# （1）熵和熵变

# 一. 热力学第二定律的统计意义

热力学第二定律的实质：

**自然界的一切自发过程都是单方向进行的不可逆过程**

为什么实际宏观过程的进行都具有方向性呢？

初态 → 末态　不可逆

初态可自动变化到末态，但末态不能自动回到初态

→ 初态和末态间存在某种性质的原则差别：

初态出现的几率小，末态出现的几率大

→ 初态对应的微观态数少，末态对应的微观态数多

孤立系统中发生的一切实际过程，
都是从几率小（微观态数少）的宏观态
向几率大（微观态数多）的宏观态进行的
——热二定律的统计意义。

## 二. 玻耳兹曼熵

**正是由于初末态出现的几率 （微观态数）不同，才决定了过程的进行方向。**

为什么孤立系统总是从非平衡态向平衡态过渡？

因为平衡态是微观状态数目最大的宏观状态，所有非平衡态的微观状态数目都比平衡态少。

平衡态又是最无序的宏观态，其它非平衡态都比平衡态更有序。

定量地：宏观状态的无序度可按其所对应的微观状态数目多少来衡量，叫做**熵**。

玻耳兹曼引入熵的定义：

$\boxed{S = k\ln\Omega}$ （单位 $J/K$） **玻耳兹曼熵公式**

系统某一状态的熵是该状态对应的可能微观态数（无序度）的量度；

系统某一宏观态的熵值越大，则越无序，对应的微观态数越多，出现的几率越大。

平衡态：熵最大，最无序，对应的微观态数最多，出现的几率最大。

熵是系统的状态参量。

**熵具有可加性.**

如：当一个系统由几个子系统组成时，该系统的熵等于几个子系统的熵之和 $\boxed{S = S_1 + S_2 + \ldots}$

# 三. 克劳修斯等式不等式

**1854年克劳修斯指出：**

**对于热力学系统经历的任意循环过程，吸收的热量与相应热源的温度*T*的比值沿循环回路的积分都满足关系：**

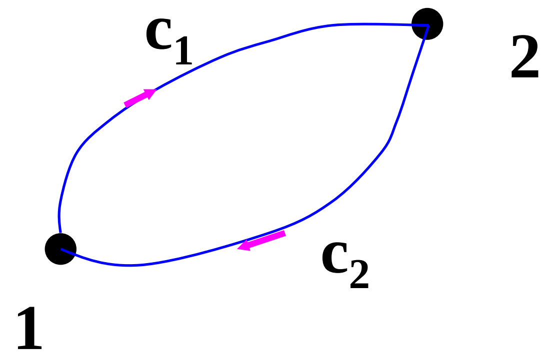
$$\oint \frac{\text{đ}Q}{T} \le 0$$

=，可逆循环， 克劳修斯等式。

<，不可逆循环，克劳修斯不等式。

——热力学第二定律的一种数学表述形式

## 四. 克劳修斯熵变公式




(1) 对任一可逆循环有: $\oint_{可逆} \frac{dQ}{T} = 0$

若系统经历两个不同可逆过程从初态1到末态2,

$$\int_{1\,(c_1可逆)}^{2} \frac{dQ}{T} = \int_{1\,(c_2可逆)}^{2} \frac{dQ}{T}$$

与过程无关,
只与始末状态有关

→说明热力学系统存在一个由状态确定的函数

— 叫做熵*S*, 上式中与过程无关的积分就是始末态的态函数熵的增量:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{1}^{2} \frac{dQ}{T}_{可逆}$$

积分可沿任一可逆过程(1→2).

——克劳修斯熵 或宏观熵

初态1到末态2的熵变：$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_{1\ \text{可逆}}^{2} \frac{đQ}{T}}$$ 克劳修斯熵变公式

微小<u>可逆过程</u>中的熵变：$$\boxed{dS = \frac{đQ}{T}}$$ $$\boxed{đQ = TdS}$$

注意 $đQ$ 是与过程有关的小量
但 $dS$ 与过程无关

故微小可逆准静态过程满足：

$$\boxed{TdS = dE + PdV}$$ $$\boxed{dS = \frac{1}{T}\left(dE + PdV\right)}$$

克劳修斯熵变公式又可写成：

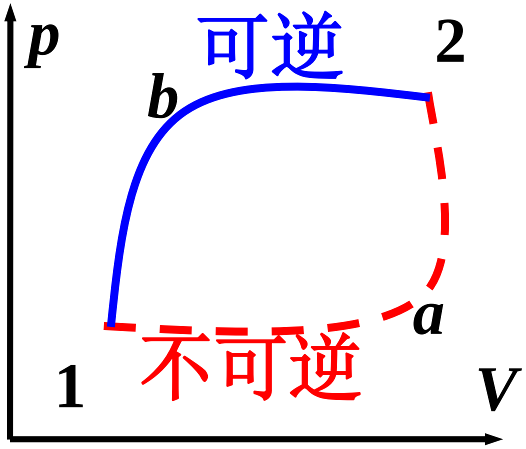
$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_{1\ \text{可逆}}^{2} \frac{đQ}{T} = \int_{1\ \text{可逆}}^{2} \frac{dE + pdV}{T}}$$

微小可逆准静态过程传热

## (2)对于不可逆过程1$a$2

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1}$$

在2态和1态之间连接一可逆过程2$b$1



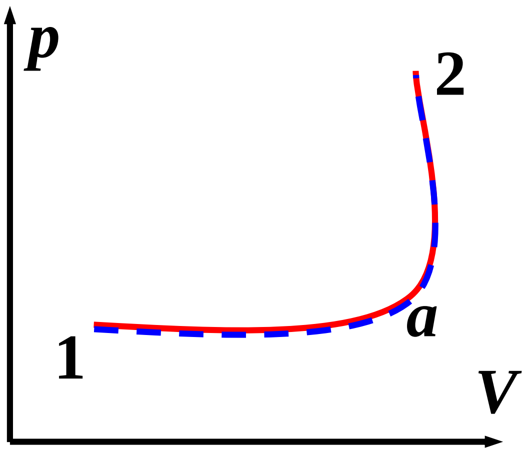

由克劳修斯不等式 $\boxed{\oint_{不可逆} \frac{đQ}{T} < 0}$

$$\int_{1a2} \frac{đQ}{T} + \int_{2b1} \frac{đQ}{T} < 0 \Rightarrow \int_{1a2不可逆} \frac{đQ}{T} < \int_{1b2可逆} \frac{đQ}{T} = S_2 - S_1$$

$$\Rightarrow \int_{1a2} \frac{đQ}{T} < S_2 - S_1$$ 即: $\boxed{S_2 - S_1 > \int_{1\ 不可逆}^{2} \frac{đQ}{T}}$

对微小不可逆过程: $\boxed{dS > \frac{đQ}{T}}$

- 综合可逆和不可逆过程




$$\boxed{S_2 - S_1 \geq \int_{1a2} \frac{đQ}{T}}$$

=，可逆过程，

>，不可逆过程。

——热力学第二定律的数学表述的积分形式

对无穷小过程：

$$\boxed{dS \geq \frac{đQ}{T}}$$

=，可逆过程，

>，不可逆过程。

——热力学第二定律的数学表述的微分形式

## 五. 熵增加原理（热二定量化）

$$\boxed{dS \geq \frac{đQ}{T}}$$ =，可逆过程，
>，不可逆过程。

热力学第二定律指出：

孤立封闭系统中一切自发过程都是单方向进行的不可逆过程

⇨ 孤立系统中一切自发过程都是熵增加的过程。

**孤立封闭系统的熵永不减少！ ——熵增加原理**

**系统在绝热过程中熵永不减少！——熵增加原理**

注意: 任意系统在任意过程中,

**熵可能增加($dS > 0$)，也可能减少($dS < 0$).**

## 六. 熵增加原理是热二定律的表述形式

孤立系统中发生的一切实际过程都是不可逆的.

