量子物理基础　习题讲解

一. 黑体辐射 普朗克量子假说

1. 黑体

能够全部吸收各种波长的的辐射能而不发生反射和透射的物体称为绝对黑体，简称黑体。

2.黑体辐射的实验定律

(1) 斯特藩——玻耳兹曼定律

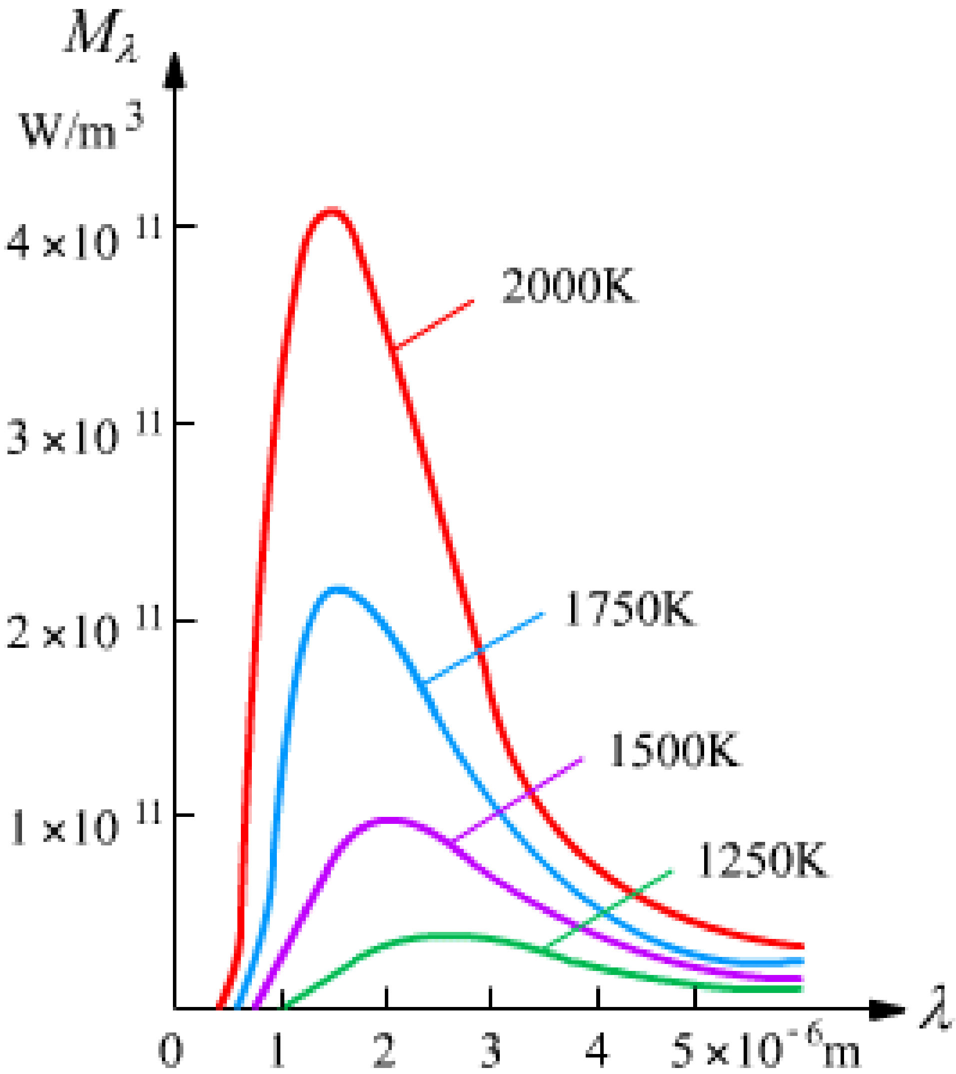
$$\boxed{E(T)=\int_0^\infty r(\lambda,T)d\lambda=\sigma T^4}$$

$\sigma=5.67\times10^{-8}W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$

(2) 维恩位移定律

$$\boxed{T\lambda_m=b=2.897\times10^{-3}m\cdot K}$$

b —— $Wien$恒量



实验测得的单色辐出度曲线

应用：遥感和红外追踪，测量太阳等星体表面的温度，或炉体内温度…

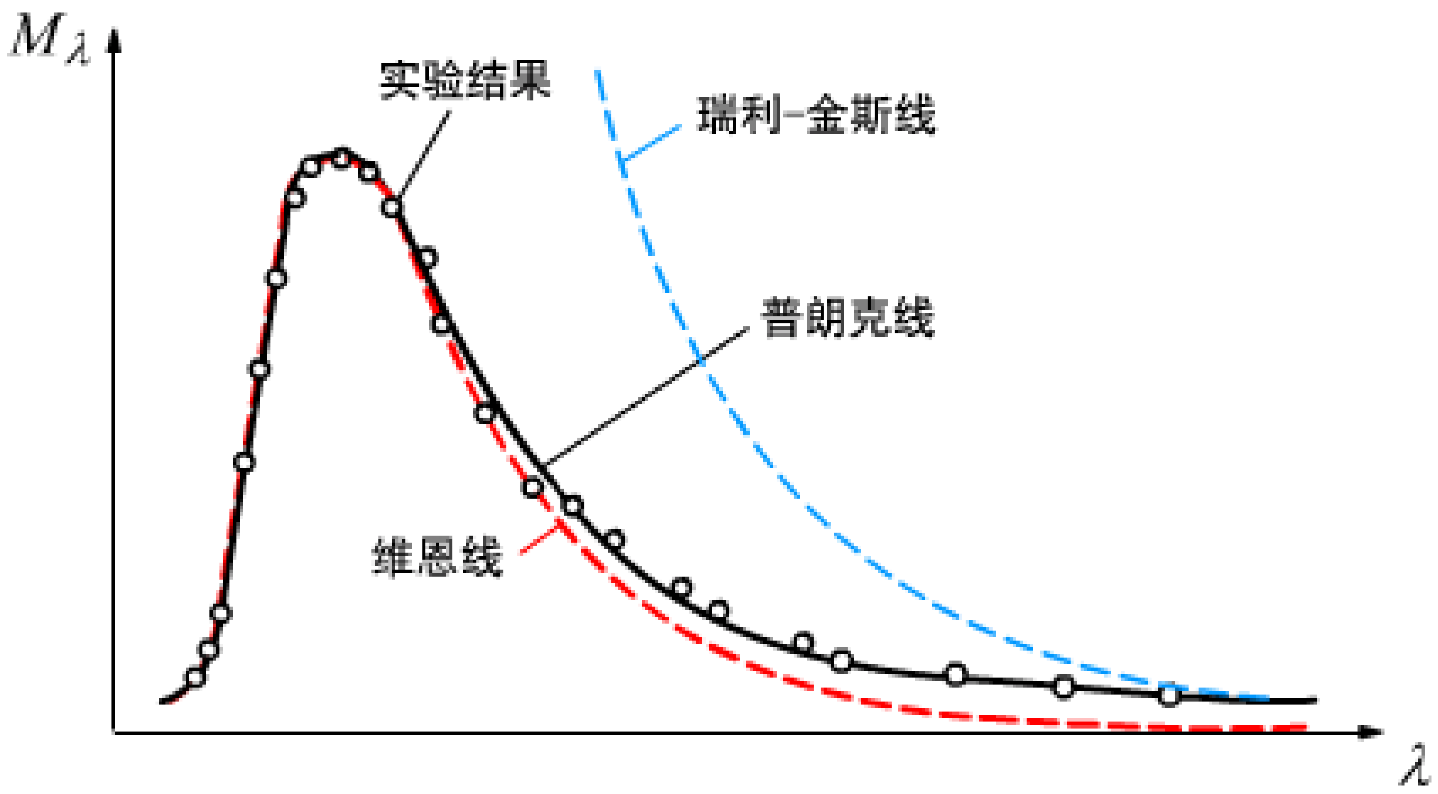
3. 普朗克量子假设

物体由无穷多个带电的谐振子所组成，谐振子的能量不能连续变化，频率为ν 的谐振子，能量只能取$h\nu$ ，$2h\nu$ …等分立值；谐振子在辐射或吸收能量时也只能是$h\nu$ 的整数倍。谐振子的最小能量单位称为能量子。

$$\boxed{r(\lambda,T)=2\pi hc^2\lambda^{-5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}}$$

—— 普朗克公式

$$h=6.626176\times10^{-34}\,J\cdot s$$ —普朗克常数



黑体辐射的理论曲线和实验结果的对比

习题讲解

6-4 黑体在加热过程中其最大辐射本领的波长由 $0.60\mu m$ 变化到 $0.40\mu m$，求总辐射本领增加了几倍？

解：由 $E = \sigma T^4 = \sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_m}\right)^4$

