

# 激光原理与技术

## 第四章 高斯光束

丁铭

仪器科学与光电工程学院 精密仪器系

# 1、高斯光束

**高斯光束：**所有可能存在的激光波型的概称。

**高斯光束**的光强分布为一圆斑，中心处光强最强，向边缘方向光强逐渐减弱，呈高斯型分布。

理论和实践已证明，在可能存在的激光束形式中，最重要且最具典型意义的就是**基模高斯光束**。

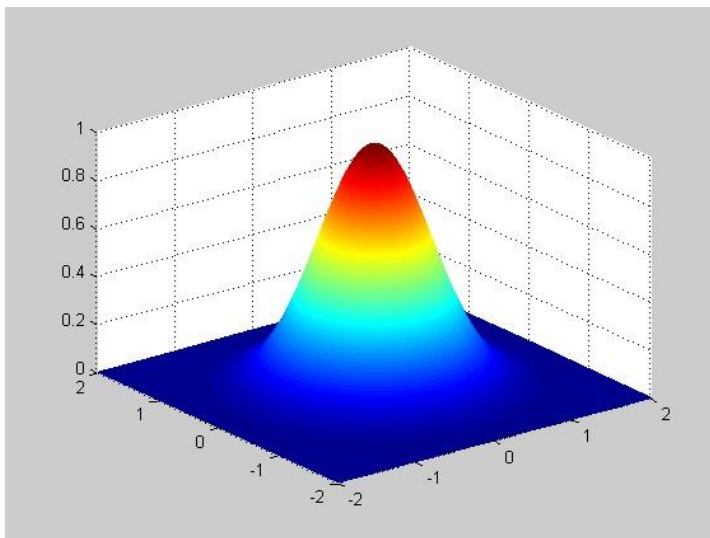


图4-1 高斯光束光强分布图

## □ 均匀平面波

沿某方向（如z轴）传播的均匀平面波（即均匀的平行光束），其电矢量为：

$$E(x, y, z) = A_0 e^{-ikz} \quad k = 2\pi/\lambda, \text{ 波数}$$

**特点：**在与光束传播方向垂直的平面上光强是均匀的。

## □ 均匀球面波

由某一点光源（位于坐标原点）向外发射的均匀球面光波，其电矢量为：

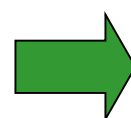
$$E(x, y, z) = \frac{A_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \exp[-ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}] = \frac{A_0}{R} \exp(-ikr)$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ 光源到点 } (x, y, z) \text{ 的距离}$$

均匀球面波与坐标原点距离为常数，是以原点为球心的一个球面，在这个球面上各点的位相相等，即该球面是一个等相位面。

近轴 ( $x, y \ll z, z \approx R$ ) :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2R}$$


$$E(x, y, z) \approx \frac{A_0}{R} \exp\left[-ik\left(z + \frac{x^2 + y^2}{2R}\right)\right]$$

## □ 高斯光束

既不是均匀的平面光波，也不是均匀的球面光波，而是一种比较特殊的高斯球面波。

$$E(x, y, z) = \underbrace{\frac{A_0}{\omega(z)} \exp\left[-\frac{(x^2 + y^2)}{\omega^2(z)}\right]}_{\text{振幅因子}} \times \underbrace{\exp\left\{-ik\left[\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + z\right] + i\varphi(z)\right\}}_{\text{相位因子}}$$