而不可逆过程的进行方向必然都是:

微观态数增多;

几率增大;

无序度增加;

熵增大;

信息量减少。

# 七.玻耳兹曼熵和克劳修斯熵

$$\boxed{S = k\ln\Omega}$$

**玻耳兹曼熵**　微观熵

$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\text{đ}Q}{T}\quad \text{可逆}}$$

**克劳修斯熵**　宏观熵

二者基本一致.但:

克劳修斯熵只对系统的平衡态才有意义。
克劳修斯熵变是系统从一个平衡态到另一平衡态的熵变。

而玻耳兹曼熵给出了系统任一宏观态（哪怕是非平衡态）的熵.

平衡态是热力学几率最大(微观态数最多)的状态。
故可认为：克劳修斯熵是玻耳兹曼熵的最大值。
玻耳兹曼熵具有更普适的意义。

## 八.熵变的计算

$$S_2 - S_1 = \int_{1\ \text{可逆}}^{2} \frac{đQ}{T} = \int_{1\ \text{可逆}}^{2} \frac{dE + pdV}{T}$$

对无穷小可逆过程：$\boxed{dS = \frac{đQ}{T} = \frac{dE + pdV}{T}}$

**注意：**
**积分路线必须是连接始末两态的任一可逆过程。**

若系统从一个平衡态到另一平衡态实际经历的是不可逆过程，则不能直接用上式计算系统熵变。

但熵是态函数，熵变只与始末状态有关，与过程无关，故可设计一个始末状态与之相同的可逆过程来代替，再用克劳修斯熵公式计算熵变。

## 总结

**1mol理想气体的熵增：**

$$\boxed{\Delta S_{mol} = C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

**熵是状态的函数!**

**vmol理想气体的熵增：**

$$\boxed{\Delta S = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

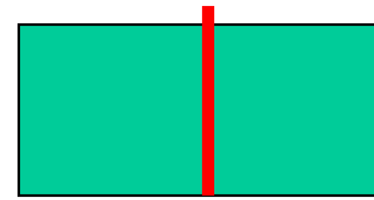
**熵增确实只决定于始、末状态，和具体过程无关！**

注意：只有熵的增量才有意义(类比: 势能).

热力学基本关系：（“热一”+“热二”）

$$\boxed{đQ = dE + pdV} \xrightarrow{\text{可逆过程}} \boxed{TdS = dE + pdV}$$

**例：** 1mol 理想气体装在一个绝热容器中，被绝热板分成相等的两部分（体积、粒子数均相等），但温度分别为 $T_1$ 和 $T_2$，打开绝热板混合，达到平衡态，求熵变。



**解：** $\because E = E_1 + E_2$

$$\rightarrow C_{V,m}T = \frac{1}{2}C_{V,m}T_1 + \frac{1}{2}C_{V,m}T_2$$

求得混合平衡后的温度 $T$：$T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$

根据理想气体熵变公式 $\Delta S = \nu C_{V,m}\ln\frac{T_{末}}{T_{初}} + \nu R\ln\frac{V_{末}}{V_{初}}$

对两部分（各0.5mol）分别计算，然后再相加：

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$= \left(\frac{1}{2}C_V\ln\frac{T_1 + T_2}{2T_1} + \frac{1}{2}R\ln 2\right) + \left(\frac{1}{2}C_{V,m}\ln\frac{T_1 + T_2}{2T_2} + \frac{1}{2}R\ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}C_{V,m}\ln\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} + R\ln 2 = C_{V,m}\ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1T_2}} + R\ln 2$$

（第二十三届第8题）

比热同为常量$c$，质量同为$m$的6个球体，其中A球的温度为 $T_0$，其余5个球的温度同为2 $T_0$。通过球与球相互接触中发生的热传导，可使A球的温度升高。假设接触过程与外界绝热，则A球可达到的最高温度为 $\frac{63}{32}$ $T_0$，对应的A球熵增量为 $\ln\frac{63}{32}$ $mc$。

解：设A球依次与其余B,C,D,E,F五个球接触发生热传导，A的温度依次升高到$T_1$,$T_2$, $T_3$, $T_4$ ,$T_5$

$$\Rightarrow mc(T_1 - T_0) = mc(2T_0 - T_1) \Rightarrow 2T_1 = 2T_0 + T_0 \Rightarrow T_1 = \frac{3}{2}T_0$$

类似地有：
$$\left.\begin{aligned} 2T_2 &= 2T_0 + T_1 \\ 2T_3 &= 2T_0 + T_2 \\ 2T_4 &= 2T_0 + T_3 \\ 2T_5 &= 2T_0 + T_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_5 = \frac{63}{32}T_0$$

（接上页）

A球依次与其余五个球接触发生热传导而升温的过程都是有限温差热传导，是不可逆的升温过程！

计算A球的熵增时应该拟定一个可逆升温过程：

假定A球是通过与一系列温度逐渐升高dT的恒温热源依次接触，每经过一个等温过程从热源吸热đQ，温度升高dT，熵增加dS，最终使温度从$T_0$升高到(63/32)$T_0$，熵增量ΔS:

$$\Delta S=\int_1^2 dS=\int_1^2\frac{đQ}{T}=\int_{T_0}^{\frac{63}{32}T_0}\frac{mcdT}{T}=mc\ln\frac{63}{32}$$

**例：1kg 0 ºC的冰与恒温热库（$t$=20 ºC ）接触。 0 ºC的冰和水微观状态数目比？（溶解热$\lambda$=334J/g）最终熵的变化多少？**

**解：首先冰等温融化成水，然后再升温。**

**冰在0 ºC 时等温融化成水的过程，可设计成它和一个0 ºC的恒温热源接触而进行的可逆等温吸热过程，故熵变为：**

$$\Delta S_1 = \int \frac{đQ}{T} = \frac{Q}{T} = \frac{m\lambda}{273.15 + t} = \frac{10^3 \times 334}{273.15} = 1.22 \times 10^3 J/K$$

