题：一束自然光通过光轴夹角为45度的线偏振器后，又通过了一个λ/4波片，快轴与X轴的夹角为30度，再通过一个λ/2波片，快轴与X轴的夹角为45度，再通过一个λ/8波片，快轴与X轴的夹角为60度，再通过了一个线偏振器，光轴与Y轴的夹角为45度，再通过一个λ/2波片，快轴与X轴的夹角为60度，再通过一个λ/4波片，快轴与X轴的夹角为30度，计算透射光的偏振态。

§15－6　偏振的矩阵表示

一、偏振光的表示

二、偏振光的琼斯（**Jones**）矢量表示

三、偏振器件的琼斯（**Jones**）矩阵表示

四、偏振光的斯托克斯（ **Stokes** ）矢量表示

五、偏振器件的穆勒（ **Mueller** ）矩阵表示

六、偏振光的邦加（ **Poincare**）球表示

一、偏振光的表示

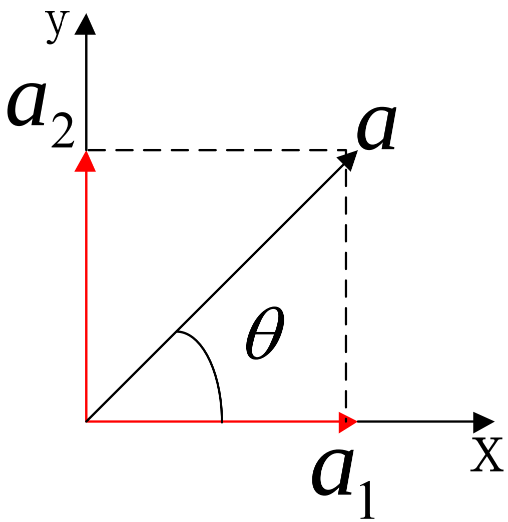
1、线偏振光的分解

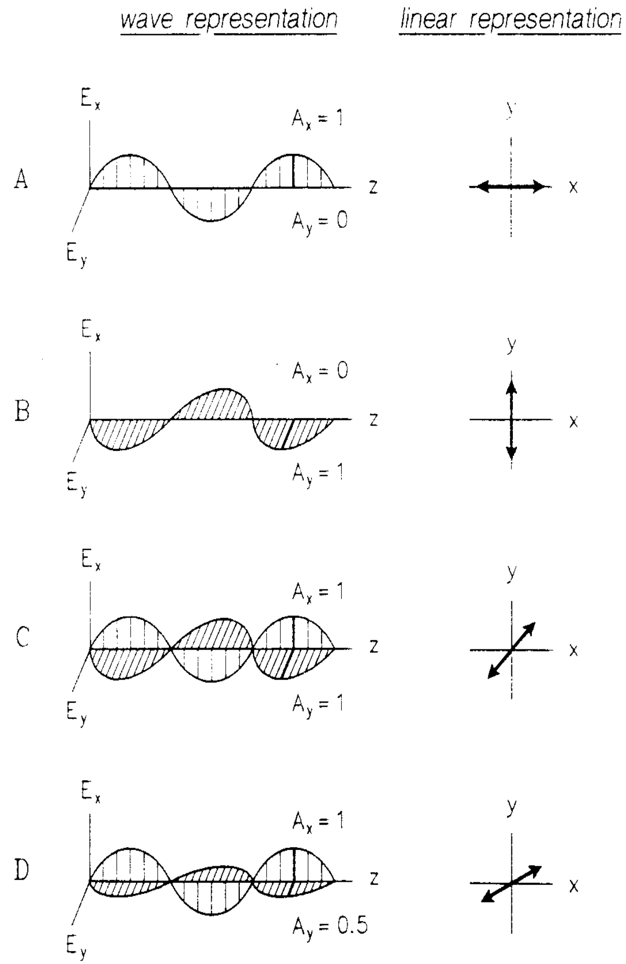
$$a_1 = a\cos\theta,\ a_2 = a\sin\theta$$

$$\vec{E} = \vec{x}_0 a_1 \cos(\alpha - \omega t + \varphi_o) + \vec{y}_0 a_2 \cos(\alpha - \omega t + \varphi_o)$$

$$= \left[\vec{x}_0 a_1 + \vec{y}_0 a_2\right]\cos(\alpha - \omega t + \varphi_o)$$

