

工程力学 第十章 弯曲内力

例：建立剪力弯矩方程，并画剪力弯矩图

建立坐标系
可以不求支反力
建立剪力弯矩方程：

$$F_S = -qx \quad (0 \leq x < a)$$

$$M = -qx^2/2 \quad (0 \leq x < a)$$

$$F_S = -qa \quad (a \leq x < 2a)$$

$$M = qa^2 - qa(x-a/2) \quad (a < x < 2a)$$

在集中力偶作用处(包括支座)弯矩有突变

工程力学 第十章 弯曲内力

例3：三角形分布载荷作用，画剪力与弯矩图

解：1. 求支反力

$$F_R = \frac{q_0 l}{2} \quad F_{Ay} = \frac{q_0 l}{6} \quad F_{By} = \frac{q_0 l}{3}$$

2. 建立剪力弯矩方程

$$F_S = \frac{q_0 l}{6} - \frac{x q_0 x}{2l}$$

$$M = \frac{q_0 l}{6} x - \left(\frac{x q_0 x}{2l} \right) \frac{x}{3}$$

$$F_S = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2$$

$$M = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3$$

工程力学 第十章 弯曲内力

3. 画剪力弯矩图

$$F_S = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2$$

— 2 次抛物线

$$M = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3$$

— 3 次曲线

$$\frac{dM}{dx} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l} x^2 = 0$$

$$x_c = l/\sqrt{3} \quad M_c = \frac{q_0 l}{6} x_c - \frac{q_0}{6l} x_c^3 = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$

工程力学 第十章 弯曲内力

例4：画剪力弯矩图

思考：

- 如何计算支座反力？
- 计算支座反力后，画剪力弯矩图时，是否还要考虑中间支座？
- 载荷作用在梁间铰上、铰链左侧梁端，铰链右侧梁端，剪力、弯矩图有无区别？

工程力学 第十章 弯曲内力

例：画剪力弯矩图

(b) (c)

(b1) (c1)

(b2) (c2)

5

工程力学 第十章 弯曲内力

剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图 小结

- 分析步骤：求支反力 \rightarrow 建立坐标 \rightarrow 建立剪力弯矩方程 \rightarrow 画剪力弯矩图
- 当需要分段列剪力弯矩方程时（集中力，集中力偶，分布载荷不作用在整个梁段），可以采用整体坐标或局部坐标。
- 剪力弯矩图中要标明符号以及特征点的大小。
- 剪力图在有集中力作用处（包括支座处），发生突变。
- 弯矩图在有集中力偶作用处（包括支座处），发生突变。

利用函数方程画函数曲线

6

工程力学 第十章 弯曲内力

上次课内容

弯曲梁

外力特征：外力或外力偶的矢量垂直于杆轴

变形特征：杆轴由直线变为曲线

梁的外力与计算简图：

集中载荷、集中力偶、分布载荷，常见约束

剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图

方法：利用截面法，根据平衡关系，分段建立剪力、弯矩方程（函数），然后画其函数图象。

7

工程力学 第十章 弯曲内力

简单、高效的绘图方法

§ 10-5 剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系

外载-剪力-弯矩图之间的数学关系

8

工程力学 第十章 弯曲内力

§ 10-5 剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系

正方向的规定: x 轴从左到右为正
 $q(x)$ 向上为正

微段平衡:

$$F_s + q|_x dx = F_s + dF_s$$

$$M + F_s dx + q|_x \frac{dx}{2} = M + dM$$

$$\frac{dF_s}{dx} = q|_x$$

$$\frac{dM}{dx} = F_s \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q|_x$$

❗切记:
 q 向上为正;
 x 向右为正。

工程力学 第十章 弯曲内力

$$\frac{dF_s}{dx} = q \quad \frac{dM}{dx} = F_s \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q$$

- 剪力图某点处的切线斜率 = 该截面处载荷集度的大小
- 弯矩图某点处的切线斜率 = 该截面处剪力的大小
- 该截面处载荷集度的正负 决定 弯矩图某点处的凹凸性

	$q(x) = 0$	$q(x) = c < 0$	$q(x) = c > 0$	$q(x) = ax + b$ ($a > 0$)	$q(x) = ax + b$ ($a < 0$)
q	—				
F_s 图	—			2次凹曲线	2次凸曲线
M 图	斜线	2次凸曲线	2次凹曲线	3次曲线	3次曲线

工程力学 第十章 弯曲内力

在集中力作用处, 梁微段的内力关系: **弯矩连续, 剪力突变**

$$F_{左} + q(x)dx + F = F_{右}$$

$$M_{左} + F_{左}dx + Fdx/2 + q(x)dx^2/2 = M_{右}$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{左} + F = F_{右} \\ M_{左} = M_{右} \end{cases}$$