**由玻耳兹曼熵公式有** $\Delta S = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$

**冰和水微观状态数目比：**

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{\Delta S_1 / k} = e^{1.22 \times 10^3 / 1.38 \times 10^{-23}} = e^{8.84 \times 10^{25}}$$

将水升温（0 ºC— 20 ºC）过程设计成可逆过程：
即水与一系列有微小温差的热库接触而缓慢升温，
水升温的熵变：$(c = 4.18\times10^3 J/kg\cdot {}^oC$是水的比热)

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{đQ}{T} = cm\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = cm\ln\frac{T_2}{T_1} = 1\times4.18\times10^3\times\ln\frac{293.15}{273.15}$$

$$= 0.30\times10^3 J/K$$

对热库的变化，设计等温放热可逆过程

$$\Delta S_3 = \int\frac{đQ}{T} = \frac{Q}{T_2} = -\frac{m\lambda + cm(t_2 - t_1)}{T_2}$$

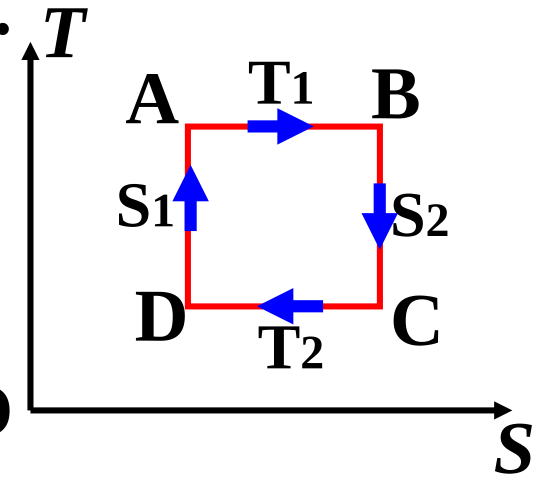
$$= -10^3\times\frac{334 + 4.18\times(20-0)}{293.15} = -1.42\times10^3 J/K$$

总熵变化：

$$\Delta S_{总} = \sum\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1.0\times10^2 J/K$$

符合熵增加原理

**例题:** 热力学中也常以温度T和熵S作为描述均匀系统的独立状态参量,这样以熵S为横坐标,温度T为纵坐标的图称为温熵图.试在温熵图上表示出卡诺循环过程,并用此图计算卡诺循环的效率.




**解:** 卡诺循环是由两个等温过程和两个绝热过程构成的理想可逆循环.

由熵增加原理: 可逆绝热过程熵不变.

⇒T-S图上卡诺循环过程可如图表示.

A→B: 吸热,有 $S_B - S_A = \dfrac{Q_{AB}}{T_1} \Rightarrow Q_{AB} = (S_B - S_A)T_1$

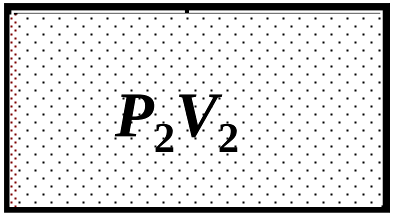
C→D: 放热,有 $S_C - S_D = \dfrac{|Q_{CD}|}{T_2} \Rightarrow |Q_{CD}| = (S_B - S_A)T_2$

B→C和D→A: 绝热.

卡诺循环的效率 $\eta = \dfrac{|W|}{Q_{吸总}} = \dfrac{Q_{AB} - |Q_{CD}|}{Q_{AB}} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} \boxed{= 1 - \dfrac{T_2}{T_1}}$

可用熵增加原理判断绝热过程及孤立封闭系统内的任何过程是否可逆.

例：判断理想气体绝热自由膨胀是否可逆。




绝热 $đQ=0$

自由 $đW=0$

$$đQ = dE - dW \quad \Rightarrow \quad \boxed{dE = 0}$$

内能不变⇨温度不变

而理想气体的熵变为：
$$\Delta S = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_{[T]} &= \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} \\ \because V_2 &> V_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\Delta S > 0}$$

熵增加⇨是不可逆过程！

# （2）狭义相对论中的难点

# 一. 洛仑兹变换

若分别在两个惯性系$S$和$S'$中观测两个事件$A$和$B$:

$S$中: $A(x_A, t_A)$ $B(x_B, t_B)$

$S'$中: $A(x'_A, t'_A)$ $B(x'_B, t'_B)$

$$\begin{cases} x'_A = \gamma(x_A - ut_A) \\ x'_B = \gamma(x_B - ut_B) \end{cases} \qquad \begin{cases} t'_A = \gamma(t_A - \dfrac{u}{c^2}x_A) \\ t'_B = \gamma(t_B - \dfrac{u}{c^2}x_B) \end{cases}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} > 1}$$

故有:

$$\boxed{\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)} \qquad \boxed{\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')}$$

$$\boxed{\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x)} \qquad \boxed{\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x')}$$

狭义相对论时空观的基本关系!

## 二."动时膨胀"和"动长收缩"

$$\boxed{\Delta t=\gamma\tau_0>\tau_0}$$

同一事件的运动时间总是大于其固有时间→动时膨胀—动钟变慢

$\tau_0$ 是相对于被测事件发生地点静止的观测者测得的时间——本征（或静止、固有）时间

$\Delta t$ 是相对于被测事件发生地点运动的观测者测得的时间——运动时间

$$\boxed{l=\frac{1}{\gamma}l_0<l_0}$$

同一物体的运动长度总是小于它的固有长度➡"动长收缩"

$l_0$：相对于被测物体静止的观测者测得的长度——本征长度（或静止长度、固有长度、原长）

$l$：相对于被测物体运动的观测者测得的长度——动长

**例题**　一短跑选手，在地球上以*10s*时间跑完*100m*，在飞行速度为*0.98c*的飞船中的观察者看来，这个选手跑了多长时间和多长距离（设飞船沿跑道的竞跑方向飞行）？

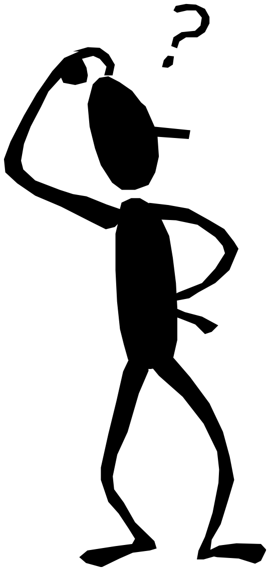
**解：根据动时延缓和动长收缩效应有：**

$$\boxed{\Delta t = \gamma \tau_0 \quad l = \frac{1}{\gamma} l_0}$$

$$l_0 = 100m, \tau_0 = 10s,$$

$$\because\ u = 0.98c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}}$$

$$\therefore\ \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}} \times 10 \approx 50.25\,(s)$$



$$l = \sqrt{1-0.98^2} \times 100 \approx 19.9\,(m)$$

**以上解答对吗？**
**为什么？**

# 时间膨胀（“动钟变慢”）

分别从两个惯性系*S*和*S’*测量同一个非瞬时事件经历的时间，

S中：　起于$(x_1,\ t_1)$　止于$(x_2,\ t_2)$

S’中：　起于$(x_1',\ t_1')$　止于$(x_2',\ t_2')$

设事件发生的地点相对于*S’*静止，即 $\boxed{x_1' = x_2' = x'}$

*S*系中测得事件经历的时间为：　$\Delta t = t_2 - t_1$

*S’*系中测得事件经历的时间为：　$\Delta t' = \tau_0 = t_2' - t_1'$

$$\because \begin{cases} t_1 = \gamma\left(t_1' + \dfrac{u}{c^2}x_1'\right) \\ t_2 = \gamma\left(t_2' + \dfrac{u}{c^2}x_2'\right) \end{cases} \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1')$$

