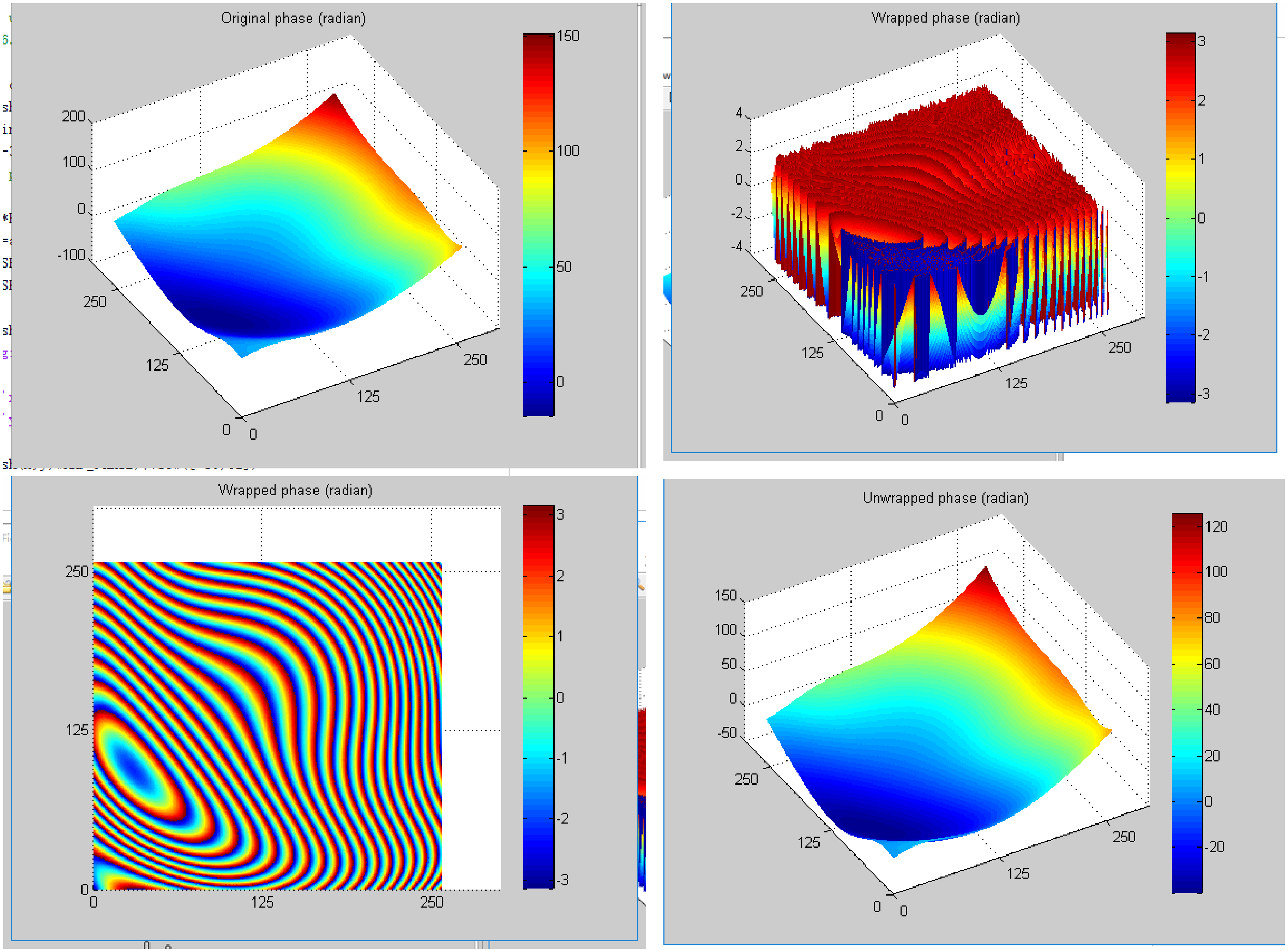
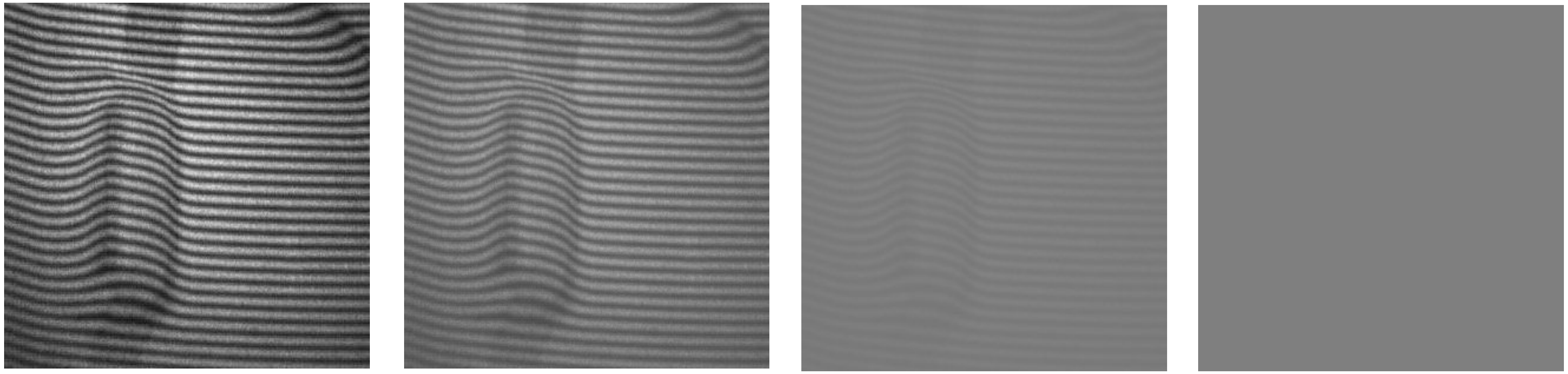
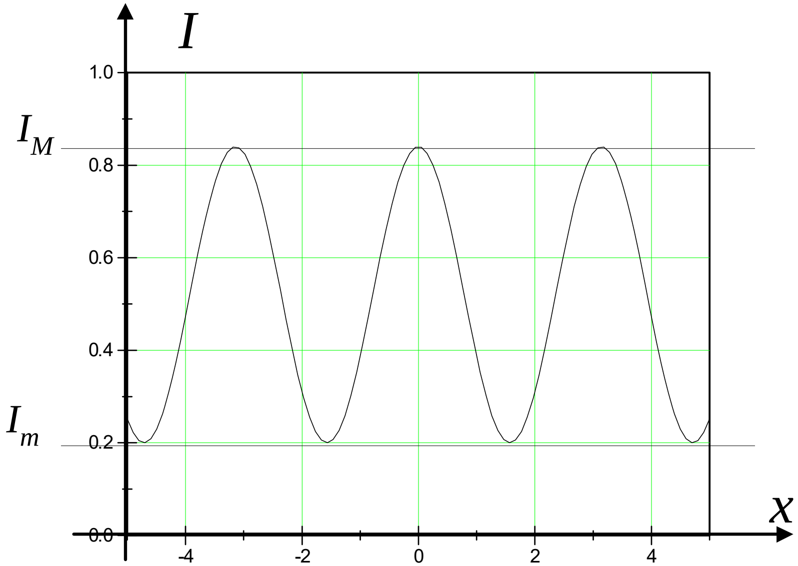

Original phase (radian)
200
100
0
-100
250
125
0
0
125
250
150
100
50
0
Wrapped phase (radian)
4
2
0
-2
-4
250
125
0
0
125
250
3
2
1
0
-1
-2
-3
Wrapped phase (radian)
250
125
0
0
125
250
3
2
1
0
-1
-2
-3
Unwrapped phase (radian)
150
100
50
0
-50
250
125
0
0
125
250
120
100
80
60
40
20
0
-20