可得 $\dfrac{E_2}{E_1} = \left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4 = \left(\dfrac{0.6}{0.4}\right)^4 = 5.1$

5.1-1=4.1　总辐射本领增加了4.1 倍。

二. 光电效应 爱因斯坦光子理论

1. 光电效应

光电效应：金属及其化合物在光的照射下,表面逸出电子的现象。

2. 实验规律

(1) 饱和光电流强度与入射光强成正比。

(2) 光电子的最大初动能与入射光频率成线性关系，而与入射光强无关。

(3) 光电效应的产生有红限(截止频率)存在。

(4) 光电效应具有瞬时性。

$$\frac{1}{2}m\upsilon_m^{\ 2} = eU_0 \qquad (1) \qquad h\nu_0 = A \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_m^{\ 2} = h\nu - A \quad (3)$$

光电效应的红限(或截止频率)，只与阴极板材料有关。

其中A和U_0都是正的常量。

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e} \qquad (4)$$

对不同金属ν_0值不同；对所有金属，h/e都取同一量值。

应用：测量普朗克常数……

3. 爱因斯坦的光子

一束光就是一束以光速C运动的粒子流。称为光量子(或光子)；频率为ν 的光的每一个光子具有能量为$h\nu$ ，它不能再分割，只能整个地被吸收或产生。

——光子假说

4. 光的波粒二象性

光的本性：光既具有波动性，又具有粒子性。

即：光具有波粒二象性 $\begin{cases} 波动性(\nu,\lambda) \\ 粒子性(\varepsilon,p,m) \end{cases}$

$$E = h\nu = mc^2$$

光子的质量与光的频率(或波长)有关

$$p = mc = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

习题讲解

6-9 光电效应实验中，测得某金属的遏制电压U_0与入射光波波长有下列对应关系：

U_0/V	λ/Å
1.40	3600
2.00	3000
3.10	2400

试用作图法求：

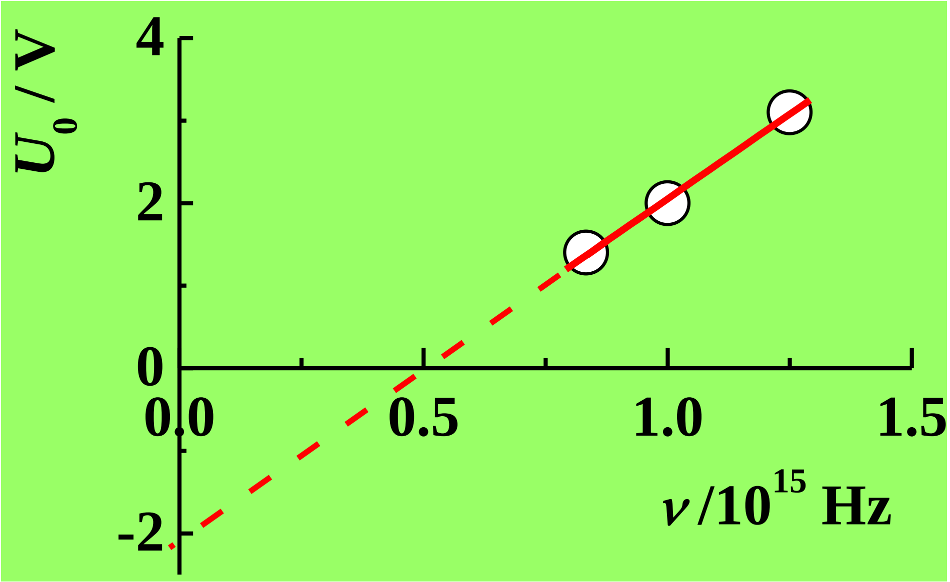
(1) 普朗克常量h；
(2) 该金属的逸出功；
(3) 该金属光电效应的红限。

解：三个波长对应的频率分别为：

$$\nu = c/\lambda = 0.833\times10^{15}\,\mathrm{Hz},\ 1.00\times10^{15}\,\mathrm{Hz},$$

$$1.25\times10^{15}\,\mathrm{Hz}$$

于是遏止电压与频率的关系曲线为：



斜率 $k = \dfrac{2.00}{0.500\times10^{15}}$

根据爱因斯坦光子理论，

$$\frac{1}{2}m\upsilon_m{}^2 = h\nu - A = eU_0$$

$$U_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}$$

(1) 普朗克常量h

$$h = e\cdot k = 6.40\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$$

(2) 该金属的逸出功

$$A = h\nu - eU_0(\nu)$$

$$= 0 - eU_0(0) = 2.00\,\mathrm{eV}$$

(3) 该金属光电效应的红限

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 6.0\times10^{-7}\,\mathrm{m}$$

三. 康普顿效应及光子理论的解释

1. 康普顿效应

X射线通过物质散射时，在散射X射线中除有与入射线波长相同的射线外，还有比入射线波长更长的射线，这种波长变大的散射现象称为康普顿散射，或康普顿效应。

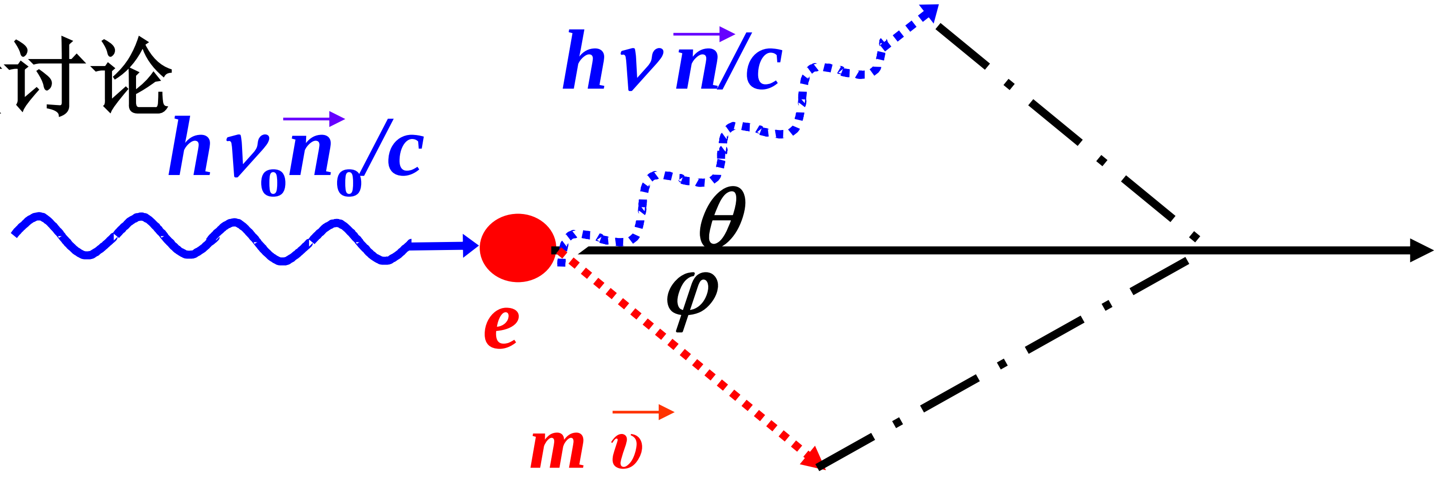
2. 光子理论的解释(定性)

(1)当光子与自由电子或束缚较弱的电子发生碰撞

(2)如果光子与束缚很紧的电子碰撞

(3)轻原子中的电子一般束缚较弱，而重原子中只有外层电子束缚较弱.

3. 定量讨论



能量守恒： $h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2$

动量守恒： $\frac{h}{\lambda_0}\vec{n}_0 = \frac{h}{\lambda}\vec{n} + m\vec{\upsilon}$

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c}\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\lambda_c\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$\lambda_c = 0.0024\ \text{nm}$ 是电子的*Compton*波长。

习题讲解

6-14 能量为0.41 MeV的X射线光子与静止的自由电子碰撞，反冲电子的速度为光速的60%，求散射光子的波长和散射角。

解：反冲电子的质量为 $m = m_0 / \sqrt{1-0.60^2} = m_0 / 0.80$

根据能量守恒

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2 \Rightarrow h\nu = h\nu_0 + m_0c^2 - \frac{m_0c^2}{0.8}$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = 0.41 - \frac{1-0.8}{0.8} \times 0.51(\text{MeV}) = 0.28\text{MeV}$$

故散射光子的波长：

$$\lambda = \frac{hc}{0.28\text{MeV}} = \frac{6.63\times10^{-34}\times3.0\times10^{8}}{0.28\times1.6\times10^{-13}}\text{m} = 0.044\text{Å}$$

求散射角：

由 $$\lambda-\lambda_0=2\times 0.0243\sin^2\frac{\theta}{2}=0.044\,\overset{\circ}{\mathrm{A}}-\frac{hc}{0.28\mathrm{MeV}}$$

$$=0.044\,\overset{\circ}{\mathrm{A}}-0.030\,\overset{\circ}{\mathrm{A}}=0.014\,\overset{\circ}{\mathrm{A}}$$