即　$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \tau_0}$

$\boxed{\tau_0 = t'_2 - t'_1}$ 是相对于被测事件发生地点静止的观测者测得的时间——本征（或静止、固有）时间

$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1}$ 是相对于被测事件发生地点运动的观测者测得的时间——运动时间

$$\because \quad \gamma > 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta t = \gamma \tau_0 > \tau_0}$$

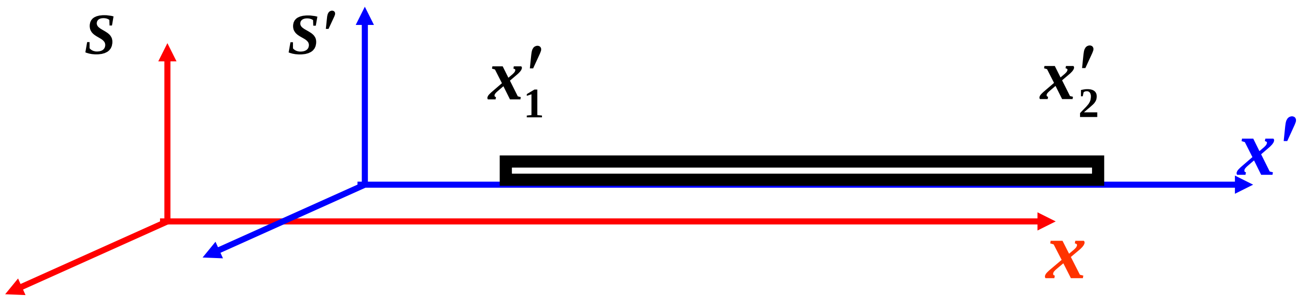
**同一事件的运动时间总是大于其固有时间——运动时间膨胀效应。**

**或：**

运动着的“钟”要比静止的“钟”慢些——“动钟变慢”

# 运动长度缩短

设一刚性棒沿$x'$轴静止放置于$S'$系中，

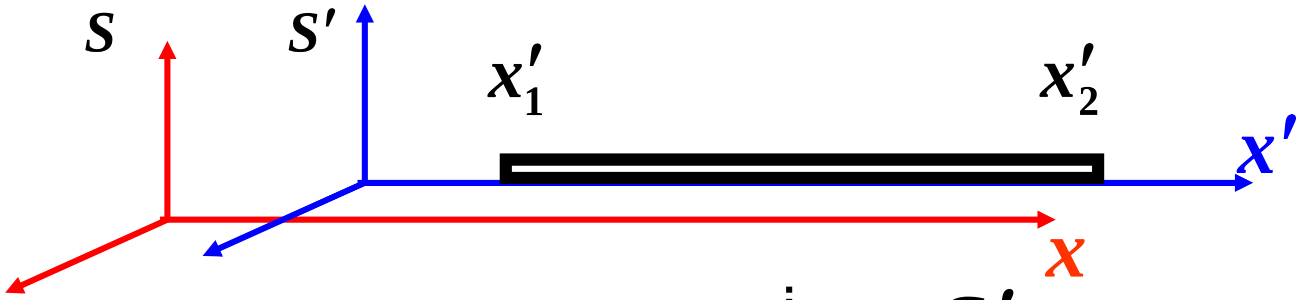



分别从$S$, $S'$测量棒长:

| | $S$ | $S'$ |
|---|---|---|
| 事件1：测棒的左端 | $x_1, t_1$ | $x_1', t_1'$ |
| 事件2：测棒的右端 | $x_2, t_2$ | $x_2', t_2'$ |
| 动长 $l = x_2 - x_1$ | | 静长 $l_0 = x_2' - x_1'$ |

怎么测动长？

必须$t_2 = t_1$，即$\Delta t = 0$




| | $S$ | $S'$ |
|---|---|---|
| 事件1：测棒的左端 | $x_1, t_1$ | $x_1', t_1'$ |
| 事件2：测棒的右端 | $x_2, t_2$ | $x_2', t_2'$ |
| | 动长 $l = x_2 - x_1$<br>怎么测动长?<br>$\boxed{必须 t_2 = t_1,}$ $\boxed{即 \Delta t = 0}$ | 静长 $l_0 = x_2' - x_1'$ |

$$\because \left.\begin{aligned} x_1' &= \gamma(x_1 - ut_1) \\ x_2' &= \gamma(x_2 - ut_2) \\ t_1 &= t_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow l_0 = \gamma l$$

即 $\boxed{l_0 = \gamma l}$ 或 $\boxed{l = \dfrac{1}{\gamma} l_0}$

$l_0$：相对于被测物体静止的观测者测得的棒长——本征长度

（或静止长度、固有长度、原长）

$l$：相对于被测物体运动的观测者测得的棒长——运动长度

$$\because \quad \gamma > 1$$

$$\therefore \quad \boxed{l = \frac{1}{\gamma} l_0 < l_0}$$

**同一物体的运动长度总是小于它的固有长度——“运动长度收缩”**

**注意：** a..运动长度的收缩效应只沿运动方向发生，垂直于运动方向无此效应；

b..运动长度收缩效应完全是一种相对论时空效应；

c..动长收缩效应是“同时性的相对性”的直接结果!

# 三.关于狭义相对论的时空效应，解题时应注意

（1）洛仑兹变换才是相对论时空观的普遍公式，对于从任意两个惯性系测量相同事件的时空坐标和时空间隔都适用；

（2）弄清“动长缩短”和“动钟变慢”公式是在什么前提下如何从洛仑兹变换得到的；不能乱用这两个公式；

$$\boxed{l=\frac{1}{\gamma}l_0}$$

$l_0$：本征长度（或静止长度、固有长度）

$l$：运动长度 （如何测量？）

运动长度必须是运动参照系中同一时刻测得两端点坐标之差

$$\boxed{\Delta t=\gamma\tau_0}$$

$\tau_0$ 本征（静止、固有）时间（如何测量？）

$\Delta t$ 运动时间

静止时间必须是静止参照系中同一地点测得的时间间隔

**不是运动长度!!!**　　　　**不是静止时间!!!**

例题　一短跑选手，在地球上以*10s*时间跑完*100m*，在飞行速度为*0.98c*的飞船中的观察者看来，这个选手跑了多长时间和多长距离（设飞船沿跑道的竞跑方向飞行）？