振幅因子

相位因子

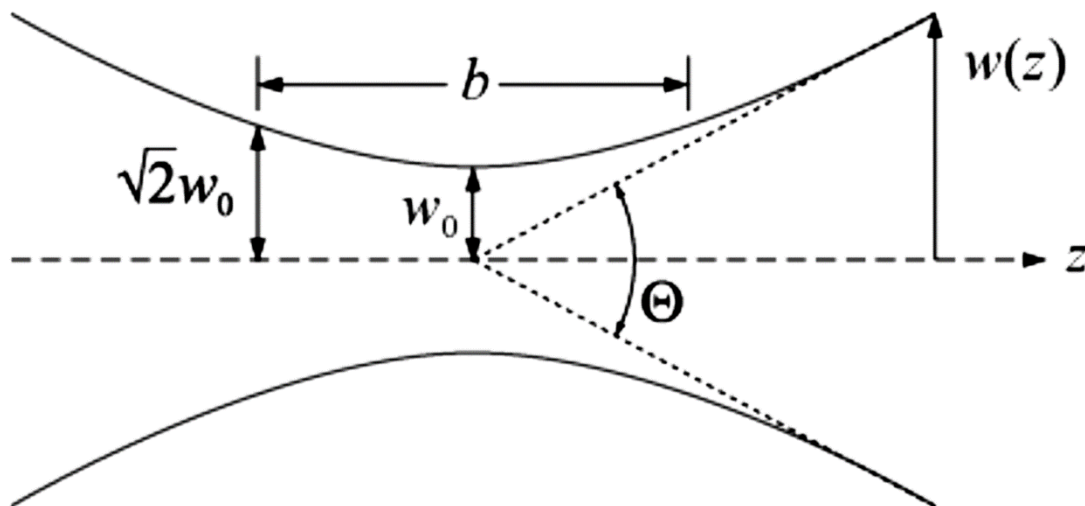


图4-2 高斯光束

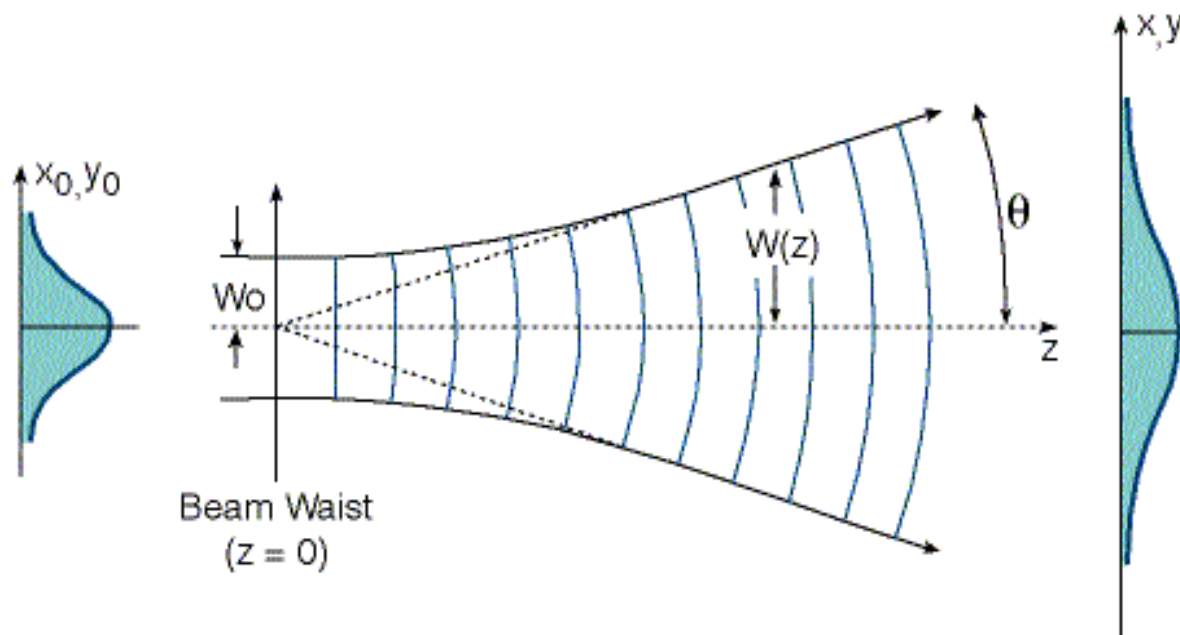


图4-3 高斯光束

$w_0$  ——基模高斯光束的腰斑半径（束腰）

$w(z)$  ——高斯光束在 $z$ 处的光斑半径

$R(z)$  ——高斯光束在 $z$ 处的波面曲率半径

## 2、高斯光束的基本性质

### 2.1 振幅分布及光斑半径

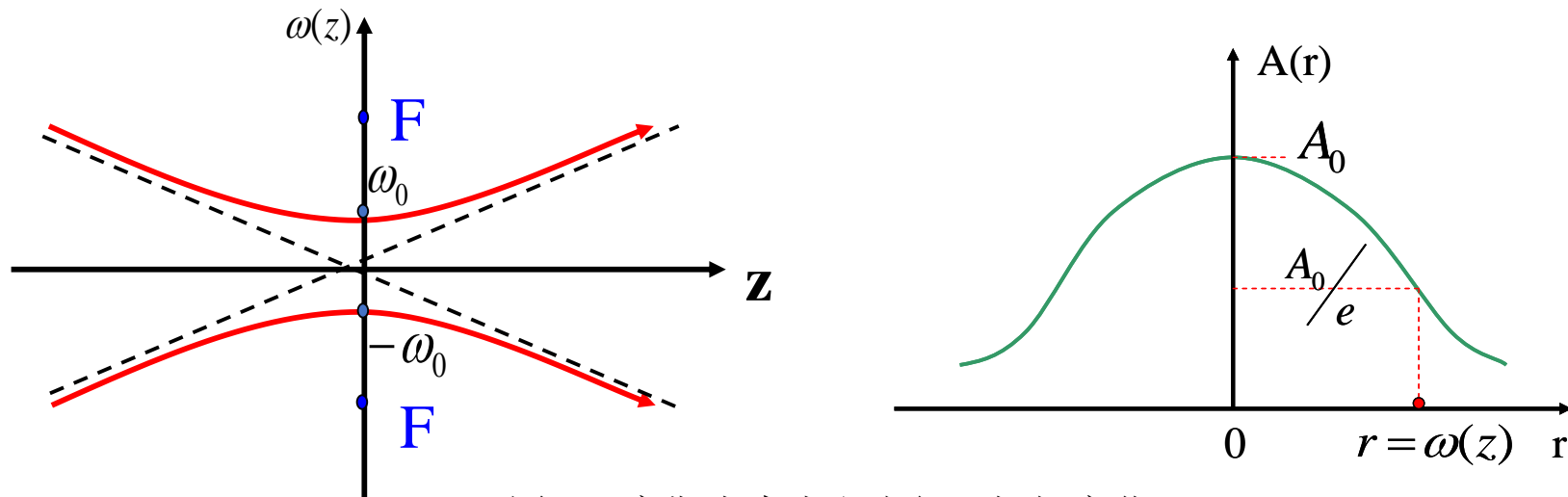


图4-4 高斯光束光斑半径及振幅变化

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2}\right)^2}$$

$\omega(z)$  随  $z$  以双曲线函数变化

双曲线顶点坐标为  $\pm\omega_0$ ，共焦参数  $f = \frac{L}{2} = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$