§12－3 干涉条纹的可见度



可见度定义：

$$K = (I_M - I_m)/(I_M + I_m)$$



K表征了干涉场中某处

干涉条纹亮暗反差的程度。

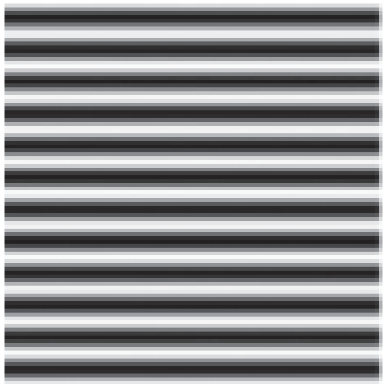
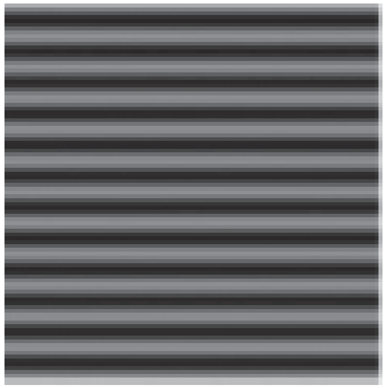
对于双光束干涉：

$$I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad I_m = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

$$K = 2\sqrt{I_1 I_2} \big/ (I_1 + I_2)$$

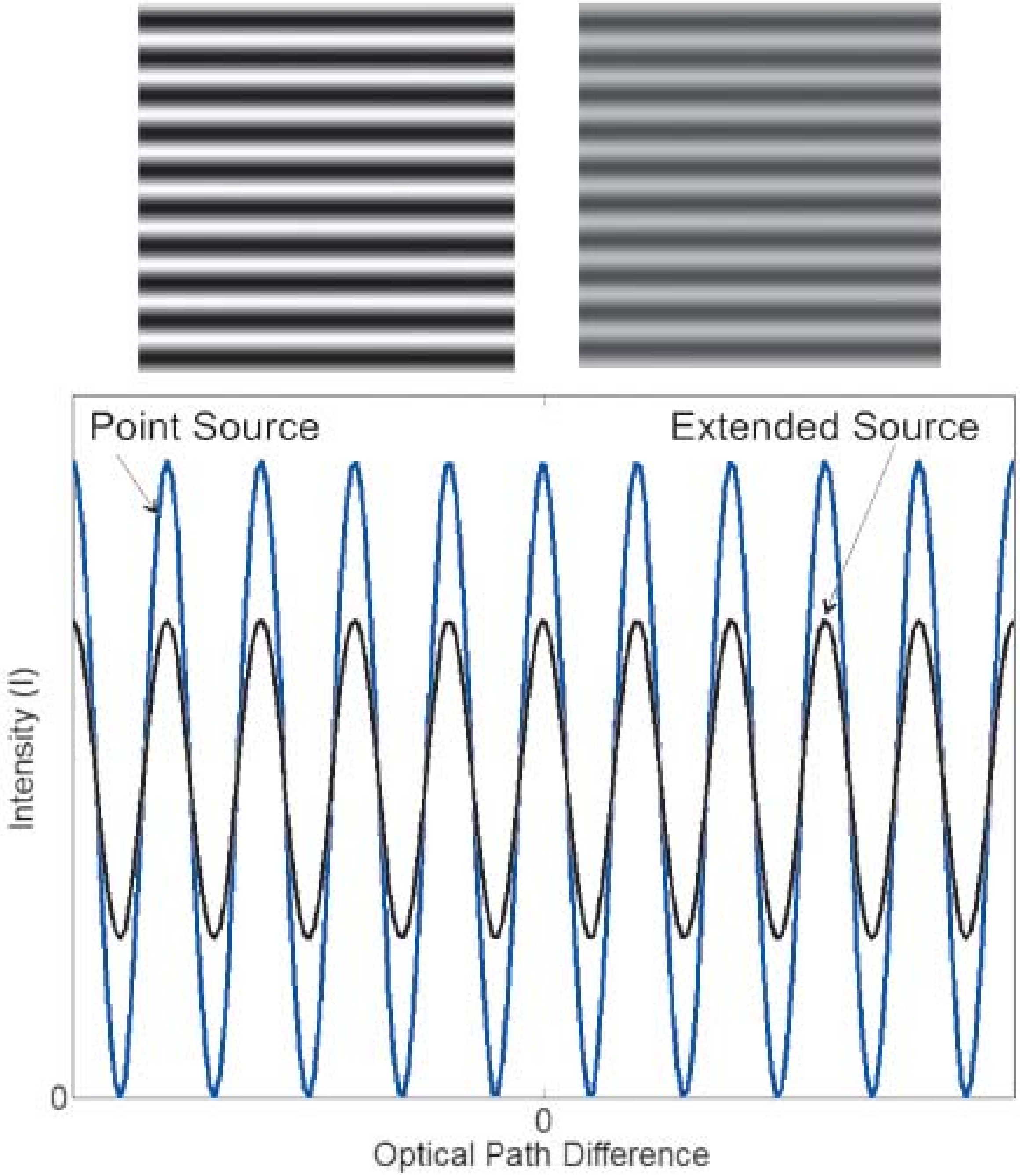
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \\ &= (I_1 + I_2)\left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\cos\delta\right) \\ &= (I_1 + I_2)(1 + K\cos\delta) \end{aligned}$$ 式（12-19a）

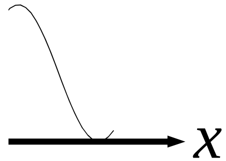
一、*振幅比*对条纹可见度的影响

Ratio between Amplitudes of Interfering Beams			
1	0.5	0.25	0.1
Interference Fringes			
			

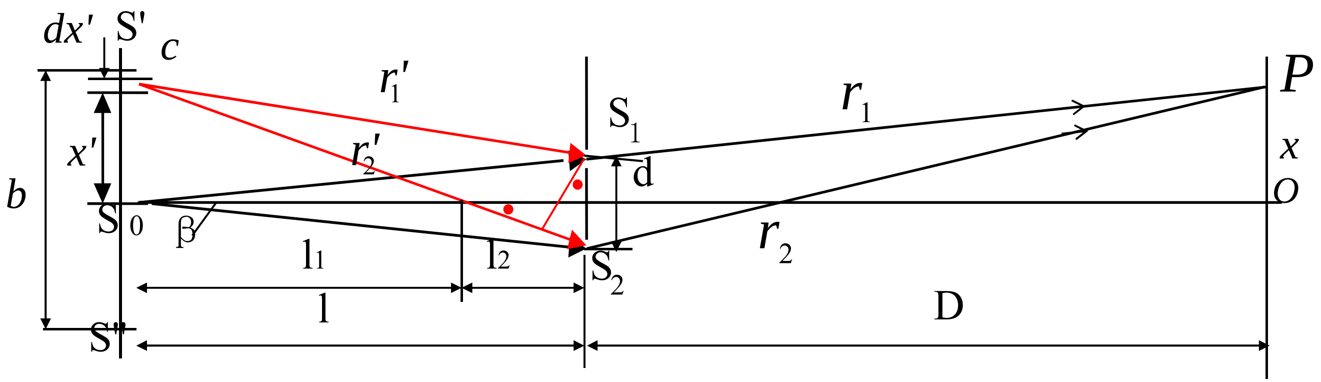
目视干涉仪：**K>0.75** 好
K>0.5 满意
K=0.1 可辨认

二、


Point Source
Extended Source
Intensity (I)
0
0
Optical Path Difference


x

1、光源宽度 对条纹可见度的影响



c发出的光线到P:

光程差$=(r_2-r_1)+(r_2'-r_1')=\Delta+\Delta'$

其中$\Delta=\dfrac{d}{D}x,\ \ \Delta'=\dfrac{d}{l}x'=\beta x'$

β被称为干涉孔径角

孔径角定义：到达干涉场某一点的**两支相干光从发光点发出时的夹角**

设I_0为单位宽度光源在P平面上的光强值，

c处的元光源在P点的光强：$dI = 2I_0 dx'[1+\cos k(\Delta+\Delta')]$

宽度为b的整个光源在P点的光强：

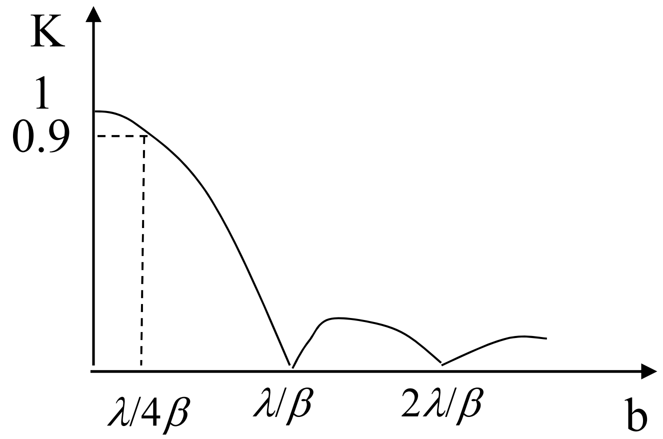
$$I = \int_{-b/2}^{b/2} 2I_0[1+\cos k(\Delta+\Delta')]dx'$$

$$= 2I_0 b\left[1+\frac{\sin \pi b\beta/\lambda}{\pi b\beta/\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{d}{D}x\right)\right]$$

$$K = \left|\frac{\lambda}{\pi b\beta}\sin\frac{\pi b\beta}{\lambda}\right|$$

讨论：

$$K = \left| \frac{\lambda}{\pi b \beta} \sin \frac{\pi b \beta}{\lambda} \right|$$