**正确解答为：**设地面为*S*系，飞船为*S'*系，由洛仑兹变换得：

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$\because \quad \Delta x = x_2 - x_1 = 100m, \Delta t = t_2 - t_1 = 10s, u = 0.98c$$

$$\therefore \quad \Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}}(100 - 0.98c \times 10) \approx -1.47 \times 10^7\ (km)$$

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1-0.98^2}}\left(10 - \frac{0.98c}{c^2} \times 100\right) \approx 50.25\,(s)$$

**不能直接用动时延缓和动长收缩公式!!!???**

第十九届第13题（P173）：静长$l_0$的飞船以恒定速度$v$相对某惯性系S高速运动，从飞船头部发出一光信号，飞船上观察者认为需经时间Δ t’=________ 到达尾部B；S系中的观察者认为需经时间Δt=________ 到达尾部B。

解:取飞船为S’系，则飞船上观察者求出$\Delta t'=\dfrac{l_0}{c}$

根据运动长度收缩效应知，S系中观察者测得飞船长度为：

$$\because l=\frac{l_0}{\gamma} \quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \text{故}\Delta t=\frac{l}{c}=\frac{l_0}{c}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$$ 对吗？

注意：对S的观察者，飞船头部发出光信号和尾部收到光信号肯定不在同一时刻（光信号走的距离≠飞船动长）。故上式解答错误。

$$\because \Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x') \qquad \Delta t'=\frac{l_0}{c},\ \Delta x'=-l_0$$

$$\therefore \Delta t=\gamma(\frac{l_0}{c}-\frac{u}{c^2}l_0)=\frac{l_0}{c}\sqrt{\frac{c-u}{c+u}}$$

第十六届第4题（P149）：高速列车内有一滑轨AB沿车身长度方向放置，列车以0.6c（c为光速）的速率相对地面匀速直线运动.

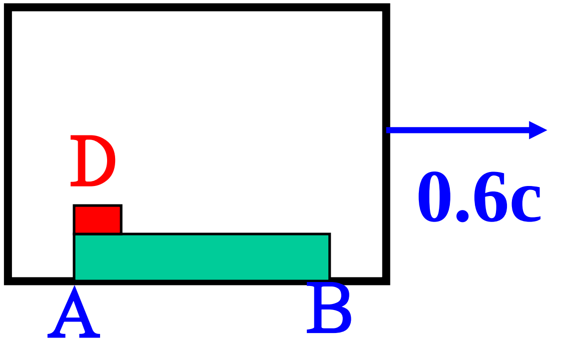
列车上的观察者测得滑轨长为10米，

另有一小滑块D在10秒内由滑轨的A端滑到B端，

则地面上的观察者测得滑轨的长度为_______米，

地面上的观察者测得滑块移动的距离为_______米。

解：地面上的观察者测得滑轨长度为：

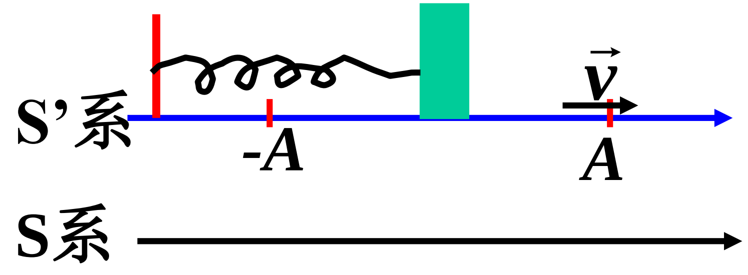



$$l = l_0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = 10\times\sqrt{1-0.6^2} = \ldots.$$

地面上的观察者测得滑块移动的距离为：

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t') = \frac{1}{0.8}(10 + 0.6c\times 10) = \ldots.$$

**第二十届第1 3 题(P185)：** 惯性系 S’ 相对于惯性系 S 沿x轴以 $v$高速运动． S’ 中沿x’轴有一弹簧振子，弹簧劲度系数为k，振子质量为m，振子速度远小于光速，振幅为 A． 在 S 系中可测得该振子的振动周期为________；振子从图中平衡位置$x'=0$到$x'=A$所经时间为________。




**解：** S’ 系测得周期为：$T'=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

S 系测得它的周期应为：

$$T=\gamma T'=\gamma 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

S’ 系中 $\boxed{x'_1=0,\quad x'_2=A \quad\rightarrow \Delta x'=A,}$ $\boxed{\Delta t'=\dfrac{1}{4}T'}$

由 L 变换得 S 系中测得振子从平衡位置$x'=0$到$x'=A$的时间：

$$\Delta t=\gamma\left(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x'\right)=\gamma\left(\frac{1}{4}T'+\frac{v}{c^2}A\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}+\frac{v}{c^2}A\right)$$

**第二十三届第12题：** **各边静长为L的正方形面板ABCD,在惯性系S的 *xy* 坐标面上以匀速度*v* 沿 *x* 轴运动. 运动过程中AB边和BC边各点均朝*x*轴连续发光,在S系中各点发光方向均与*y*轴平行.这些光在*x*轴上照亮出一条随着面板运动的轨迹线段,它的长度*l*= ______ L；** 若改取AB边静长为L’,BC边静长仍为L的长方形面板,当*v*=0.6*c*时, *x*轴上运动的轨迹线段长度恰好等于L,那么必有L’=______ 。

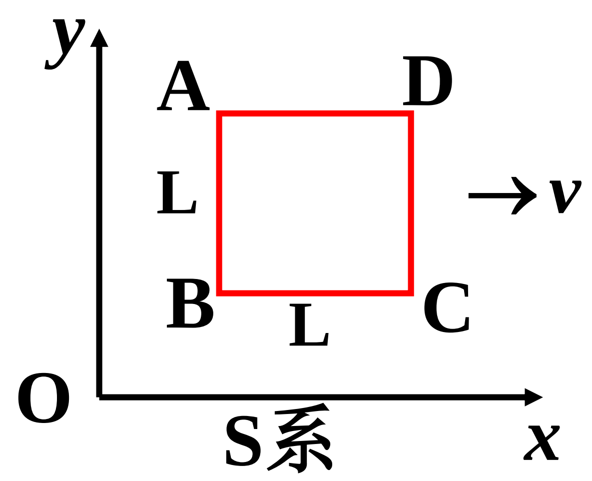
**第1空解:从A，D点发出的光需要经历时间$\Delta t=\dfrac{L}{c}$才能到达*x*轴.**