复振幅：$\tilde{E} = \vec{x}_0 a_1 e^{i\alpha} + \vec{y}_0 a_2 e^{i\alpha}$



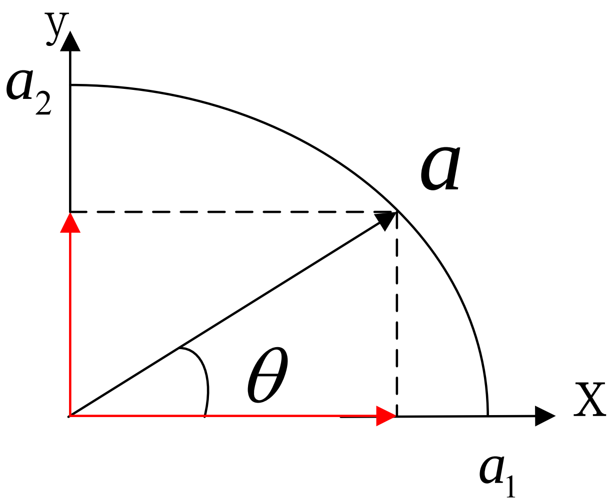


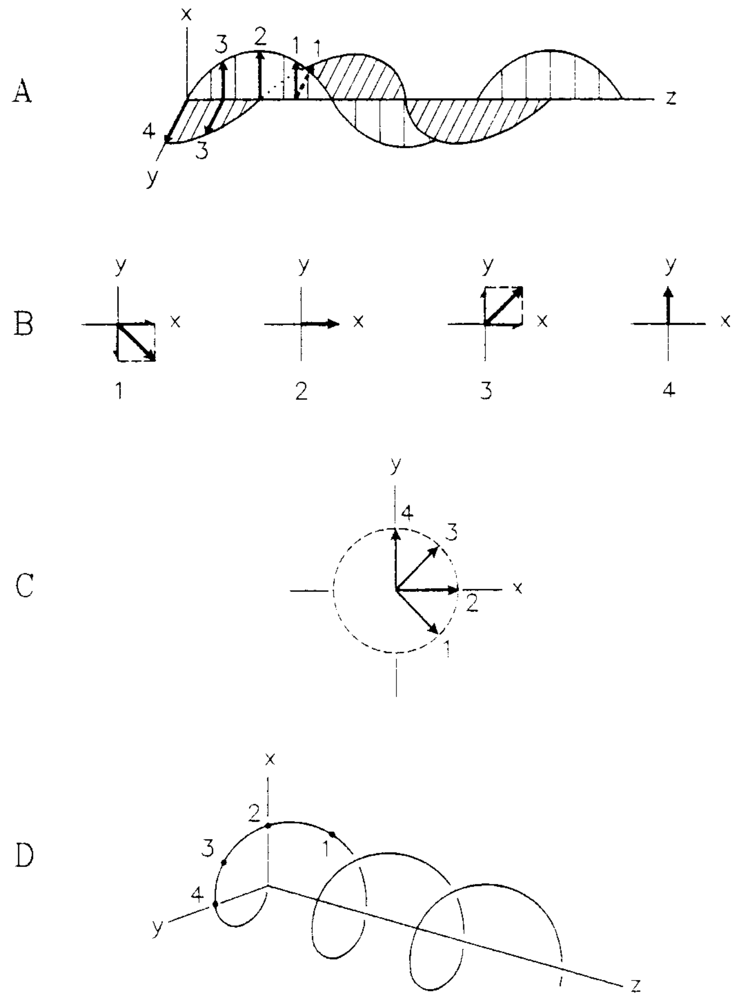
2、圆偏振光的分解

$$E_x = a_1 \cos(\alpha_1 - \omega t)$$

$$E_y = a_2 \cos(\alpha_1 - \omega t + \delta)$$

$$a_1 = a_2,\ \delta = \pm \frac{\pi}{2}$$





3、椭圆偏振光的分解

$$\vec{E}_x = \vec{x}_0 a_1 \cos(\alpha_1 - \omega t)$$

$$\vec{E}_y = \vec{y}_0 a_2 \cos(\alpha_1 - \omega t + \delta)$$

$$\tilde{E} = \vec{x}_0 a_1 e^{i\alpha_1} + \vec{y}_0 a_2 e^{i(\alpha_1 + \delta)}$$

$a_1 \neq a_2, 0 < \delta < \pi$ 左旋椭圆光。

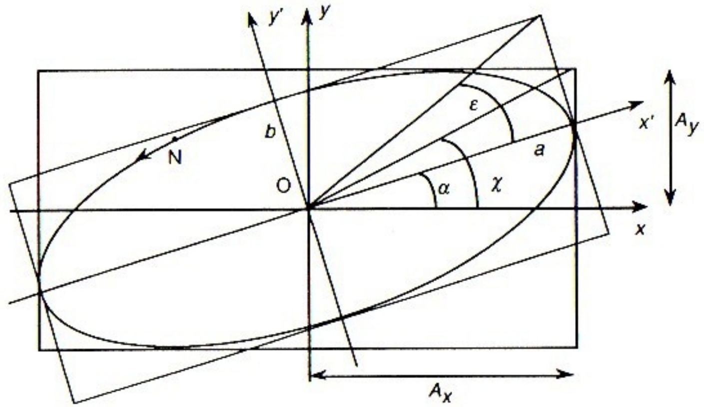
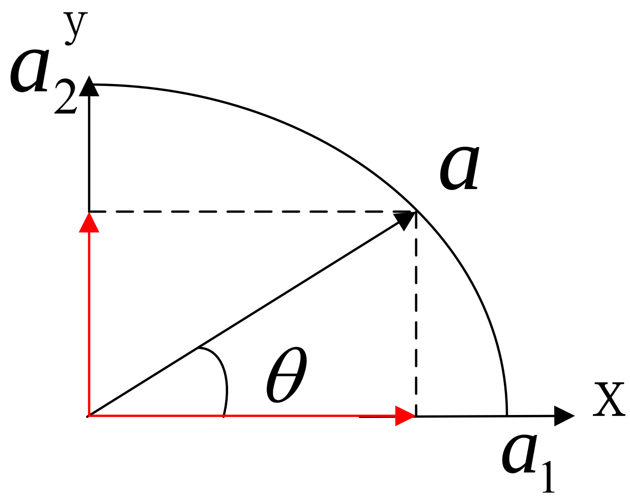


Figure 1.2 *Parameters of a state of elliptical polarization*

$a_1 \neq a_2, \pi < \delta < 2\pi$ 右旋椭圆光。



方位角α(azimuth);

椭偏度ε(ellipticity);

旋向（handedness，手性).

所以任意一个偏振光都可表示为:

a.光矢量互相垂直

b.沿同一方向传播且位相差恒定

的两个线偏振光的合成。因此偏振光可表示如下：

$$\vec{E} = E_x \vec{x}_0 + \mathrm{E}_y \vec{y}_0$$

既 $E_x = a_1 e^{i(\alpha_1 - \omega t)}$

$$= \vec{x}_0 a_1 e^{i(\alpha_1 - \omega t)} + \vec{y}_0 a_2 e^{i(\alpha_2 - \omega t)}$$

$E_y = a_2 e^{i(\alpha_2 - \omega t)}$

省去公共因子，用复振幅表示为

$$\widetilde{E}_x = a_1 e^{i\alpha_1}$$

$$\widetilde{E}_y = a_2 e^{i\alpha_2}$$

4、正交偏振

设有两列偏振光，其偏振态由复振幅E_1和E_2表示

$$E_1 = \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} E_{2x} \\ E_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

如果它们满足条件：

$$E_1 \bullet E_2^* = 0 \qquad \tilde{E}_{1x}\tilde{E}_{2x}^* + \tilde{E}_{1y}\tilde{E}_{2y}^* = 0$$

*表示复数共轭。则这两个偏振光是正交的，它们是一对正交偏振态

光矢量的振动方向互相垂直的两列线偏振光是正交的。

左旋圆偏振光和右旋圆偏振光是正交的。

任何一种偏振态均可分解为两个正交的偏振态。

二、偏振光的琼斯（Jones）矢量表示

$$\begin{cases} \widetilde{E}_x = a_1 e^{i\alpha_1} \\ \widetilde{E}_y = a_2 e^{i\alpha_2} \end{cases}$$

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} \widetilde{E}_x \\ \widetilde{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e^{i\alpha_1} \\ a_2 e^{i\alpha_2} \end{bmatrix} = a_1 e^{i\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{a_2}{a_1} e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{bmatrix}$$

为琼斯矢量

通常将上式归一化，有

$$E=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\begin{bmatrix}1\\ \frac{a_2}{a_1}e^{i(\alpha_2-\alpha_1)}\end{bmatrix}$$

设 $\delta=\alpha_2-\alpha_1$，$a=\frac{a_2}{a_1}$，

$$E=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\begin{bmatrix}1\\ ae^{i\delta}\end{bmatrix}$$

称为归一化的琼斯矢量

1、线偏振光的归一化琼斯矢量：

若光矢量沿x轴，$a_1 = 1, a_2 = 0$ ，则：
$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若光矢量与x轴成 θ 角，振幅为 a 的线偏振光

有 $a_1 = a\cos\theta, a_2 = a\sin\theta, \delta = 0$ 　则

$$E = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

2、求长轴沿x轴，长短轴之比是2：1的右旋椭圆偏振光的归一化琼斯矢量。

根据已知条件有：

$$\tilde{E}_x = 2a \quad , \tilde{E}_y = ae^{-i\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \left|\tilde{E}_x\right|^2 + \left|\tilde{E}_y\right|^2 = 5a^2$$