光能主要分布在双锥体内

## 2.2 等相位面分布

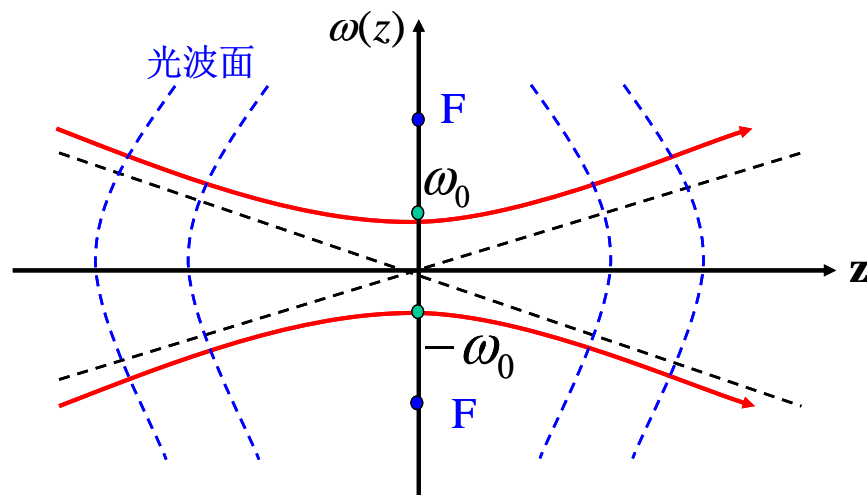


图4-5 高斯光束等相位面变化

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] = z \left[ 1 + \left( \frac{f}{z} \right)^2 \right]$$

- |                  |   |   |
|------------------|---|---|
| $z = 0$          | $R(z) \rightarrow \infty$               | (束腰处等相面为平面)                             |
| $z = \pm f$      | $ R(z)  = 2f$                           | (极小值)                                   |
| $ z  \leq f$     | $ R(z) $ 逐渐减小,                          | 曲率中心在 $(-\infty, -f] \cup [f, +\infty)$ |
| $ z  > f$        | $ R(z) $ 逐渐增加,                          | 曲率中心在 $(-f, f)$                         |
| $z = \pm \infty$ | $ R(z)  \approx  z  \rightarrow \infty$ | (无限远处等相面为平面)                            |



## 2.3 远场发散角

当 $z$ 趋向于无穷大时，双曲线两条渐近线之间的夹角。

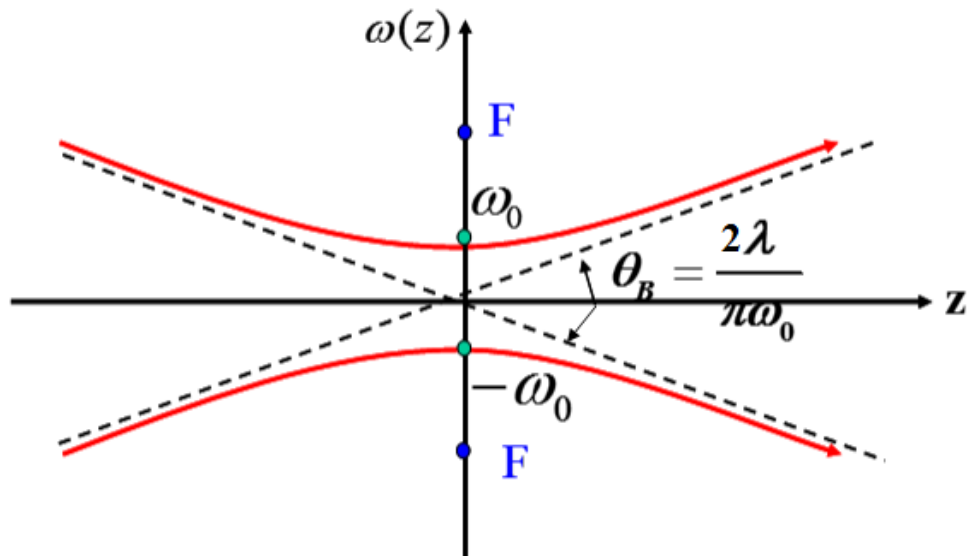


图4-6 高斯光束的发散角

$$\theta_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2\omega(z)}{z} = 2 \frac{\lambda}{\pi\omega_0}$$

## 2.4 瑞利长度

在瑞利长度 $z_R$ 处，高斯光斑的面积为束腰处最小光斑面积的两倍。

$$\omega(z_R) = \sqrt{2}\omega_0$$

## 总结：

高斯光束：幅度非均匀的变曲率中心的球面波。

非均匀球面波

等相位面为球面；

曲率中心和曲率半径随传播过程而改变；

振幅和强度在横截面内为高斯分布。

### 3、高斯光束的特征参数

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{f}\right)^2} \quad R(z) = z \left[ 1 + \left(\frac{f}{z}\right)^2 \right] \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\lambda f}{\pi}}$$

#### 3.1 光斑半径 $\omega(z)$ 与曲率半径 $R(z)$

$$\omega_0, z \Rightarrow \begin{cases} \omega(z) \\ R(z) \\ \theta_0 \end{cases}$$

#### 3.2 束腰半径 $\omega_0$ 与束腰位置 $z$

$$\begin{cases} \omega(z) \\ R(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \\ z \end{cases}$$

### 3.3 高斯光束的 $q$ 参数

将  $\omega(z)$  和  $R(z)$  联系起来, 统一在一个表达式中, 可以定义一个新参数  $q(z)$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi\omega^2(z)}$$

用  $q(z)$  表征高斯光束:

$$E(x, y, z) = \frac{A_0}{\omega(z)} \exp \left\{ -ik \left[ z + \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] + i\varphi(z) \right\}$$