故

$$\theta=\arcsin\sqrt{\frac{0.014}{2\times 0.0243}}=65^\circ$$

四. 氢原子光谱　玻尔理论

$$\boxed{\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

$$m = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$n = m+1, m+2, \ldots\ldots$$

$\tilde{\nu} = \dfrac{1}{\lambda}$　$R = 1.096776 \times 10^7\ m^{-1}$——里德伯常数

●玻尔理论

(1) 量子化定态假设 $E_1, E_2, E_3, \ldots (E_1 < E_2 < E_3 < \ldots)$

(2) 角动量量子化假设　$L = m\upsilon r = n\dfrac{h}{2\pi} = n\hbar$

(3) 量子化跃迁频率假设 $h\nu_{mn} = \left|E_n - E_m\right|$

- 氢原子的能级

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}\cdot\frac{1}{n^2}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

基态能量： $E_1 = -13.6\ eV$

各激发态能量： $E_n = -13.6\times\frac{1}{n^2}eV > E_1$

轨道半径 $$\boxed{r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi me^2}n^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

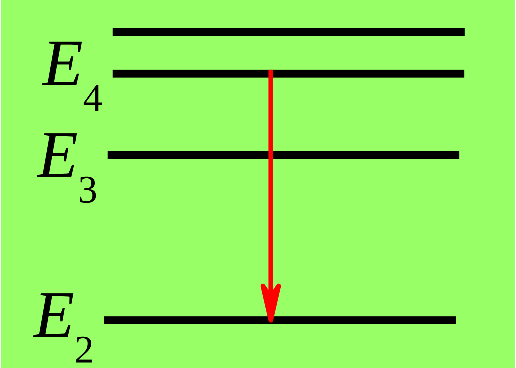
$a_0 = r_1 = 5.29177\times10^{-11}\text{m}\approx0.053\text{nm}$

——第一玻尔半径

$$\boxed{r_n = n^2 r_1 = 0.053 n^2\ nm} \quad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

习题讲解

6-17 设氢原子处于某一定态，从该定态移去电子需要能量为0.85 eV。从上述定态向激发能为10.2 eV的另一定态跃迁时，所产生的谱线波长是多少？什么线系？在能级图上画出相应的跃迁。



解： 该定态的量子数：

$$\Delta E = E_\infty - E_n = 0-(-\frac{13.6\,\text{eV}}{n^2}) = 0.85\,\text{eV} \Rightarrow n=4$$

另一个定态的量子数：

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{13.6\,\text{eV}}{p^2} - (-13.6\,\text{eV}) = 10.2\,\text{eV} \Rightarrow p=2$$

这一跃迁对应n = 4 → m = 2， 属于巴尔末线系。

$$\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) \Rightarrow \lambda = 4.86\times 10^3\ \text{Å}$$

五. 微观粒子的波粒二象性　不确定性关系

1. 德布罗意波

德布罗意假设：一切实物粒子都具有波粒二象性；质量为m的粒子运动时，具有能量和动量；而从波动性来看，则具有波长λ和频率ν；

$$\begin{cases} E = mc^2 = h\nu \\ p = m\upsilon = \dfrac{h}{\lambda} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{mc^2}{h} \\ \lambda = \dfrac{h}{P} = \dfrac{h}{m\upsilon} \end{cases}$$

与实物粒子相关的波叫德布罗意波或物质波。

对物质波,关系 $c = \lambda\nu$ 不成立,它只对光波成立。

2. 波函数的物理意义(统计解释)

任一时刻粒子在空间 $\vec{r}$ 处*P*点附近的体积元*dV*中出现的几率*dW*与该处波函数模的平方成正比,故有:

$$dW = |\Psi(\vec{r},t)|^2 dV = \Psi(\vec{r},t)\cdot\Psi^*(\vec{r},t)dV$$

$$\boxed{\rho(\vec{r},t) = \frac{dW}{dV} = |\Psi(\vec{r},t)|^2}$$

物质波波函数模的平方就等于粒子在*p*点附近单位体积内出现的几率——几率密度。

德布罗意波是一种几率波。

波函数 Ψ 应满足单值、有限、连续等条件。

对自由粒子 $$\Psi(\vec{r},t)=Ae^{-\frac{i}{h}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

$$\rho(\vec{r},t)=\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2=A^2=\text{常量}$$

空间各点发现自由粒子的几率相同。

3. 不确定性关系：

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x\cdot\Delta p_x &\geq \hbar/2,\\ \Delta y\cdot\Delta p_y &\geq \hbar/2,\\ \Delta z\cdot\Delta p_z &\geq \hbar/2\end{aligned}}$$

$$\Delta E\ \Delta t\geq\hbar/2$$

习题讲解

6-20 已知电子和光子的波长均为 2.0 Å，它们的动量和动能各是多少？

解： 电子和光子的波长相等，故动量也相等：

$$p = \frac{h}{\lambda} = 3.3\times10^{-24}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

光子的动能：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = pc = h\nu$$

$$= hc/\lambda = 9.9\times10^{-16}\,\mathrm{J} = 6.2\,\mathrm{keV}$$

电子的动能：

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = (p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2} - m_0c^2$$

$$= 5.98\times10^{-18}\,\mathrm{J} = 37\,\mathrm{eV}$$

习题讲解

6-23 电子从某激发态跃迁到基态时发出波长为4000 Å的光谱线。由于激发能级有一定的宽度而使该谱线有4.0×10^{-4} Å的宽度，问该激发态能级的平均寿命是多少？

解：

$$E=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow\left|\Delta E\right|=\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda$$

$$\tau=\frac{h}{\Delta E}=\frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}=5.3\times10^{-8}\mathrm{s}$$

六. 薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r},t)]\Psi(\vec{r},t)$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)=\hat{H}\Psi(\vec{r},t)}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+U(x,t)]\Psi(x,t)$$

1、定态薛定谔方程

$$\boxed{[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)]\Phi(x)=E\Phi(x)} \quad T(t)=Ae^{-\frac{i}{h}Et}$$

2、算符

能量算符 $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

动量算符 $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\hbar^2\nabla^2$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ （拉普拉斯算符）

哈密顿算符 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$

用算符表示薛定谔方程，有

$$\boxed{\hat{H}\Psi = \hat{E}\frac{\partial\Psi}{\partial t}}$$

定态薛定谔方程

$$\boxed{\hat{H}(\vec{r})\Psi = E\Psi(\vec{r})}$$

3、定态薛定谔方程的典型例解

一维无限深势阱中的粒子

一维谐振子

势垒穿透(隧道效应)

氢原子

电子的自旋

决定电子运动的四个量子数

$$\boxed{(n,\ l,\ m_l,\ m_s)}$$

四个量子数　　（表征电子的运动状态）

(1) 主量子数 n (1 , 2 , 3, …, n)

大体上决定了电子能量

(2) 副量子数 l (0，1，2，… , n -1)

决定电子的轨道角动量大小，对能量也有稍许影响.

(3) 磁量子数 m_l (0，$\pm$1，$\pm$ 2，… , $\pm$ l)

决定电子轨道角动量空间取向

(4) 自旋磁量子数 m_s (1/2 , -1/2)

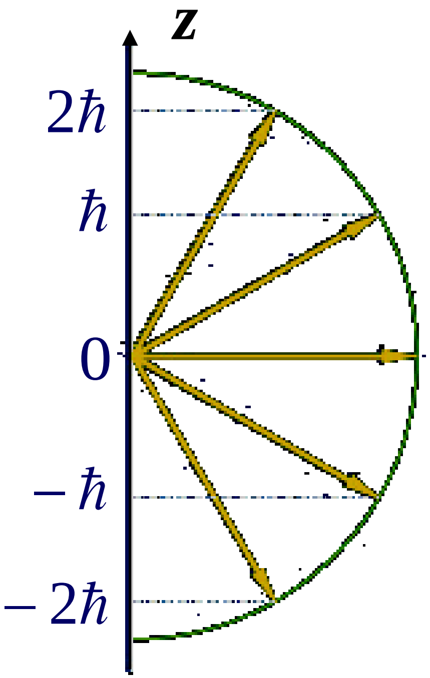
决定电子自旋角动量空间取向.