**⇒光从A，D点发出到达*x*轴这段时间内，面板又向前运动了距离**

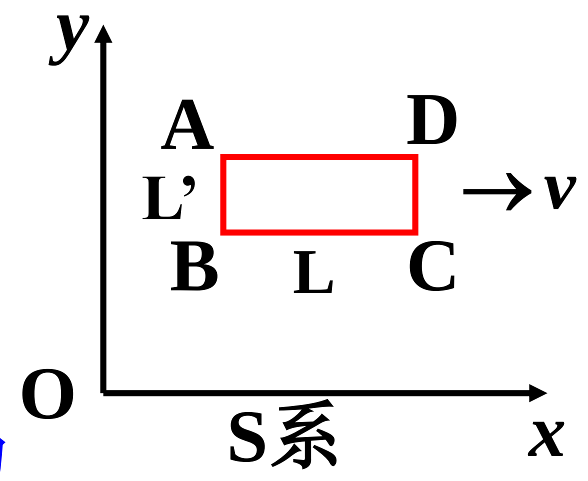
$$v\Delta t=v\frac{L}{c}$$

**⇒*x*轴上随板运动的光的轨迹线段的长度为**

$$l=L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+v\frac{L}{c}=L\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{v}{c}\right)$$



**第二十三届第12题：**各边静长为L的正方形面板ABCD,在惯性系S的 $xy$ 坐标面上以匀速度$v$ 沿 $x$ 轴运动. 运动过程中AB边和BC边各点均朝$x$轴连续发光,在S系中各点发光方向均与$y$轴平行.这些光在$x$轴上照亮出一条随着面板运动的轨迹线段,它的长度$l$= ______ L； 若改取AB边静长为L',BC边静长仍为L的长方形面板,当$v$=0.6$c$时, $x$轴上运动的轨迹线段长度恰好等于L,那么必有L'=______ 。




第2空解:从A，D点发出的光需要经历时间

$$\Delta t=\frac{L'}{c}$$ 才能到达$x$轴.

⇒$x$轴上随板运动的光的轨迹线段的长度为

$$L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+v\frac{L'}{c}=L$$

$$\Rightarrow L'=\frac{1-\sqrt{1-v^2/c^2}}{v/c}L \quad \boxed{\Rightarrow L'=\frac{1}{3}L}$$

分析思考：“运动长度收缩”疑难

动长收缩效应是“同时性的相对性”的直接结果！

刚性棒沿$x'$轴放置，并相对于S’静止。分别从两个惯性系S和S’测量其长度，测得该棒两端点的时空坐标分别为：

S中：$(x_1, t_1)$　$(x_2, t_2)$

S’中：$(x_1', t_1')$　$(x_2', t_2')$

$$\begin{cases} S中：L = x_2 - x_1 \text{——运动长度（}x_1\text{、}x_2\text{必须同时测量:}t_1=t_2\text{）} \\ S'中：L' = x_2' - x_1' = L_0 \text{——固有长度} \end{cases}$$

$$\because \begin{cases} x_1 = \gamma(x_1' + vt_1') \\ x_2 = \gamma(x_2' + vt_2') \end{cases} \Rightarrow L = \gamma L_0 + \gamma v(t_2' - t_1')$$

因棒静止于S’中，$x_2'$和$x_1'$既可同时测量，也可不同时测量，

$\boxed{\text{若同时测量，即：} t_1' = t_2'}$ 则　(←问题在此!)

$L = x_2 - x_1 = \gamma L_0 \quad (L > L_0)$

$\boxed{\text{运动长度变长？？}}$

# 四.狭义相对论动力学基础

相对论的质量

$$m(v)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m_0\gamma>m_0$$

$m_0$ ——质点的静止质量

$m$ ——质点的运动质量（相对论质量）

相对论的动量

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}=\gamma m_0\vec{v}$$

相对论动力学基本方程

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=\frac{d}{dt}[\gamma m_0\vec{v}]$$

$$=m\vec{a}+\vec{v}\frac{dm}{dt}=\gamma m_0\vec{a}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

# 相对论中的能量

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 \quad \text{或} \quad mc^2 = m_0c^2 + E_k$$

$$E_k = E - E_0 \quad \text{或} \quad E = E_0 + E_k$$

(1) $\boxed{E_0 = m_0c^2}$ **静能** 任何宏观静止的物体具有能量. 即内能.

(2) $\boxed{E = mc^2 = E_0 + E_k}$ **总能，** 总能与质量成正比；

(3) $\boxed{E_k = mc^2 - m_0c^2}$ **动能，** 等于总能与静能之差，

注意：$E_k \neq \frac{1}{2}m_0v^2, E_k \neq \frac{1}{2}mv^2, E_k \neq \frac{1}{2}mc^2, E_k \neq \frac{1}{2}m_0c^2$

在低速极限情况下回到经典动能表示式：$E_k = \frac{1}{2}m_0v^2$

## 爱因斯坦质能关系 $\boxed{E = mc^2}$

揭示了物质的两个基本属性（质量和能量）之间不可分割的联系和对应关系：
物质具有质量就必然同时具有能量；
质量（能量）发生变化则能量（质量）也会发生变化。

## 能量（质量）守恒定律

**在孤立系统内：**

**相对论总**能量守恒、**相对论总**质量守恒

$$\boxed{\sum_i E_i = \sum_i (m_i c^2) = \sum_i (E_{ik} + m_{i0}c^2) = \text{常量}}$$

也即： $\boxed{\sum_i m_i = const}$ 不是静质量守恒！

处理高速粒子间相互作用问题的基本定律：

**相对论能量（或质量）守恒定律、相对论动量守恒定律**

**第22届第11题:** 静质量为 $2m_0$ 的物块,从静止状态自发地分裂成两个相同小物块,以一样的高速率$v$朝相反方向运动.若与外界无能量交换,则每一小物块的质量为______;每一小物块的静质量为______。

**解:大物块分裂成小物块的过程动量守恒,质量守恒**

设分裂后两小物块静质量为$m_0$',质量为$m$',速率为$v$

$$\frac{2m_0\vec{v}_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}=\frac{m_0'\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{m_0'(-\vec{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=0 \qquad (\because v_0=0)$$

满足动量守恒定律

由质量守恒定律:$m'+m'=2m_0$ $\boxed{\Rightarrow m'=m_0}$ 小物块质量

$$\boxed{\rightarrow \quad m_0'=m_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ 静质量

系统静质量减少! 系统质量守恒!

**例题 第十七届第5题（P156）**均匀物质静止时的体积为$V_0$， 密度为$\rho_0$，当它以匀速度$v$运动时，体积为$V$=______，密度为$\rho$ ______ 。

**解：由运动杆长收缩的公式知** $V = V_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho_0 V_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\therefore \rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

第二十届第12题（P1 8 4 ）：飞船静止时体积为$V_0$,平均密度为$\rho_0$,相对地面以$v=(3/5)c$高速飞行时，地面参考系测得它的动能为$E_k$=________；平均密度为$\rho$ =________。

解:飞船的静质量为 $m_0=\rho_0 V_0$

$$\because v=\frac{3}{5}c \qquad \therefore \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(\frac{3}{5}c)^2}{c^2}}}=\frac{5}{4}$$

地面参考系测得它的动能为:

$$E_k=mc^2-m_0c^2=\gamma m_0c^2-m_0c^2=\frac{1}{4}m_0c^2=\frac{1}{4}\rho_0V_0c^2$$