归一化琼斯矢量为

$$E_{右} = \frac{1}{\sqrt{5a^2}} \begin{bmatrix} 2a \\ ae^{-i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$$

三、 偏振器件的琼斯（Jones）矩阵表示

设入射光为$\tilde{E}_1=\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$，经过偏振器件之后，出射光为$\tilde{E}_2=\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} A_2 = g_{11}A_1 + g_{12}B_1 \\ B_2 = g_{21}A_1 + g_{22}B_1 \end{cases}$$

写成矩阵形式：$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_{11}, & g_{12} \\ g_{21}, & g_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}=G\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$

式中矩阵$G=\begin{bmatrix} g_{11}, & g_{12} \\ g_{21}, & g_{22} \end{bmatrix}$称为该器件的琼斯矩阵。

如果偏振光琼斯矩阵为相继通过N个偏振器件，则

$$E_2 = G_N G_{N-1} \ldots G_2 G_1 E_1$$

例1：

求透光轴与x轴成θ角的线偏振器的琼斯矩阵

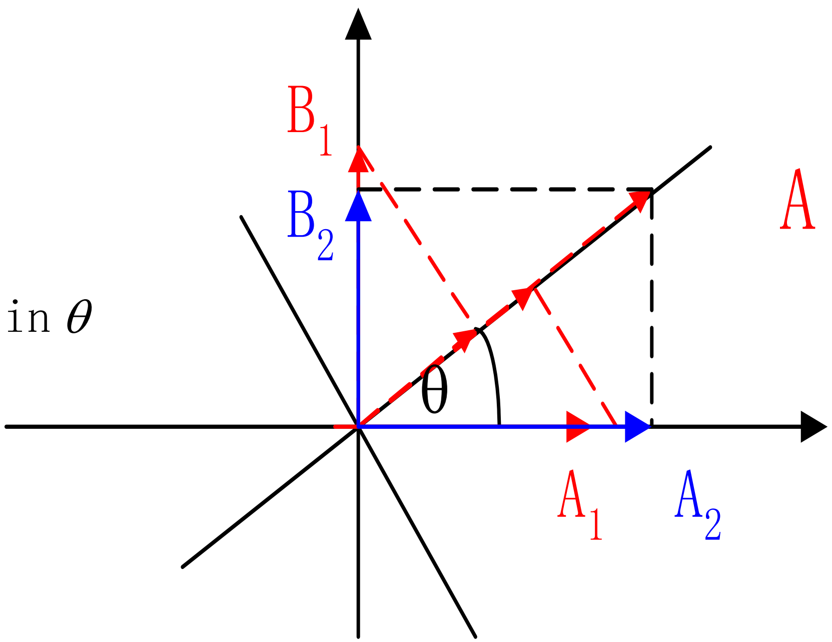
解：光线的偏振状态为：

设入射光 $\tilde{E}_1=\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$，出射光$\tilde{E}_2=\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$

沿透光轴方向的分量：$\vec{A}=\vec{A}_1\cos\theta+\vec{B}_1\sin\theta$

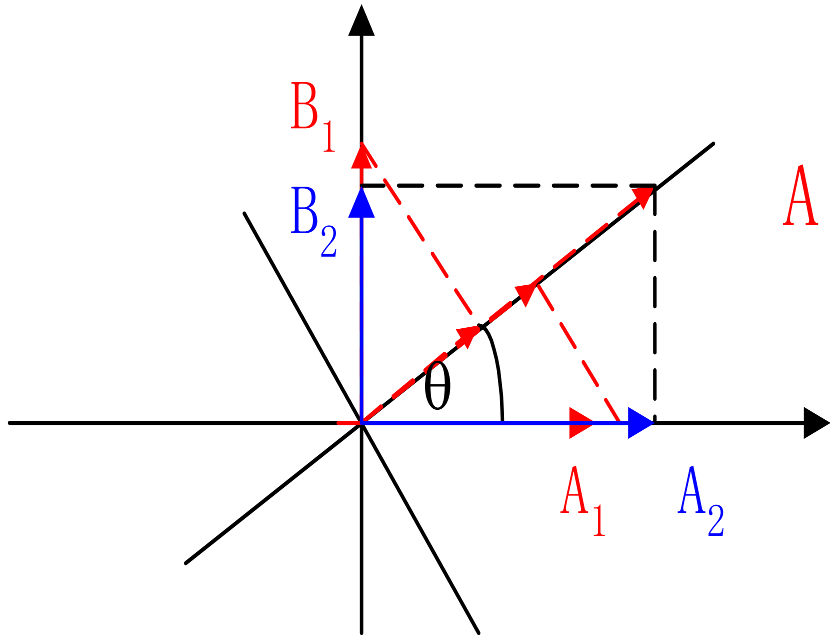
$$\vec{A}_2=\vec{A}\cos\theta=\vec{A}_1\cos^2\theta+\vec{B}_1\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$\vec{B}_2=\vec{A}\sin\theta=\frac{1}{2}\vec{A}_1\sin 2\theta+\vec{B}_1\sin^2\theta$$



可知：$g_{11}=\cos^2\theta$, $g_{12}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

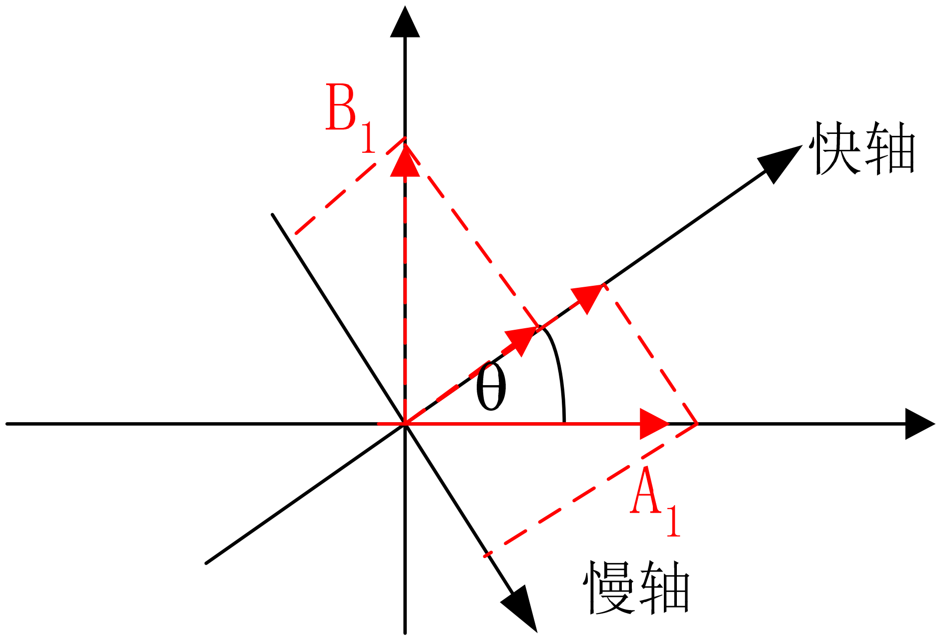
$g_{21}=\frac{1}{2}\sin 2\theta$, $g_{22}=\sin^2\theta$



