

§ 12—6 平行平板的多光束干涉及其应用

一、平行平板的多光束干涉

- 1、干涉场的强度分布
- 2、干涉条纹的特点

二、法布里—泊罗干涉仪

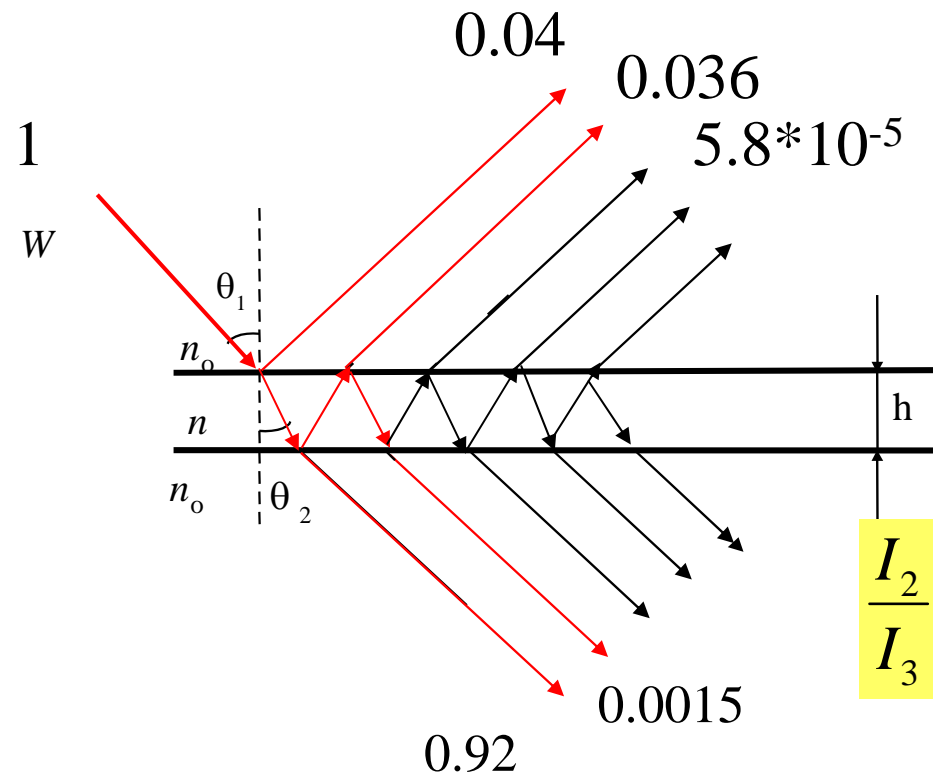
- 1、仪器结构
- 2、用作光谱线超精细结构的研究

三、多光束干涉在薄膜理论中的应用

- 1、光学薄膜
 - 1) 单层膜; 2) 双层膜; 3) 多层高反膜
- 2、干涉滤光片

一、平行平板的多光束干涉

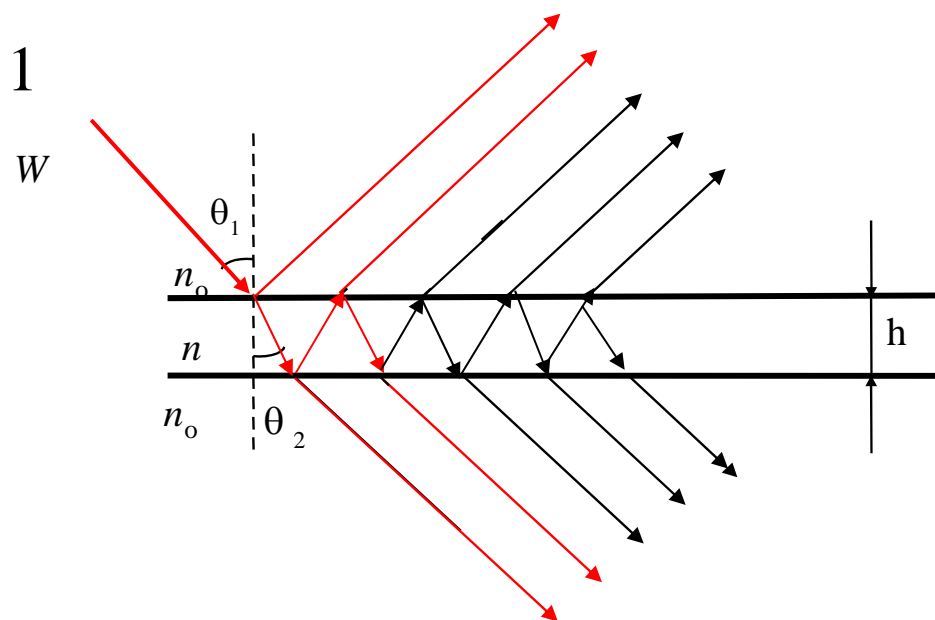
一般情况下 $\rho=0.04$



$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{0.036}{5.8 \times 10^{-5}} = 610.35$$

当平板镀膜且膜层无吸收时 $\rho=0.9$

反射光: 0.9, 0.009, 0.0073, 0.00577, 0.0046.....



$$\frac{I_2}{I_3} = \frac{0.009}{0.0073} = 1.2328$$

透射光: 0.01, 0.0081, 0.00656, 0.00529, 0.00431.....

P 点的条纹是由：

$\tilde{A}_1^r, \tilde{A}_2^r, \tilde{A}_3^r, \dots$ 干涉的结果。

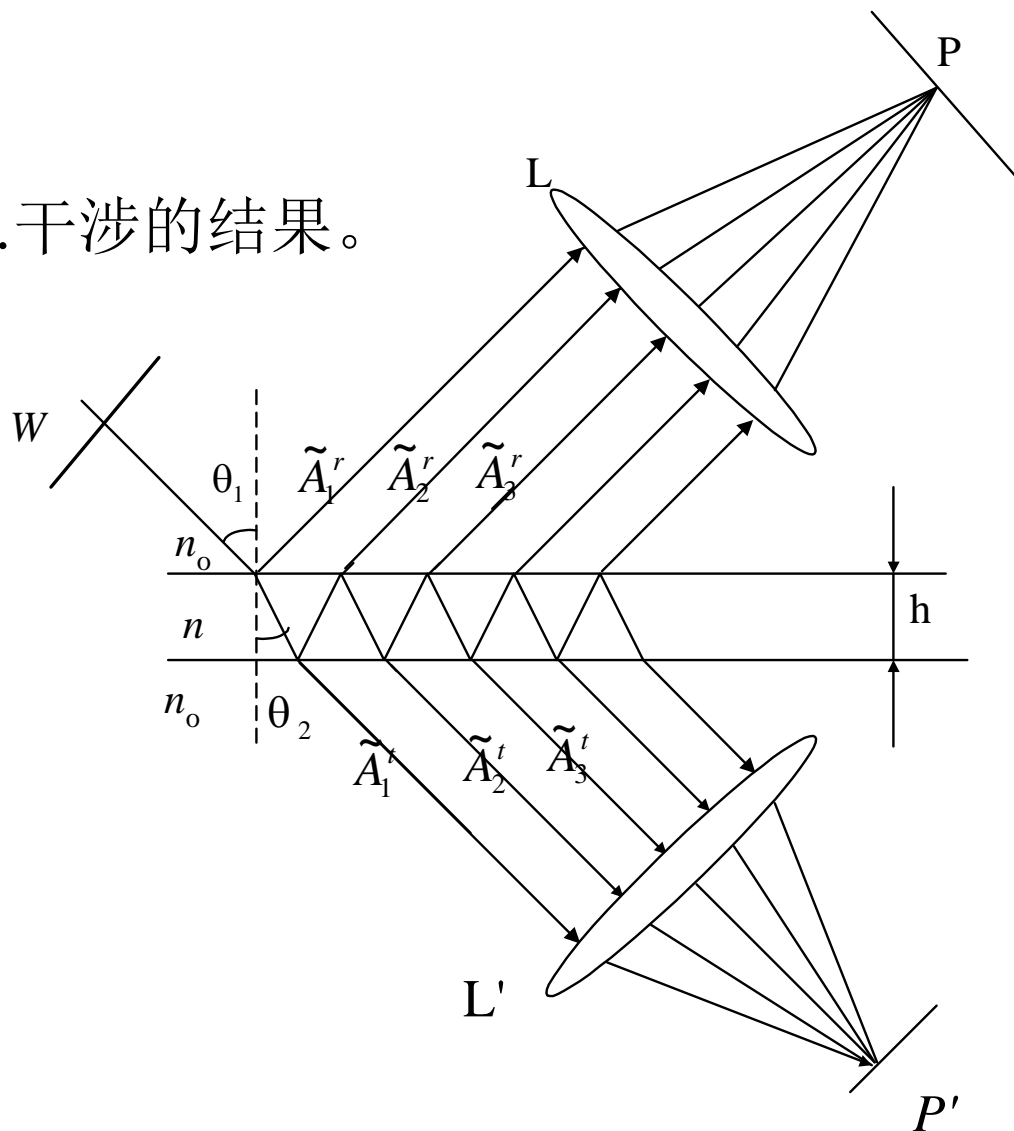
1、干涉场的强度分布

(1) 光程差与位相差

(相邻光束之间)