地面参考系测得它的质量为: $m=\gamma m_0$

地面参考系测得它的体积为: $V=\frac{1}{\gamma}V_0$

地面参考系测得它的平均密度为: $\rho=\frac{m}{V}=\gamma^2\frac{m_0}{V_0}=\frac{25}{16}\rho_0$

例题 观察者甲以（4c/5）的速度相对于静止的观察者乙运动，若甲携带一长度为$L$,截面积为$S$，质量为$m$的棒，这根棒安放在运动方向上，则甲测得此棒的密度为______，乙测得此棒的密度为______。

解：棒相对于甲静止，故甲测得其密度

$$\rho_{甲}=\frac{m}{LS}$$

棒相对于乙运动，故乙测得的棒长、质量及密度分别为

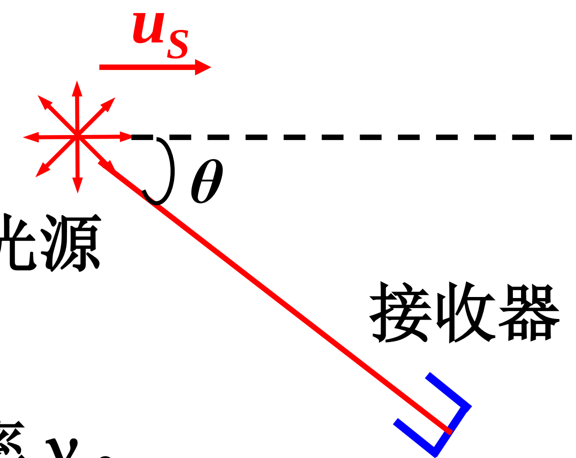
$$L'=L\sqrt{1-(0.8)^2}=0.6L=\frac{3}{5}L$$

$$m'=\frac{m}{\sqrt{1-(0.8)^2}}=\frac{5}{3}m$$

故 $\rho_{乙}=\frac{m'}{L'S}=\frac{25m}{9LS}$

# 五. 光的多普勒效应：

光波传播不需介质，与声波完全不同；由光速不变原理，无论是光源向接收器运动,还是接收器向光源运动，对接收器来说光速都是$c$。




$u_S$---光源相对于接收器的运动速度;光源频率 $\nu_0$

接收频率为：$\boxed{\nu = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta\cos\theta)}\nu_0}$ $\beta = \dfrac{u_S}{c}$

光源向着接收器运动⇒ $\theta = 0 \Rightarrow \nu = \sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}\nu_0$ ⇒频率增加

光源背离接收器运动⇒ $\theta = \pi \Rightarrow \nu = \sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}\nu_0$ ⇒频率减少

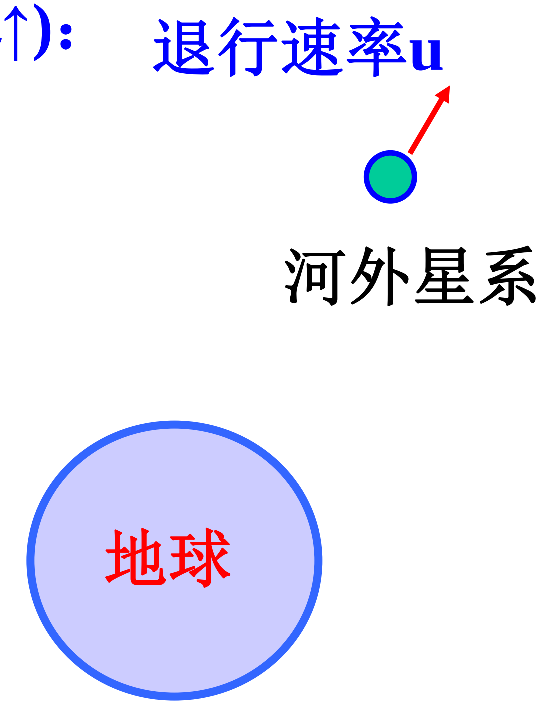
光源或接收器在二者联线垂直方向上运动⇒ $\theta = \pi/2 \Rightarrow \nu = \sqrt{1-\beta^2}\,\nu_0$

注：机械波声波等无横向多普勒效应,而光波有。

**例题：**一遥远的河外星系以很高的速率离地球退行而去，其光谱线发生红移, 与固有频率$\nu_0$相对应的波长为$\lambda_0$= 434nm谱线，地面上观测记录的该谱线的波长$\lambda$ =600nm.

试求此河外星系的退行速率$u$。

**解:** 由多普勒效应的频移公式(远离⇒$\nu\downarrow$ , $\lambda\uparrow$):




$$\nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu_0 \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda},\quad \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}\,\lambda_0$$

代入数据求得： $u$=0.31$c$≈0.93×$10^8$m/s

问题

1917年斯里费发现远方星体的光谱线向红端移动，即频率在减少，表明该星体<u>背离地球而退行</u>。

红移现象表明：整个宇宙在<u>膨胀</u>

# 六.其它

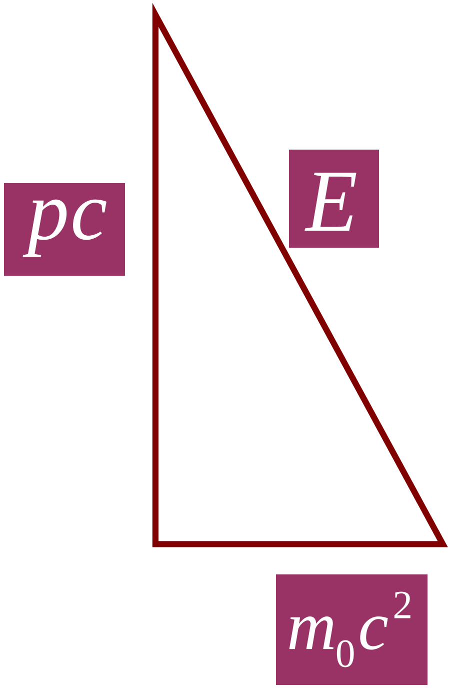
**☆相对论能量动量关系**

$$E^2 = m^2c^4 = c^2p^2 + m_0^2c^4$$

**问题:**

若能量为 $E$ 的微观粒子以光速$v$运动(如光子), 求其动量。

**光子动量为:** $$p = \frac{E}{c}$$




动质能三角形

# ☆相对论速度变换公式

相对论速度正变换公式

$$u_x' = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x}$$

$$u_y' = \frac{u_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x}$$

$$u_z' = \frac{u_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2} u_x}$$

$\approx$ $\upsilon << c$

伽利略正变换

$$u_x' \approx u_x - \upsilon$$

$$u_y' \approx u_y$$

$$u_z' \approx u_z$$

相对论速度逆变换公式

$$u_x = \frac{u_x' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_x'}$$

$$u_y = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_x'}$$

$$u_z = \frac{u_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon}{c^2} u_x'}$$