高斯光束的  $q(z)$  相当于均匀球面波光束的曲率半径  $R$ ，因此可称为  $q$  参数为高斯光束的复曲率半径。

光腰处：

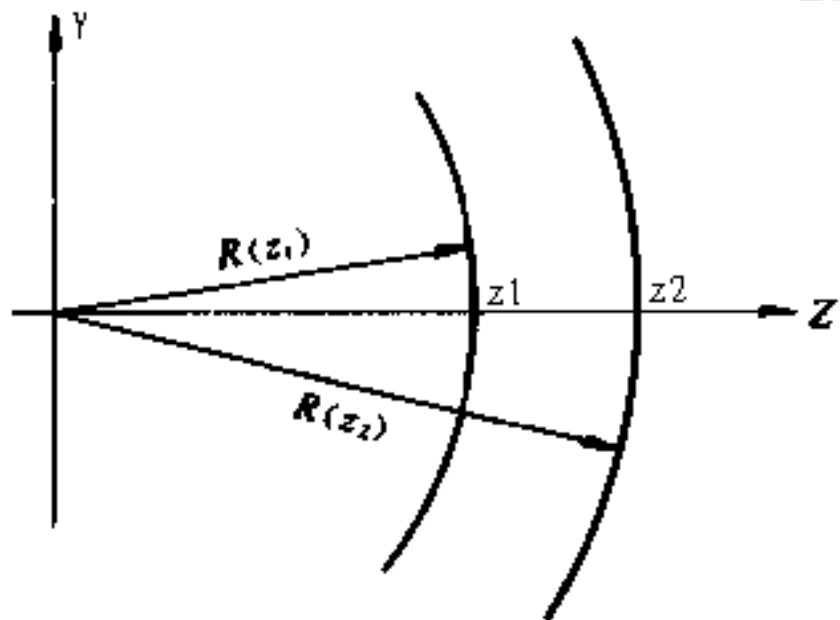
$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{q(0)} = \frac{1}{R(0)} - \frac{i\lambda}{\pi\omega^2(0)}$$

$$\Rightarrow q_0 = i \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda} = if$$

## 4、高斯光束的传输与变换规律

### 4.1 普通球面波的传输与变换规律

#### □ 自由空间传输



$$R(z_2) = R(z_1) + z_2 - z_1 = R(z_1) + L$$

变换矩阵:

$$T_L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}$$

(遵循ABCD变换法则)

图4-7 普通球面波在自由空间的传播

## □ 经过薄透镜的变换规律

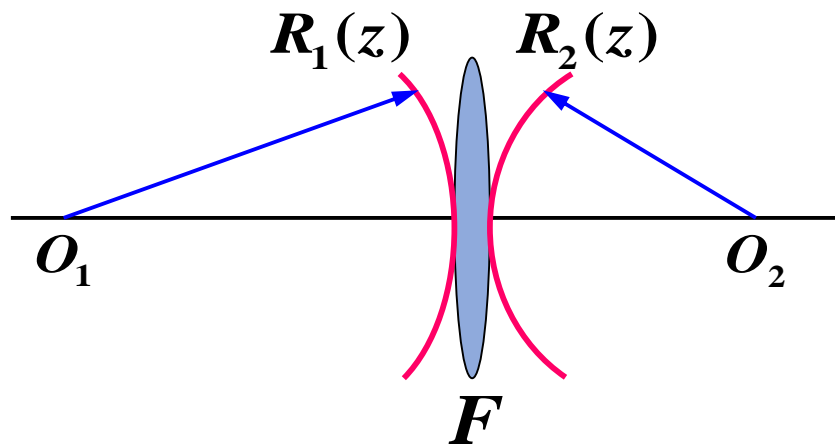
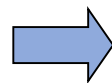


图4-8 普通球面波经过透镜变换

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F}$$

$$T_F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}$$

(遵循ABCD变换法则)

## 4.2 高斯光束的传输与变换规律

### □ 高斯光束在自由空间传输

$$\begin{cases} \omega^2(z) = \omega_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi \omega_0^2} \right)^2 \right] \\ R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{f}{z} \right)^2 \right] \end{cases} \xrightarrow{\text{代入}} \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi \omega^2(z)}$$

$$\Rightarrow q(z) = if + z = q_0 + z$$

$$T_L = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad q_2 = q_1 + L$$

**结论：** 高斯光束 $q$ 参数在自由空间的变换规律满足ABCD法则



## □ 高斯光束经过薄透镜的变换

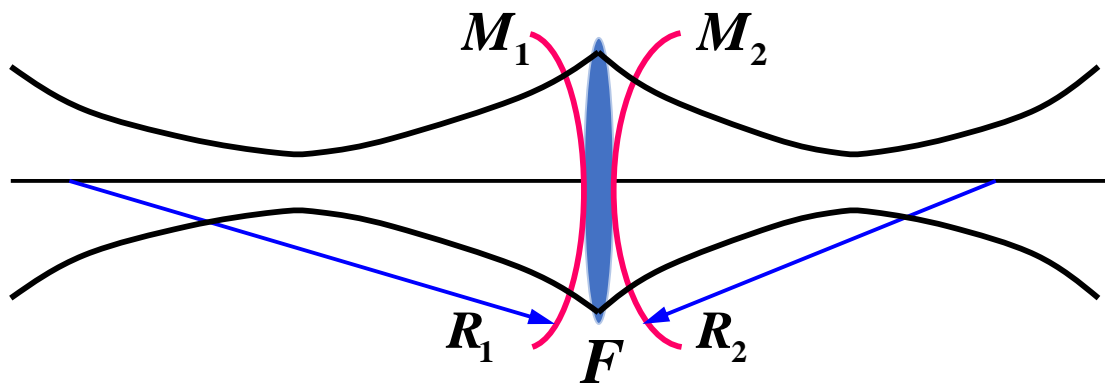


图4-9 高斯光束经过透镜变换

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F} \\ \omega_1 &= \omega_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_2^2} = \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{F} \right) - i \frac{\lambda}{\pi \omega_2^2}$$

$$= \left( \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi \omega_1^2} \right) - \frac{1}{F} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{F}$$