例 求 $l=2$ 电子角动量的大小及空间取向？

解 $\vec{L}$ 的大小 $L=\sqrt{2(2+1)}\hbar=\sqrt{6}\hbar$

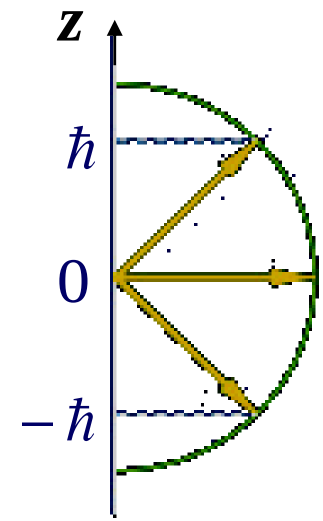
磁量子数 $m_l = 0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2$

$\vec{L}$ 在 Z 方向的投影 $L_z = 2\hbar,\ \hbar,\ 0, -\hbar, -2\hbar$



$l=2 \qquad L=\sqrt{6}\hbar$

若: l =1,则



$L=\sqrt{2}\hbar \qquad L_z = \hbar,\ 0, -\hbar$

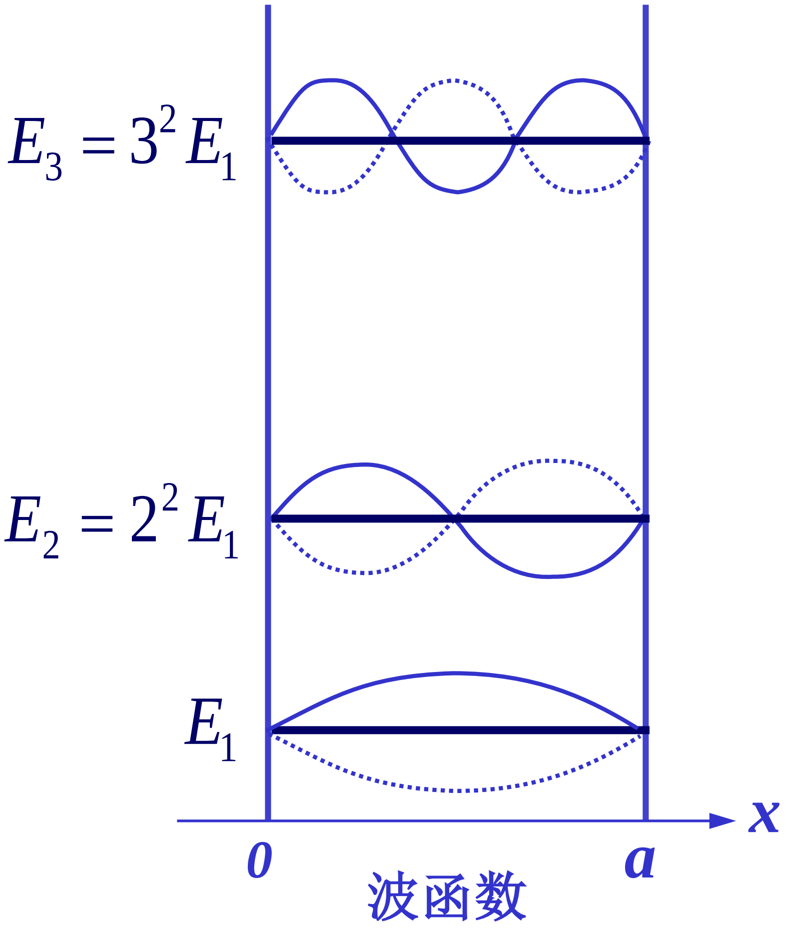
一维无限深势阱粒子的驻波特征

$$\lambda_1 = 2a$$

$$\lambda_2 = a$$

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}$$

$$\boxed{E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} = n^2 E_1}$$



$$\frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} \Rightarrow p_n = n\frac{h}{2a} \Rightarrow \lambda_n = \frac{h}{p_n} = \frac{2a}{n}$$

例 设质量为*m* 的微观粒子处在宽为*a* 的一维无限深方势阱中,

求 (1)粒子在 $0< x < a/4$ 区间中出现的概率, 并对$n = 1$ 和$n =\infty$ 的情况算出概率值.

(2)在哪些量子态上, $a/4$ 处的概率密度最大?

解 (1)概率密度 $\psi_n(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}$, $\quad |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}$

粒子在 $0< x < a/4$ 区间中出现的概率:

$$P = \int_0^{\frac{a}{4}}|\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{a}{4}}\frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$P_{n=1} = \frac{9}{100} \qquad P_{n=\infty} = \frac{25}{100}$$

（2）$a/4$ 处的概率密度

$$\left|\psi_n\left(\frac{a}{4}\right)\right|^2 = \frac{2}{a}\sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{a}{4}\right) = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{4} \qquad \frac{n\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$n = 2,6,10,\ldots\ldots$等量子态。

七. 原子的壳层结构

1.泡利不相容原理

原子中不可能同时有两个或两个以上的电子处于完全相同的状态，即：原子中不可能同时有两个或两个以上的电子具有四个相同的量子数。

2.能量最低原理

原子系统处于正常态时，各个电子尽可能占有最低能级。

例 下列各组量子数中，哪一组可以描述原子中电子的状态？

(A) $n=2,\ l=2,\ m_l=0,\ m_s=\frac{1}{2}$

(B) $n=3,\ l=1,\ m_l=-1,\ m_s=-\frac{1}{2}$

(C) $n=1,\ l=2,\ m_l=1,\ m_s=\frac{1}{2}$

(D) $n=1,\ l=0,\ m_l=1,\ m_s=-\frac{1}{2}$

答案：(B)

例　1922年施特恩和盖拉赫在实验中发现：一束处于*s*态的原子射线在非均匀磁场中分裂为两束。对于这种分裂，用电子轨道运动的角动量空间取向量子化难于解释，只能用________________来解释。

填：电子自旋角动量的空间取向量子化

例 试求 *d* 分壳层最多能容纳的电子数，并写出这些电子的m_l和m_s值。

答案： *d*分壳层 $l=2$，$2(2l+1)=10$

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \quad m_s = \pm\frac{1}{2}$$

例题1 关于光电效应有下列说法：

(1)任何波长的可见光照射到任何金属表面都能产生光电效应；

(2)若入射光的频率均大于一给定金属的红限，则该金属分别受到不同频率的光照射时释出电子的最大初动能也不同；

(3)若入射光的频率均大于一给定金属的红限，则该金属分别受到不同频率，强度相等的光照射时，单位时间释出的电子数一定相等；

(4)若入射光的频率均大于一给定金属的红限，则当入射光频率不变，而强度增大一倍时，该金属的饱和电流也增大一倍。

其中正确的是：(A) (1),(2),(3);　(B) (2),(3),(4)

(C) (2),(3);　(D) (2), (4);

答：选　(D)

例题2 用频率为ν_1的单色光照射某种金属时，测得饱和电流为I_1，以频率为ν_2的单色光照射该金属时，测得饱和电流为I_2，若$I_1 > I_2$则：

(A) $\nu_1 > \nu_2$;　(B) $\nu_1 < \nu_2$;

(C) $\nu_1 = \nu_2$;　(D) ν_1与ν_2关系还不能确定

答：选（D）

例题3 用频率为ν 的单色光照射某种金属时逸出光电子的最大初动能为E_K；若改用频率为2ν的单色光照射此种金属，则逸出光电子的最大初动能为多少？

解：$E_k = h\nu - A \Rightarrow A = h\nu - E_k$

$$\therefore \quad E_k' = 2h\nu - A = 2h\nu - (h\nu - E_k) = h\nu + E_k$$

例题4 已知氢原子从基态激发到某定态所需能量为10.19eV，则氢原子从能量为-0.85eV的状态跃迁到上述定态时所发射的光子能量为

(A) 2.55eV (B) 3.41eV (C) 4.25eV (D) 9.95eV

应选（A）

解：$\because \quad \Delta E = E_n - E_1 = \dfrac{E_1}{n^2} - E_1 = -E_1(1 - \dfrac{1}{n^2})$

$$\therefore \quad \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{\Delta E}{E_1} = 1 - \frac{10.19}{13.6} = 0.25 \qquad \therefore n = 2$$

光子能量 $\Delta E' = -0.85 - \dfrac{-13.6}{2^2} = 2.55\,\text{eV}$

例题5 具有下列哪一能量的光子，能被处在$n = 2$的能级的氢原子吸收?