1）光源的临界宽度：条纹可见度为0时的光源宽度

$$临界宽度 b_c = \frac{\lambda}{\beta}$$

2）光源的允许宽度：能够清晰地观察到干涉条纹时，允许的光源宽度

$$允许宽度 b_p = \frac{\lambda}{4\beta}$$

2、空间相干性

若通过光波场***横向两点***的光在空间相遇时能够发生干涉，则称通过空间两点的光具有空间相干性。

横向相干宽度 $d_t = \lambda l/b = \lambda/\theta$ —— 扩展光源对o点张角

扩展光源方形-相干面积

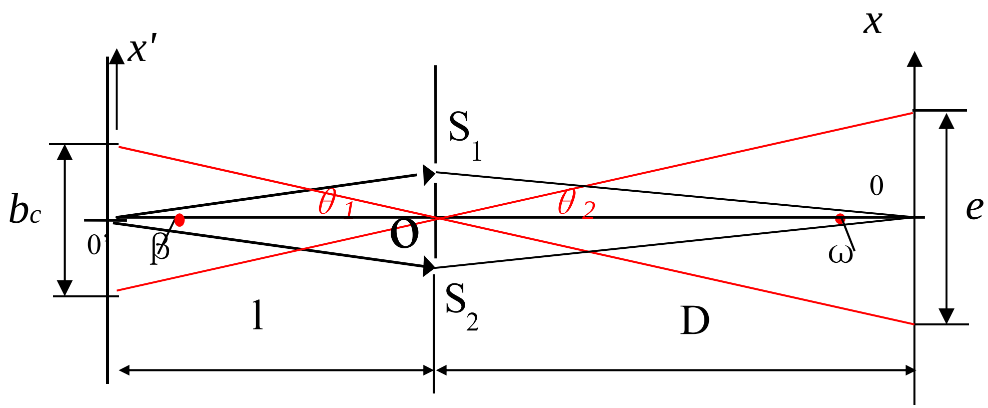
$$A = d_t^2 = (\lambda/\theta)^2$$

扩展光源圆形-相干宽度

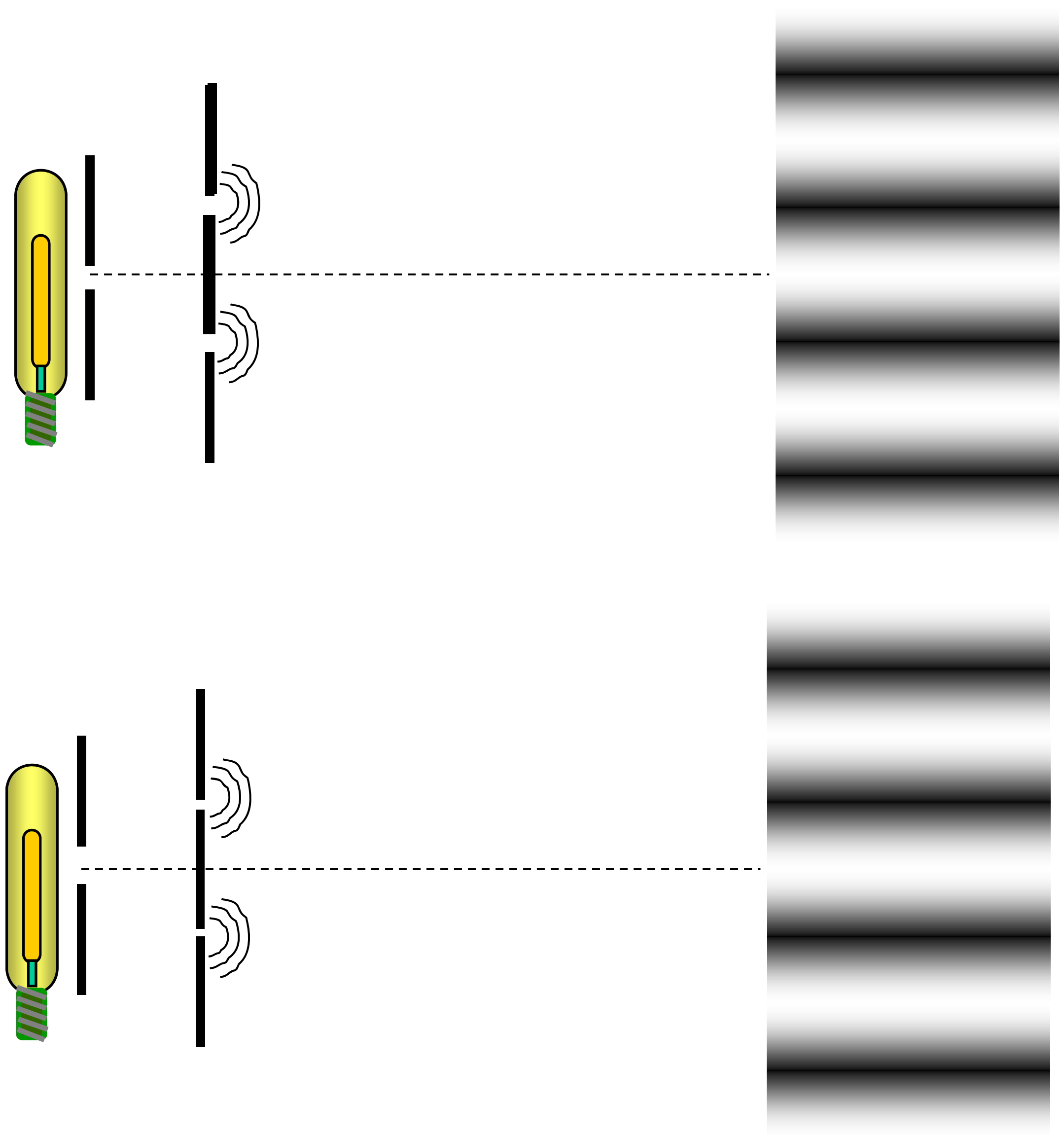
$$d_t = 1.22\lambda/\theta$$

相干面积

$$A = \frac{\pi}{4} d_t^2 = \frac{\pi}{4}(1.22\lambda/\theta)^2$$



干涉系统不变量 $b_c\beta = e\omega = d\theta = \lambda$

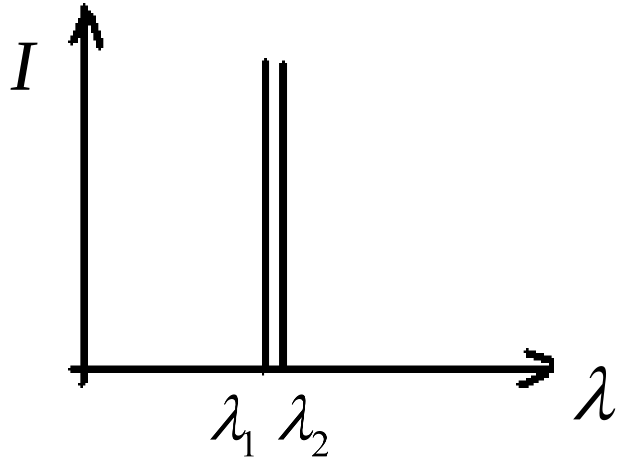


三、*光源非单色性*的影响和*时间相干性*

实际使用的单色光源有一定的光谱宽度 $\Delta\lambda$

3.1 非单色性的两种典型

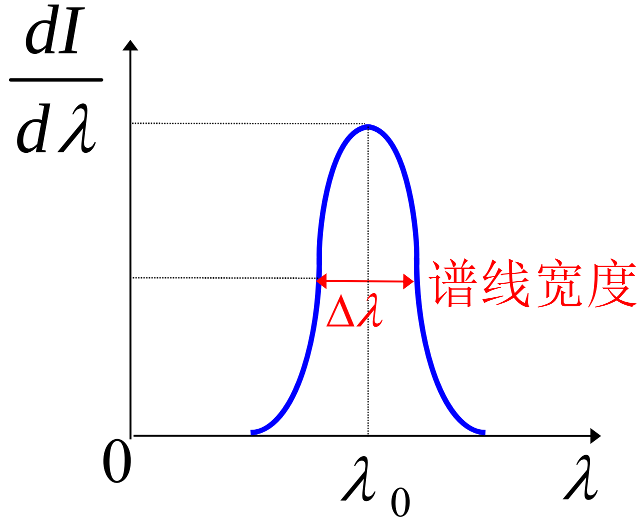
1、双线结构



波长差：

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 << \lambda_1, \lambda_2$$

2、单色线宽



中心波长为λ_0，谱线宽度为$\Delta\lambda$。用$\Delta\lambda/\lambda_0$标志单色性的好坏。

准单色光指的是它的谱线宽度

$$\Delta\lambda << \lambda_0$$

3.2 光谱双线结构对对比度 $\gamma(\Delta)$ 的影响

1、对比度的周期性变化

设初始等光程

$$\Delta = 0 \rightarrow (\lambda_1 \text{ 亮纹，} \lambda_2 \text{ 亮纹}) \rightarrow \text{ 干涉条纹清晰}$$

当光程差增加，且满足

$$\Delta_0 = N_0\lambda_1 = (N_0 - \frac{1}{2})\lambda_2 \rightarrow (\lambda_1 \text{ 亮纹}, \lambda_2 \text{ 暗纹}) \rightarrow \text{ 条纹模糊}$$

其中 $N_0 = \lambda_2 / 2\Delta\lambda \approx \bar{\lambda} / 2\Delta\lambda$

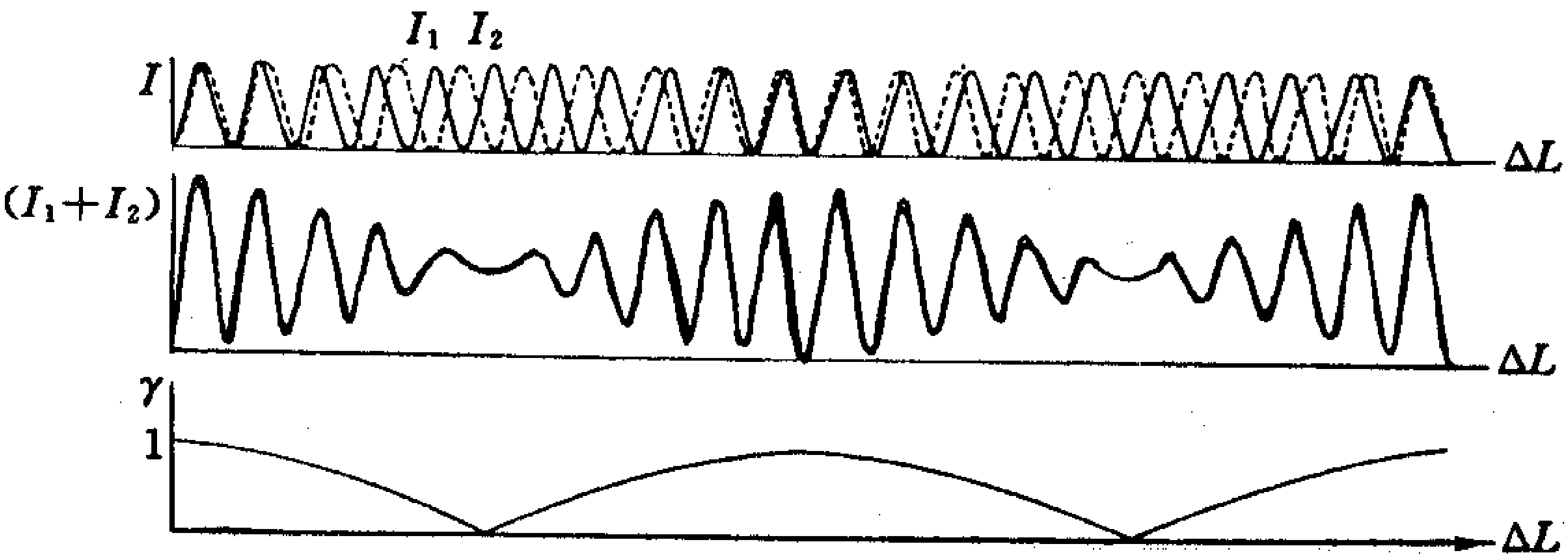
当光程差继续增加，且满足

$$\Delta = 2\Delta_0 = 2N_0\lambda_1 = (2N_0 - 1)\lambda_2$$

$$\rightarrow (\lambda_1 \text{亮纹}, \lambda_2 \text{亮纹}) \rightarrow \text{ 干涉条纹清晰}$$

随着光程差的逐渐增加，对比度呈现周期性变化，半周期为

$$\Delta_0 = N_0\lambda_1 = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda} \cdot \lambda_1 \approx \frac{\bar{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}$$



2、$\gamma(\Delta)$ 函数的数学描述

设参与相干的两束光的强度相近，故两者各自干涉场的对比度为1。

双光束干涉强度公式

$$
\begin{cases}
I_1(\Delta) = I_0(1+\cos k_1\Delta) & k_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1}; \\
I_2(\Delta) = I_0(1+\cos k_2\Delta) & k_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2}
\end{cases}
$$