❗F向上为正

在集中力偶作用处, 梁微段的内力关系: **剪力连续, 弯矩突变**

$$F_{左} + q(x)dx = F_{右}$$

$$M_{左} + F_{左}dx + M + q(x)dx^2/2 = M_{右}$$

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{左} = F_{右} \\ M_{左} + M = M_{右} \end{cases}$$

❗M顺时针为正

工程力学 第十章 弯曲内力

利用微分关系画剪力弯矩图

1、求支反力: $F_{Ay} = qa/2$ $F_{By} = qa/2$

2、求出特征截面的剪力弯矩值:

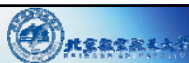
3、确定各段的曲线形状:

4、画剪力弯矩图:

	A ⁺	B ⁻	B ⁺	C ⁻	D ⁻
F_s	$qa/2$	$qa/2$	0	0	$-qa/2$
M	0	$qa^2/4$	$qa^2/4$	$qa^2/4$	0

	AB	BC	CD
q	$q = 0$	$q = 0$	$q < 0$
F_s 图	直线	=0	斜线
M 图	斜线	直线	2次凸曲线

工程力学 — 第十章 弯曲内力



利用微分关系画剪力弯矩图的步骤:

- ✎ 求支反力
- ✎ 求特征截面的剪力、弯矩值
特征截面: 支座一侧, 集中载荷两侧, 分布载荷两侧.
- ✎ 根据微分关系, 确定各段曲线的形状
- ✎ 利用剪力弯矩图的封闭特性, 检查内力图的正确性

❗ 切记: q 向上为正; x 向右为正。

13

工程力学 — 第十章 弯曲内力



求特征截面剪力、弯矩值的方法:

1、截面法 —— 基本方法

2、面积法 (积分法):

$$\frac{dF_s}{dx} = q(x) \Rightarrow F_s = \int_0^x q(x) dx + C =$$

q, F 向上为正
 x 左边分布载荷的面积
 $+ x$ 左边的集中载荷 (包括支反力)

$$\frac{dM}{dx} = F_s \Rightarrow M = \int_0^x F_s dx + D =$$

x 左边剪力图的面积
 $+ x$ 左边的集中力偶 (包括支反力偶)

