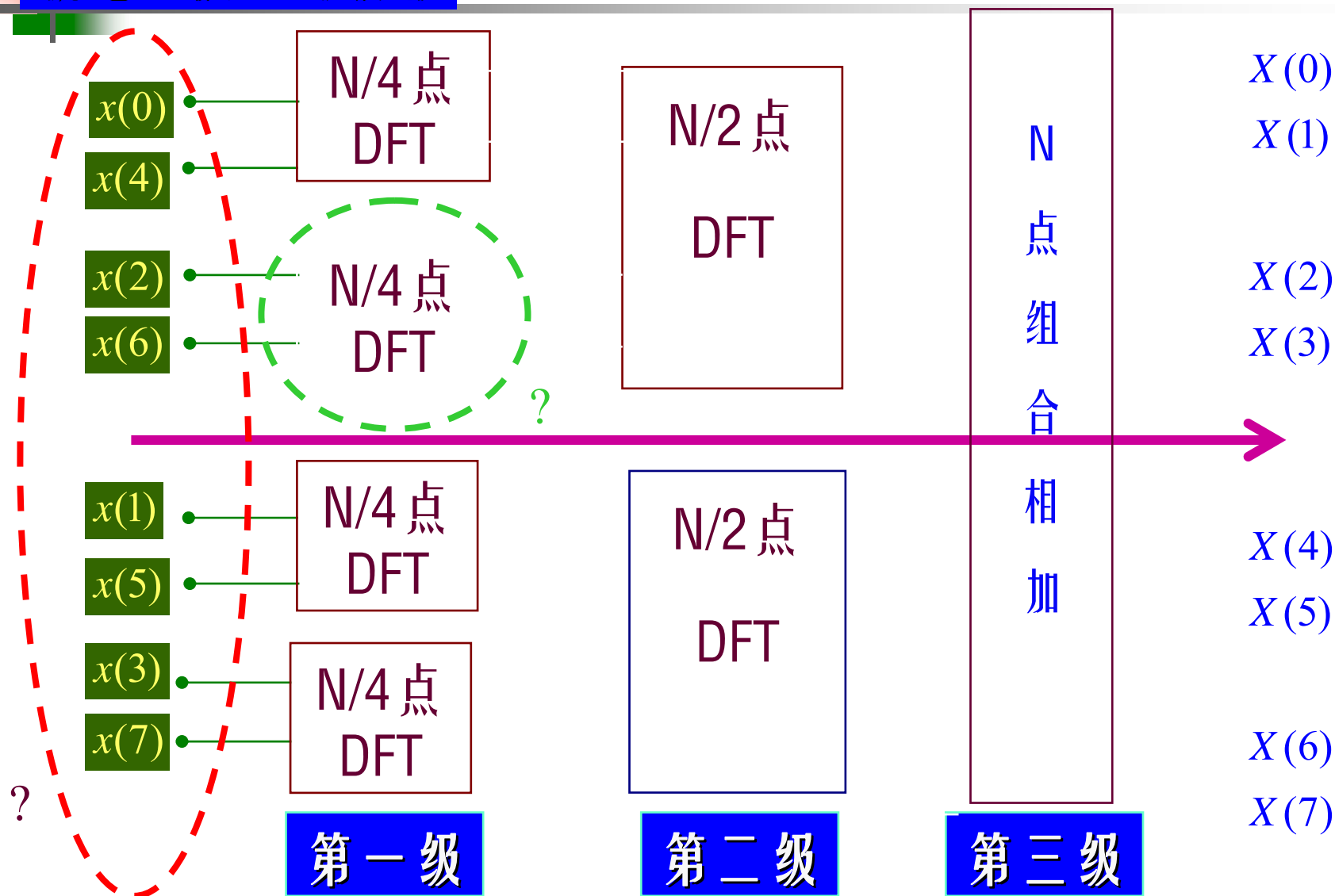


FFT的原理 8点示例



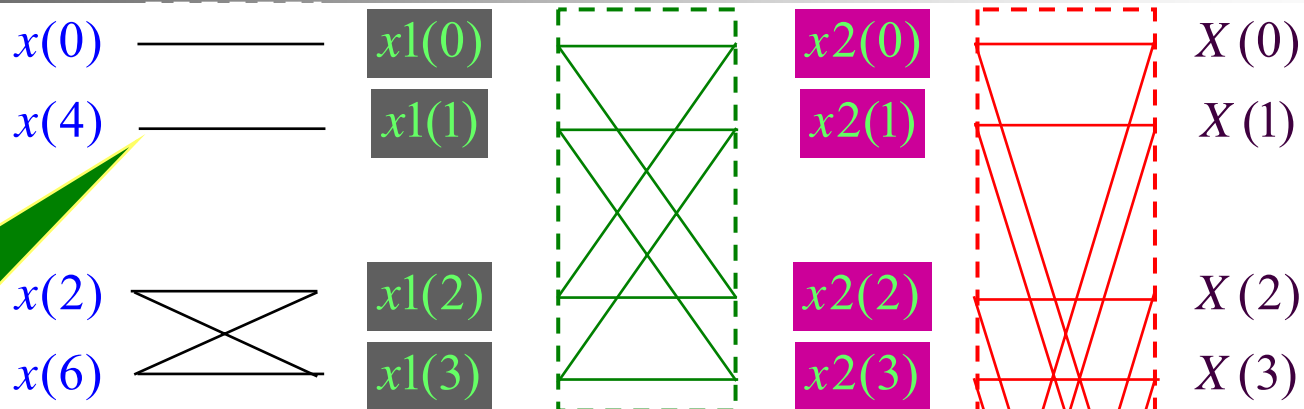
就地置换 无需缓存

逐级迭代计算FFT

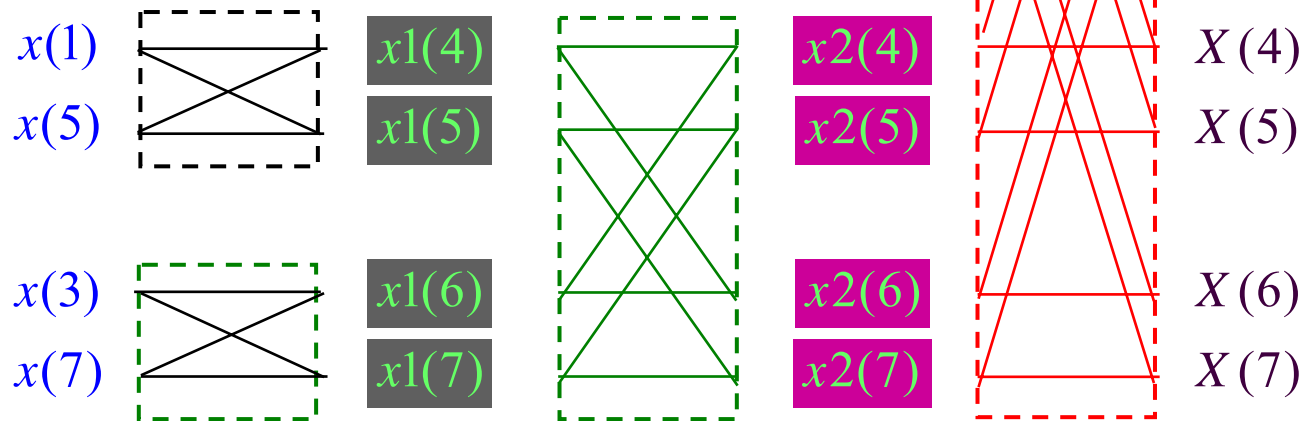


FFT的流程图

蝶形运算单元



群

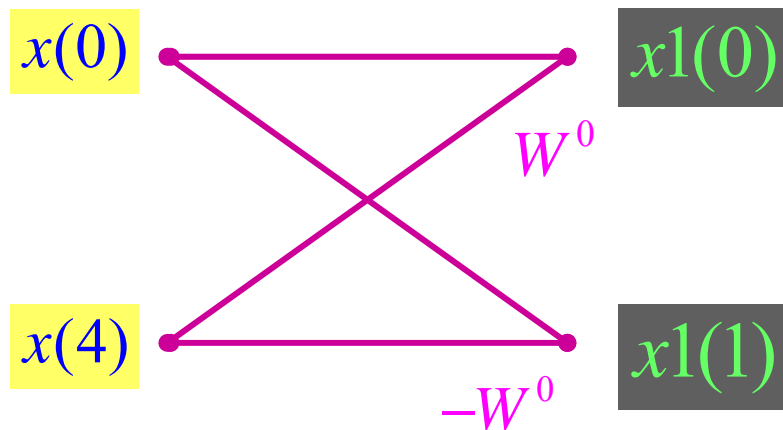


第一级

第二级

第三级

FFT的蝶形运算单元



可以共享

$$x1(0) = x(0) + x(4)W^0$$

$$x1(1) = x(0) - x(4)W^0$$

一个蝶形单元只需一次复数乘法 and 两次复数加法

FFT算法流程说明

☆ 全部计算分解为M级，或称为M次迭代。

☆ 输入序列 $x(n)$ 按码位倒读顺序排列，输出序列 $X(k)$ 按自然顺序排列。

☆ 每级都包含 $N/2$ 个蝶形单元。

FFT算法流程说明

☆ 每级的若干蝶形单元组成“群”。第1级群数为 $N/2$ ，第2级群数为 $N/4$ ，……第 i 级群数为 $N/2^i$ ，最后一级的群数为1。

☆ 每个蝶形单元都包含乘 W^{nk} 与 $-W^{nk}$ 的运算（可简化为乘 W^{nk} 与加、减法各一次）。

☆ 同一级中，各个群的 W 分布规律完全相同

FFT算法流程说明

第1级: W_N^0

各级中W的排列规律（自上而下）

第2级: W_N^0 $W_N^{\frac{N}{4}}$

第3级: W_N^0 $W_N^{\frac{N}{8}}$ $W_N^{\frac{3N}{8}}$

.....

次序

第i级: W_N^0 $W_N^{\frac{N}{2^i}}$ $W_N^{\frac{2N}{2^i}}$

$$W_N^{(2^{i-1}-1)\frac{N}{2^i}}$$

.....

第M级: W_N^0 W_N^1 W_N^2 W_N^3

W的指数为：
次序 * 本级群数