$$\Delta = 2nh \cos \theta_2,$$

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta_2$$



(2) 反射率和透射率

设 r 、 t 、 r' 和 t' 是透射和反射系数

半波损失 $\left\{ \begin{array}{l} r = -r' \\ \tau = tt' = 1 - r^2 = 1 - \rho \end{array} \right. \quad r^2 = r'^2 = \rho$

ρ 、 τ 分别是界面的反射率和透射率

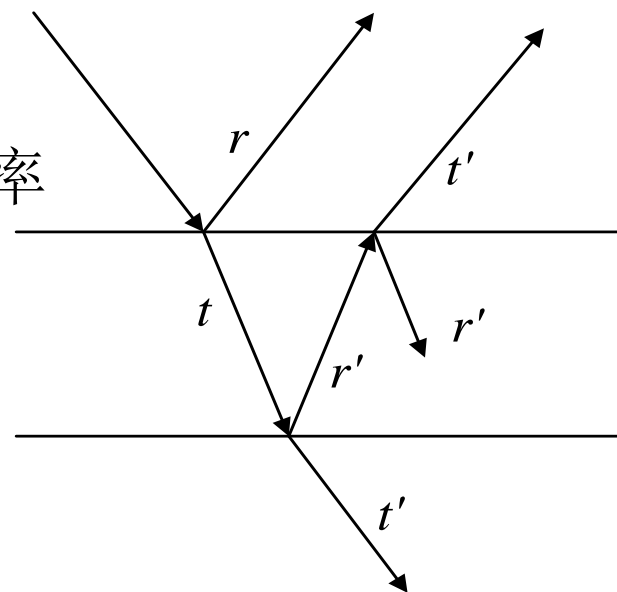
(3) 各反射光线的复振幅

$$A^r_0 = A^{(i)} r$$

$$A^r_1 = A^{(i)} t t' r' \exp(i\delta)$$

$$A^r_2 = A^{(i)} t t' r'^3 \exp(i2\delta)$$

$$\cdots \quad A^r_n = A^{(i)} t t' (r')^{(2n-1)} \exp(in\delta) \quad n = 1, 2, \cdots$$



(4) 反射光的合振幅与光强分布

合振幅:

$$A_r = A_0^r + A_1^r + A_2^r + \dots + A_n^r + \dots = A^{(i)} r \frac{e^{i\delta} - 1}{1 - r^2 e^{i\delta}}$$

$$\begin{aligned} \text{光强: } I_r &= A_r \times A_r^* = A^{(i)2} r^2 \frac{e^{i\delta} - 1}{1 - r^2 e^{i\delta}} \times \frac{e^{-i\delta} - 1}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \\ &= I_i \frac{4\rho \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\delta}{2}} \end{aligned}$$

(5) 透射光的光强分布

$$I_t = I_i - I_r = I_i - I_i \frac{4\rho \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$I_t = I_i \frac{(1-\rho)^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

设 $F = 4\rho/(1-\rho)^2$ 称为精细度系数

$$I_r = I_i \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad I_t = I_i \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

2 干涉条纹的特点

$$I_r = I_i \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)}, \quad I_t = I_i \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2(\delta/2)}{1 + F \sin^2(\delta/2)} \quad \frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\delta/2)}$$

$$\frac{I_r}{I_i} + \frac{I_t}{I_i} = 1$$

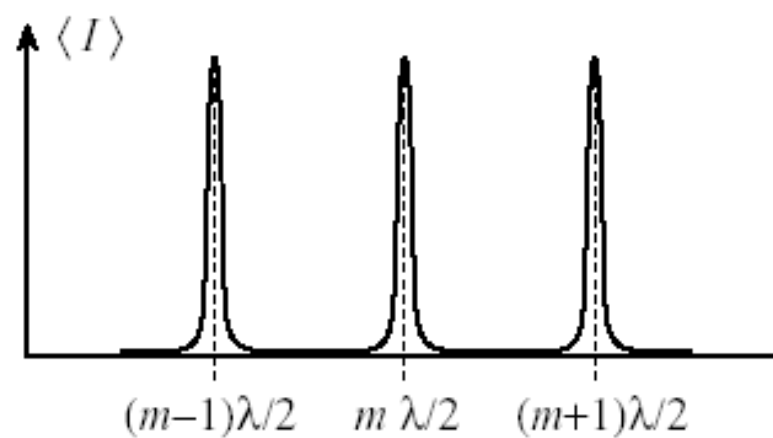
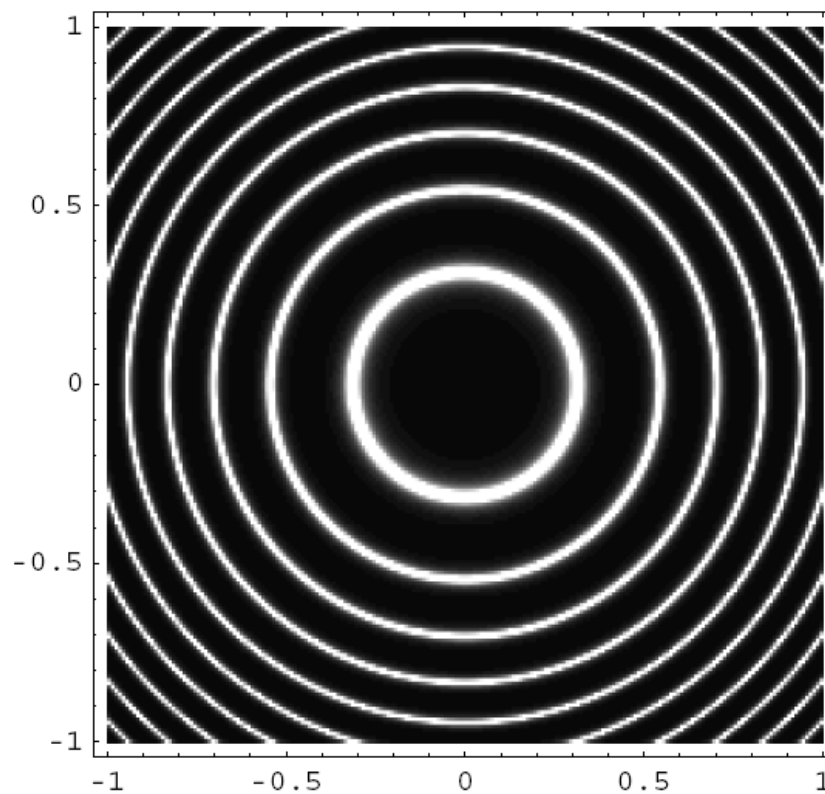
结论：反射光和透射光的干涉图样互补