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{bmatrix}$$

**结论：**高斯光束q参数经薄透镜的变换规律满足ABCD法则

## □ 实例分析

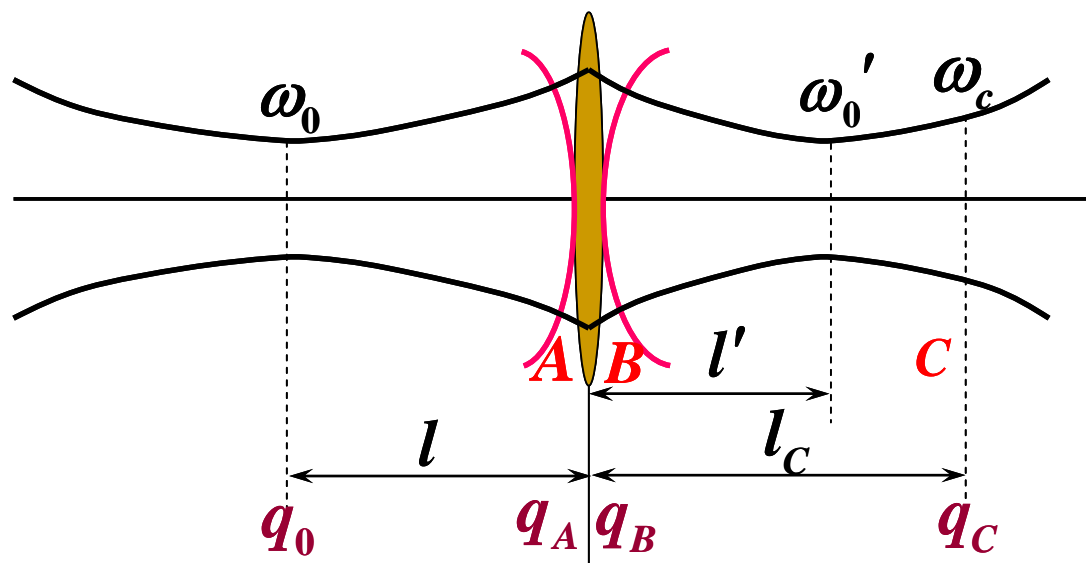


图4-10 高斯光束的传输

已知:

$\omega_0$ 、 $l$ 、 $F$

求:

$\omega_c$ 、 $R_c$

解:

总变换矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & l_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{l_c}{F} & l + l_c - \frac{ll_c}{F} \\ -\frac{1}{F} & 1 - \frac{l}{F} \end{bmatrix}$$

束腰处:

$$q_1 = i \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$$

C处:

$$\frac{1}{q_c} = \frac{1}{R_c} - \frac{i\lambda}{\pi \omega_c^2}$$

由ABCD定律:

$$q_c = \frac{\left(1 - \frac{l_c}{F}\right) q_1 + l + l_c - \frac{ll_c}{F}}{-\frac{1}{F} q_1 + 1 - \frac{l}{F}}$$

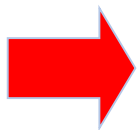
联立上式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi \omega_c^2}{\lambda} = \frac{(1 - \frac{l_c}{F})^2 (\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda})^2 + (l + l_c - \frac{l l_c}{F})^2}{(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda})^2} \\ R_c = \frac{(1 - \frac{l_c}{F})^2 (\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda})^2 + (l + l_c - \frac{l l_c}{F})^2}{-\frac{1}{F} (1 - \frac{l_c}{F})^2 (\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda})^2 + (l + l_c - \frac{l l_c}{F})^2 (1 - \frac{l}{F})} \end{array} \right.$$

特例1：将C点取在束腰处，并令

$$l_C = l' \quad \omega_c = \omega_0'$$

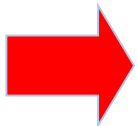
在束腰处：  $R_C = \infty$



$$\omega_0'^2 = \frac{F^2 \omega_0^2}{(F - l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

$$l' = F + \frac{F^2 (F - l)}{(F - l)^2 + \left(\frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}\right)^2}$$

特例2：将C点取在透镜物方焦点处：



$$l_C = F, \quad \omega_F = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} F$$

## 5、高斯光束的聚焦和准直

### 5.1 高斯光束的聚焦

使激光束会聚为极小点，得到光能集中的小光斑

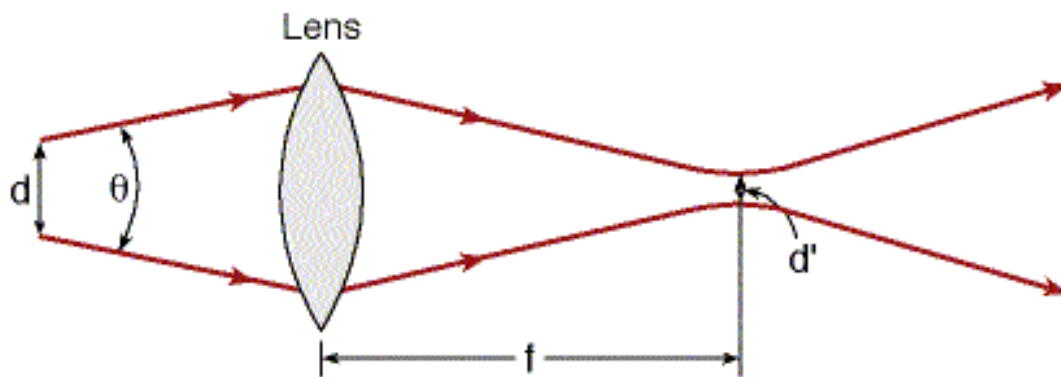


图4-11 高斯光束的聚焦

$$\left. \begin{aligned} l' &= F + \frac{F^2(l - F)}{(F - l)^2 + f^2} \\ \omega_0'^2 &= \frac{F^2 \omega_0^2}{(F - l)^2 + f^2} \end{aligned} \right\}$$