FFT算法流程说明

码位倒读

输入序列 $x(n)$ 的排列次序不符合自然顺序。此现象是由于按 n 的奇偶分组进行DFT运算而造成的，这种排列方式称为“码位倒读”的顺序。

所谓“倒读”，是指按二进制表示的数字首尾位置颠倒，重新按十进制读数。

FFT算法流程说明

码位倒读示例 ($N=8$)

| 自然顺序 | 二进制顺序 | 码位倒置 | 码位倒读顺序 |
|------|-------|------|--------|
| 0 | 000 | 000 | 0 |
| 1 | 001 | 100 | 4 |
| 2 | 010 | 010 | 2 |
| 3 | 011 | 110 | 6 |
| 4 | 100 | 001 | 1 |
| 5 | 101 | 101 | 5 |
| 6 | 110 | 011 | 3 |
| 7 | 111 | 111 | 7 |

FFT算法的复杂度

$N = 2^M$ 设预先计算好 W_N^k

一个蝶形单元的计算需要2次复数加法和1次复数乘法
对任一次迭代：共有 $N/2$ 个蝶形单元，因此需 N 次复数加法和 $N/2$ 次复数乘法

M次迭代的
总计算量为

复数加法次数

$$M \bullet 2 \bullet N / 2 = N \log_2 N$$

复数乘法次数

$$M \bullet \frac{N}{2} = \frac{1}{2} N \log_2 N$$

→ 算法复杂度

$$O(N \log_2 N)$$

IDFT同样可用FFT实现，算法复杂度相同。

4.7 IDFT的快速算法 (IFFT)

$$X(k) \begin{cases} X(2r) \xrightarrow{\frac{N}{2} \text{点IDFT}} x_1(n) \\ (r=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1) \\ X(2r+1) \xrightarrow{\frac{N}{2} \text{点IDFT}} x_2(n) \end{cases}$$