透射光是几乎全黑背景上的一组很细的亮纹组成

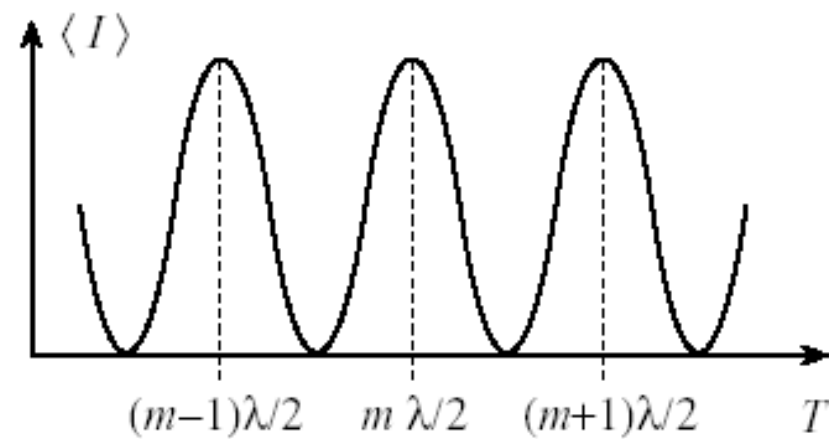
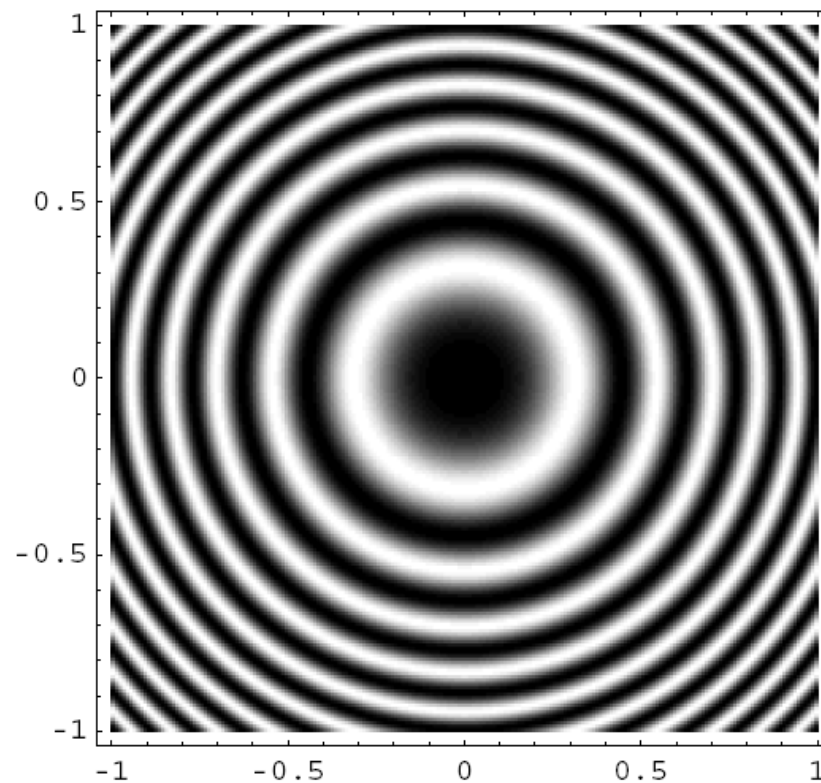
反射光是均匀明亮背景上的很细的暗纹组成

实际应用采用透射光的干涉条纹

多光束干涉



双光束干涉



(1) 亮暗条纹的条件与光强对比度

对于反射光 I_r

$$\text{亮条纹: } \delta = (2m+1)\pi, \quad I_{r \max} = I_i \frac{F}{1+F}$$

$$\text{暗条纹: } \delta = 2m\pi, \quad I_{r \min} = 0$$

$$\text{条纹对比度: } K_r = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) = 1$$

对于透射光 I_t

$$\text{亮条纹: } \delta = 2m\pi, \quad I_{t \max} = I_i$$

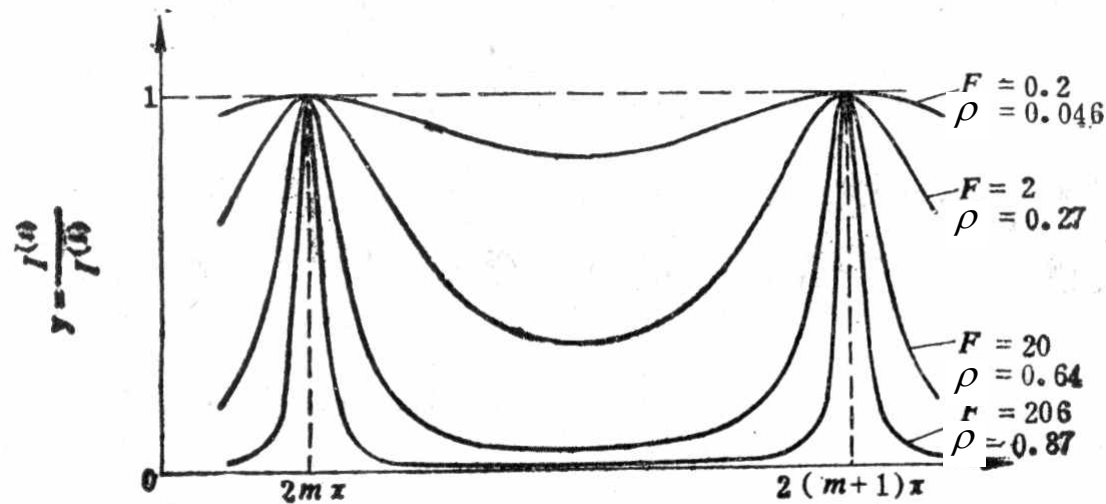
$$\text{暗条纹: } \delta = (2m+1)\pi, \quad I_{t \min} = I_i / (1+F)$$

$$K_t = F / (2+F)$$

(2) 光强分布与 δ 的关系

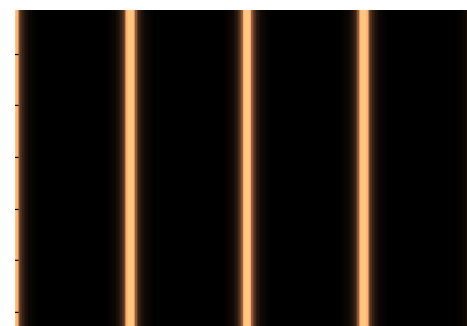
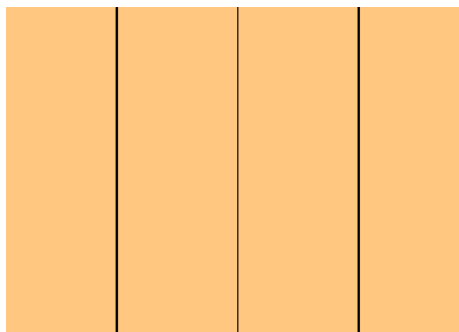
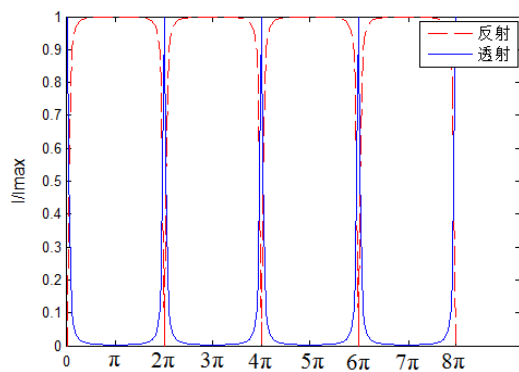
$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta_2, \quad h \text{ 为常数, 为等倾干涉。}$$