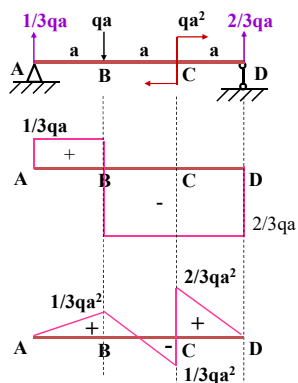
M 顺时针为正

14

工程力学 — 第十章 弯曲内力



例: 利用微分关系画剪力弯矩图



15

工程力学 — 第十章 弯曲内力



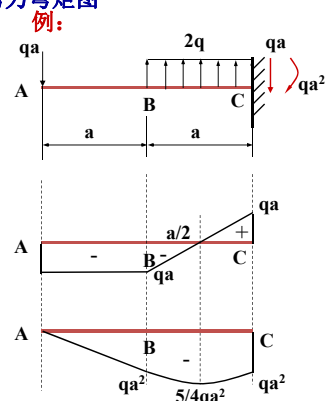
利用微分关系快速画剪力弯矩图

剪力图口诀

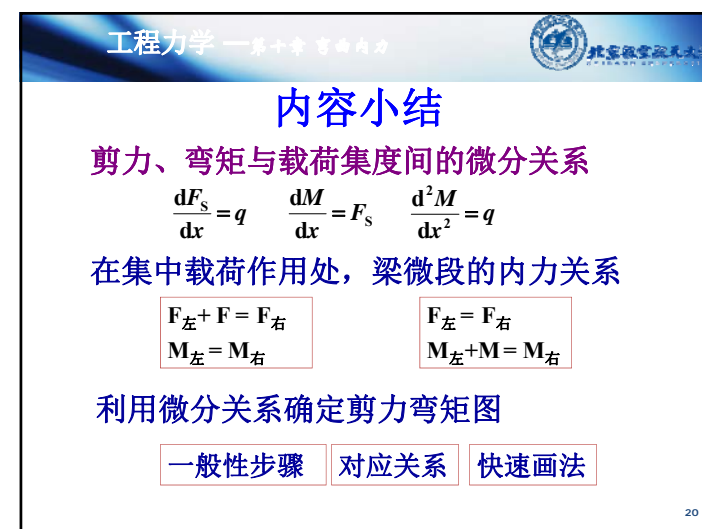
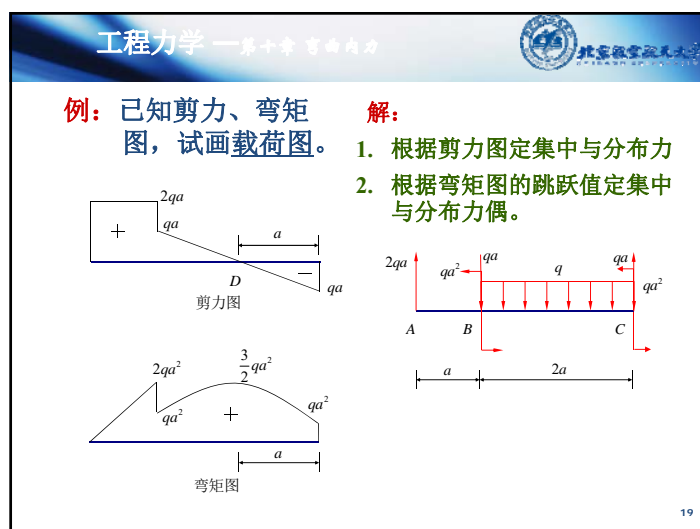
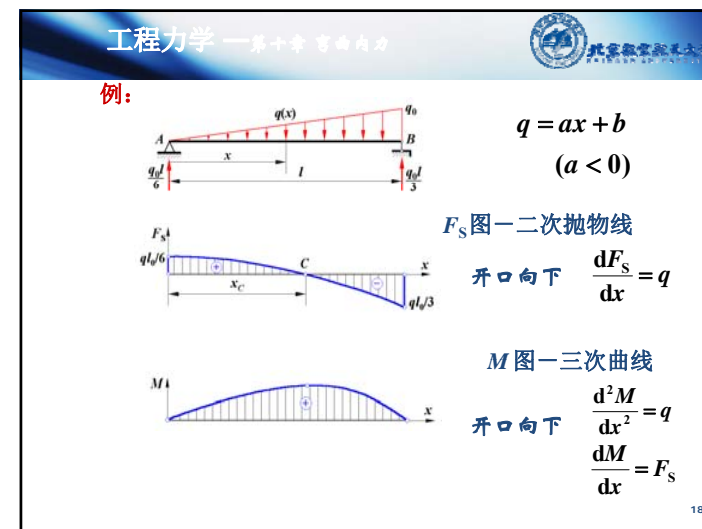
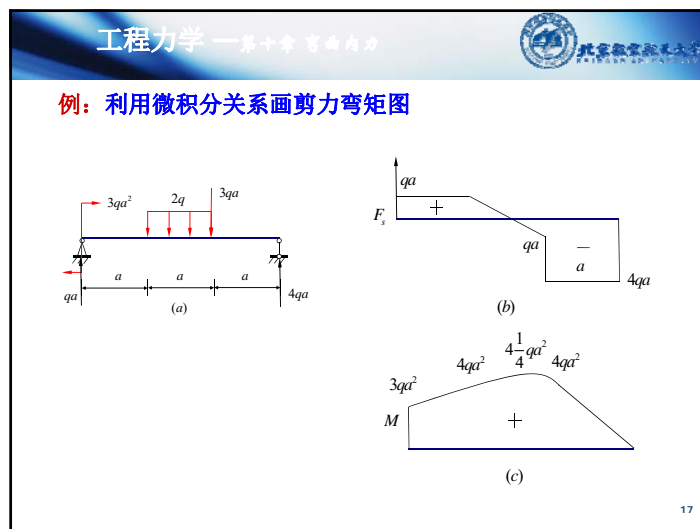
跟着箭头走——
先求支反力, 从左往右去。

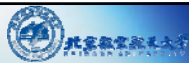
弯矩图口诀

根据剪力图, 两点
对一段; 若遇到力
偶, 顺上逆下走。



16





作业:

10-4(b), 10-5(c), 10-6

21

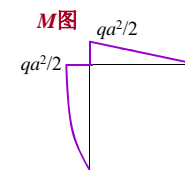
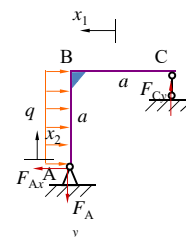


补充: 对竖直梁
弯矩图的处理

观察者A
认为正弯矩

观察者B
认为负弯矩

两观察者均会将图画在右侧(受压侧)



22