(A) 1.51eV (B) 1.89eV (C) 2.16eV (D) 2.40eV

应选（B）

解:
$$n = 1, \quad E_1 = -13.6\text{eV}$$

$$n = 2, \quad E_2 = -\frac{E_1}{4} = -3.4\text{eV}$$

$$n = 3, \quad E_3 = -\frac{E_1}{9} = -1.51\text{eV}$$

$$E_3 - E_2 = (-1.51) - (-3.4) = 1.89\,\text{eV}$$

例题6 将波函数归一化 $f(x)=exp(-\frac{\alpha^2x^2}{2})$

解：设归一化因子为C，则归一化的波函数为

$$\Psi(x)=C\exp(-\frac{\alpha^2x^2}{2}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x)|^2dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}C^2\exp(-\alpha^2x^2)dx=1\Rightarrow\frac{C^2\pi^{1/2}}{\alpha}=1$$

故：$C=\pm(\frac{\alpha}{\pi^{1/2}})^{\frac{1}{2}}$ 归一化的波函数为：

$$\Psi(x)=\pm(\frac{\alpha}{\pi^{1/2}})^{\frac{1}{2}}\exp(-\frac{\alpha^2x^2}{2})$$

例题7 已知粒子在一维矩形无限深势阱中运动的波函数为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{3\pi x}{2a}\quad(-a\le x\le a)$$

那么粒子在$x = 5a/6$处出现的几率密度为：

$$(A)\ \frac{1}{2a}\quad(B)\ \frac{1}{a}\quad(C)\ \frac{1}{\sqrt{2a}}\quad(D)\ \frac{1}{\sqrt{a}}$$

应选（A）

解： $\because$ $$\rho=\left|\Phi(x)\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\right|^2\left[\cos\frac{3\pi}{2a}\cdot\frac{5}{6}a\right]^2$$

$$=\frac{1}{a}\cos^2\frac{5}{4}\pi=\frac{1}{2a}$$

例题8 α粒子在磁感应强度为B=0.025T的均匀磁场中沿半径为R=0.83cm的圆形轨道运动。

(1)试计算其德布罗意波长。

(2)若使m=0.1g的小球以与α粒子相同的速率运动，则波长为多少？

解：(1)计算α粒子的德布罗意波长

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = q\upsilon B = 2e\upsilon B \Rightarrow p = m\upsilon = 2eRB \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{2eRB}$$

(2)计算小球的德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m'\upsilon} = \frac{mh}{2m'eRB} = \frac{m}{m'} \cdot \frac{h}{2eRB}$$

例题9 氩原子(Z=18)基态的电子组态是：

(A) $1s^2\ 2s^8\ 3p^8$

(B) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3d^8$

答案：(C)

(C) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$

(D) $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^4\ 3d^2$

例题10 主量子数n=4的量子态中，角量子数的可能取值为l=? 磁量子数m_l的可能取值有多少个?

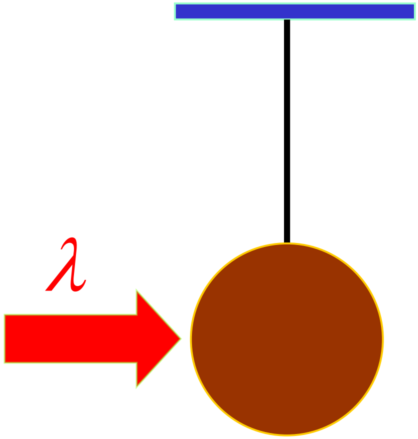
答案：l =0, 1, 2, 3 可取共4个值；

m_l可取共 $\Sigma(2l+1) = 1+3+5+7=16$个值

例 一铜球用绝缘线悬挂于真空中，被波长为 **λ=150 nm** 的光照射.已知铜的逸出功为 **4.5eV**.

求 铜球因失去电子而能达到的最高电势.

解 铜球失去电子后带正电，电势升高，使束缚电子的势垒也升高，设铜球表面的电势为U，逸出电子的速度为υ，铜的逸出功为A，爱因斯坦光电效应方程为



$$h\nu = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + eU + A$$

逸出电子的最大动能为零时，铜球电势达最高$U_{\max}$，有

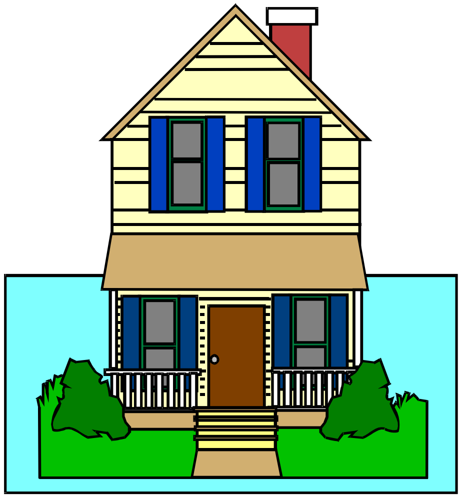
$$h\nu = eU_{\max} + A \qquad h\frac{c}{\lambda} = eU_{\max} + A$$

$$U_{\max} = \frac{h\frac{c}{\lambda} - A}{e} = \frac{(8.3-4.5)\mathrm{eV}}{e} = 3.8\mathrm{V}$$

黑体举例：

炼钢炉上的小洞

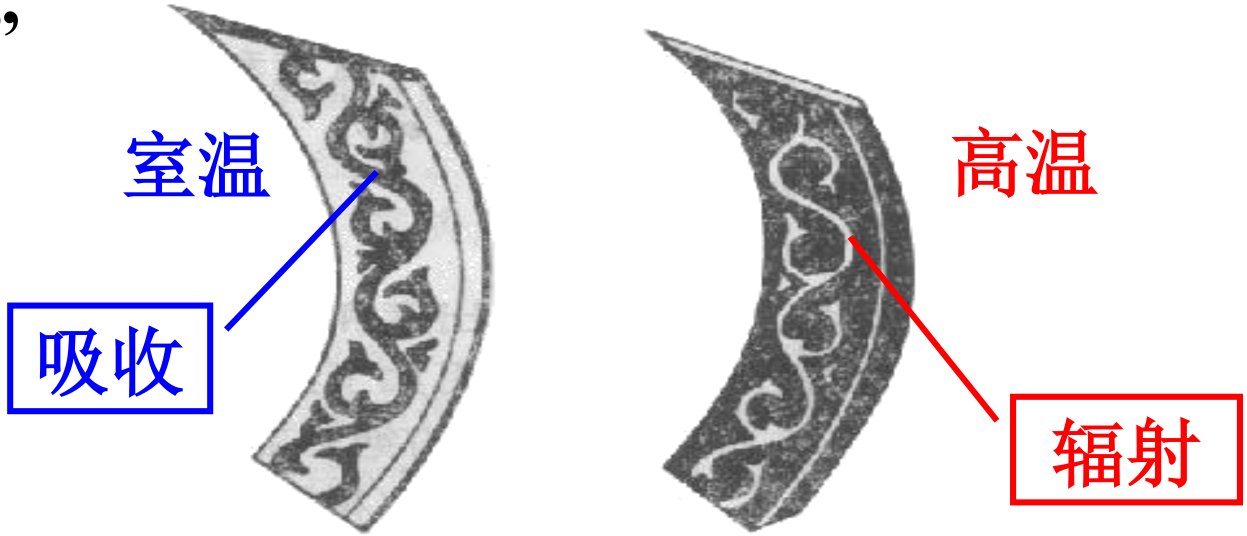
向远处观察打开的窗子



近似黑体

吸收本领大 ⇔ 辐射本领大。

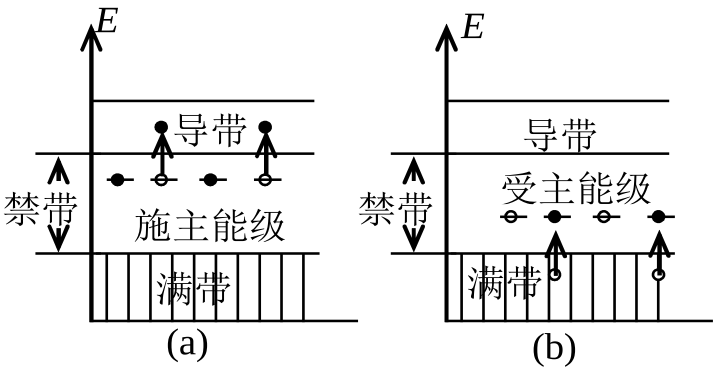
“黑体不黑 ⇒ 黑体也是最佳辐射体(黑体辐射)!”



例 **根据氢原子理论，若大量氢原子处于主量子数n = 5的激发态，则跃迁辐射的谱线可以有_________条，其中属于巴耳末系的谱线有_______条.**

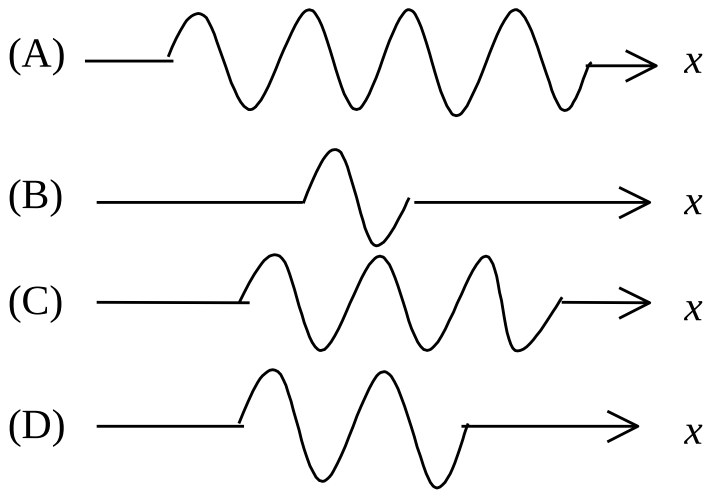
答案 **根据氢原子理论，若大量氢原子处于主量子数n = 5的激发态，则跃迁辐射的谱线可以有___10_____条，其中属于巴耳末系的谱线有__3____条.**

例 下方两图(a)与(b)中，(a)图是____型半导体的能带结构图，(b)图是____型半导体的能带结构图.