双谱线(λ_1, λ_2)时的干涉强度是两者的非相干叠加，则

$$I(\Delta) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta)$$

$$= I_0(1+\cos k_1\Delta) + I_0(1+\cos k_2\Delta)$$

$$= 2I_0(1+\cos\frac{k_1+k_2}{2}\Delta\cos\frac{k_1-k_2}{2}\Delta)$$

$$= 2I_0(1+\cos(\frac{\Delta k}{2}\Delta)\cdot\cos\bar{k}\Delta)$$

其中 $\bar{k} = \dfrac{k_1+k_2}{2} >> \Delta k = k_1 - k_2$

$$\therefore \gamma(\Delta) = \left|\cos(\frac{\Delta k}{2}\Delta)\right|$$

$$\gamma(\Delta)=\left|\cos(\frac{\Delta k}{2}\Delta)\right|$$

当 $\Delta=0,\quad \gamma=1$

当 $\Delta=\pi/\Delta k$，$\gamma=0$

当 $\Delta=2\pi/\Delta k$，$\gamma=1$

干涉场中强度对比度随光程差作周期性变化，半周期为

$$\Delta_0=\frac{\pi}{\Delta k}=\frac{\pi}{k_1-k_2}=\frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}-\frac{2\pi}{\lambda_2}}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2-\lambda_1)}\approx\frac{\overline{\lambda}^2}{2\Delta\lambda}$$

3.3 准单色线宽对对比度的影响

1、谱密度函数

（1）定义：

设光源发出的到达干涉仪的光强，在谱域 $k\to k+\Delta k$ 中含有 $\Delta I_0\propto\Delta k$，则 $\Delta I_0=i(k)\cdot\Delta k$

表示为微分形式 $dI_0=i(k)dk,$

$i(k)$称作入射光的光强谱密度函数 $i(k)=\dfrac{dI_0}{dk}$

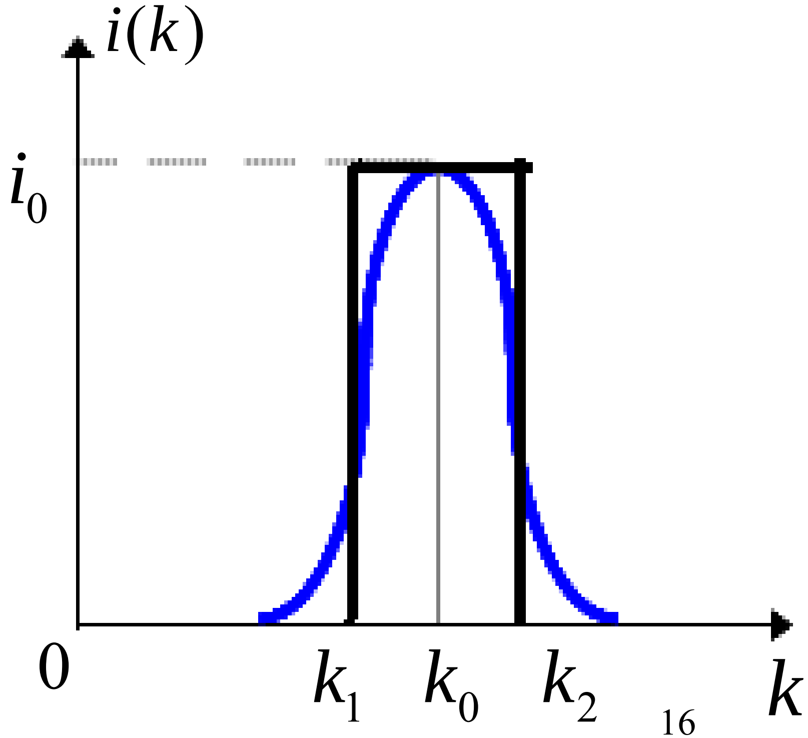
（2）物理意义

在波数k附近，单位波数间隔中入射光所含的光强。

（3）$i(k)$的具体形式

一般呈现钟型，采用简化模型——方垒型谱函数

$$i(k)=\begin{cases} i_0, |k-k_0|<\Delta k/2 \\ 0, |k-k_0|>\Delta k/2 \end{cases}$$



2、准单色线宽导致对比度下降

推导在方垒型谱函数下，干涉场的强度分布。

谱元$(k \to k+dk)$所贡献的相干强度为

$$dI = 2dI_0(1+\cos k\Delta) = 2i(k)(1+\cos k\Delta)dk$$

总强度为各谱元的非相干叠加

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} 2i(k)(1+\cos k\Delta)dk$$

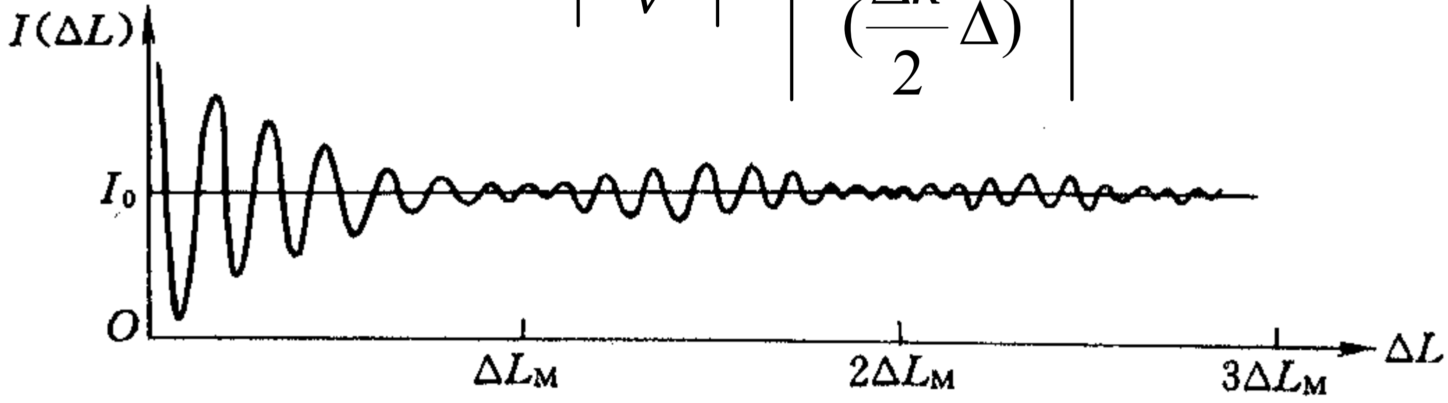
$$= \int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} 2i_0(1+\cos k\Delta)dk$$

$$= 2i_0\Delta k + \frac{2i_0}{\Delta}(\sin(k_0+\frac{\Delta k}{2})\Delta + \sin(-k_0+\frac{\Delta k}{2})\Delta)$$

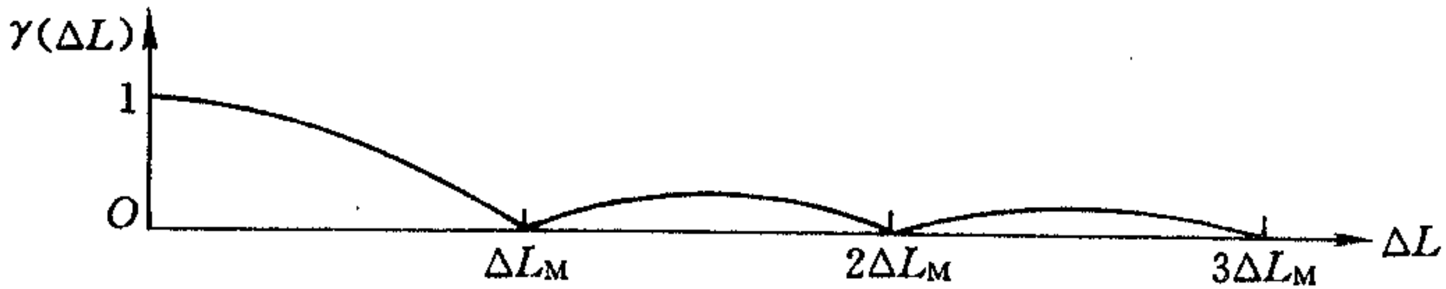
$$= 2I_0(1+\frac{\sin v}{v}\cos k_0\Delta)$$