由此得线偏振器的琼斯矩阵为：

$$G=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & \sin^2\theta\end{bmatrix}$$

例2：有一快轴与x轴成θ角，产生位相差为δ的波片，试求其琼斯矩阵



设入射偏振光为 $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$

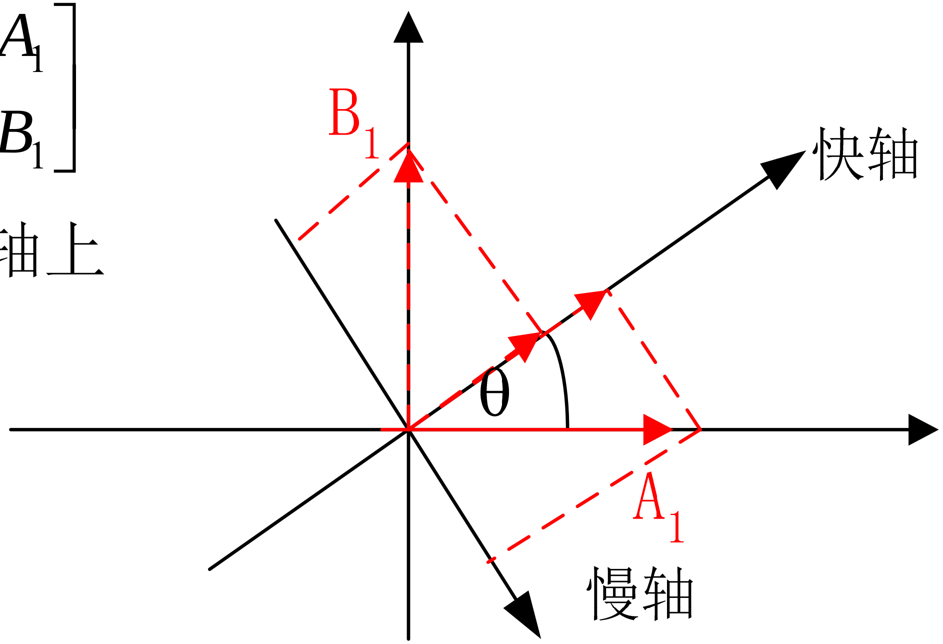
A_1和B_1在波片的快、慢轴上的分量为：

$$\vec{A}_1' = \vec{A}_1 \cos\theta + \vec{B}_1 \sin\theta$$

$$\vec{B}_1' = \vec{A}_1 \sin\theta - \vec{B}_1 \cos\theta$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_1' \\ \vec{B}_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{B}_1 \end{bmatrix}$$



偏振光透过波片后，在快轴和慢轴上的复振幅为：

$$\vec{A}_1'' = \vec{A}_1'$$

$$\vec{B}_1'' = \vec{B}_1' \exp i\delta$$

因而透过波片后有：

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_1'' \\ \vec{B}_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1' \\ \vec{B}_1' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{B}_1 \end{bmatrix}$$

将A_1”和B_1”再次分解到x,y轴上，有

$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1'' \cos\theta + \vec{B}_1'' \sin\theta$$

$$\vec{B}_2 = \vec{A}_1'' \sin\theta - \vec{B}_1'' \cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_2 \\ \vec{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta, sin\theta \\ sin\theta，-cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1'' \\ \vec{B}_1'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_2 \\ \vec{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \cos\frac{\delta}{2} \begin{bmatrix} 1 - i\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta & -i\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta \\ -i\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta & 1 + i\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A}_1 \\ \vec{B}_1 \end{bmatrix} \exp\left(i\frac{\delta}{2} \right)$$

$$G=\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1-i\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta & -i\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta\\ -i\tan\frac{\delta}{2}\sin 2\theta & 1+i\tan\frac{\delta}{2}\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

当$\theta=45°$时

$$G=\cos\frac{\delta}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\tan\frac{\delta}{2}\\ -i\tan\frac{\delta}{2} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\delta}{2} & -i\sin\frac{\delta}{2}\\ -i\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2}\end{bmatrix}$$

当$\delta=\pm\frac{\pi}{2}$时，为$\frac{1}{4}$波片，$G=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & \mp i\\ \mp i & 1\end{bmatrix}$

当$\delta=\pm\pi$时，为$\frac{1}{2}$波片，$G=\begin{bmatrix}0 & \pm i\\ \pm i & 0\end{bmatrix}=\pm i\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

例3：

自然光通过光轴夹角为45度的线偏振器后，又通过了1/4、1/2和1/8波片，快轴沿波片Y轴，试用琼斯矩阵计算透射光的偏振态。

解：自然光通过起偏器，成为线偏振光，其琼斯矢量为：

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ/4波片,λ/2， λ/8波片的琼斯矩阵分别为

$$G_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad G_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_{\lambda/8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$$G = G_{\lambda/8} G_{\lambda/2} G_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

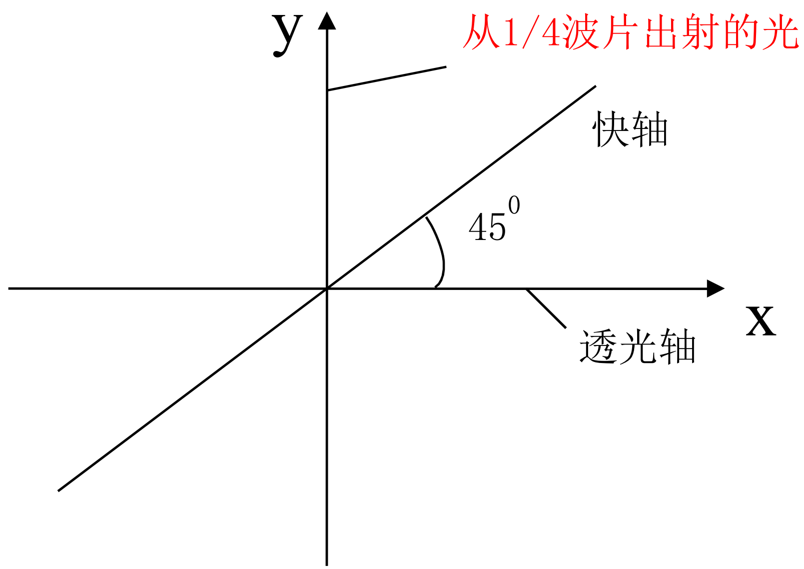
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