光强分布与 ρ 的关系

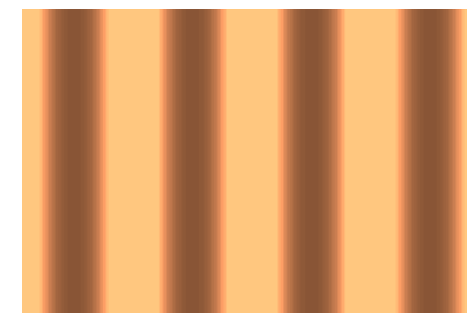
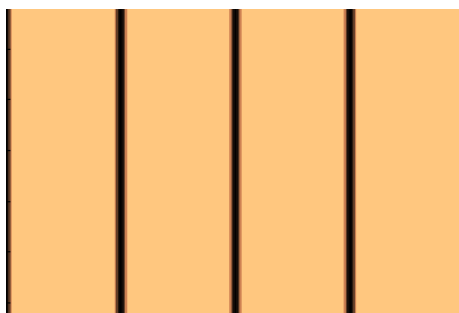
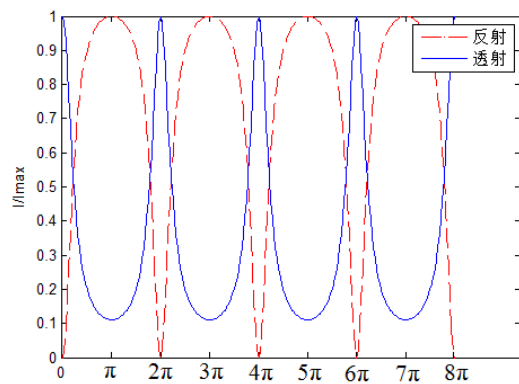


随着反射率 ρ 的增大，透射光暗条纹的强度降低，亮条纹的宽度变窄，条纹的锐度和对比度增大

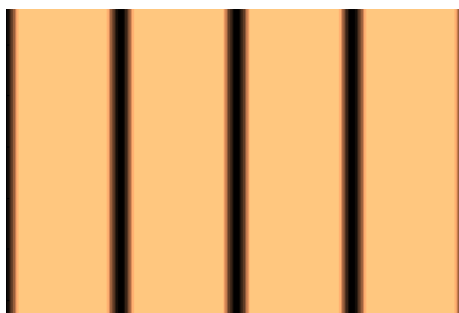
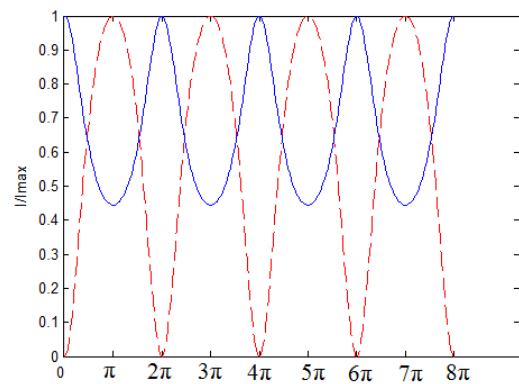
R=0.9



R=0.5



R=0.2



(3) 条纹间距

当 $\Delta\delta = 2\pi$ 时，条纹变化一个级次

$$\Delta\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \sin \theta_2 \cdot \Delta\theta_2 = 2\pi$$

$$|\Delta\theta_2| = \left| 2\pi / \left(\frac{4\pi}{\lambda} nh \sin \theta_2 \right) \right|$$

将 θ_2 转为 θ_1 : $\Delta\theta_1 = \left| \frac{n\lambda}{2n_0^2 h \sin \theta_1} \right|$

条纹间隔 $e = f \Delta\theta_1 = \frac{n\lambda}{2n_0^2 h \sin \theta_1} f$

(4) 干涉条纹的锐度

定义：两个半强度点对应的
相位差范围 $\Delta\delta$

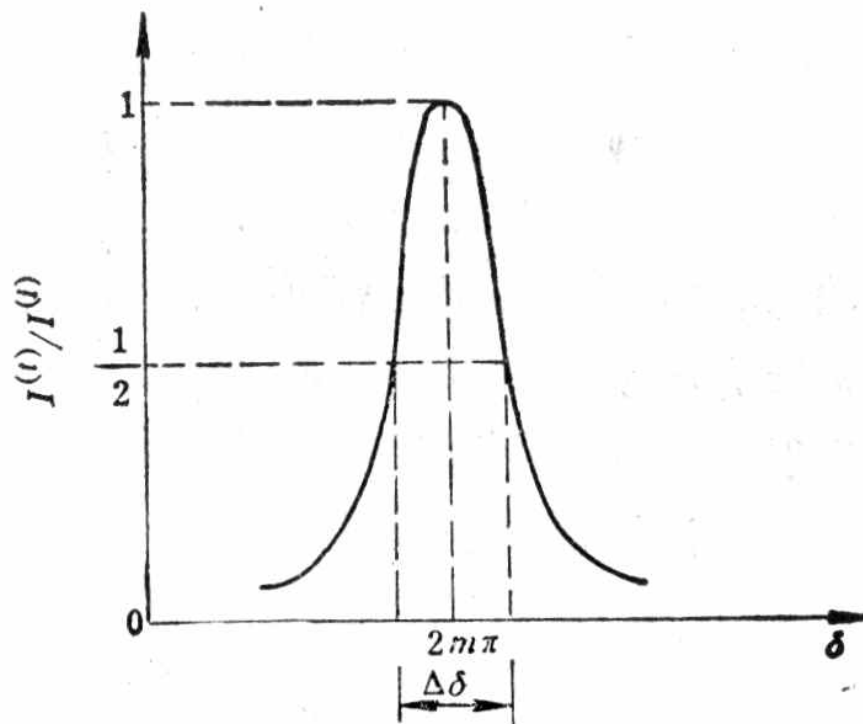
第 m 级亮条纹： $\delta=2m\pi$,

设当 $\delta=2m\pi \pm \frac{\Delta\delta}{2}$,

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\delta/4)} = \frac{1}{2}$$

当 $\Delta\delta$ 很小时, $\sin \frac{\Delta\delta}{4} \approx \frac{\Delta\delta}{4}$, 则有

$$\Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}, \text{ 当 } \rho \rightarrow 1 \text{ 时, } \Delta\delta \text{ 变得很小。}$$