答案 下方两图(a)与(b)中，(a)图是_n_型半导体的能带结构图，(b)图是_p___型半导体的能带结构图.

例　设粒子运动的波函数图线分别如图(A)、(B)、(C)、(D)所示，那么其中确定粒子动量的精确度最高的波函数是哪个图?



答案　图(A)

例　激光全息照相技术主要是利用激光的哪一种优良特性?

(A) 亮度高.　　(B) 方向性好.

(C) 相干性好.　　(D) 抗电磁干扰能力强.

答案　(C)

量子物理基础小结

1. 黑体辐射

斯特藩—玻耳兹曼定律：$M_{\mathrm{B}}(T)=\sigma T^4$

维恩位移定律：$T\lambda_{\mathrm{m}}=b$

2. 普朗克量子假设和辐射公式

能量子：$\varepsilon=h\nu$

辐射公式：$$M_{\mathrm{B}\lambda(T)}=\frac{2\pi hc^2\lambda^{-5}}{\mathrm{e}^{hc/\lambda KT}-1}$$

3. 光电效应

遏止电压和光电子的最大初动能关系：$\frac{1}{2}m\upsilon_{\mathrm{m}}^2=eU_{\mathrm{a}}$

光电效应方程：$h\nu=A+\frac{1}{2}m\upsilon_{\mathrm{m}}^2$

红限频率：$\nu_0=A/h$

4. 光的波粒二象性(爱因斯坦光子理论）

光子的能量： $\varepsilon = mc^2 = h\nu$

光子的动量： $p = mc = \dfrac{h}{\lambda}$

5. 康普顿效应

康普顿散射公式：$\Delta\lambda = \dfrac{2h}{m_0 c}\sin^2(\dfrac{\theta}{2})$

电子的康普顿波长：$\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c} = 0.0024\text{nm}$

6. 氢原子光谱

波数公式：$\tilde{\nu} = \dfrac{1}{\lambda} = R_H(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}) \qquad (n > m)$

辐射公式： $\nu = \dfrac{|E_k - E_n|}{h}$

角动量量子化条件： $L = m\upsilon r = n\dfrac{h}{2\pi} \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$

7. 微观粒子的波粒二象性和不确定关系

德布罗意波关系式：$\lambda=\dfrac{h}{p}=\dfrac{h}{m\upsilon}$

不确定关系：$\Delta x\Delta p\geq\dfrac{\hbar}{2}\qquad \Delta E\ \Delta t\geq\dfrac{\hbar}{2}$

8. 薛定谔方程

定态薛定谔方程：$\nabla^2\Psi+\dfrac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi=0$

波函数 Ψ 应满足单值、有限、连续等条件，薛定谔方程是量子力学的基本方程.

一维无限深势阱中的粒子：$\Psi=\pm\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi}{a}x,\quad n=1,2,3,\cdots$

$$E_n=\frac{h^2}{8ma^2}\cdot n^2,\quad n=1,2,3,\cdots$$

9. 四个量子数

主量子数： $n = 0,1,2,3, \ldots$

副量子数(角量子数)： $l=0,1,2,\cdots,n-1$

磁量子数： $m_l=0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm l$

自旋磁量子数： $m_s=\pm\frac{1}{2}$

四个量子数是描述原子中核外电子状态的参数。

10. 晶体结构的最基本特征

组成晶体的离子、原子或分子按照一定的方式不断作周期性重复排列,构成长程有序。

（1）泡利不相容原理 (1925年)

在一个原子中,不能有两个或两个以上的电子处在完全相同的量子态，即它们不能具有一组完全相同的量子数（ n， l ， m_l， m_s）.

n	1	2				3								
l	0	0	1			0	1			2				
m_l	0	0	-1	0	1	0	-1	0	1	-2	-1	0	1	2
m_s	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$													
Z	2	8				18								

量子数为n 的主壳层最多容纳电子的最大数目

$$Z_n = \sum_{0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

$n = 1、2、3、4、5、6$

$K、L、M、N、O、P$

$l = 0、1、2、3、4、5$

$s、p、d、f、g、h$

（2） 能量最小原理

原子处于正常状态时，每个电子都趋向占据可能的最低能级

主量子数 n $\xrightarrow{\text{决定}}$ 能级高低 $\xleftarrow{\text{影响}}$ 角量子数 l

		1*s*	2*s*	2*p*	3*s*	3*p*	3*d*	4*s*
1 氢	H	1						
2 氦	He	2						
3 锂	Li	2	1					
4 铍	Be	2	2					
5 硼	B	2	2	1				
6 碳	C	2	2	2				
10 氖	Ne	2	2	6				
13 铝	Al	2	2	6	2	1		
14 硅	Si	2	2	6	2	2		
18 氩	Ar	2	2	6	2	6		
19 钾	K	2	2	6	2	6		1
20 钙	Ca	2	2	6	2	6		2
21 钪	Sc	2	2	6	2	6	1	2

$$D = n + 0.7\,l$$

4*s* 能级
低于
3*d* 能级

部分原子的电子排列

11. 固体能带结构

*N*个相同原子组成晶体时，晶体中每个原子原有的每一能级都分裂为*N*个密集能级，形成能带.

能带与能带之间既可能以禁带相隔，也可能相接或重迭.

满带：填满电子的能带，满带电子不参与导电；

导带：部分填充电子的能带，导带中的电子参与导电；

空带：没有电子的能带；

价带：由价电子能级分裂而形成的能带，价带可以是满带或导带.

12. 绝缘体、导体和半导体

绝缘体的价带是满带，且价带与空带之间有较宽的禁带.

导体的价带不满或价带和空带重迭或相接.

半导体的价带是满带，但价带与空带之间的禁带宽度较小 (约1eV或更小) .