出射光为：

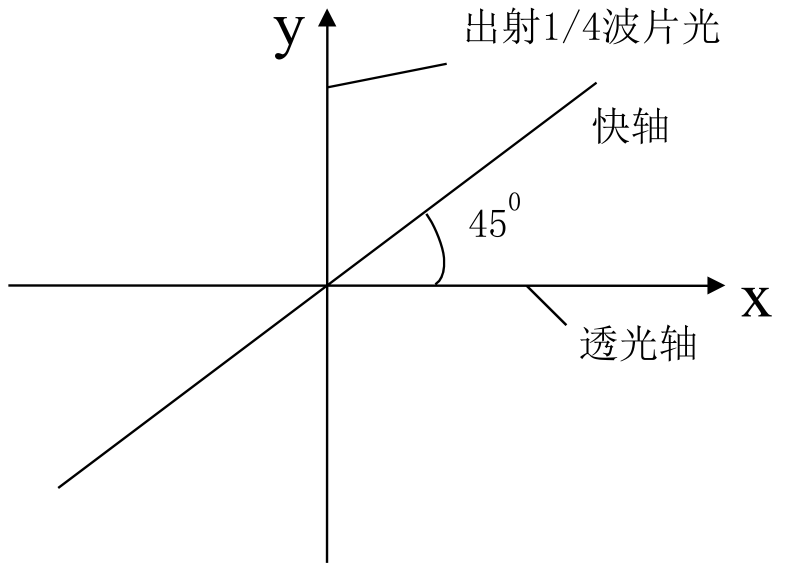
$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

例4：

为了决定一圆偏振光的旋向，可将1/4波片置于检偏器之前，再将1/4波片转到消光位置。这时发现1/4波片的快轴是这样的：它沿顺时针方向转45度才与检偏器的透光轴重合，问该圆偏振光是左旋还是右旋？



解：（1）设检偏器透光轴沿x轴方向。转动波片，出现消光，即此时光的振动方向垂直透光轴，在y轴方向。



$$E_{出}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

（2）判断波片快轴方向。

此时波片的矩阵：

$$G=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\-i & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & e^{-i\frac{\pi}{2}}\\e^{-i\frac{\pi}{2}} & 1\end{bmatrix}$$

$$E_{入}=\begin{bmatrix} A_x e^{ikz} \\ A_y e^{i(kz+\delta)} \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{ikz} \\ e^{i(kz+\delta)} \end{bmatrix}$$

即$E_{出}=GE_{入}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1, & e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ e^{-i\frac{\pi}{2}}, & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{ikz} \\ e^{i(kz+\delta)} \end{bmatrix}$$

即$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{ikz}+e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i(kz+\delta)} \\ e^{i(kz-\frac{\pi}{2})}+e^{i(kz+\delta)} \end{bmatrix}$$

$$e^{ikz}+e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i(kz+\delta)}=0$$

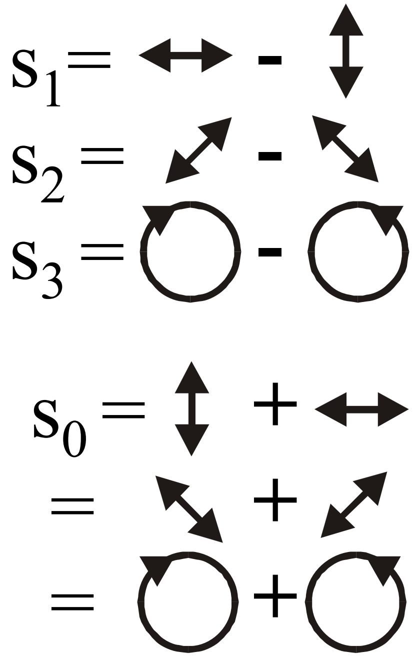
即$e^{i\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)}=-1$，解得：$\delta=-\dfrac{\pi}{2}$

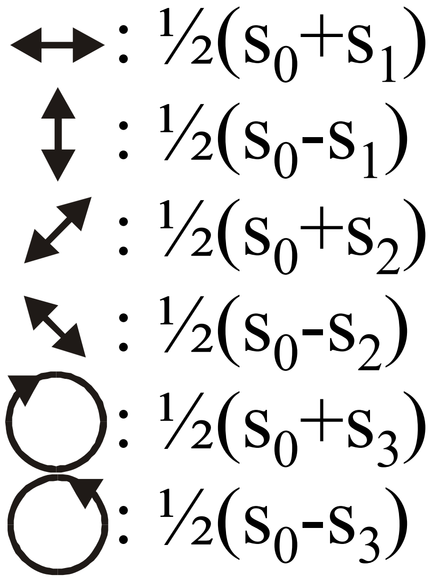
$E_{入}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i(kz)}\begin{bmatrix}1\\ e^{-i\frac{\pi}{2}}\end{bmatrix}$为右旋光。

四、 偏振光的斯托克斯（ Stokes ）矢量表示

1、Stokes 矢量表示定义

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$





1、Stokes 矢量表示定义

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_x - I_y \\ I_{+45^o} - I_{-45^o} \\ I_{rcp} - I_{lcp} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} a_1 \exp(i\alpha_1) \\ a_2 \exp(i\alpha_2) \end{bmatrix}$$

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^2 + a_2^2 \\ a_1^2 - a_2^2 \\ 2a_1a_2 \cos\delta \\ 2a_1a_2 \sin\delta \end{bmatrix}$$

部分偏振光

- 自然光

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

- 部分偏振光

$$0 < s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 < s_0^2$$

- 偏振光

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_0^2$$

Degree of Polarization (DOP)

- 偏振度(DOP)

$$\mathrm{DOP} = \frac{\sqrt{S_1{}^2 + S_2{}^2 + S_3{}^2}}{S_0}$$

- 偏振光 DOP=1; 部分偏振光 DOP<1; 完全非偏振光 DOP=0.

2、椭圆偏振光的Stokes矢量表示

椭偏度：$\tan\varepsilon = b/a$

方位角：$\tan 2\alpha = \dfrac{2a_1a_2}{a_1^2 - a_2^2}\cos\delta$

辅助角：$\tan\beta = a_2/a_1$

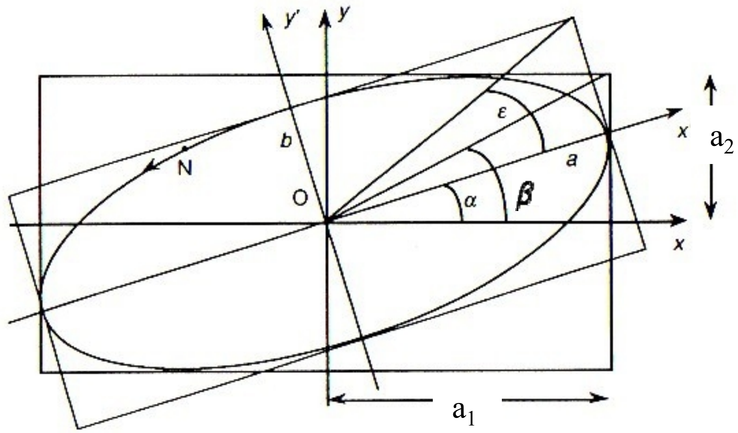


Figure I.2 *Parameters of a state of elliptical polarization*

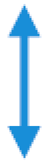
用三角函数表示：$\sin(2\varepsilon) = \sin(2\beta)\sin\delta \quad \tan(2\alpha) = \tan(2\beta)\cos\delta$