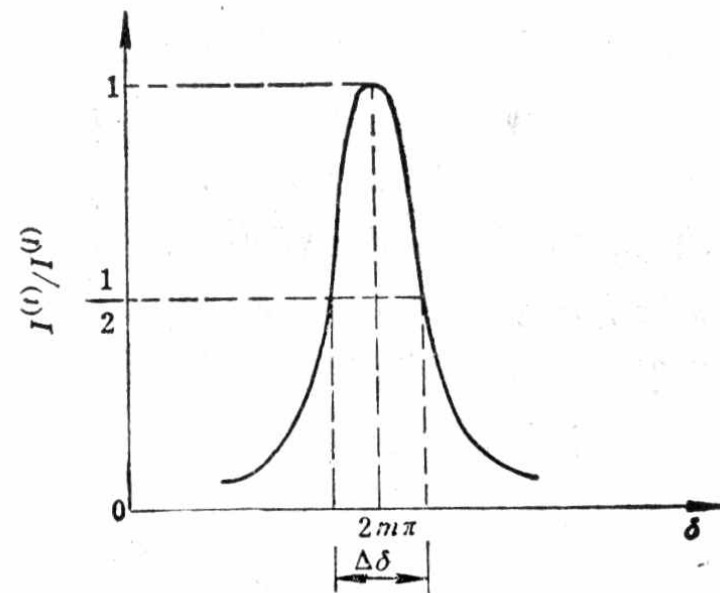


(5) 条纹精细度 s

定义：相邻条纹相位差 2π 与
条纹锐度 $\Delta\delta$ 之比

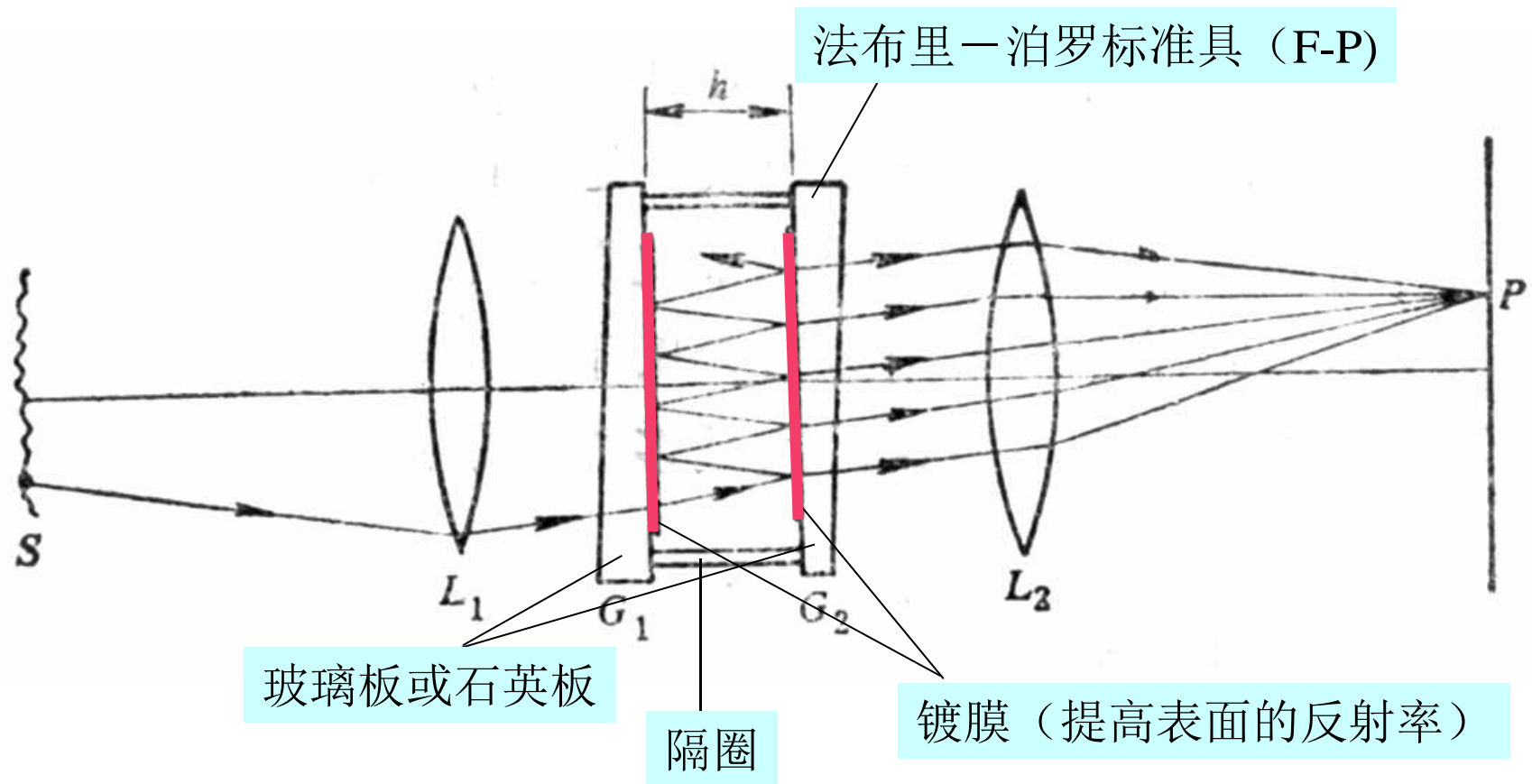
$$s = \frac{2\pi}{\Delta\delta} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

反射率 ρ 越趋近于1, s 值越大,
条纹越精细, 条纹锐度也越好。



二、法布里—泊罗干涉仪（一种多光束干涉装置）

（一）仪器结构



干涉条纹分析

{ 一系列细锐的等倾亮纹
干涉级次取决于 h ，干涉级很高，只适于单色性很好的光源

内表面镀金属膜，有反射相位变化 φ 及金属吸收比 α

相位差为 $\delta = \frac{4\pi}{\lambda} h \cos \theta + 2\varphi$

且有 $\rho + \tau + \alpha = 1$

(二) 用作光谱线超精细结构的研究

1、测量原理

设光源中含有两条谱线： λ_1 和 λ_2 ， $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$

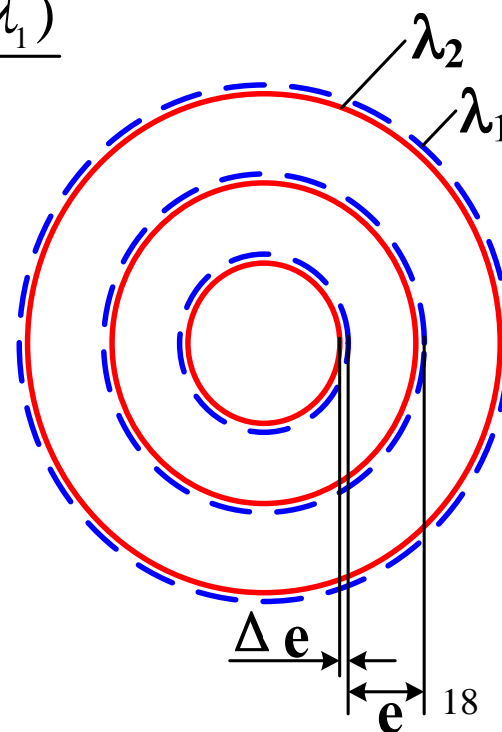
则：标准具在中心附近对应的干涉级为 m_2 和 m_1 。干涉级差为

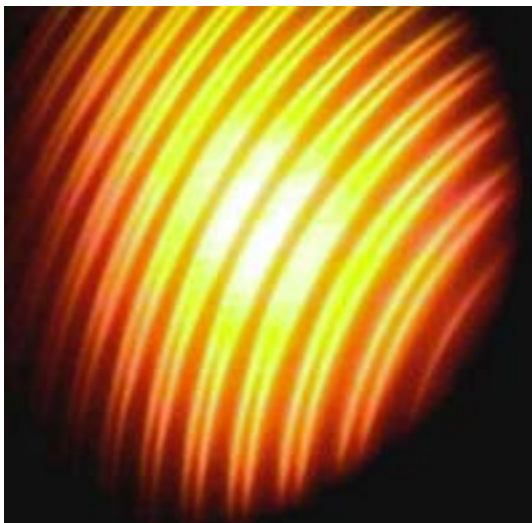
$$\Delta m = m_1 - m_2 = \left(\frac{2h}{\lambda_1} + \frac{\varphi}{\pi}\right) - \left(\frac{2h}{\lambda_2} + \frac{\varphi}{\pi}\right) = \frac{2h(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2}$$

对应于条纹的位移 Δe $\Delta m = \frac{\Delta e}{e}$

于是有：

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Delta e}{e} \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}, \text{ 其中: } \bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$





钠灯的双光谱 $\Delta\lambda = 6\text{nm}$

2. 自由光谱的范围（能测量的最大波长差）

当 $\Delta e \rightarrow e$ 时, $\Delta\lambda = \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}$, 正好两组条纹重合,

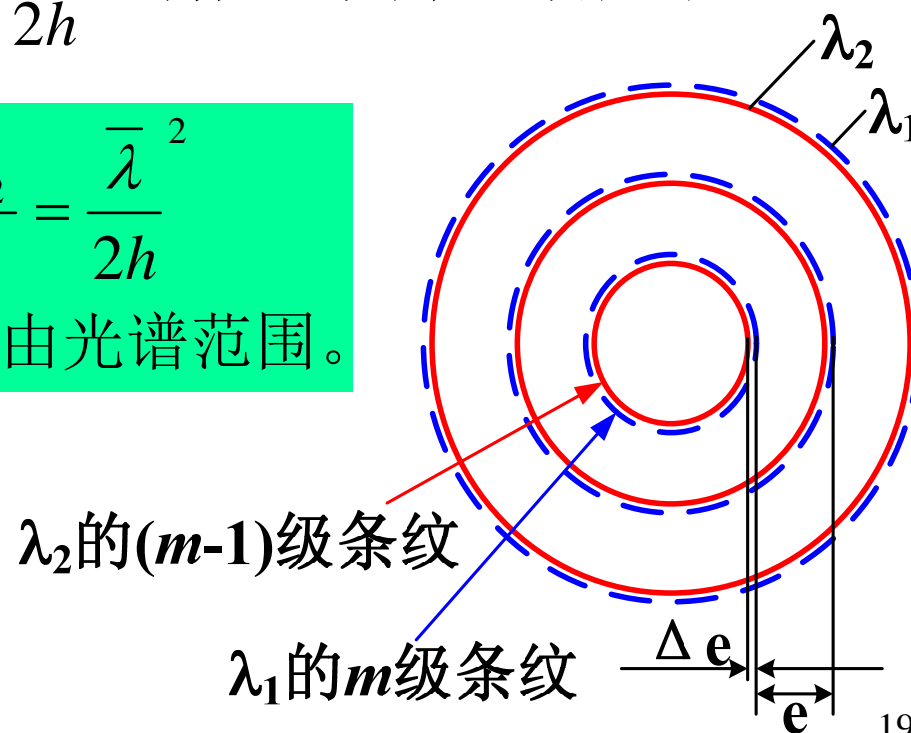
此时有 $(m-1)\lambda_2 = m\lambda_1$

当 $\Delta\lambda > \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}$, 将无法判断是否越级。

$$(\Delta\lambda)_{S.R} = \frac{\lambda_2}{m} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2h} = \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}$$