其中$I_0 = i_0\Delta k$为入射的总光强。 $v = \frac{\Delta k}{2}\Delta$

$$\therefore \quad \gamma(\Delta) = \left|\frac{\sin v}{v}\right| = \left|\frac{\sin(\frac{\Delta k}{2}\Delta)}{(\frac{\Delta k}{2}\Delta)}\right|$$



(a)



(b)

3、最大光程差

第一次出现$\gamma = 0$时的光程差称作最大光程差 Δ_M。

$$\frac{\Delta k}{2}\Delta_M = \pi \qquad \therefore \quad \Delta_M = \frac{2\pi}{\Delta k} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

写成反比形式

$$\Delta_M \cdot \Delta k = 2\pi,\text{或}\Delta_M \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \lambda$$

物理意义：

当实际光程差 $\Delta < \Delta_M$ ，则对比度 $\gamma > 0$

当实际光程差 $\Delta \geq \Delta_M$ ，则对比度 $\gamma \approx 0$

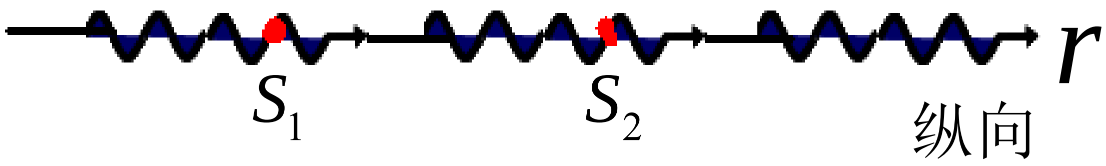
若用 $\Delta_M \to \Delta k$ ，则对比度的另一个形式

$$\therefore \quad \gamma(\Delta) = \left| \frac{\sin(\pi \dfrac{\Delta}{\Delta_M})}{(\pi \dfrac{\Delta}{\Delta_M})} \right|$$

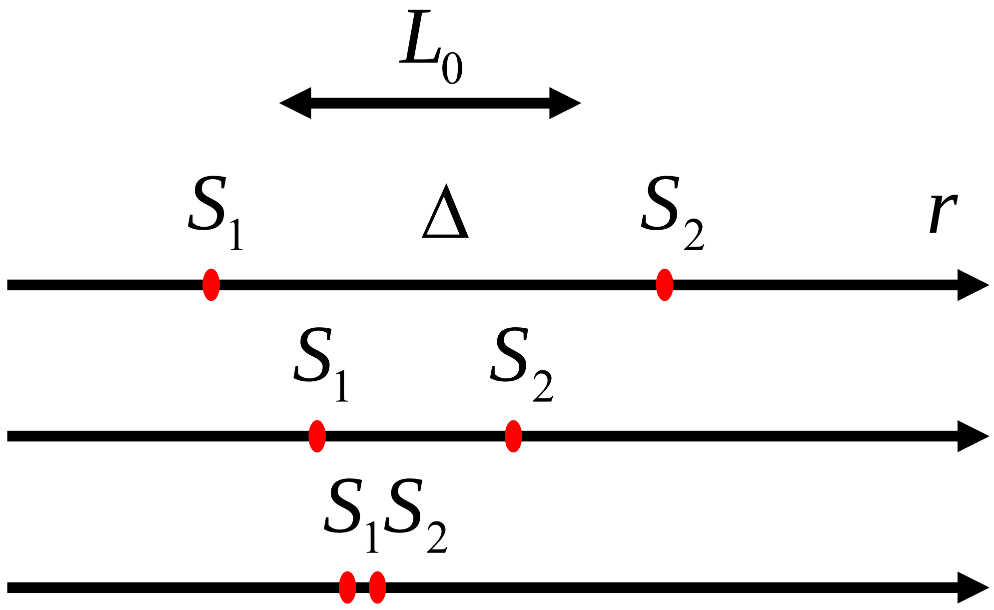
3.4 相干时间和相干长度

设微观上持续发光时间为τ_0量级，相应的在空间展开的波列长度，用光程来表示为

$$L_0 = c\tau_0$$



准单色光源发射的波列长度是有限的，相邻波列之间的相位关系是随机变化的，所以纵向不同波列S_2和S_1是非相干的。



$\Delta > L_0$ 则(S_1, S_2)非相干

$\Delta < L_0$ 则(S_1, S_2)部分相干

$\Delta \approx 0$ 则(S_1, S_2)完全相干

S_1与S_2的相干程度取决于实际光程差 Δ 与L_0(τ与τ_0)的比较。其中 $\tau_0 = \Delta / c$

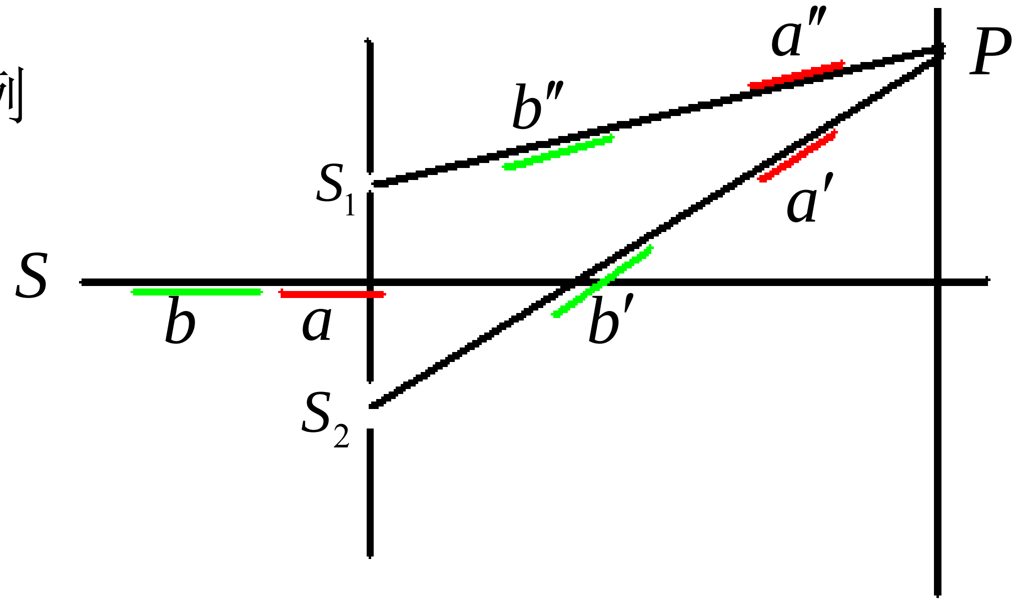
τ_0与L_0是决定光场纵向相干性的特征量，称τ_0为相干时间，L_0为相干长度。光场中这类相干性称为时间相干性。