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\varepsilon \cos 2\alpha \\ \cos 2\varepsilon \sin 2\alpha \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix} = I_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \cos\delta \\ \sin 2\beta \sin\delta \end{bmatrix}$$

3、特殊偏振光的Stokes矢量表示

自然光

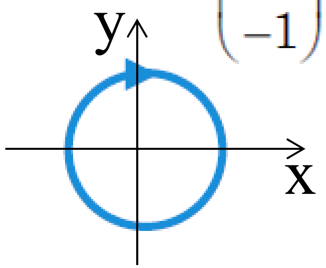
$$S_{\mathrm{LHP}} = I_0\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad S_{\mathrm{LVP}} = I_0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\quad S_{\mathrm{L+45P}} = I_0\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad S_{\mathrm{unp}} = I_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

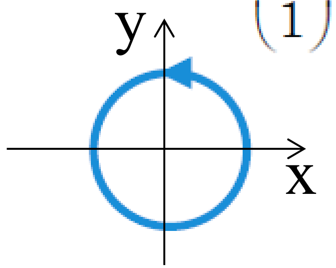




椭圆偏振光

$$S_{\mathrm{L-45P}} = I_0\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad S_{\mathrm{RCP}} = I_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad S_{\mathrm{LCP}} = I_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}S_0\\S_1\\S_2\\S_3\end{bmatrix} = I_0\begin{bmatrix}1\\\cos 2\varepsilon\cos 2\alpha\\\cos 2\varepsilon\sin 2\alpha\\\sin 2\varepsilon\end{bmatrix}$$



4、偏振光的Jones 矢量和**Stokes**矢量换算

- Jones 矢量

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_x\\ \mathbf{E}_y\end{bmatrix}$$

- Stokes 矢量

$$\hat{s}=(s_0,s_1,s_2,s_3)^T$$

$$\begin{cases} s_0=\mathrm{E}_x\mathrm{E}_x^{\;*}+\mathrm{E}_y\mathrm{E}_y^{\;*}\\ s_1=\mathrm{E}_x\mathrm{E}_x^{\;*}-\mathrm{E}_y\mathrm{E}_y^{\;*}\\ s_2=\mathrm{E}_x\mathrm{E}_y^{\;*}+\mathrm{E}_y\mathrm{E}_x^{\;*}\\ s_3=\mathrm{i}(\mathrm{E}_x\mathrm{E}_y^{\;*}-\mathrm{E}_y\mathrm{E}_x^{\;*}) \end{cases}$$

偏振光	Jones矢量	Stokes矢量
X方向线偏振光	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$
Y方向线偏振光	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$
45°线偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$
-45°线偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$
右旋圆偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$
左旋圆偏振光	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\\mathrm{i}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

五、偏振器件的穆勒（Mueller）矩阵表示

$$\text{输入光束} \longrightarrow \boxed{\text{偏振器件}} \longrightarrow \text{输出光束}$$

- 4x4 Matrix

$$S' = MS \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

$$M = \prod_{i}^{k} M_i$$

1、线偏振器的穆勒矩阵表示

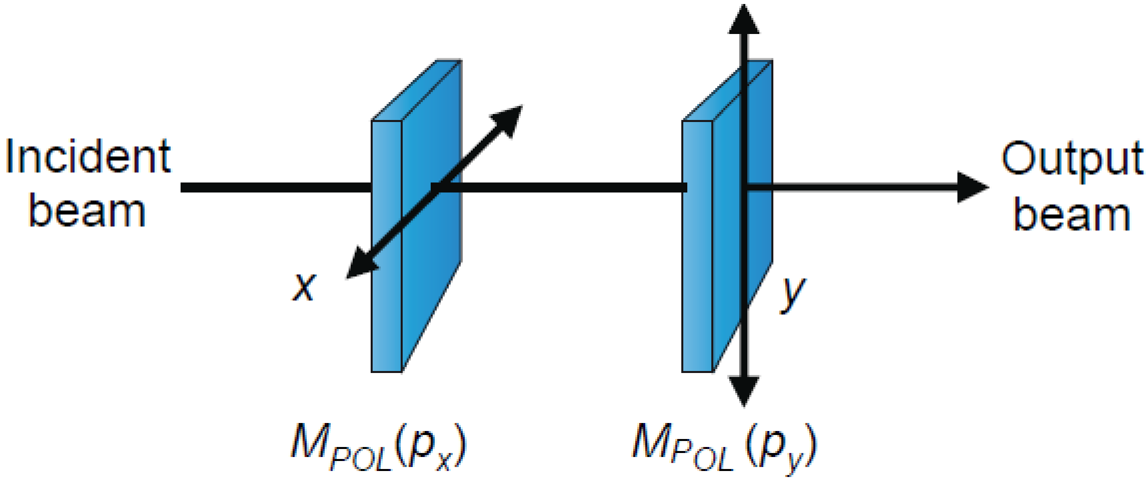
$$M_{\mathrm{POL}}(p_x, p_y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} {p_x}^2 + {p_y}^2 & {p_x}^2 - {p_y}^2 & 0 & 0 \\ {p_x}^2 - {p_y}^2 & {p_x}^2 + {p_y}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p_x p_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_x p_y \end{pmatrix}.$$

P_x和P_y是振幅衰减系数

$$M_{\mathrm{POL}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{\mathrm{POL}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

