

上次课内容

汇交力系

- ❖ 增减平衡力系原理
- ❖ 作用于刚体上的力—滑移矢量
- ❖ 汇交力系的合成
 - 几何法
 - 解析法
 - 力在轴上的投影
 - 力在平面上的投影
- ❖ 汇交力系的平衡条件
 - 三力平衡汇交定理
 - 充要条件—合力为零
 - 几何条件—力的多边形自行封闭
 - 解析条件—空间（3），平面（2）

力偶系

- ❖ 力对点之矩（矢量）
 - 合力矩定理一
- ❖ 力对轴之矩（标量）
 - 合力矩定理二
- ❖ 力对点之矩与对轴之矩的关系
- ❖ 力偶等效条件—力偶矩矢相等
- ❖ 力偶的性质
- ❖ 力偶系的合成—矢量和
- ❖ 力偶系的平衡条件
 - 充要条件—合力偶矩矢为零
 - 几何条件—力偶矩矢多边形自行封闭
 - 解析条件—空间（3），平面（1）

工程力学 一第四章 平面任意力系

第四章 平面任意力系

- 力的平移
- 平面任意力系向一点简化
- 平面任意力系的平衡条件
- 刚体系的平衡
- 静定和静不定问题的概念

2

工程力学 一第四章 平面任意力系

§ 4-1 力的平移定理

可以把作用在刚体上点A的力F平行移到任一点B，但同时附加一个力偶，这个附加力偶的矩等于原来的力F对新作用点B的矩。

$$M_B = M_B(\vec{F}) = Fd$$

3

工程力学 一第四章 平面任意力系

§ 4-2 平面任意力系向一点简化

$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F'_1, F'_2, \dots, F'_n, M_1, M_2, \dots, M_n\}$
 $\Leftrightarrow \{F'_R, M_O\}$

F'_R —一个作用在O点上的力
 M_O —一个作用在刚体上的力偶

•主矢 $F'_R = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n F'_i$ (与简化点无关)
•主矩 $M_O = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n d_i \times F_i$ (与简化点有关，必须指明)

4

工程力学 第四章 平面任意力系

思考：平面任意力系简化的主矢是否为该力系的合力？
主矢和合力有何区别？

$\{F'_1, F'_2, \dots, F'_n\}$ F'_R $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$
主矢 合力 等效？

$F'_R \neq 0, M_O = 0$ 主矢才是该力系的合力。
主矢是矢量，与简化中心无关，是自由矢量。
合力与原力系等效（大小、方向、作用线），是滑动矢量。

5

工程力学 第四章 平面任意力系

平面任意力系固定端约束力的简化

6

工程力学 第四章 平面任意力系

● 平面任意力系简化的最终结果

平面任意力系 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} = \{F'_R, M_O\}$ 简化结果

$\bar{F}'_R \neq 0, M_O = 0 \Rightarrow$ 合力作用线过简化中心
 $\bar{F}'_R = 0, M_O \neq 0 \Rightarrow$ 合力偶 且与简化中心的位置无关
 $F'_R = 0, M_O = 0 \xrightarrow{\text{平衡}}$ 力系平衡
 $\bar{F}'_R \neq 0, M_O \neq 0$ 还能否继续简化？

7

工程力学 第四章 平面任意力系

$F'_R \neq 0, M_O \neq 0, \Rightarrow$ 合力，作用线距简化中心 d

条件：特定的某些简化中心！！

$d = \frac{M_O}{F'_R}$

8

工程力学 一第四章 平面任意力系

确定图示力系的简化结果

平面椭圆A

平面椭圆B

9

工程力学 一第四章 平面任意力系

上次课回顾

力的平移定理

平面任意力系向一点简化

- 主矢, 主矩
- 固定端约束力的简化

平面任意力系简化的最终结果

$\bar{F}'_R \neq 0, M_O = 0 \rightarrow$ 合力作用线过简化中心

$\bar{F}'_R = 0, M_O \neq 0 \rightarrow$ 合力偶

$F'_R = 0, M_O = 0 \rightarrow$ 力系平衡

10

工程力学 一第四章 平面任意力系

§ 4-3 平面任意力系的平衡条件

平面任意力系向O点简化

$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F'_R, M_O\}$

平面任意力系向O'点简化

$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F'_R, M_{O'}\}$

$M_{O'} = M_O + F'_R \times d$

故, 只要平面任意力系向某一点简化的结果为 $F'_R = 0, M_O = 0$ 则, 向任一点的简化结果都为 $F'_R = 0, M_O = 0$

11

工程力学 一第四章 平面任意力系

$F'_R = 0, M_O = 0 \rightarrow$ 力系平衡

平面任意力系平衡的充分必要条件:

力系的主矢和对任意点的主矩都等于零

$$F'_R = \sum_{i=1}^n F_i' = \sum_{i=1}^n F_i$$

$$F'_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n F_i \times F_i$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases}$$