因为波列是沿光的传播方向通过空间固定点的，所以时间相干性是光场的纵向相干性。

实际上，时间相干性指的是在非单色点源S照明的波场中两个次波源(S_1, S_2)在沿波线的纵向方向上相距多远还是相干的。

3.5 时间相干性的表现

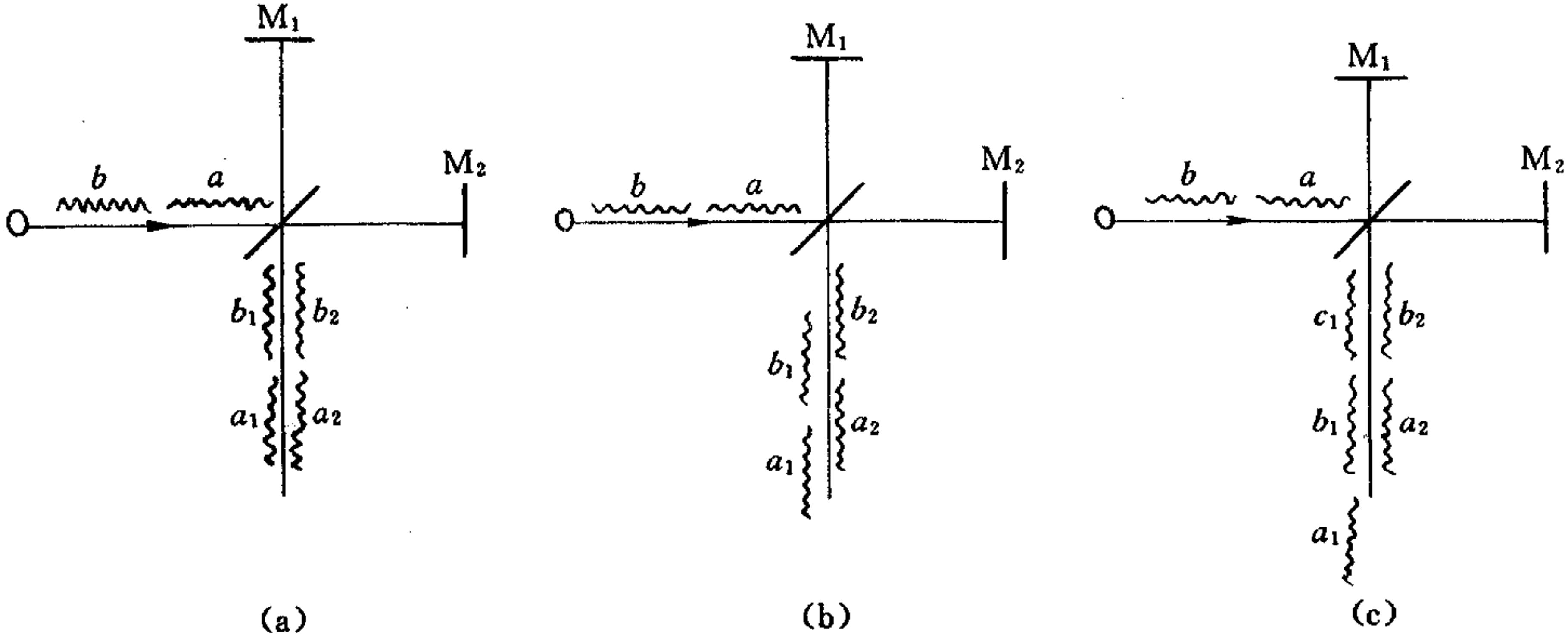
1、以杨氏双孔实验为例



同一波列分成的两部分经不同的路径再相遇时才能发生干涉。干涉的必要条件是两光波在相遇点的光程差应小于波列的长度，由上述的讨论可见，波列的长度至少应等于最大光程差。

一般地，$\Delta < d \leq L_0$ 时间相干性问题不突出。

2、长程差干涉—迈克尔逊干涉仪



$\Delta \approx 0$	$\Delta < L_0$	$\Delta > L_0$
清晰的干涉条纹	干涉条纹	干涉条纹消失

来自同一波列的两个子波列重叠的部分越多，在相遇点它们干涉的相互作用时间越长，引起的干涉效果越显著。

干涉测长仪中双臂的最大光程差$\Delta L_M{}'$受限于相干长度 L_0

$$\Delta L_M{}' = L_0 = c\tau_0$$

测长量程 $l_M{}' \approx \frac{1}{2} L_0 = \frac{1}{2} c\tau_0$

3.6 波列长度与谱线宽度互为表里

谱线宽度 $\Delta\lambda \to \Delta_M \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

波列长度 $L_0 \to \Delta L_M{}' \approx L_0$

$$\Rightarrow L_0 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

波列的有限长度 L_0与光波非单色性$\Delta\lambda$是互相联系的。

1、理论证明

对于非单色波，其中谱元$(k \to k+dk)$，贡献的复振幅为

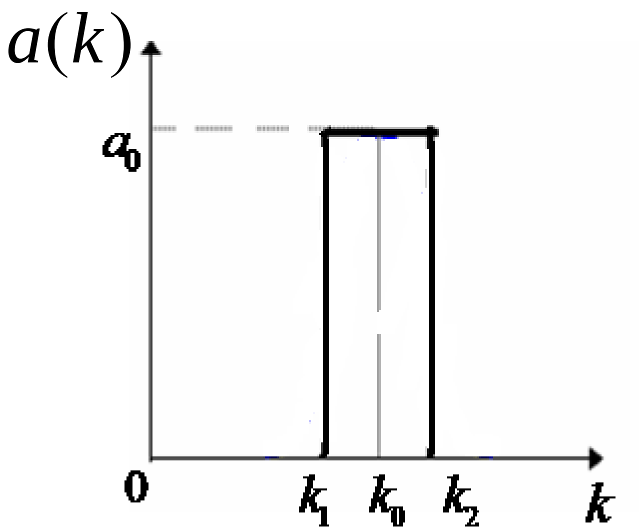
$$d\tilde{U}(x) = dA \cdot e^{ikx}$$

$$\because dA \propto dk, \quad \therefore dA = a(k)dk$$

$a(k)$称作振幅谱密度函数

$$\therefore \tilde{U}(x) = \int d\tilde{U} = \int_0^{\infty} a(k) e^{ikx} dk$$

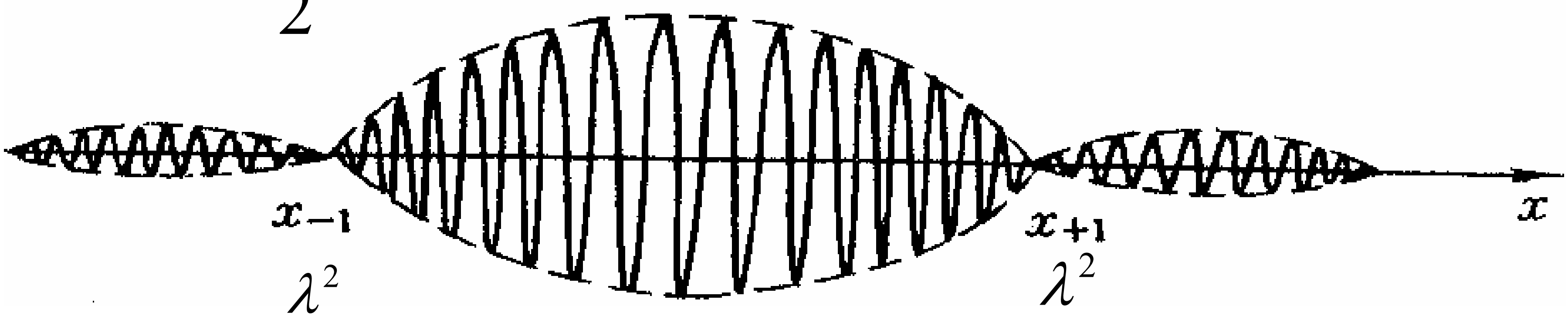
采用简化模型——方垒型谱函数



$$a(k) = \begin{cases} a_0, & |k-k_0| < \Delta k/2 \\ 0, & |k-k_0| > \Delta k/2 \end{cases}$$