图4.15 IFFT的蝶形图

4.8 FFT的软件实现

1. FFT算法的C语言程序设计

FFT运算的基本单元是“蝶形单元”，其蝶形运算式为

$$\begin{cases} X(k) = Y(k) + W_N^k Z(k) \\ X(k + \frac{N}{2}) = Y(k) - W_N^k Z(k) \end{cases}$$

为简便，把所有蝶形单元的运算统一表示为

$$\begin{cases} A = C + W_N^k D \\ B = C - W_N^k D \end{cases}$$

A和B蝶形单元的输出，C和D是输入。

4.9 离散傅里叶变换的应用

4.9.1 用FFT实现快速卷积

1. 用FFT计算线卷积的基本原理和方法

将进行卷积的两序列的长度（即两序列的点数，分别为 N_1 和 N_2 ）均加长至 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ ，然后再进行圆卷积，则其圆卷积的结果与线卷积的结果相同。

根据上述原理，可以得出用FFT求解两序列线卷积的原理框图。

4.9 离散傅里叶变换的应用

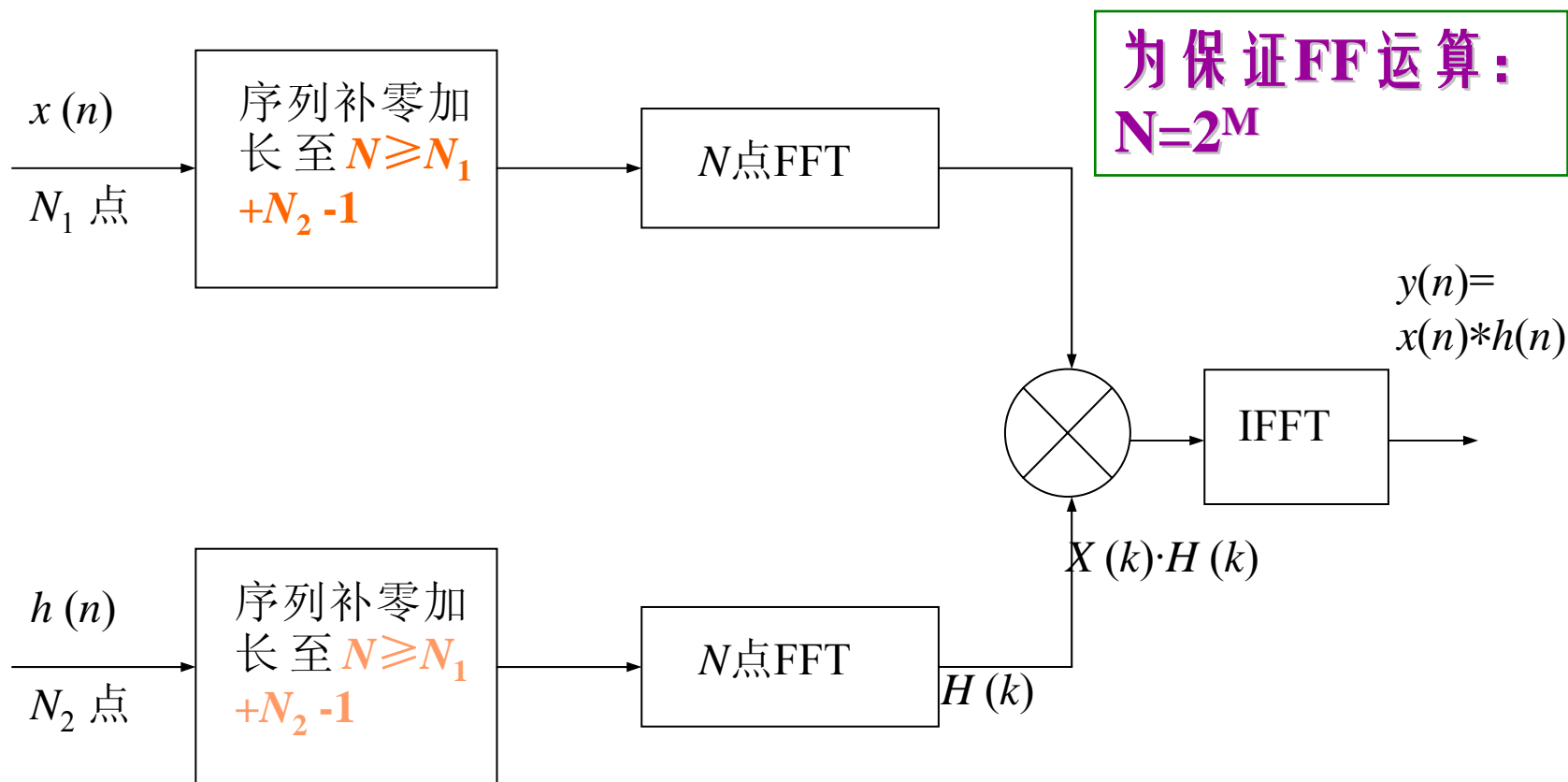


图4.18 应用FFT计算线卷积

4.9 离散傅里叶变换的应用

“分段快速卷积”的方法 --- (“重叠相加法”)