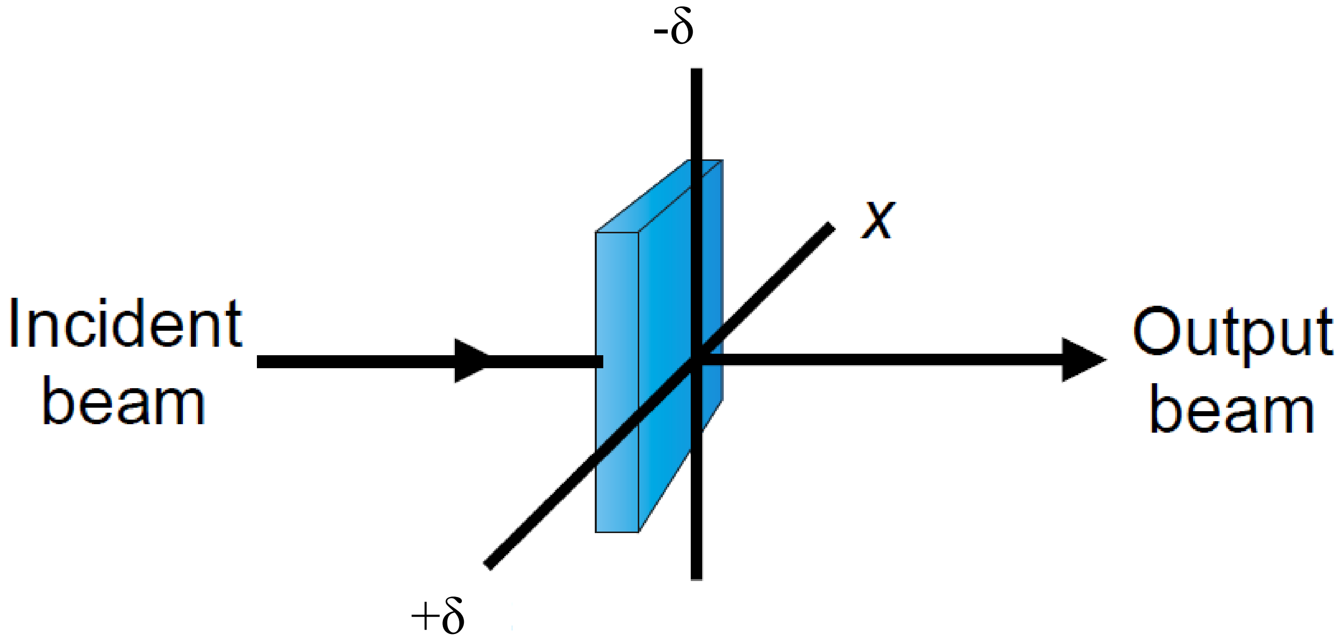
透光轴沿x轴的线偏振器　　　透光轴沿y轴的线偏振器

2、光线穿过透光轴垂直的线偏振器



$$M = M_{\mathrm{POL}}(p_x)\cdot M_{\mathrm{POL}}(p_y) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3、波片的穆勒矩阵表示



假设Y轴为快轴，X轴为慢轴，建立普遍表达式：

$$M_{\mathrm{wp}}(\delta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\delta & \sin\delta\\ 0 & 0 & -\sin\delta & \cos\delta\end{bmatrix}$$

δ为整体相位延迟值，快轴在Y轴时相位延迟+δ，在X轴时相位延迟-δ 。

3、λ/4波片和半波片的穆勒矩阵表示

$$M_{\mathrm{QWP}}(\phi = \pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{HWP}}(\phi = \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4、举例：

例1. 试用穆勒矩阵计算偏振方向为45º的线偏振光透过快轴在Y轴的λ/4波片后的偏振态。

$$S_{out}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

出射光是右旋圆偏振光

例2. 试用穆勒矩阵计算右旋圆偏振光透过快轴在Y轴的λ/4波片后的偏振态。

$$S_{out}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

出射光为偏振方向为135º的线偏振光

4、举例：

例2. 试用穆勒矩阵计算偏振方向为45º的线偏振光光透过快轴在Y轴的λ/4波片，然后经过一个反射镜反射，再透过前面的λ/4波片后的偏振态。已知反射镜的穆勒矩阵为：

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S_{out} = M_{qwp} M_R M_{qwp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

出射光为偏振方向为135º的线偏振光

5、偏振器件的Jones 矩阵和Muller矩阵换算

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{J} \otimes \boldsymbol{J}^*)\boldsymbol{A}^{-1}$$

其中 M为**Muller矩阵**，**J为Jones 矩阵**，矩阵**A**等于

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$$

$\otimes$ 为Kronecker 积，假设两个矩阵 $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$
则，

$$\mathrm{C} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

六、偏振光的邦加（ **Poincare**）球表示

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varepsilon \cos 2\alpha \\ \cos 2\varepsilon \sin 2\alpha \\ \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$$

- 以s_1, s_2, s_3为坐标的球;