$\approx$ $\upsilon << c$

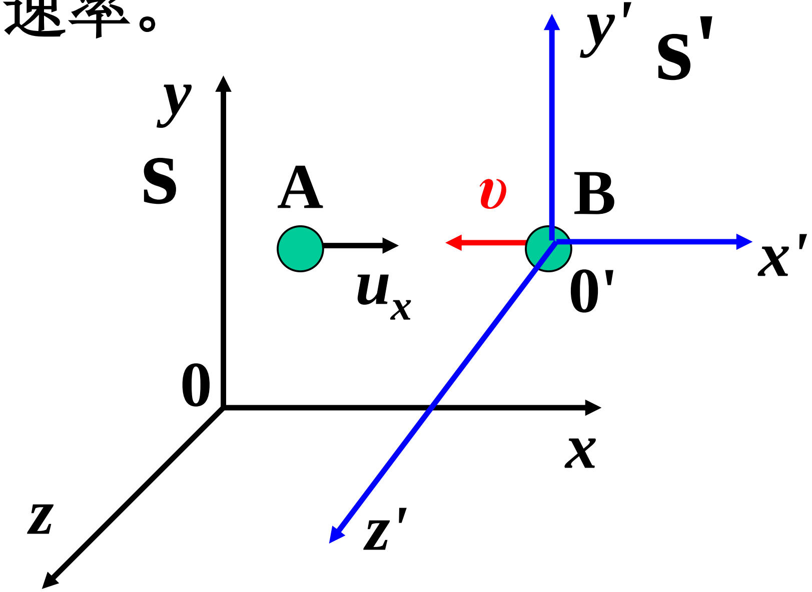
伽利略逆变换

$$u_x \approx u_x' + \upsilon$$

$$u_y \approx u_y'$$

$$u_z \approx u_z'$$

例题：两质点A, B相对运动如图，其速率相对实验室坐标S来说都为0.9c，求A相对B的速率。




解：将S'坐标系建在B上

这样S'相对于S的速度为

$$\upsilon = -0.9c$$

质点A相对于S的速度为

$$u_x = 0.9c$$

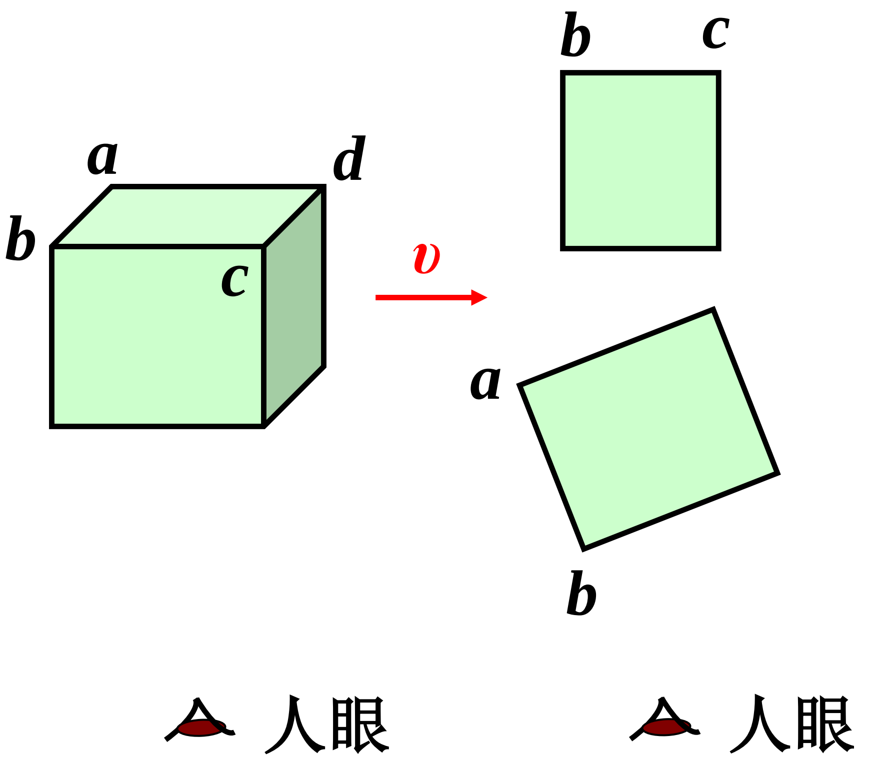
质点A相对于S'(即相对于B）的速度为

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \dfrac{\upsilon}{c^2} u_x} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \dfrac{(-0.9c)}{c^2} 0.9c} = \frac{1.8c}{1.81} = 0.9945\,c < c \text{ 光速}$$

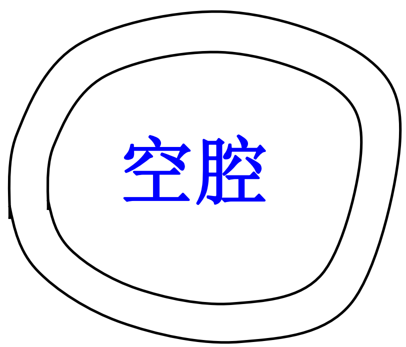
问题：

立方体运动时，从正面看到的是哪一个图像？

结论：动尺收缩效应并非使我们看到的东西扁了，而是转过一个角度。

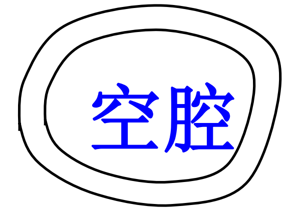


**第二十三届第14题：**在密闭容器内有一空腔，加热容器会使腔壁产生热辐射，在空腔内形成包含各种频率的光子气。而后腔壁会继续向空腔输运各种频率的光子，光子气中各种频率的光子也会输运到腔壁，在给定温度下达到动态平衡．平衡时，可等效地将腔壁处理成既不产生新的热辐射光子，也不吸收腔内已有的光子，这相当于假设腔壁对光子气中的光子是全反射的，于是光子气可类比成理想气体．已知腔内光子气的能量密度$u$与温度$T$的4次方成正比，求光子气压强$p$与温度$T$的关系．



光子气可类比成理想气体．已知腔内光子气的能量密度$u$与$T$的4次方正比，求光子气压强$p$与温度$T$的关系．

解：光子气中频率为$\nu$的光子数密度记为$n_\nu$，质量为$m_\nu$，




这种光子的能量为：$\boxed{\varepsilon_\nu = h\nu}$ 质量为：$\boxed{m_\nu = \dfrac{\varepsilon_\nu}{c^2} = \dfrac{h\nu}{c^2}}$

这种光子的能量密度为：$\boxed{u_\nu = n_\nu h\nu}$

按照理想气体压强公式：$\boxed{p = \dfrac{1}{3} nm\overline{\upsilon^2}}$

这种光子对压强的贡献为：$p_\nu = \dfrac{1}{3} n_\nu m_\nu c^2 = \dfrac{1}{3} n_\nu h\nu = \dfrac{1}{3} u_\nu$

光子气的总压强为：$\boxed{p = \sum_\nu p_\nu = \dfrac{1}{3}\sum_\nu u_\nu = \dfrac{1}{3} u}$ $\boxed{\Rightarrow p \propto T^4}$