一个序列较短，一个序列相对较长，如果短序列补零多，会导致无谓计算量的增加。这时，可采用：

(1) 把序列分成若干小段，每小段分别与短序列作卷积运算；

(2) 把所有的分段卷积结果相叠加，就是线卷积的最后结果。

下面对这种所谓的“重叠相加法”作一简单的介绍。

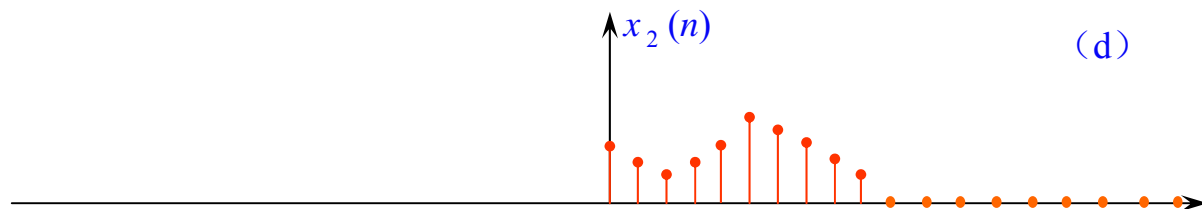
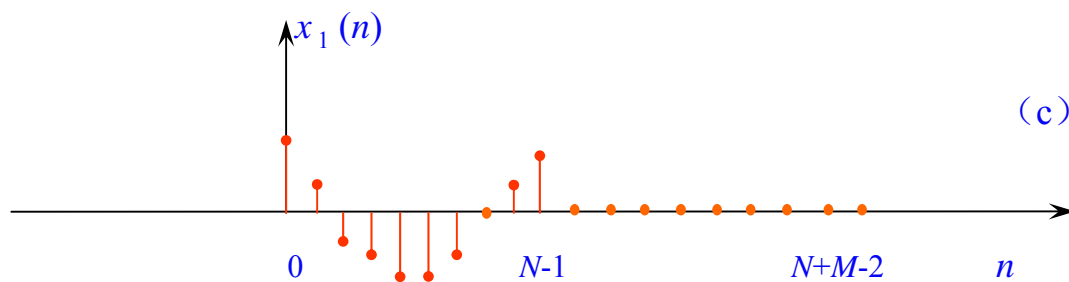
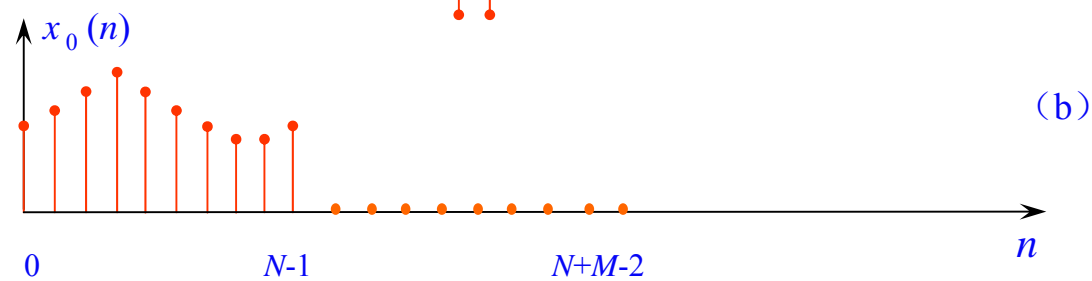
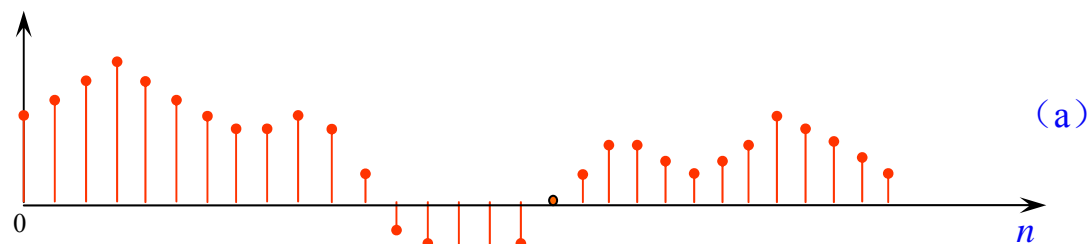
4.9 离散傅里叶变换的应用

设 $x(n)$ 为无限长序列， $h(n)$ 的长度为 M ，将 $x(n)$ 进行分段，它们的线卷积可表示为

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m)h(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m) + \sum_{m=N}^{2N-1} x(m)h(n-m) + \cdots \\ &\quad + \sum_{m=kN}^{(k+1)N-1} x(m)h(n-m) + \cdots \end{aligned} \quad (4.77)$$