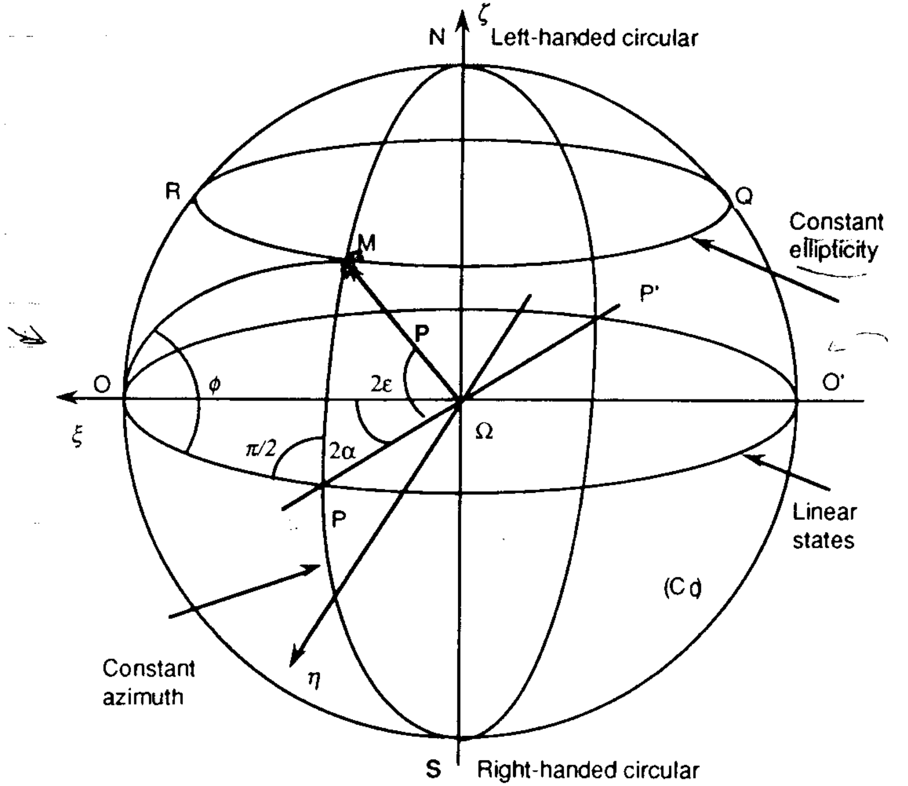
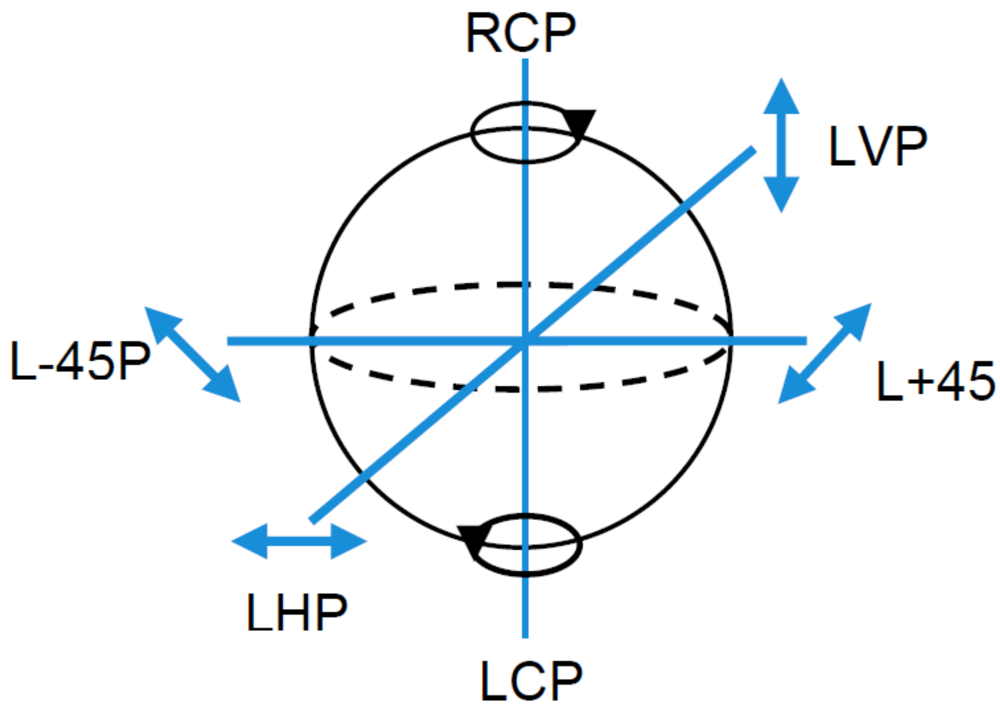
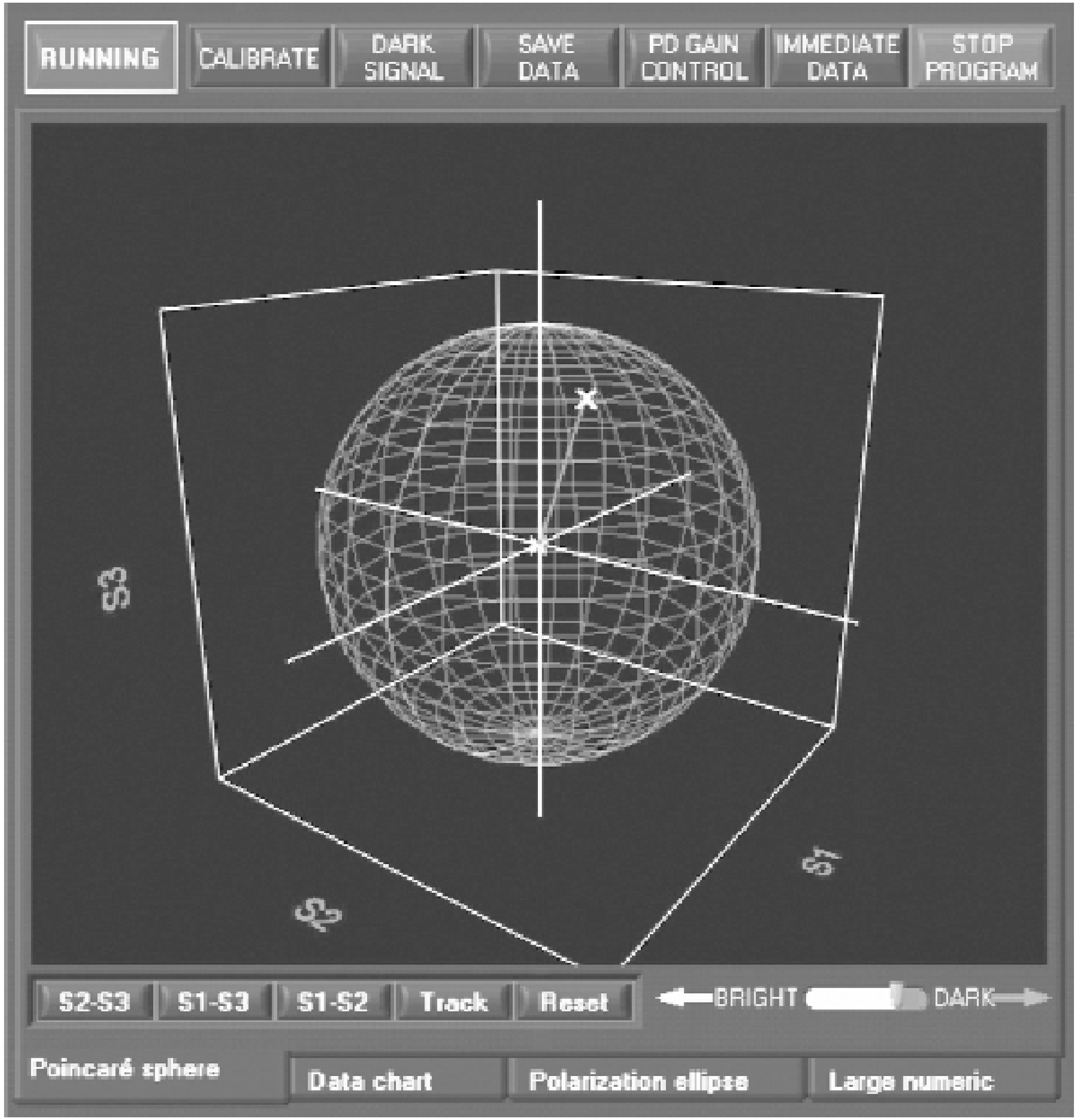


Figure 1.8 *Poincaré's representation of the states of polarization*

邦加球表示



- 赤道上的点表示线偏振;
- 北极点表示右旋圆偏振光;
- 南极点表示左旋圆偏振光;
- 同纬度点表示同椭偏度;
- 同经度点表示同方位角;
- 上半球表示右旋椭偏光;
- 下半球表示左旋椭偏光.


RUNNING
CALIBRATE
DARK SIGNAL
SAVE DATA
PD GAIN CONTROL
IMMEDIATE DATA
STOP PROGRAM
S3
S2
S1
S2-S3
S1-S3
S1-S2
Track
Reset
BRIGHT
DARK
Poincaré sphere
Data chart
Polarization ellipse
Large numeric

本节内容总结

一、偏振光的表示

二、偏振光的琼斯（**Jones**）矢量表示

三、偏振器件的琼斯（**Jones**）矩阵表示

四、偏振光的斯托克斯（ **Stokes** ）矢量表示

五、偏振器件的穆勒（ **Mueller** ）矩阵表示

六、偏振光的邦加（ **Poincare**）球表示

作业：P531第21题

补充作业：

试分别用琼斯矩阵和穆勒矩阵方法证明：右（左）旋圆偏振光经过半波片后变为左（右）旋圆偏振光。