五价元素砷As、磷P：

多余电子⇒电子导电，**n型**/电子型半导体

三价元素硼B、镓Ga：

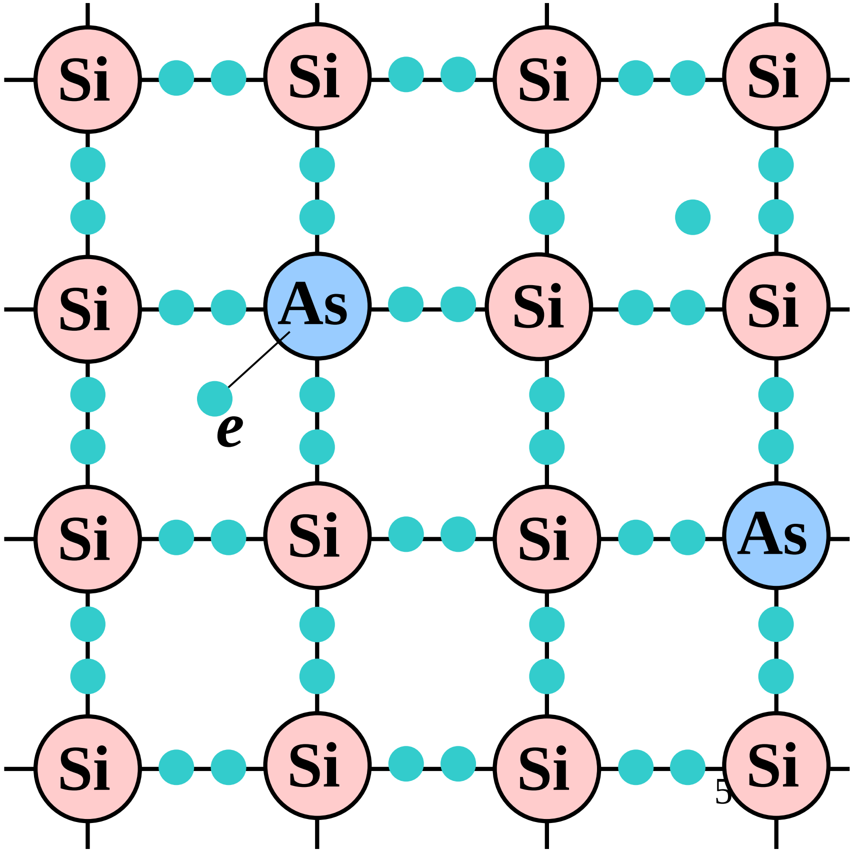
多余空穴⇒空穴导电，**p型**/空穴型半导体

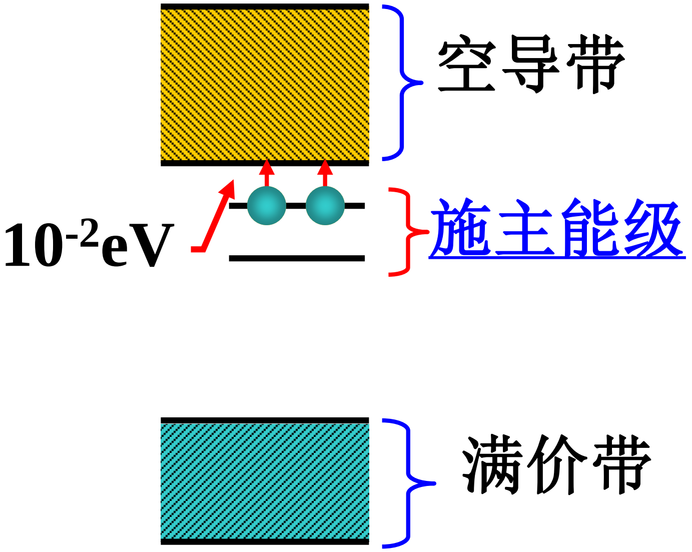
类型		掺有杂质	主要载流子	导电性能
本征半导体		无	电子 空穴	差
杂质半导体	n 型	五价元素（砷或磷）	电子	提高
	p 型	三价元素（硼或镓）	空穴	提高

n型半导体：

杂质能级在能隙中靠近导带下面约10^{-2}eV

杂质能级的电子容易激发到导带 ⇒ 施主能级



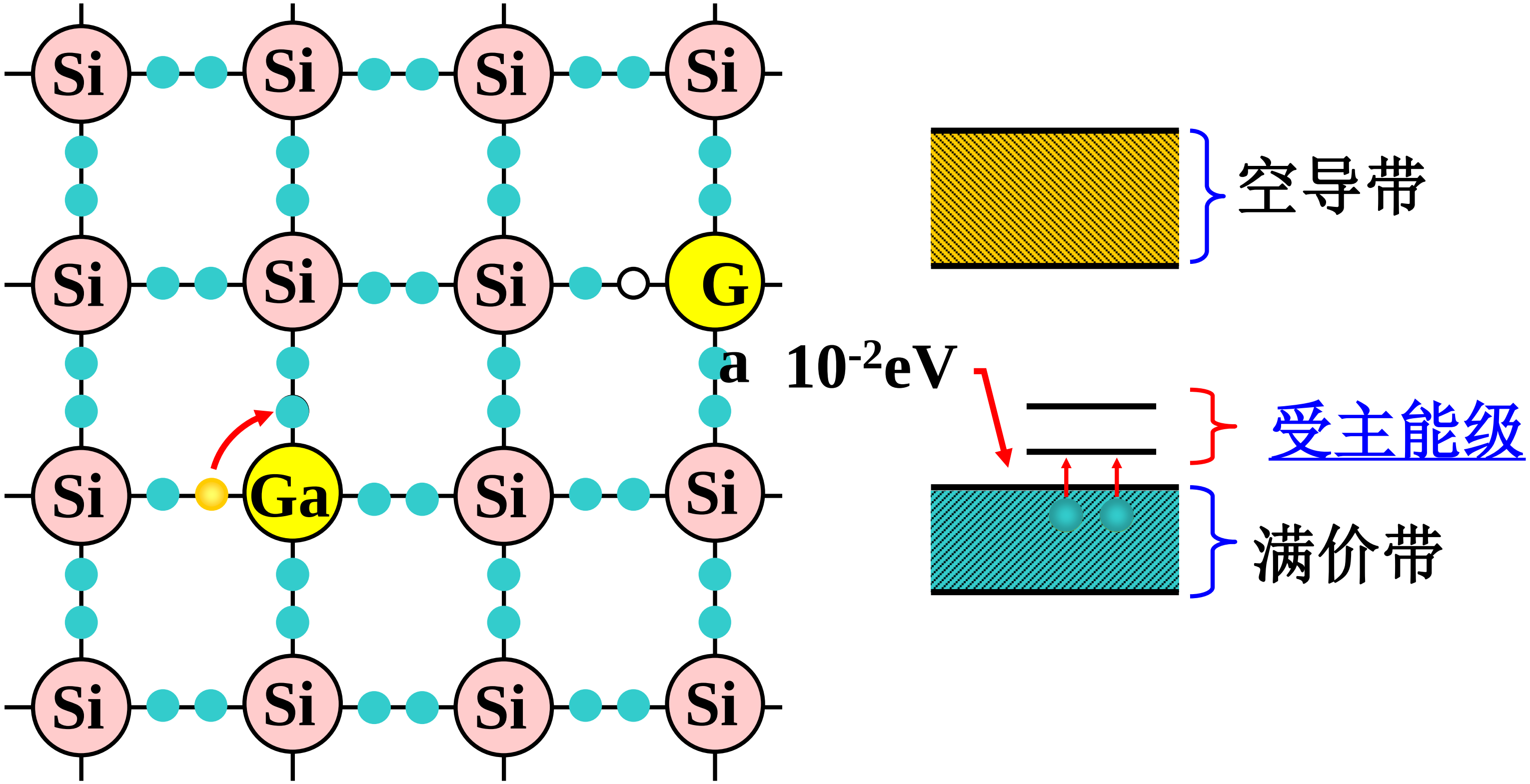


p型半导体:

缺少电子，能级在能隙中靠近满带上面约10^{-2}eV

满带电子容易激发到杂质能级，留下空穴

杂质能级接受电子 ⇒ 受主能级



13. 半导体

本征半导体： 没有杂质和缺陷的理想半导体.参与导电的电子和空穴数目相等.

n 型半导体： 参与导电的载流子主要是从施主能级跃迁到导带中去的电子.

p 型半导体： 参与导电的载流子主要是满带中产生的空穴.

14. 激光器的基本组成：激光工作物质、激励能源和谐振腔.

激光工作物质、激励能源和谐振腔.

15. 实现激光的两个必要条件

介质内部实现粒子数反转和满足阈值条件.

16. 激光的纵模数 $N = \dfrac{\Delta\nu}{\Delta\nu_k}$

17. 激光特性

激光的三个主要特性为：高定向性、高单色性、高亮度.

例 一个日地模型：真空中的两个黑体球. 测得太阳辐射谱中的峰值波长为 $\lambda_m = 0.47\ \mu\text{m}$. 地球上大气和海洋有效的传热把地球调节成为一个表面温度均匀的球. 已知地球和太阳的半径分别是$R_e=7\times10^6$ m， $R_s=7\times10^8$ m， 日—地距离为 $d=1.5\times10^{11}$ m .

求 地球的温度.

解 设太阳的平均温度为T_s， 由维恩位移定律有

$$T_s = \frac{2898\mu\text{m}\cdot\text{K}}{\lambda_m} = \frac{2898\times10^{-6}}{0.47\times10^{-6}}\text{K} = 6166\ \text{K}$$

地球接受太阳的辐射大致为 $P_{se} = \dfrac{4\pi R_s^2(\sigma T_s^4)}{4\pi d^2}\pi R_e^2$

地球自身的辐射为 $P_e = 4\pi R_e^2(\sigma T_e^4)$

不计地球内热源，能量平衡要求 $P_{se} = P_e$ $\qquad T_e^4 = \dfrac{R_s^2}{4d^2}T_s^4$

$$T_e = \sqrt{\frac{R_s}{2d}}T_s = \sqrt{\frac{7\times10^8}{2\times1.5\times10^{11}}}\times6.16\times10^3\text{K} = 297\text{K}$$

例

$\lambda_0 = 0.02\text{nm}$ 的X射线与静止的自由电子碰撞, 若从与入射线成90° 的方向观察散射线。

求 (1) 散射线的波长λ; (2) 反冲电子动能; (3) 反冲电子动量.