每段线卷积的结果长度均为 $N+M-1$ ，每段的起始序列号 kN 。这表明：相邻卷积段存在 $M-1$ 个点重叠段。

快速卷积法（圆卷积）求解各段卷积，可以在各段的尾部补 $M-1$ 个零。



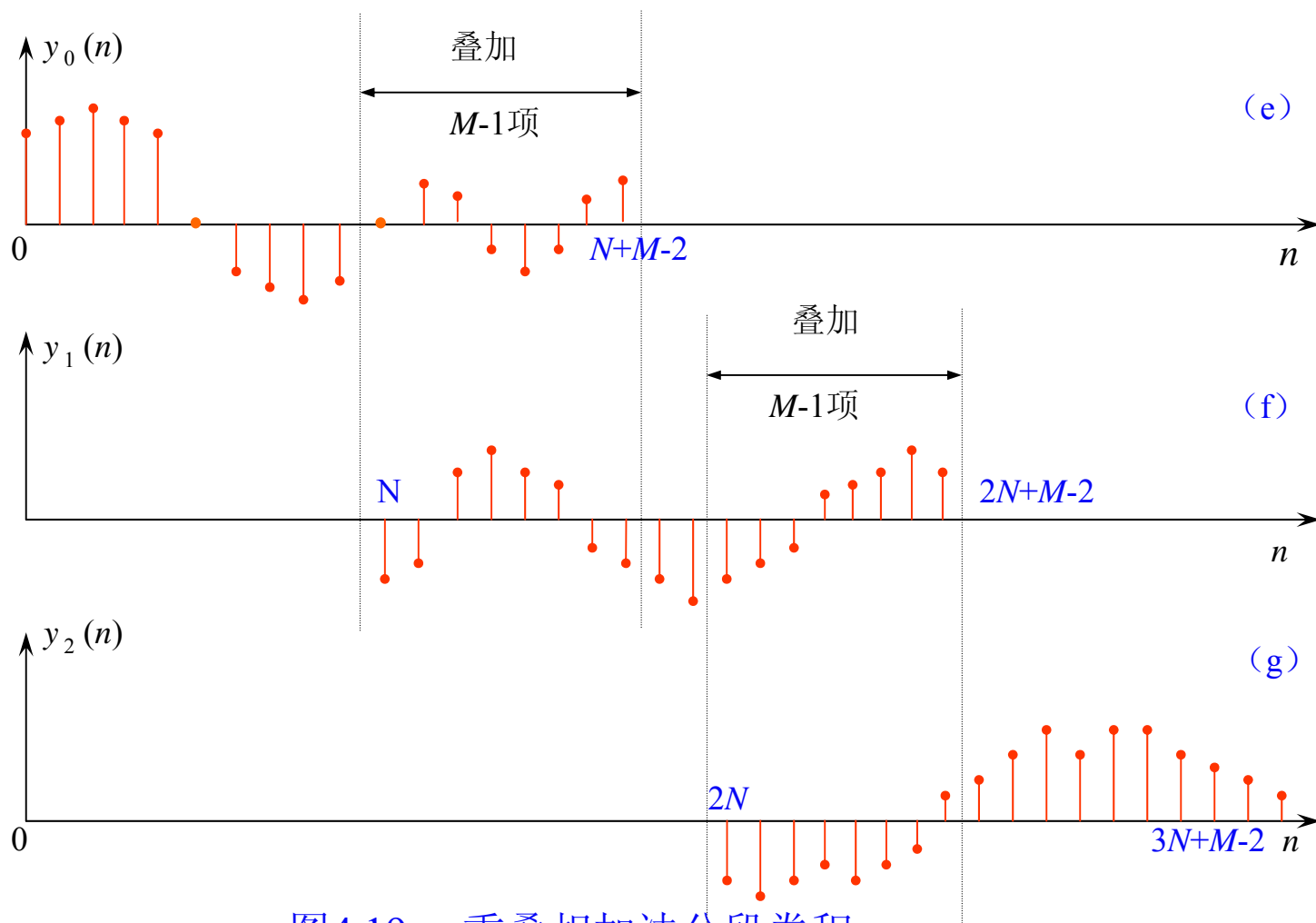


图4.19 重叠相加法分段卷积

4.9 离散傅里叶变换的应用

4.9.2 连续时间信号的数字谱分析

连续时间信号要应用FFT进行分析和处理，必须在时、频域对参数进行：

(1) 有限化； (2) 离散化处理。

1. 时域的有限化和离散化

时域的有限化，就是对信号的延续时间沿时间轴进行截断。

时域的离散化，就是对连续信号进行抽样。

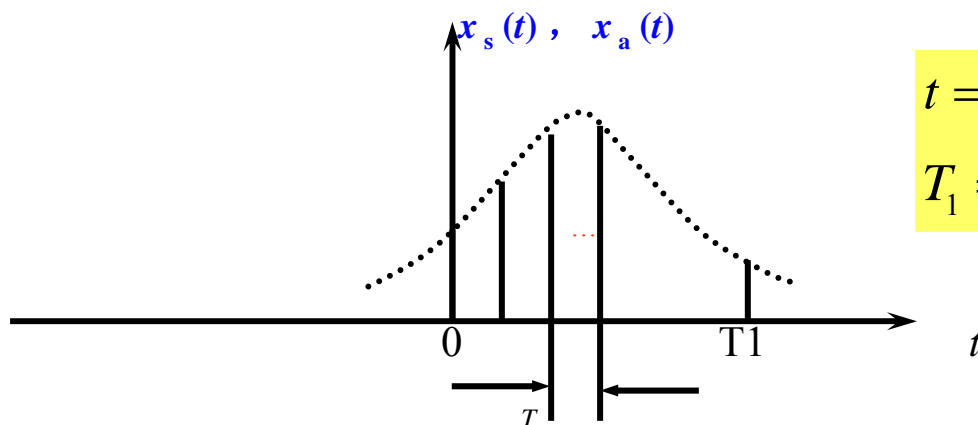


图4.22 连续信号时域的有限化和离散化

有限化和离散化处理后原连续信号的频谱应近似表示为

$$X_a(\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

2. 频域的有限化和离散化

与时域类似，应对 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(\Omega)$ 进行有限化和离散化处理。

