2013–2014 学年第一学期

理科实验班 2013 级　高等代数 (I) 期中考试题

1. (共 10 分) 求方程组的一个基础解系：

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

2. (共 20 分，每小题 10 分) 求行列式

$$(1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \end{vmatrix};\qquad (2)\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. (共 30 分) 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$.

(1) (10 分) 计算 A 的行列式.

(2) (14 分) 对不同的 λ 值，求齐次线性方程组 $AX = \mathbf{0}$ 的解空间的维数，并求出解空间的一组基.

(3) (6 分) λ 取何值时，线性方程组 $AX = \beta$ 对任意 4 维列向量 β 都有解？

4. (共 25 分) 已知向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关.

(1) (10 分) λ 取什么复数值时，向量组 $S = \{\lambda\alpha_1+\alpha_2, \lambda\alpha_2+\alpha_3, \lambda\alpha_3+\alpha_4, \lambda\alpha_4+\alpha_1\}$ 线性相关？

(2) (15 分) 对不同的实数值 λ, 求向量组 S 的秩，并求一个极大线性无关组.

5. (共 15 分，每小题 5 分) 已知： 6 元线性方程组系数矩阵的秩是 4. 有 3 个线性无关的解 X_1, X_2, X_3.

(1) 这个方程组是齐次还是非齐次？为什么？

(2) 用 X_1, X_2, X_3 表示出它的通解.

(3) X_1, X_2, X_3 的哪些线性组合 $\lambda_1X_1 + \lambda_2X_2 + \lambda_3X_3$ 是方程组的解. 为什么？

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2(1)+(2),\ -(1)+(3)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\cancel{x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{13}{2}}$ 设 $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$

$$x_1 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{13}{2}t_2$$

$$x_2 = 5t_2$$

∴ 基础解系为 $\{(\frac{1}{2}, 1, 0, 0), (-\frac{13}{2}, 0, 5, 1)\}$

2. (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \times (-1)^{\tau(2143)} = 1$$

2. (2)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)+(1),\ (5)+(1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 0$$

3. (1) $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

① $\lambda=1$ 时 一三行和为0， $\Delta=0$

② $\lambda=2$ 时 一三列和为0， $\Delta=0$

③ $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq2$ 时

$$\Delta=\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 0 & 2 \\ -1 & -1 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & (\lambda-1)(\lambda-2) \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) \\ -1 & -1 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}\cdot(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2\times(-1)^{\tau(3412)}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$

综上 $\Delta=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$

(2) ① $\lambda=1$ 时 $A\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim=4-2=2$

解空间一组基为 $(-2,0,1,0)^T$ 与 $(0,-2,0,1)^T$

（背面）

Scanned by CamScanner

(2) ② $\lambda = 2$ 时 $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\dim = 4 - 2 = 2$

解空间一组基为 $(-1, 0, 1, 0)$ 与 $(0, -1, 0, 1)$

③ $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\dim = 4 - \mathrm{rank} = 4 - 4 = 0$ 0空间的

基为 $(0, 0, 0, 0)$ 基为空集!

(3) ① $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时 $\mathrm{rank} = 4$

又∵ β 的维度为4 ∴ $\mathrm{rank}\, S = 4$ $(S = \{A, \beta\})$

∴ 必有解 ∴ β 与 A 的4个列向量线性相关

② $\lambda = 1$ 时，令 $\beta = (1, 1, 1, 1)^T$ 即无解

③ $\lambda = 2$ 时，令 $\beta = (1, 1, 1, 1)^T$ 即无解

综上 只有当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 2$ 时 才符合条件

4. (1) 若线性相关

则有 $\lambda_1(\lambda\alpha_1+\alpha_2)+\lambda_2(\lambda\alpha_2+\alpha_3)+\lambda_3(\lambda\alpha_3+\alpha_4)+\lambda_4(\lambda\alpha_4+\alpha_1)$

$= 0$

$\because \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 . \alpha_4$ 线性无关

($\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$不全为0时). 当且仅当 $\alpha_1 . \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 前的系数均为0时等式为0

方程组 $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ 有非零解

$$\cancel{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}} \cancel{\rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 \end{vmatrix}}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^4 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

则 $1-\lambda^4=0$

综上，复数域上的 λ，使 $\lambda^4=1$ 即可

即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=i$ 或 $\lambda=-i$

4 (2) ~~当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -1$ 时~~

~~无法~~ 设 $\beta_1 = \lambda\alpha_1 + \alpha_2$ $\beta_2 = \lambda\alpha_2 + \alpha_3$

$\beta_3 = \lambda\alpha_3 + \alpha_4$ $\beta_4 = \lambda\alpha_4 + \alpha_1$

① 当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -1$ 时

$\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \lambda_3\beta_3 + \lambda_4\beta_4 = 0$

只有 $(0,0,0,0)$ 一组解

$\therefore$ β_1 β_2 β_3 β_4 线性相关

rank $S = 4$

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ 即为极大线性无关组

② 当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$ 时

可知 S 线性相关， rank $S < 4$

选其中任意 3 个向量

$\lambda_1\beta_p + \lambda_2\beta_q + \lambda_3\beta_r = 0$

显然 α_1、α_2、α_3、α_4 的系数全为 0 无法满足

$\therefore$ ~~k~~ 解为 $(0,0,0)$

都其线性相关

$\therefore$ rank $S = 3$

$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 即为其中一个极大线性无关组

5. (1) 非齐次的

若为齐次，则 $\dim = n - \text{rank} = 2$

而有3个线性无关的解，$\dim \geq 3$，矛盾

$\therefore$ 方程组是非齐次的

(2)

~~通解为 $X_1 + t_1(X_1 - X_2) + t_2$~~

$$AX_1 = \beta$$
$$AX_2 = \beta$$
$$AX_3 = \beta$$

$\therefore$ $A(X_1 - X_2) = 0$　　　$A(X_1 - X_3) = 0$

且　$\because$ X_1、X_2、X_3 线性无关

$\therefore$ $\lambda_1(X_1 - X_2) + \lambda_2(X_1 - X_3) = 0$

只有 $(0,0)$ 一个解

即 $(X_1 - X_2)$. $(X_1 - X_3)$ 线性无关

$\therefore$ 通解为 $X_1 + t_1(X_1 - X_2) + t_2(X_1 - X_3)$

(3) 若 $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3$ 为方程组的解

则 $A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3) = \beta$

$$\lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 + \lambda_3 AX_3 = \beta$$

$$\lambda_1 \beta + \lambda_2 \beta + \lambda_3 \beta = \beta$$

$\therefore$ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

即满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 的线性组合即为方程组的解

Scanned by CamScanner