$(\Delta\lambda)_{S.R}$ 为标准具常数或自由光谱范围。

自由光谱范围类似于卡尺的最大量程。

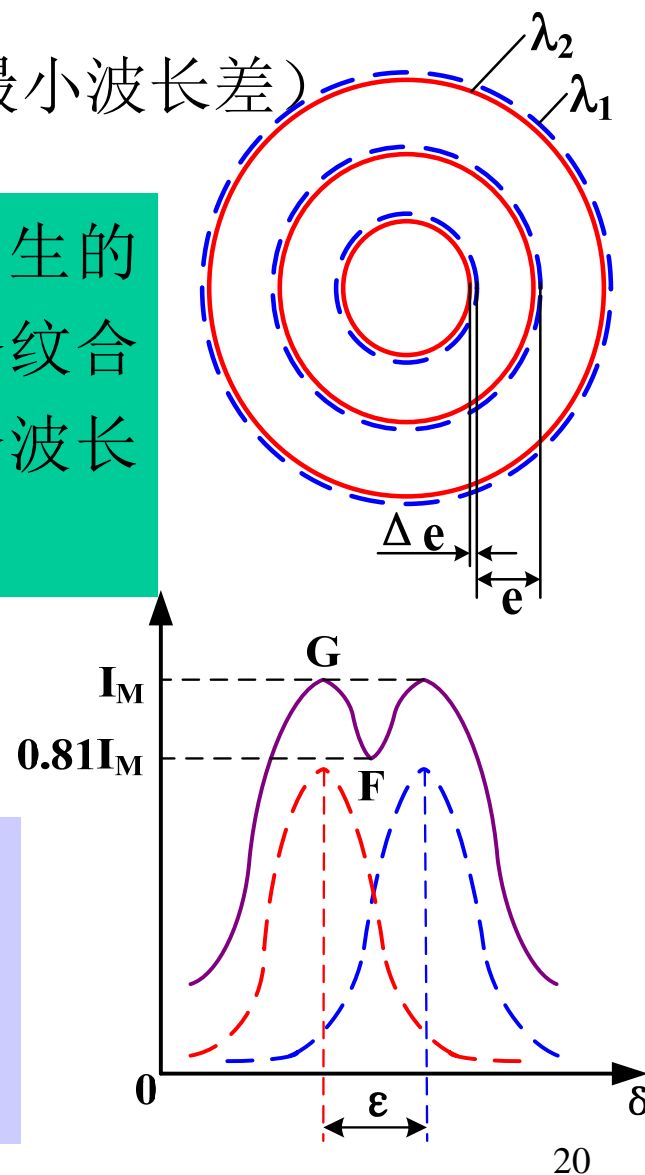


3. 分辨极限和分辨本领（能分辨的最小波长差）

当 λ_1 和 λ_2 差值非常小的时，它们产生的干涉条纹将非常靠近，如果两个条纹合成的结果被视为一个条纹，则两个波长就不能被分辨。

思路：波长能否被分辨，取决于条纹能否被分辨。

瑞利判据：两个波长的亮条纹只有当它们合强度中央的极小值低于两边的极大值的0.81时，两个条纹才能被分开。



G 点的光强分布

$$I_G = \frac{I_i}{1 + F \sin^2(\delta_1/2)} + \frac{I_i}{1 + F \sin^2(\delta_2/2)}$$

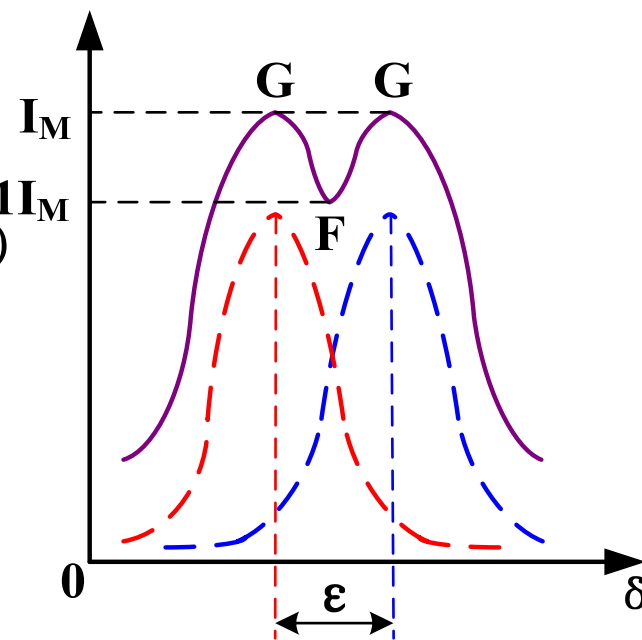
当 $I_F < 0.81I_G$ 时，两个峰值才能分辨开。

在 G 点， $\delta_1 = 2m\pi$ ， $\delta_2 = 2m\pi - \varepsilon$

$$I_G = I_i + \frac{I_i}{1 + F \sin^2(\varepsilon/2)} \approx I_i \left(1 + \frac{1}{1 + F(\varepsilon/2)^2}\right) \quad 0.81I_M$$

在 F 点， $\delta_1 = 2m\pi + \frac{\varepsilon}{2}$ ， $\delta_2 = 2m\pi - \frac{\varepsilon}{2}$

$$I_F = \frac{2I_i}{1 + F \sin^2(\varepsilon/4)} \approx \frac{2I_i}{1 + F(\varepsilon/4)^2}$$

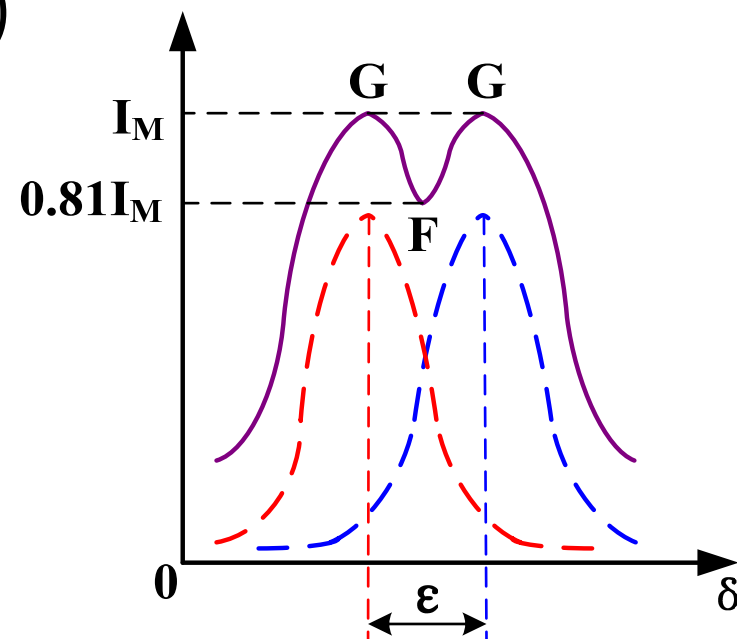


当 $I_F = 0.81I_M$ 时,

$$\frac{2I_i}{1 + F(\varepsilon/4)^2} = 0.81 \left(I_i + \frac{I_i}{1 + F(\varepsilon/2)^2} \right)$$

得到
$$\varepsilon = \frac{4.15}{\sqrt{F}} = \frac{2.07\pi}{s}$$

其中
$$s = \frac{\pi\sqrt{F}}{2},$$
 为条纹精细度。



$$\text{由于 } \delta = \frac{4\pi h \cos \theta_2}{\lambda}, \quad \Delta\delta = \frac{4\pi h \cos \theta_2}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