## □ $F$ 一定时, $w_0'$ 随 $l$ 的变化情况

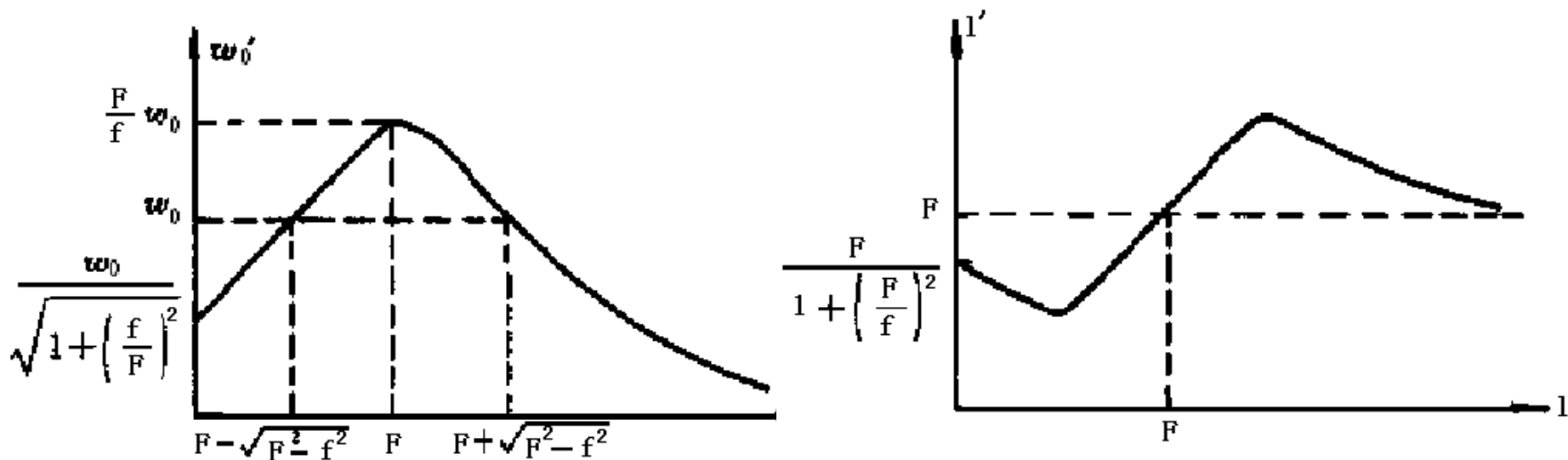


图4-12  $F$  一定时,  $w_0'$  和  $l'$  随  $l$  的变化情况

当  $l = 0$  时: 
$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F}\right)^2}} < \omega_0 \quad l' = \frac{F}{1 + \left(\frac{F}{f}\right)^2} < F$$

**结论**

不论透镜焦距  $F$  为多大, 都有一定的聚焦作用;  $F$  越小, 聚焦作用越好.

当  $l = F$  时:

$$\omega_0' = \frac{\lambda}{\pi\omega_0} F = \frac{F}{f} \omega_0 \quad l' = F$$

**结论**  $F > f$  无聚焦作用;  $F < f$  有聚焦作用。

当  $l > F$  时:

若  $F < f$  , 总有聚焦作用。

若  $F > f$  , 只有  $l < F - \sqrt{F^2 - f^2}$  时才有聚焦作用。

当  $0 < l < F$  时:

若  $F < f$  , 总有聚焦作用。

若  $F > f$  , 只有  $l > F + \sqrt{F^2 - f^2}$  时才有聚焦作用。



□  $l$  一定时,  $w_0'$  随  $l$  的变化情况

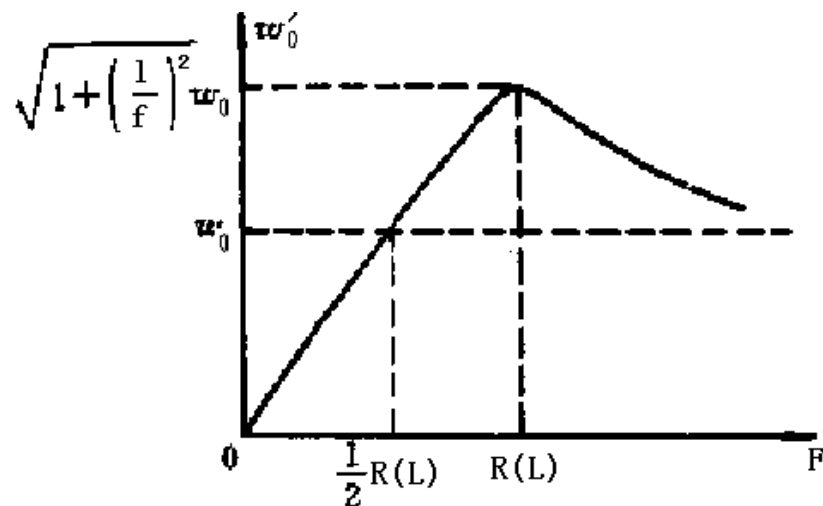


图4-13  $l$  一定时,  $w_0'$  随  $l$  的变化情况

$$F = \frac{1}{2} R(l) \text{ 时: } \omega_0' = \omega_0, \quad l' = l$$

$$F < \frac{1}{2} R(l) \text{ 时: } \omega_0' < \omega_0 \quad \boxed{\text{有聚焦作用}}$$

$$F > \frac{1}{2} R(l) \text{ 时: } \omega_0' > \omega_0 \quad \boxed{\text{无聚焦作用}}$$