空间波函数 $\tilde{U}(x) = \int_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} a_0 e^{ikx} dk$

$$\tilde{U}(x)=\frac{a_0\Delta k}{\frac{\Delta k}{2}x}\cdot e^{ik_0x}\cdot\sin\frac{\Delta k}{2}x\;=A_0\frac{\sin v'}{v'}e^{ik_0x}$$



$-\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ $\longleftarrow L_0 \longrightarrow$ $\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

其对应的零点位置x_{+1},x_{-1}满足$v'=\pm\pi$，即 $\frac{\Delta k}{2}\cdot x_{\pm1}=\pm\pi$

$$\therefore\quad x_{\pm1}=\pm\frac{2\pi}{\Delta k}=\pm\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

波列长度可近似为 $L_0\approx\frac{1}{2}(x_{+1}-x_{-1})\approx\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ 证毕

2、三个等效描述：

(1)相干长度L_0,即波列长度；

(2) 相干时间τ_0,即光源辐射一个波列的时间；

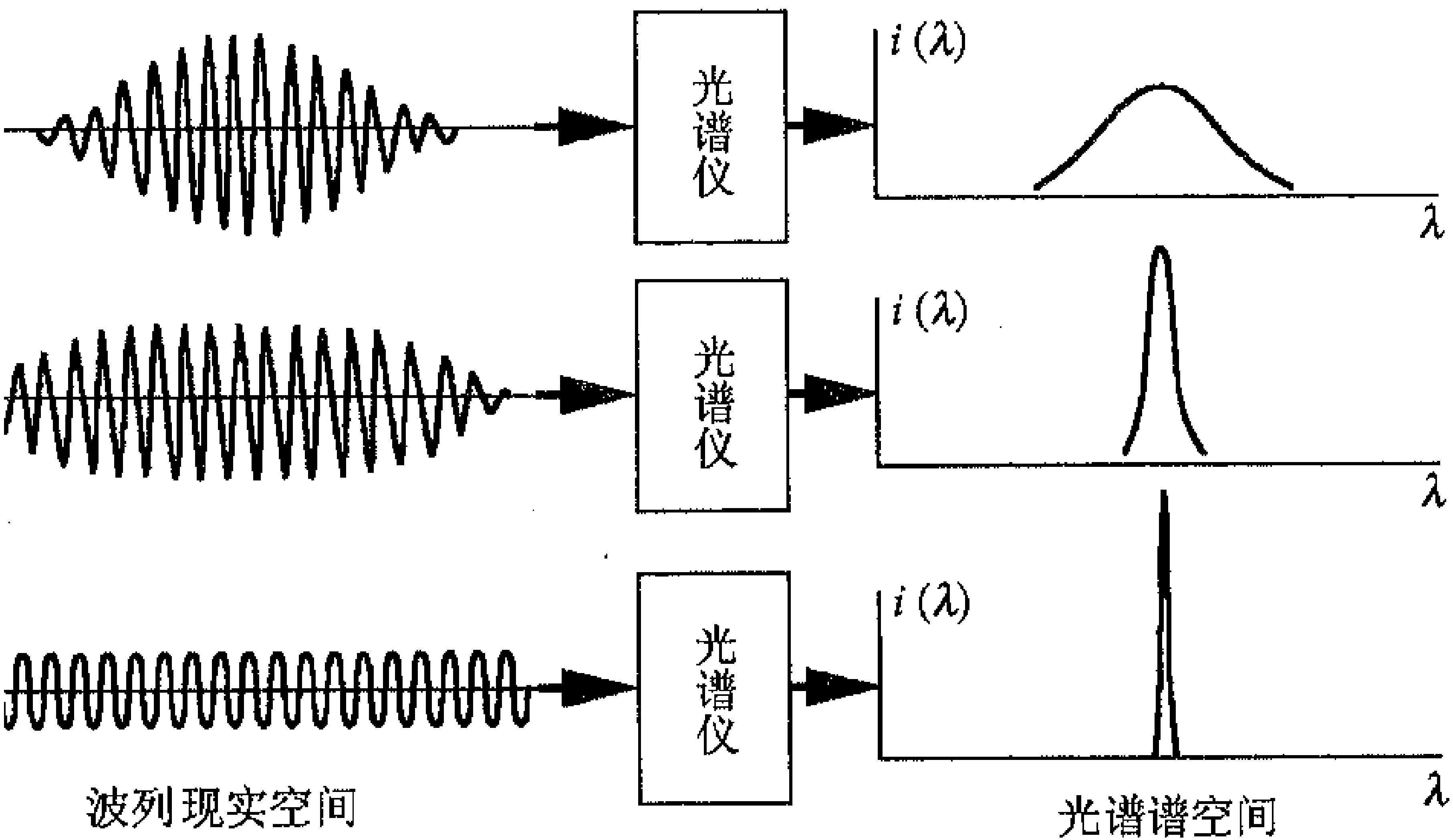
(3) 光源的光谱展宽$\Delta\lambda$。

$$L_0 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau_0$$

3.7 时间相干性反比公式

$$L_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \lambda$$

$$L_0 \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \lambda$$



3.7 干涉场对比度公式

$$\gamma(\Delta)=\left|\frac{\sin(\pi\frac{\Delta}{L_0})}{(\pi\frac{\Delta}{L_0})}\right| \quad 或 \quad \gamma(\Delta)=\left|\frac{\sin(\pi\frac{\tau}{\tau_0})}{(\pi\frac{\tau}{\tau_0})}\right|$$

3.8 时间相干性的起因

由于点光源发光时间的有限性（或者波列长度的有限性、或者光波的非单色性），导致了干涉条纹可见度的下降，引出的两个次波源(S_1,S_2)的相干性问题。

光源发出的波列越长，即相干时间越长，两波相互叠加的部分就越多，干涉条纹越清晰，时间相干性越好。

时间相干性与光源的单色性相关。

相干长度与谱线宽度Δλ有关系：

$$L_0 = c\tau_0 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma}$$

$$\Delta t \Delta\gamma = 1$$

光谱的单色性越好，相干长度越长，时间相干性越好。

氦氖激光

$$\Delta\max \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(0.6328um)^2}{10^{-11}um} \approx 40km$$

镉红光

$$\Delta\max \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \frac{(643.8nm)^2}{0.0013nm} \approx 300mm$$

空间相干性和时间相干性小结：

实际光源

扩展性	非单色性
↓	↓
空间相干性	时间相干性
↓	↓
$b\cdot\beta\approx\lambda$	$L_0\cdot\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}\approx\lambda$
↓	↓
干涉孔径角 相干宽度	相干时间 相干长度

$$\gamma\left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)=\left|\frac{\sin\pi\dfrac{\beta}{\beta_0}}{\pi\dfrac{\beta}{\beta_0}}\right| \qquad \gamma(\Delta)=\left|\frac{\sin\left(\pi\dfrac{\Delta}{L_0}\right)}{\left(\pi\dfrac{\Delta}{L_0}\right)}\right|$$

本课内容回顾

1、可见度的定义

2、振幅比与可见度的关系：

$$K = 2\sqrt{I_1 I_2} / (I_1 + I_2) = \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2}$$

3、光源宽度与可见度的关系

临界宽度$b_c = \frac{\lambda}{\beta}$

4、光源单色性与可见度的关系

$$\Delta_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

5、名词解释：空间相干性、时间相干性、相干长度、相干时间、干涉孔径角

作 业

- P374页 第8、9、10题
- 注：第8题表达式 $K=\exp\left[-\left(\frac{\Delta}{2\alpha}\right)^2\right]$ ，d应为α；解题思路，先求出最大最小光强，再代入可见度计算公式。