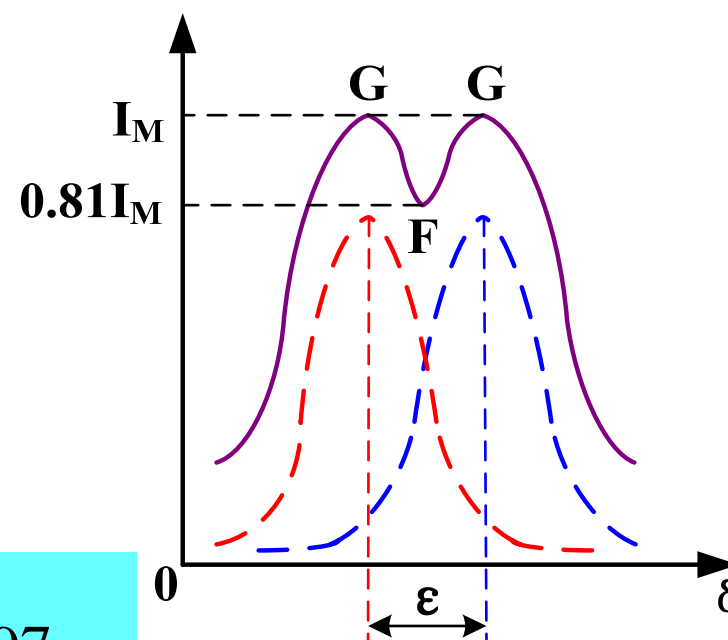
$$\Delta\delta = \varepsilon = \frac{2.07\pi}{s}$$

标准具的分辨本领

$$A = \frac{\bar{\lambda}}{(\Delta\lambda)_m} = \frac{1.93h \cos \theta_2}{\lambda} s$$

$$\cos \theta_2 \approx 1, \quad 2h/\lambda = m, \quad \text{有}$$

$$A = \frac{\bar{\lambda}}{(\Delta\lambda)_m} = 0.97ms$$



$0.97s$ 称为标准具的有效光束数，记为 N ， $A = mN$ 。

三、多光束干涉在薄膜理论中的应用

(一) 光学薄膜

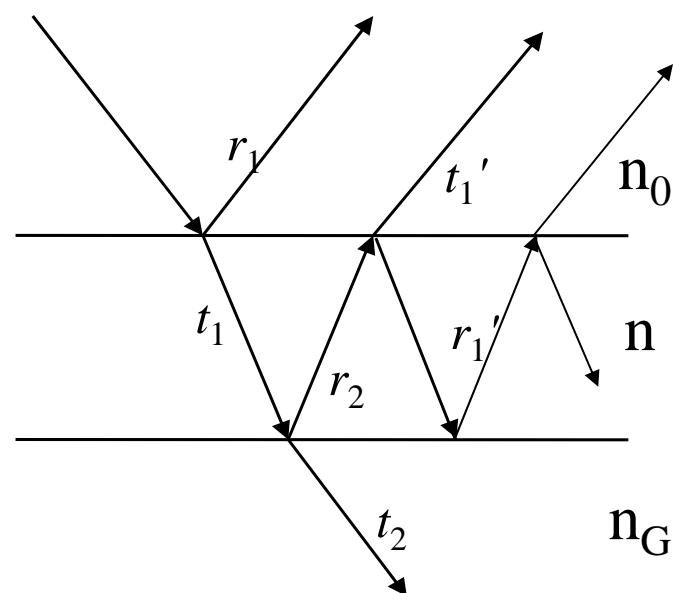
用物理化学方法涂镀在玻璃或金属表面上的透明介质膜，利用光波在薄膜中的反射、折射和叠加，起到减反或增反的作用，还可以起到分光、滤光、调整光束偏振或位相状态等作用。

1、单层膜

$$A^{(r)} = \frac{r_1 + r_2 \exp(i\delta)}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)} A^{(i)}$$

$$A^{(t)} = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)} A^{(i)}$$

相邻两光束的位相差： $\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta$



$$r_1' = -r_1$$

$$t_1 t_1' = 1 - r_1^2$$

反射系数为:
$$r = \frac{r_1 + r_2 \exp(i\delta)}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)}$$

透射系数为:
$$t = \frac{t_1 t_2}{1 + r_1 r_2 \exp(i\delta)}$$

正入射时
$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \quad r_2 = \frac{n - n_G}{n + n_G}$$

薄膜反射比

$$\rho = \frac{(n_0 - n_G)^2 \cos^2(\delta/2) + (n_0 n_G / n - n)^2 \sin^2(\delta/2)}{(n_0 + n_G)^2 \cos^2(\delta/2) + (n_0 n_G / n + n)^2 \sin^2(\delta/2)}$$

对于确定的 n_0 和 n_G , ρ 是 n 和 nh 的函数

单层增透膜

$$n < n_G$$

$$n_0 = 1, n_G = 1.5,$$

$$nh = \frac{\lambda_0}{4}, \delta = \pi$$

$$\rho_{\lambda_0} = \frac{(n_0 n_G / n - n)^2}{(n_0 n_G / n + n)^2} = \left(\frac{n_0 - \frac{n^2}{n_G}}{n_0 + \frac{n^2}{n_G}} \right)^2 < \left(\frac{n_0 - n_G}{n_0 + n_G} \right)^2$$

$$\frac{n^2}{n_G} < n_G$$

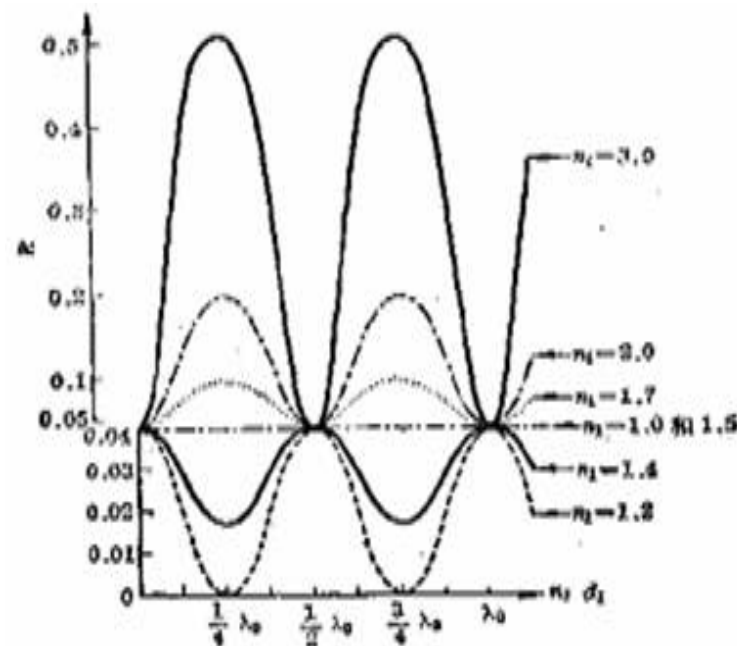
减反增透

全增透

$$\rho_{\lambda_0} = 0 \quad n = \sqrt{n_0 n_G}$$

由于材料限制，单层膜达不到全增透

反射比是与波长相关的，对绿光增透对红光和蓝光反射比较大



单层增反膜 $n > n_G$ $nh = \frac{\lambda_0}{4}, \delta = \pi$

$$\rho_{\lambda_0} = \left(\frac{n_0 - \frac{n^2}{n_G}}{n_0 + \frac{n^2}{n_G}} \right)^2 > \left(\frac{n_0 - n_G}{n_0 + n_G} \right)^2 \quad \frac{n^2}{n_G} > n_G \quad \text{增反}$$

n越大反射比越高，常用的材料是ZnS，n=2.38，单层膜的最大反射比33%

2、双层膜

$$\text{由 } \rho_{\lambda_0} = \left(\frac{n_0 - \frac{n^2}{n_G}}{n_0 + \frac{n^2}{n_G}} \right)^2$$