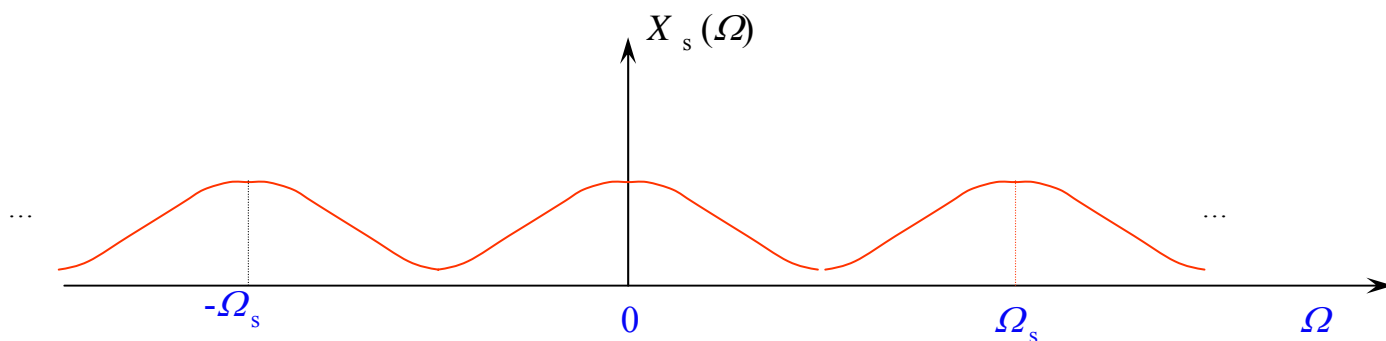


图4.23 时域离散化后的 $x_s(t)$ 的频谱 $X_s(\Omega)$

频域的**有限化**，在频率轴上取一个周期的频率区间，通常取所谓的“**主值区间**”，即 $[0, \Omega_s]$ 。

频域的离散化（频域抽样）就是对一个周期内的频谱进行抽样。

4.9 离散傅里叶变换的应用

用 $X_a(k\Omega_1)$ 来表示非周期信号频谱离散化后的频谱。其结果分别如下图和下面所推得的公式

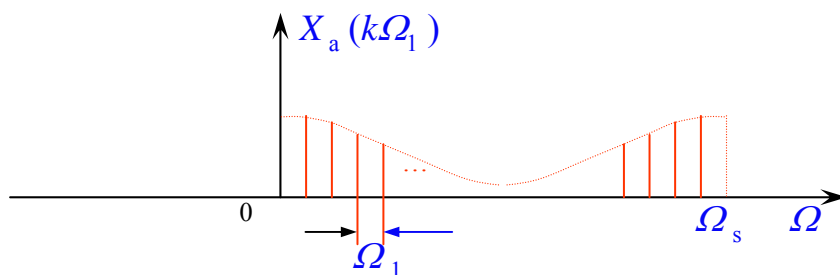


图4.24 信号 $x_s(t)$ 频谱上一个周期上的有限化和离散化

$$\begin{aligned} X_a(k\Omega_1) &\approx T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-jk \frac{2\pi}{NT} nT} \\ &= T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \\ &= T \cdot \text{DFT}[x_a(nT)] \\ &= T \cdot X(k) \end{aligned}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

3. 误差分析

(1) 混叠误差

产生混叠误差的原因是由于信号的离散化是通过抽样实现的，而抽样频率再高总是有限的，除带限信号外，如果信号的最高频率 $\Omega_m \rightarrow \infty$ ，则实际器件无法满足抽样定理，即 $\Omega_s < 2\Omega_m$ ，抽样过程如果不满足抽样定理，就会产生频谱的混叠，即混叠误差，要减少或避免混叠误差，应提高抽样频率，以设法满足抽样定理，或者采用抗混叠滤波这样的信号预处理措施。

4.9 离散傅里叶变换的应用

(2) 栅栏效应

对于非周期信号来说，理论上应当具有连续的频谱，但数字谱分析是用DFT来近似，是用频谱的抽样值逼近连续频谱值，只能观察到有限（ N ）个频谱值，每一个间隔中的频谱都观察不到了，如同通过“栅栏”观察景物一样，一部分景物被“栅栏”所阻挡，看不见，把这种现象称为栅栏效应，连续时间信号只要采用数字谱分析的方法，就必定产生栅栏效应，只能减小而无法避免。把能够感受的频谱最小间隔值，称为频谱分辨率，一般表示为 $[F]$ 。

4.9 离散傅里叶变换的应用

若抽样周期为 T ，抽样点数为 N ，则有

$$[F] = 1 / (NT)$$

NT 实际就是信号在时域上的截断长度 T_1 ，

分辨力 $[F]$ 与 T_1 成反比，因此为了减小栅栏效应，应当增加 T_1 ，可用两种方法来实现：

- (A) 通过加长数据的截断长度，即增加数据点数 N
- (B) 在所截断得到的数据末端补零，增加 T_1

4.9 离散傅里叶变换的应用

(3) 截断误差（频谱泄漏）

截断误差就是由于对信号进行截断，把无限长的信号限定为有限长，即令有限区间以外的函数值均为零值的近似处理而产生的，这种处理相当于用一个矩形（窗）信号乘待分析的连续时间信号。信号被截断后的频谱为

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * W(\Omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(\lambda) W(\Omega - \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

设 $x_a(t) = \cos \Omega_0 t$ $-\infty < t < \infty$
则有

$$X_a(\Omega) = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$W(\Omega) = T_1 \text{Sa}\left(\frac{\Omega T_1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} X_a(\Omega) * W(\Omega) = \frac{1}{2\pi} W(\Omega) * \{\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]\} \\ &= \frac{1}{2} W(\Omega + \Omega_0) + \frac{1}{2} W(\Omega - \Omega_0) \end{aligned}$$