解 (1) 散射线的波长λ:

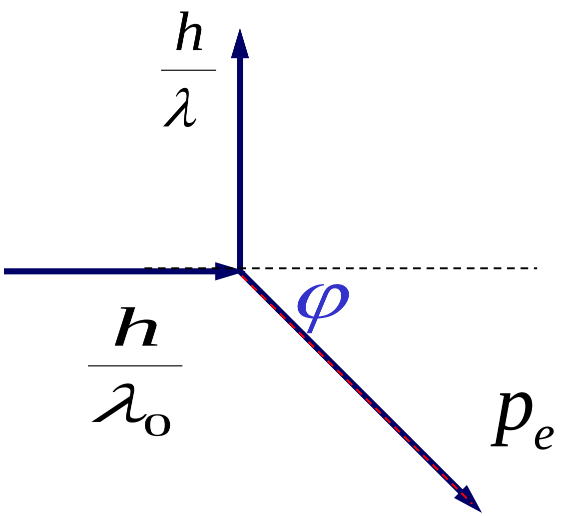
$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\theta) \qquad \lambda_c = h/m_0 c = 0.0024\,\text{nm}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0.0224\,\text{nm}$$

(2) 反冲电子动能:

$$E_\text{k} = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda}$$

$$= 1.08\times10^{-15}\,\text{J} = 6.8\times10^{3}\,\text{eV}$$



(3) 反冲电子的动量:

$$p_e = h\sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} + \frac{1}{\lambda^2}} = 4.5\times10^{-23}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\lambda_0}{\lambda} = 42^\circ 18'$$

*例题：试求⑴氢原子光谱巴耳末线系辐射的能量最小的光子的波长；

⑵巴耳末线系的线系极限波长。

解：(1)从氢原子能级和光谱图可以看出，巴耳末系辐射的能量最小($\Delta E_{min}= E_3- E_2$)光子是$E_3\rightarrow E_2$跃迁。由玻尔辐射频率公式：

$$v_{nm}=\frac{|E_n-E_m|}{h}=\frac{c}{\lambda_{nm}}\Rightarrow \lambda_{nm}=\frac{hc}{|E_n-E_m|}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{hc}{|E_2-E_3|}=\frac{hc}{13.6\left|\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right|\times 1.6\times 10^{-19}}=\cdots=0.66\mu m$$

⑵ $E_\infty\rightarrow E_2$跃迁 巴耳末线系的线系极限波长

$$v_{\infty 2}=\frac{|E_\infty-E_2|}{h}=\frac{c}{\lambda_\infty}\Rightarrow \quad \lambda_\infty=\frac{hc}{|E_\infty-E_2|}=\frac{hc}{|E_2|}=\frac{hc}{13.6/2^2}=\cdots=0.37\mu\,\mathrm{m}$$

例 双原子气体分子由质量为m的两个原子构成，这两个原子相隔一定距离 d 并围绕其连线的中垂线旋转，假定它的角动量象玻尔氢原子理论中一样，是量子化的，试确定其转动动能的可能值.

解 双原子分子绕轴旋转时角动量L为

$$L = J\omega = 2m(\frac{d}{2})^2\omega$$

角动量量子化时有

$$L = J\omega = n\hbar \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

系统转动动能的可能值为

$$E_{rn} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\frac{n^2\hbar^2}{J^2} = \frac{n^2\hbar^2}{2J} = n^2\frac{\hbar^2}{md^2}$$

严格的量子力学理论给出分子转动动能为

$$E_{rl} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2J}$$

●德布罗意波的波长一般很短,

因而在普通实验条件下难以观察到其波动性。

*例题：求$m = 0.01\ kg$，$v = 300\ m/s$ 的子弹的物质波

波长

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times 10^{-34}}{0.01\times 300} = 2.21\times 10^{-34}\,m$$

因为h极其微小 ⟶ 宏观物体的波长小得实验

难以测量 ⟶ “宏观物体只表现出粒子性”。

*例：人体：m = 70kg, υ= 6m/s, 求de Broglie波长。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.6\times 10^{-34}\, J\cdot s}{70kg\times 6\, m/s} = 1.57\times 10^{-36}\, m$$

电子：m_0 = 0.511MeV, E_k = 100eV

$$p = \sqrt{E_k(E_k/c+2m_o)} \approx \sqrt{2m_0E_k} \quad (E_k = qU)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0eU}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}}nm}$$

- 在现代科技的应用：电子显微镜等

例 计算经过电势差 U_1 =150 V 和 U_2 =10^4 V 加速的电子的德布罗意波长（不考虑相对论效应）.

解 根据 $\frac{1}{2}m_0\upsilon^2 = eU$ ，加速后电子的速度为 $\upsilon = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}$

根据德布罗意关系 $p = h/\lambda$，电子的德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{m_0\upsilon} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 e}}\frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{1.225}{\sqrt{U}}\text{nm}$$

波长分别为 $\lambda_1 = 0.1\text{nm}$

$$\lambda_2 = 0.0123\text{nm}$$

➢ 说明

电子波波长 << 光波波长 → 电子显微镜分辨能力远大于光学显微镜

例 子弹（$m = 0.10$ g，$v = 200$ m/s）穿过 0.2 cm 宽的狭缝.

求 沿缝宽方向子弹的速度不确定量.

解 $\Delta x = 2\times10^{-3}\,\mathrm{m}$

子弹速度的不确定量为

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63\times10^{-34}}{4\times3.14\times0.1\times10^{-3}\times2\times10^{-3}}$$

$$= 2.64\times10^{-28}\ \mathrm{m/s}$$

- 若让 $h = 6.63\times10^{-6}\,\mathrm{J\cdot s}$，$\Delta v_x = ?$

例 原子的线度约为 10^{-10} m，求原子中电子速度的不确定量.

解 原子中电子的位置不确定量 10^{-10} m，由不确定关系

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

电子速度的不确定量为

$$\Delta \upsilon_x = \frac{\Delta p_x}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} = \frac{6.63\times 10^{-34}}{4\times 3.14\times 9.1\times 10^{-31}\times 10^{-10}} \mathrm{m/s}$$

$$= 5.8\times 10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

➢ 说明

氢原子中电子速率约为 10^6 m/s. 速率不确定量与速率本身的数量级基本相同，因此原子中电子的位置和速度不能同时完全确定，也没有确定的轨道.

例 氦氖激光器所发红光波长 $\lambda = 6328$ Å，谱线宽度 $\Delta\lambda = 10^{-8}$ Å．

求 当这种光子沿 x 方向传播时，它的 x 坐标不确定度(波列长度)．

解

$$p_x = \frac{h}{\lambda}$$

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2} = \frac{h(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{\lambda^2}{4\pi\Delta\lambda} \approx 3.2 \times 10^4 \mathrm{m}$$

▲估计微观系统的主要特征

有了不确定关系，有时无需知道系统详情，就能估计系统的特征。

*例题：为什么原子具有稳定性？

∵估算→可去掉1/2

解：∵不确定关系：$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta x \Delta p_x \sim \hbar$

∴ 微观粒子不可能静止(Δx=0, Δp_x =0)

反映电子脱离原子核反抗的能力

设氢原子中电子定域在半经为r的范围内运动

反映原子核吸引电子的能力

$\therefore\ \Delta x = r \Rightarrow \Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{r}$ 不妨取 $p = \Delta p = \frac{\hbar}{r}$

∴ 再考虑势能，电子总能量为：$E = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

两种作用相互平衡→稳定→ $E_{\min}$最小→ $\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0$

∴电子稳定的离核最近距离 $\boxed{r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}}$ 这是玻尔半径.

*例题：估算宏观物体子弹的坐标不确定度Δx.

已知：子弹的m=0. 05kg , $v\approx$300m/s

解：不妨设对v的测量可准确到1/10000→$\Delta v\approx 3\times 10^{-2}$m/s

由不确定关系$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant h \Rightarrow \Delta x \geq \dfrac{h}{\Delta p} = \dfrac{h}{m\Delta v} \approx 4\times 10^{-31}\text{m} \ll 10^{-10}\text{m}$

这表明：对于宏观物体来说，完全可以使用轨道的概念。

分析：判据物体运动是否具有轨道, 普朗克常数 h起决定作用.

经典描述适用性判据如下：

当一个物理系统的作用量数值与h可比拟时，

不确定关系起重要作用，须用量子力学处理系统行为；

当一个物理系统的作用量数值>>h 或可视$h\to 0$时，

不确定关系微不足道，用经典力学处理系统行为即可.

*例题：为什么原子核是由质子和中子组成?

解：居里夫人发现放射性现象中的β射线是从核中放射出的高速电子. 由此认为，原子核是由带正电的质子和带负电的电子组成，并且质子数大于核电子数。

但是，根据不确定关系，核内不可能存在电子!

∵原子核半径 $r<<10^{-14}$m

若核内有电子，则由 $p \approx \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{\Delta x} = \dfrac{\hbar}{r} \approx 10^{-20}$ kg.m/s

∴电子能量 $E=(c^2p^2+m_0{}^2c^4)^{1/2} > cp \approx c\Delta p \approx 3.0\times10^{-12}$ J ≈ 20 MeV

但从原子放射出来的电子(β射线)，其能量仅1MeV.

∴原子核不可能是由质子和电子组成!

∴原子核只能是由质子和中子组成!!

注:中子放射时衰变成质子和电子。


Happy New Year
Happy New Year
THE END