## 聚焦设计及处理原则：

- 短焦距透镜会聚，减小  $F$
- 把高斯光束腰斑放在远离透镜的地方
- 把高斯光束腰斑放在透镜表面处

## 5.2 高斯光束的准直

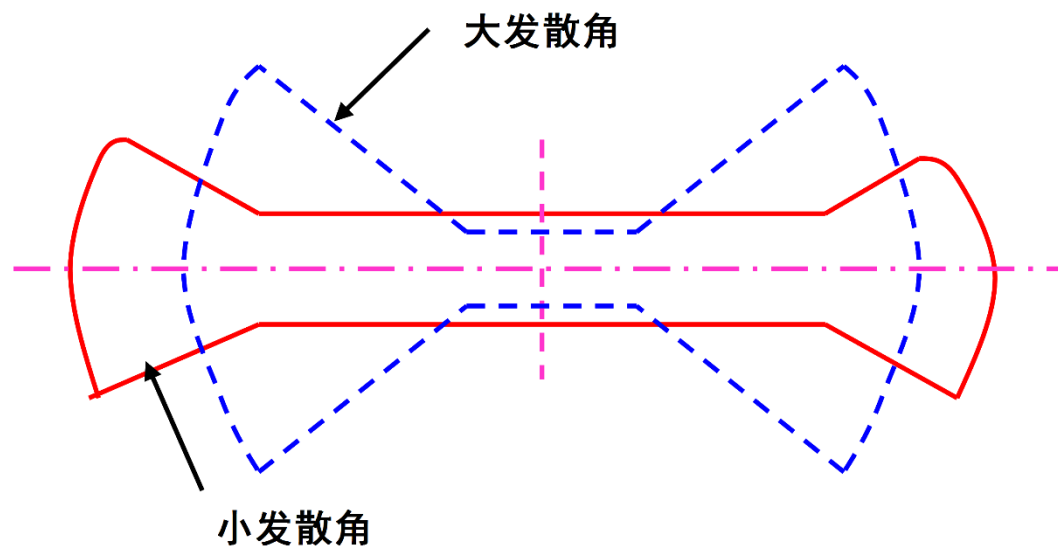


图4-14 高斯光束的发散角

$$\text{发散角: } \theta_0 = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0}$$

腰斑小，光束发散角大，发散得快；

腰斑大，光束发散角小，发散得慢。

## □ 单透镜准直

$$\theta_0' = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0'}$$

$l = F$  时,  $\omega_0'$  达到极大值  $\Rightarrow \theta_0'$  达到极小值

即:  $\omega_{0(\max)}' = \frac{\lambda}{\pi\omega_0} F, \quad \theta_{0(\min)}' = \frac{2\lambda}{\pi\omega_0'} = \frac{2\omega_0}{F}$

$$\frac{\theta_0'}{\theta_0} = \frac{\pi\omega_0'^2}{F\lambda} = \frac{f}{F}$$

$\frac{f}{F} \ll 1$  时, 有较好的准直效果。

透镜的焦距  $F$  越长, 高斯光束的腰斑  $\omega_0$  越小, 准直效果越好

## □ 望远镜准直

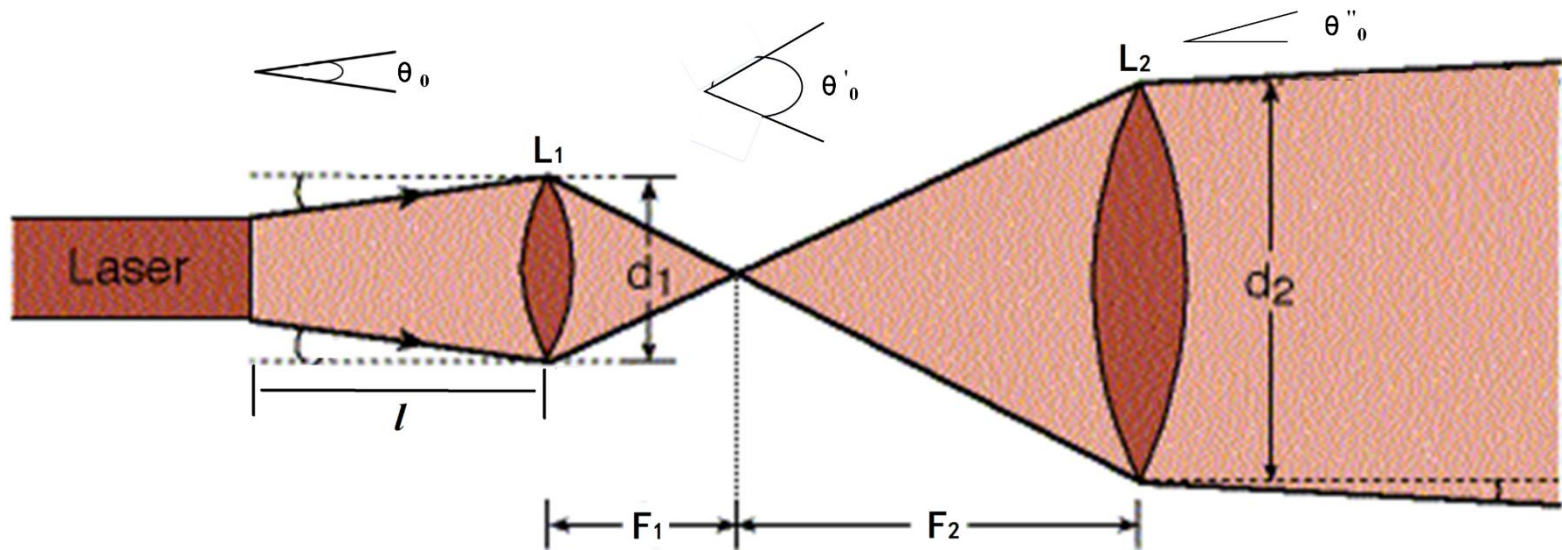


图4-15 高斯光束的望远镜准直

$l \gg F_1$  时，将高斯光束聚焦于 $L_1$ 透镜后焦面上得一极小光斑：

$$\omega'_0 = \frac{\lambda F_1}{\pi \omega(l)}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_0'' &= \frac{\lambda}{\pi \omega_0''}, \quad \theta_0' = \frac{\lambda}{\pi \omega_0'}, \quad \theta_0 = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \\ \omega_0'' &= \frac{F_2 \lambda}{\pi \omega_0'}, \quad \omega_0' = \frac{F_1 \lambda}{\pi \omega(l)} \end{aligned} \right\}$$