平面任意力系的平衡方程(基本形式)

三个独立方程, 可求三个未知数

12

工程力学 一第四章 平面任意力系

● 平面任意力系平衡方程的二力矩形式与三力矩形式

二力矩形式:
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases} \quad (A, B \text{ 连线不垂直于 } Ox \text{ 轴})$$

三力矩形式:
$$\begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \\ \sum M_C(F) = 0 \end{cases} \quad (A, B, C \text{ 不共线})$$

13

工程力学 一第四章 平面任意力系

平面任意力系平衡方程二矩式、三矩式的讨论

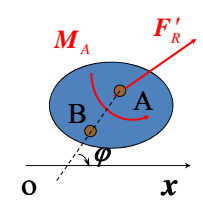
平面任意力系简化 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F'_R, M_A\}$

$\sum M_A(F) = 0 \Leftrightarrow M_A = 0$

$\sum M_B(F) = 0 \Leftrightarrow F'_R \text{ 作用线在 } \overline{AB} \text{ 上}$

$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow F'_R \cos \varphi = 0$

$\cos \varphi \neq 0 \Rightarrow F'_R = 0$



14

工程力学 一第四章 平面任意力系

小结

平面任意力系向一点的简化

$\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$

\Leftrightarrow

$\{F'_R, M_O\}$

与简化中心位置无关

与简化中心位置相关

$\begin{cases} \overline{F'_R} \neq 0, M_O = 0 & \text{合力} \\ \overline{F'_R} = 0, M_O \neq 0 & \text{合力偶} \\ \overline{F'_R} = 0, M_O = 0 & \text{力系平衡} \end{cases}$

只出现在某些特定的点上

在一个点上为零, 必处处为零

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O(F) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum M_A(F) = 0 \\ \sum M_B(F) = 0 \\ \sum M_C(F) = 0 \end{cases}$$

可以对刚体外的点取矩!

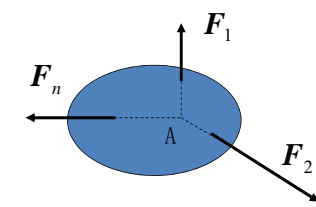
15

工程力学 一第四章 平面任意力系

思考: 作为平面任意力系的一个特例, 平面汇交力系的平衡条件的合理性?

$F_R = \sum F_i = 0$

$\sum_{i=1}^n M_{A_i} = 0$

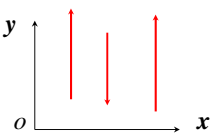


在A点, 平面汇交力系简化为 $\{F'_R, 0\}$, 若 $F'_R = 0$, 则力系在A点简化为 $\{0, 0\}$, 从而力系向任何点简化都为 $\{0, 0\}$ — 力系平衡

16

工程力学 一 第四章 平面任意力系

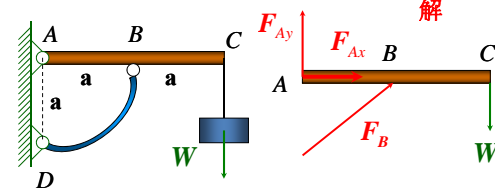
● 平面平行力系平衡的充要条件



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_o(F) = 0 \end{cases}$$

工程力学 一 第四章 平面任意力系

例1: 已知 W, a , 利用解析法求杆A、B处的约束力



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_o(F) = 0 \end{cases}$$

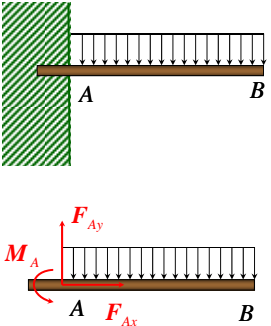
思考1: 是否可以对刚体以外的点取矩建立平衡方程?

思考2: 如何应用平衡方程的二矩式和三矩式求解?

工程力学 一 第四章 平面任意力系

例2: 已知AB梁长为 l , 其上受有均布载荷 q , 求: 梁A端的约束力。

解: 研究AB梁, 画受力图。

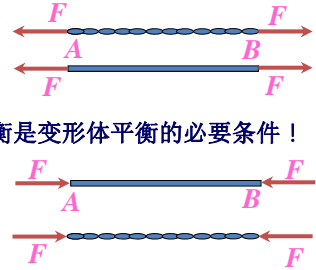


$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, &\Rightarrow F_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0, &\Rightarrow F_{Ay} - \int_0^l q dx = 0, F_{Ay} = ql \\ \sum M_A = 0, &\Rightarrow M_A - \int_0^l xq dx = 0, M_A = \frac{1}{2}ql^2 \end{aligned}$$

工程力学 一 第四章 平面任意力系

§4-4 刚体系的平衡

刚化原理: 变形体在已知力系作用下处于平衡, 若将变形后的变形体换成刚体 (刚化), 则平衡状态不变。



刚体平衡是变形体平衡的必要条件!

平衡?