画成谱图，如图所示。

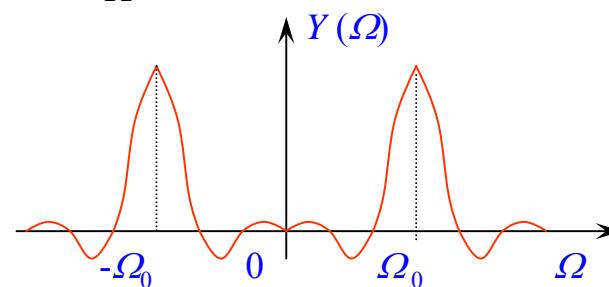
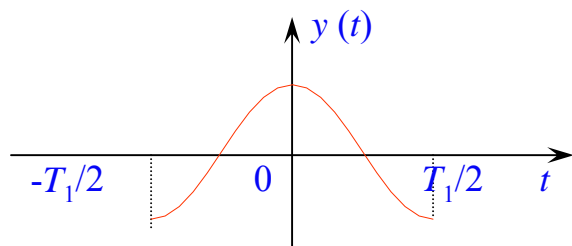
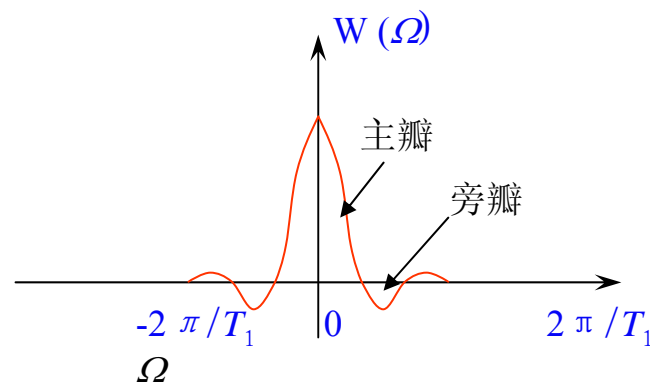
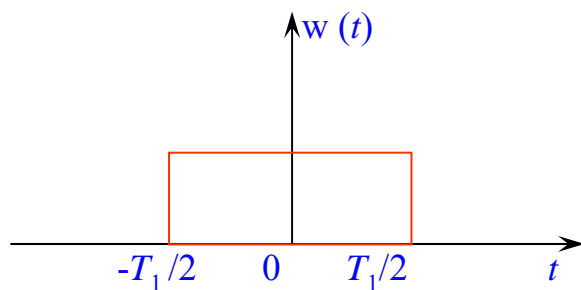
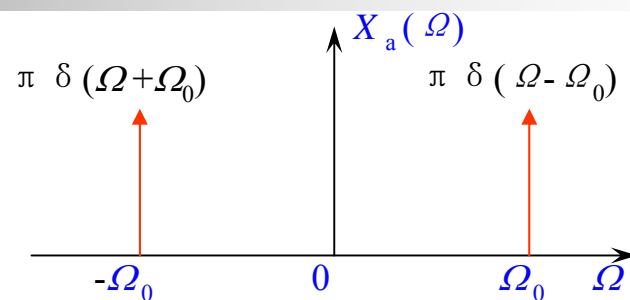
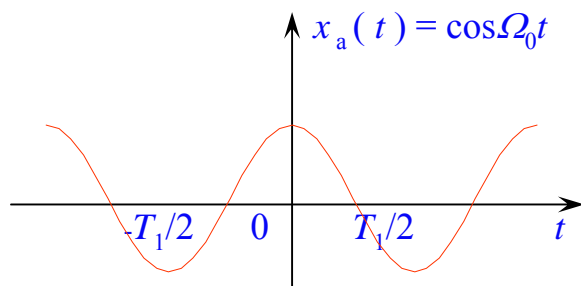


图4.26 频谱泄漏现象

4.9 离散傅里叶变换的应用

余弦信号被矩形窗信号截断后，两根冲激谱线变成了以 $\pm\Omega_0$ 为中心的Sa（）形的连续谱，相当于频谱从 Ω_0 处“泄漏”到其它频率处，也就是说，原来一个周期内只有一个频率上有非零值，而现在几乎所有频率上都有非零值，这就是频谱泄漏现象。更为复杂的信号，造成更复杂的“泄漏”，互相叠加，造成信号难以分辨。

虚拟频谱分析仪

4.9 离散傅里叶变换的应用

减小频谱泄漏的方法一般有两种：

- (1) 增加截断长度 T_1
- (2) 改变窗口形状

从原理上看，要减少截断误差，应使主瓣和 / 或旁瓣缩小，从而使实际频谱接近原频谱。但是从能量守恒的角度分析：旁瓣减小，则主瓣增大；或旁瓣增大，则主瓣缩小，后者容易造成旁瓣、主瓣分辨不清，引起有两个主瓣的误解。因此，一般宁可以增大主瓣为代价，缩小旁瓣，使能量集中于主瓣。

4.9 离散傅里叶变换的应用

可以考虑改用幂窗、三角函数窗和指数窗。由于这些窗口函数时域上变化相对平缓，窗口的边缘值为零，高频分量衰减增快，旁瓣明显受到抑制，减少了频谱泄漏。但旁瓣受到抑制的同时，主瓣相应加宽，而且旁瓣只是受到抑制，不可能完全被消除，因此不管采用哪种窗函数，频谱泄漏只能减弱，不能消除，抑制旁瓣和减小主瓣也不可能同时兼顾，应根据实际需要进行综合考虑。

4.9 离散傅里叶变换的应用

4. 周期信号的数字谱分析

周期连续信号 $x_p(t)$ 的频谱由下式近似计算

$$X_p(k) \approx \frac{1}{N} \text{DFT}[x(n)] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$x_p(n) \approx N \cdot \text{IDFT}[X(k)] \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

连续周期信号是非时限信号，若要用FFT做数字谱分析，必须在时域进行有限化（截断）和离散化（采样）处理，对于一个带限（频谱为有限区间）的周期信号，若抽样频率满足抽样条件，并且作整周期截断，不会产生频谱的混叠。实际上，要实现真正的整周期截断是很难的，如果是非整周期截断，则会产生频谱的泄漏误差，要通过加合适窗的方法来减少频谱泄漏。

4.9 离散傅里叶变换的应用

5. DFT参数的选择

(1) 抽样频率 f_s 。

根据抽样定理，应当满足： $f_s \geq 2 f_h$ ，即 $1/T \geq 2 f_h$ ，则 $T \leq 1/2f_h$ 。

但有的时候 f_h 的值并不清楚，可以先估计一个值，进行计算，若结果不理想，将 f_h 再增加一倍，再进行运算，直至满足要求为止。

4.9 离散傅里叶变换的应用

(2) 数据长度 T_1

由于 $1/T_1 < [F]$ ，要求频谱分辨力高，即 $[F]$ 要小，则 T_1 应加长，只要有可能， T_1 尽量取大些。但 $T_1 = NT$ ， T 为采样间隔（周期），如果 T_1 要大，而点数 N 不能增加， T 就需要增加，这就意味着采样频率的下降，造成频谱混叠的加剧，这是需要注意的。

4.9 离散傅里叶变换的应用

(3) 点数N

如上所述，如果一味追求高频谱分辨力，T不变，必然要增加N，加大数据处理量。而N不增加，则T就需要增，就会加重频谱的混叠，因此对频谱分辨力的要求要适当。同时，由

$$\begin{cases} T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h} \\ [F] = \frac{1}{NT} \end{cases}$$