准直倍率：  $M' = \frac{\theta_0}{\theta_0''} = \frac{\theta_0}{\theta_0'} \cdot \frac{\theta_0'}{\theta_0''} = \frac{F_2}{F_1} \frac{\omega(l)}{\omega_0}$

$$= M \frac{\omega(l)}{\omega_0} = M \sqrt{1 + \left( \frac{\lambda l}{\pi \omega_0} \right)^2}$$

**$M'$**  与望远镜结构参数  $M = \frac{F_2}{F_1}$  有关，且与高斯参数有关。

## 6、高斯光束的自再现变换

当一个高斯光束通过透镜后，其结构不发生变化，即：

$$\omega'_0 = \omega_0, \quad l' = l$$

称为自再现变换。

### □ 利用透镜实现自再现变换

当透镜的焦距等于高斯光束入射在透镜表面上的波面曲率半径一半时，透镜对该高斯光束作自再现变换。

$$F = \frac{1}{2} R(l)$$

### □ 球面反射镜的自再现变换

当入射在球面镜上的高斯束波面曲率半径等于球面镜的曲率半径时，在反射时高斯光束的参数不发生变化。

## 7、高斯光束的匹配

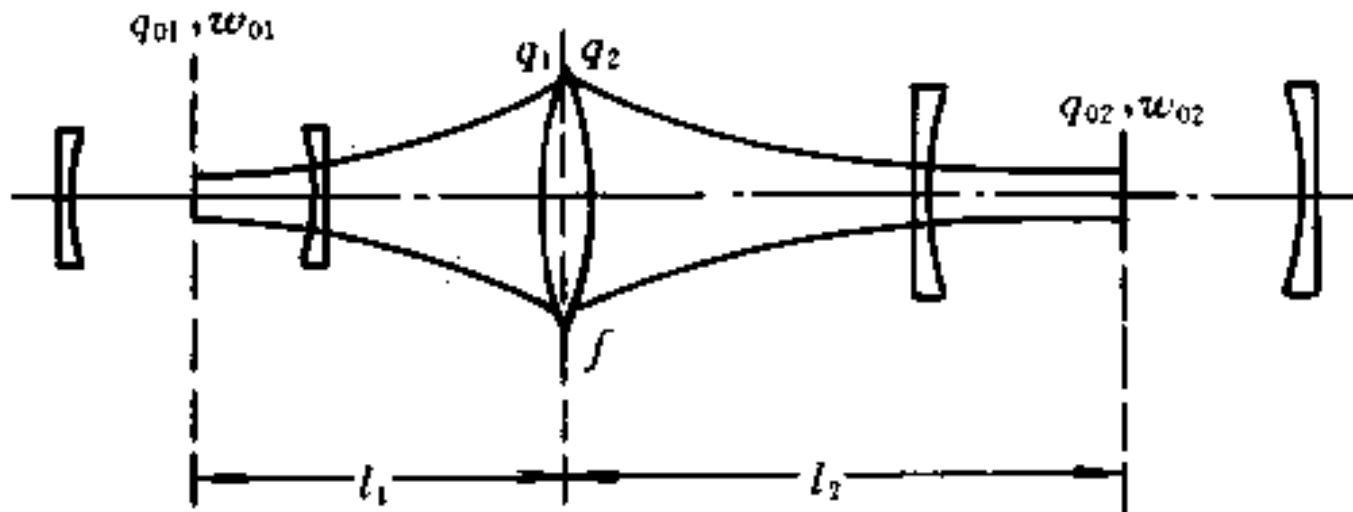


图4-16 高斯光束的匹配

**模式匹配：** 当一个谐振腔产生的单模高斯光束入射到另一个光学系统时，经**透镜变换**后在光学系统内产生的模式，与该系统基模的光腰大小及位置相同。

**模式匹配问题：**

已知： $w_{01}$ 和 $w_{02}$

求：物距 $l_1$ 、像距 $l_2$ 、及透镜焦距 $F$  应满足的关系



透镜处物方的复参数:

$$q_1 = l_1 + q_{01} = l_1 + \frac{i\pi\omega_{01}^2}{\lambda}$$

复参数通过透镜的变换:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{F}$$

像方腰斑处的复参数:

$$q_{02} = q_2 + l_2$$

$$\begin{cases} l_1 = F \pm \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \sqrt{F^2 - f_1 f_2} \\ l_2 = F \pm \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \sqrt{F^2 - f_1 f_2} \end{cases}$$

只要  $F^2 > f_1 f_2$  , 可计算出一组  $l_1$  和  $l_2$  , 以此确定两个腔的相对位置, 实现模式匹配

## 8、激光束质量因子

基模高斯光束的质量最高，是衍射极限光束

激光束经过理想光学系统后，腰斑尺寸和远场发散角的乘积保持恒定不变

对基模高斯光束：

$$\omega_0 \theta_0 = \frac{2\lambda}{\pi}$$

光束质量因子（衍射倍率因子）：

$$M^2 = \frac{\text{实际光束的腰斑半径与远场发散角的乘积}}{\text{基模高斯光束的腰斑半径与远场发散角的乘积}}$$

$M^2$  是衡量激光束空域质量的参量。

基模高斯光束：  $M^2 = 1$

高阶模高斯光束：  $M^2 > 1$

- 高阶模、多模或其他非理想光束的  $M^2$  值均大于1。
- $M^2$  值可以表征实际光束偏离衍射极限的程度。
- $M^2$  的取值越大，光束衍射发散越快，光束质量越差。
- $M^2$  是表征激光束空间相干性好坏的本质参量。

光束传输因子：

$$K = 1/M^2$$

也是国际上公认的描述光束空域传输特性的量。