可知 对于 n_0 - n - n_G 单层 $\lambda_0/4$
 单层膜可以等效于一个界面其折射率为

$$n'_G = \frac{n^2}{n_G}$$

涂镀不同大小的 n ，可得到不同的 n'_G

{ 低折射率膜对应了低的等效界面折射率，有低的反射比（增透）
 { 高折射率膜对应了高的等效界面折射率，有高的反射比（增反）

可应用于多层 $\lambda_0/4$ 膜 对于双层膜

$$n'_{G_2} = \frac{n_2^2}{n_G}, \quad n'_{G_1} = \frac{n_1^2}{n'_{G_2}} = \frac{n_1^2}{n_2^2} n_G$$

双层 $\lambda_0/4$ 膜系全增透条件

$$\rho_{\lambda_0} = 0 \quad n_0 - n'_{G1} = 0 \quad \text{得} \quad n_2 = \sqrt{\frac{n_G}{n_0}} n_1$$

双层膜有两个折射率可供匹配选取，达到全增透

注意：全增透只对特定的 λ_0 满足

3、多层高反膜

由 nh 均为 $\lambda_0/4$ 的高折射率层（ZnS）和低折射率层（MgF₂）交替叠成的膜系，称为 $\lambda_0/4$ 膜系，用符合表示为

$$GHLHLH \cdots LHA = G(HL)^p HA \quad p = 1, 2, 3, \cdots$$

G和A分别为玻璃基片和空气，H和L分别为高、低折射率层， $2p+1$ 为膜层数

由等效界面法得

$$\rho_{\text{正}\lambda 0} = \left(\frac{n_0 - \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p} \frac{n_H^2}{n_G}}{n_0 + \left(\frac{n_H}{n_L}\right)^{2p} \frac{n_H^2}{n_G}} \right)^2$$

n_H 和 n_L 分别为高、低折射率层的折射率

n_H 和 n_L 相差越大，膜层数 $2p+1$ 越大，膜系的反射比就越高

(二)、干涉滤光片

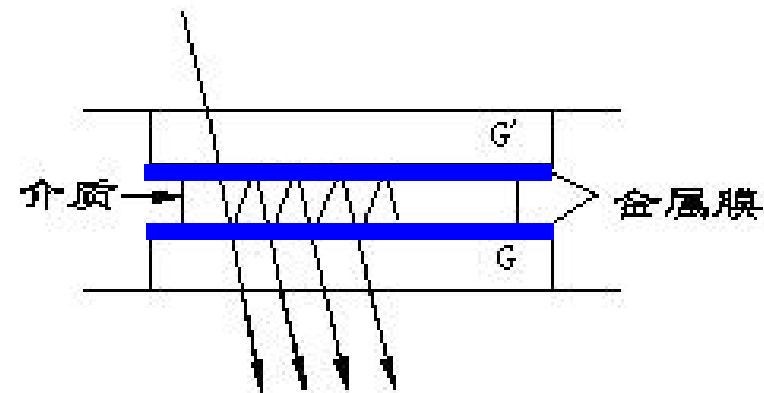
利用多光束干涉原理制成的一种从宽光谱光中过滤出波段较窄的单色光的装置。（类似于间隔很小的F-P标准具）

1、滤光片的中心的波长（透射比最大的波长）

$$2nh \cos \theta_2 = m\lambda (\text{透射极大})$$

$$\text{中心波长: } \lambda = \frac{2nh \cos \theta_2}{m};$$

$$\text{正入射: } \lambda = \frac{2nh}{m}$$



金属反射膜干涉滤光片

λ 取决 nh 和 m , 当 nh 一定时, 不同 m 有不同的中心波长 λ 。

中心波长： $\lambda = \frac{2nh}{m}$

	$m_1=1$	$m_2=2$	$m_3=3$
$h_1=2.73 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_1=5.46 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_2=2.73 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_3=1.82 \times 10^{-7} \text{m}$
$h_2=5.46 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_1=10.92 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_2=5.46 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_3=3.64 \times 10^{-7} \text{m}$
$h_3=8.19 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_1=16.38 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_2=8.19 \times 10^{-7} \text{m}$	$\lambda_3=5.46 \times 10^{-7} \text{m}$

其中对应同一种波长，如 $\lambda=5.46 \times 10^{-7} \text{m}$ ， m_1 ， m_2 ， m_3 对应的 h_1 ， h_2 ， h_3 分别称为1，2，3...级滤波片。

2、透射波长半宽度

已知，条纹的位相半宽度

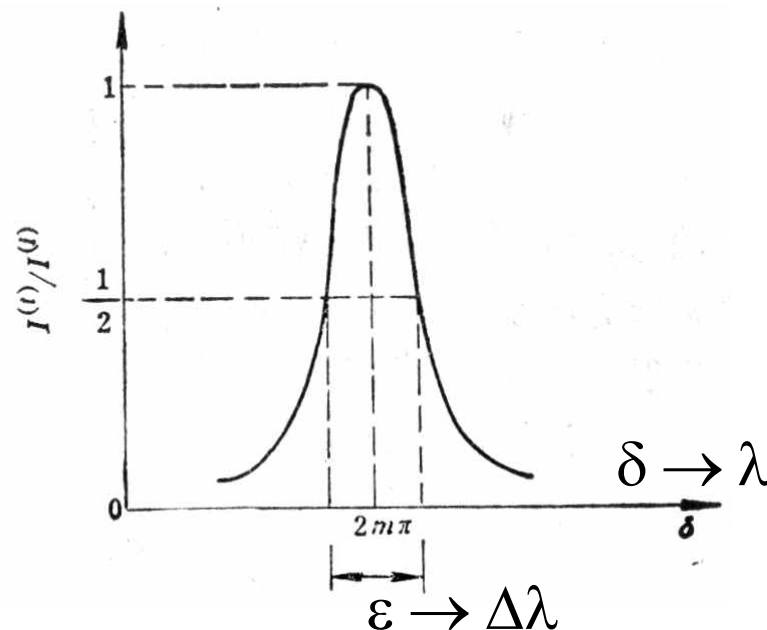
$$\varepsilon = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$$

思路：寻找出波长与位相的关系

已知 $(\Delta\lambda)_{S.R}$ 表示的是 λ_1 和 λ_2 的干涉圆环刚好相差一个波长差，对应的位置变化是 2π 。

因此：

$$\begin{array}{l} (\Delta\lambda)_{S.R} \rightarrow 2\pi \\ \Delta\lambda \rightarrow \varepsilon \end{array} \quad \text{有：} \Delta\lambda = \frac{(\Delta\lambda)_{S.R}}{2\pi} \cdot \varepsilon = \frac{\bar{\lambda}^2}{2\pi nh} \frac{1-\rho}{\sqrt{\rho}}$$



nh 大 ρ 大 $\Delta\lambda$ 小单色性好

3、峰值透过比

定义为中心波长处的透过比，表示为：

$$\tau = (I_t / I_i)_{\max}$$

不考虑吸收等损失 $\tau = 1$

金属膜作干涉滤光片 $\tau < 30\%$

本课内容回顾

1、平行平板的多光束干涉

位相差: $\Delta = 2nh \cos \theta_2$, 光程差: $\delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos \theta_2$,

条纹间距: $e = \frac{n\lambda}{2n_0^2 h \sin \theta_1} f$, 条纹锐度: $\Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1-\rho)}{\sqrt{\rho}}$

条纹精细度: $s = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}$

2、法布里—泊罗干涉仪

原理: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\Delta e}{e} \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}$, 其中 $\bar{\lambda} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$

光谱范围: $(\Delta\lambda)_{S.R} = \frac{\bar{\lambda}^2}{2h}$

光谱分辨率: $A = \frac{\bar{\lambda}}{(\Delta\lambda)_m} = 0.97ms$ 其中 $m = 2h/\lambda$, $s = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$

3、多光束干涉在薄膜理论中的应用

单层增透膜: $n = \sqrt{n_0 n_G}$, 单层增反膜: $\frac{n^2}{n_G} > n_G$, 双层增透膜: $n_2 = \sqrt{\frac{n_G}{n_0}} n_1$

多层高反膜: $GHLHLH \cdots LHA = G(HL)^p HA$ $p = 1, 2, 3, \cdots$

作 业

- P376-377页
- 第 21、 22、 25、 26题