得

$$[F] \geq \frac{2f_h}{N}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

从而可知：若 N 不变， f_h 增加， $[F]$ 也增加，分辨力下降，相反 N 不变， f_h 减小，分辨力提高，因此 f_h 的高低，直接影响分辨力， f_h 称为高频容量。

(4) 选窗口

为了减小频谱泄漏误差，通常可以选择适当的窗函数来解决。如果待分析的信号无需截断，就不必加窗。

4.9 离散傅里叶变换的应用

4.9.3 FFT在动态测试数据处理中的应用

1. 任意输入作用的时域响应求系统频率特性

对一线性系统A，在时域，任意一输入作用于系统，其系统响应可作如下分析：

系统A的频率响应 $H(j\Omega)$ 为（ $t < 0$ 时， $x(t) = 0$,
 $y(t) = 0$ ）

$$\left. \begin{aligned} U_r(j\Omega) &= \frac{u_r(\infty)}{j\Omega} + \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt = R_1(\Omega) + jI_1(\Omega) \\ U_c(j\Omega) &= \frac{u_c(\infty)}{j\Omega} + \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\Omega t} dt = R_2(\Omega) + jI_2(\Omega) \end{aligned} \right\}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

系统的频率特性进一步表示为

$$H(j\Omega) = \frac{U_c(j\Omega)}{U_r(j\Omega)} = \frac{R_2(\Omega) + jI_2(\Omega)}{R_1(\Omega) + jI_1(\Omega)} = R(\Omega) + jI(\Omega)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R(\Omega) &= \frac{R_1(\Omega)R_2(\Omega) + I_1(\Omega)I_2(\Omega)}{R_1^2(\Omega) + I_1^2(\Omega)} \\ I(\Omega) &= \frac{R_1(\Omega)I_2(\Omega) - I_1(\Omega)R_2(\Omega)}{R_1^2(\Omega) + I_1^2(\Omega)} \end{aligned} \right\}$$

可得其幅、相谱特性为

$$\left. \begin{aligned} A(\Omega) &= \sqrt{R^2(\Omega) + I^2(\Omega)} \\ \phi(\Omega) &= \arctan \frac{I(\Omega)}{R(\Omega)} \end{aligned} \right\}$$

由以上各式，就可以从时域响应求出系统A的频率特性

4.9 离散傅里叶变换的应用

2. 由阶跃响应求频率特性的计算方法

阶跃的输入和响应分别表示为

$$\left. \begin{aligned} u_r(t) = \varepsilon(t) &= \begin{cases} u_r(\infty) = 1, & t \rightarrow \infty \\ x(t) = 0, & t = 0 \end{cases} \\ u_c(t) &= \begin{cases} u_c(\infty) = 1, & t \rightarrow \infty \\ y(t) + u_c(\infty) & \text{其它 } t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

由阶跃输入和响应的表达式，可得

$$U_r(j\Omega) = \frac{u_r(\infty)}{j\Omega} + \int_0^\infty x(t)e^{-j\Omega t} dt = R_1(\Omega) + jI_1(\Omega) = -j\frac{1}{\Omega} + 0 = -j\frac{1}{\Omega} \quad (4.95)$$

$$U_c(j\Omega) = \frac{u_c(\infty)}{j\Omega} + \int_0^\infty y(t)e^{-j\Omega t} dt = R_2(\Omega) + jI_2(\Omega) = -j\frac{1}{\Omega} + R_y(\Omega) + jI_y(\Omega) \quad (4.96)$$

\therefore

$$\begin{cases} R_1(\Omega) = 0 \\ I_1(\Omega) = -\frac{1}{\Omega} \\ R_2(\Omega) = R_y(\Omega) \\ I_2(\Omega) = -\frac{1}{\Omega} + I_y(\Omega) \end{cases}$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

所以

$$R(\Omega) = \frac{R_1(\Omega)R_2(\Omega) + I_1(\Omega)I_2(\Omega)}{R_1^2(\Omega) + I_1^2(\Omega)} = 1 - \Omega I_y(\Omega) \quad (4.97)$$

$$I(\Omega) = \frac{I_2(\Omega)R_1(\Omega) - I_1(\Omega)R_2(\Omega)}{R_1^2(\Omega) + I_1^2(\Omega)} = \Omega R_y(\Omega) \quad (4.98)$$

上两式中的是系统阶跃响应中的瞬态分量 $y(t)$ 的傅里叶变换的实部和虚部，即

$$Y(j\Omega) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-j\Omega t} dt = R_y(\Omega) + jI_y(\Omega)$$

4.9 离散傅里叶变换的应用

进行有限化、离散化处理，得

$$Y(j\Omega) = \int_0^\infty y(t)e^{-j\Omega t} dt \approx \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-j\Omega k(\Delta t)} \approx \Delta t Y_c(\Omega) \quad (4.100)$$

$$Y_c(\Omega) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-j\Omega k(\Delta t)} \quad (4.101)$$

再设： $\Omega = n \Delta\Omega$, $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N \cdot \Delta t}$, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ，则有

$$Y_c(\Omega) \approx Y_c(n \Delta\Omega) = Y_c(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k)W_N^{nk} = R_c(n) + jI_c(n)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad R_c(n), I_c(n)$$

对上式，利用FFT，可求出

从而有

4.9 离散傅里叶变换的应用

$$\left. \begin{aligned} R_y(\omega) &\approx \Delta t R_c(n) \\ I_y(\omega) &\approx \Delta t I_c(n) \end{aligned} \right\}$$

从而可求出系统的频率特性

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(\omega) &= \sqrt{\hat{R}^2(\omega) + \hat{I}^2(\omega)} \\ \hat{\phi}(\omega) &= \arctan \frac{\hat{I}(\omega)}{\hat{R}(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{R}(\omega) &= 1 - \omega \Delta t I_c(n) \\ \omega &= n \Delta \omega \\ \hat{I}(\omega) &= \omega \Delta t R_c(n) \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$