例1. 从6女16男中，选出11人的理事会.

求: (1) 3女当选的概率;

(2) 6个女教授都当选的概率.

例2. 设52张牌，随机地均分给4家，

求每家都是“同花”的概率。

例3. 袋中装有4只白球和2只红球.

从袋中摸球两次,每次任取一球.有两种式:

(a)放回抽样; (b)不放回抽样.

求: (1)两球颜色相同的概率;

(2)两球中至少有一只白球的概率.

例4. 设一袋中有编号为1,2,…,9的球共9只, 现从中任取3只, 试求:

(1)取到1号球的概率（事件A）,

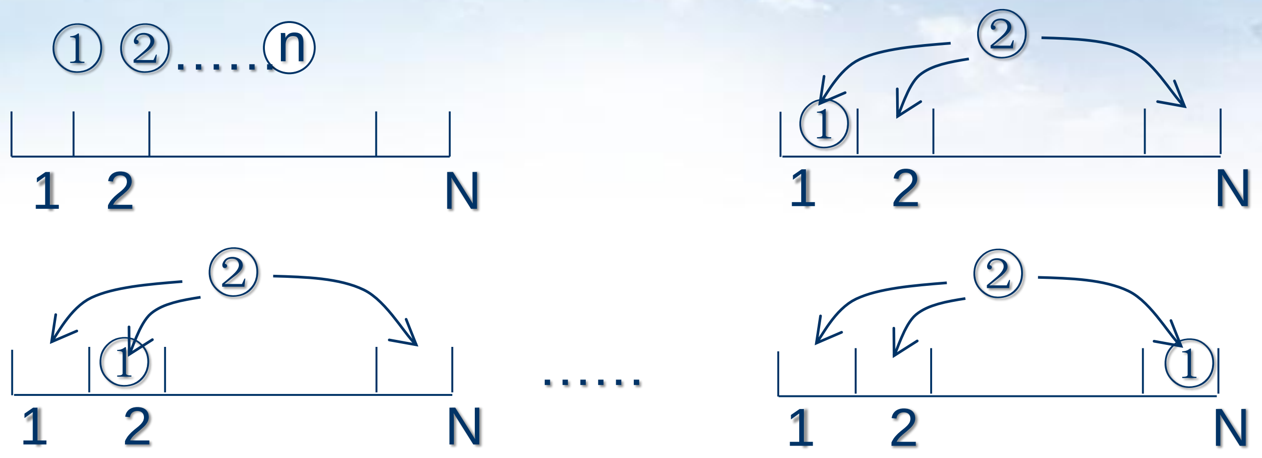
(2)最小号码为5的概率（事件B）。

约会问题

例4 甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内，在预定地点会面．先到的人等候另一个人，经过时间 t（$t<T$）后离去．设每人在0 到T 这段时间内各时刻到达该地是等可能的，且两人到达的时刻互不相关．求甲、乙两人能会面的概率．

例（生日问题） 将n个不同的球，投入N个不同的盒中($n \leqslant N$)，设每一球落入各盒的概率相同，且各盒可放的球数不限，记A＝{ 恰有n个盒子各有一球 }，求P(A).

解：



即当n＝2时，共有N^2个样本点。一般地，n个球放入N个盒子中，总样本点数为N^n，使A发生的样本点数 $=C_N^n \cdot n!$

$$\Rightarrow P(A)=C_N^n \cdot n!/N^n$$

若取n＝64，N＝365 $\Rightarrow P(\bar{A})=1-C_N^n \cdot n!/N^n=0.997$

解释为一个64人的班上，至少有两人在同一天过生日的概率为99.7%.

例7（生日问题续 —— 教材例7）

将r个有区别的球随机放入n个不同的盒子，每个盒子容纳球的个数不限，r<=n，试求

（1）某盒（指定）不多于两个球A的概率

（2）至少有一个盒子多于一个球B的概率

（3）恰有一盒多于一球 C 的概率

解

$$(1)\ P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)$$

$$=\frac{(n\text{-}1)^r}{n^r}+\frac{C_r^1(n\text{-}1)^{r-1}}{n^r}+\frac{C_r^2(n\text{-}1)^{r-2}}{n^r}$$

$$(2)\ P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_n^r r!}{n^r}=1-\frac{A_n^r}{n^r}$$

$$(3)\ P(C)=\frac{C_n^1\sum_{i=2}^{r}C_r^i A_{n-1}^{r-i}}{n^r}$$

例（抽签问题）一袋中有a个红球，b个白球，记 a+b=n.
设每次摸到各球的概率相等，每次从袋中摸一球，
不放回地摸n次。
设 $A_k=\{$ 第k次摸到红球 $\}$，k=1, 2, ⋯, n. 求 $P(A_k)$

解：

可设想将n个球进行编号：① ② … ⓝ
其中 ① —— ⓐ 号球为红球，将n个人也编号为1, 2, ⋯, n.

抽签的结果为：

$$\frac{\quad}{1},\frac{\quad}{2},\cdots,\frac{\otimes}{k},\cdots,\frac{\quad}{n}$$

可以是①号球，亦可以是②号球……是 a 号球

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

---------- 与k无关

例1　在1, 2, 3, 4, 5这5个数码中, 每次取一个数码, 取后不放回, 连取两次。
求在第1次取到偶数的条件下, 第2次取到奇数的概率.

解:　设 A:第一次取到偶数　B:第二次取到奇数

公式法:

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2\cdot 3/5\cdot 4}{2\cdot 4/5\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

空间缩小法:

$$P(A|B)=\frac{3}{4}$$

例2 10件产品中有6件正品，4件次品，从中任取4件，求至少取到1件次品时，取到的次品数不多于2件的概率。

解: 设 A：次品数不多于2件， B：至少1件次品

B_i：恰好取i件次品，$i = 0,1,2$

$$P(B) = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{13}{14}$$

$$P(AB) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2)$$

$$= \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} + \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{8}{21} + \frac{9}{21} = \frac{17}{21}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{34}{39}$$

例3 某厂生产的产品能直接出厂的概率为 70%， 余下的 30% 产品要经调试后再定。已知调试后有 80% 产品可以出厂，20% 的产品要报废。求产品的报废率。

解： 设 A={生产的产品要报废}， B={生产的产品要调试}

已知 P(B)= 0.3，P(A|B)= 0.2

$$P(A)=P(AB\cup A\bar{B}) \quad =P(AB)+P(A\bar{B})$$

$$=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B}) \qquad P(A|\bar{B})=0$$

$$=0.3\times 0.2+0.7\times 0=6\%$$

利用乘法公式

另解：$A\subset B, A=AB,$

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)=0.3\times 0.2=6\%$$

例4　从52张牌中任取2张，采用(1)放回抽样（2）不放回抽样，求恰好抽到“一红一黑”的概率。

解：设 A_i={第i次取到红牌}，i=1,2

B={取2张恰是一红一黑}

$$P(B)=P(A_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1A_2)\quad=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2)$$

利用乘法公式

$$=P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2\mid\bar{A}_1)$$

（1）若为放回抽样：　$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=C_2^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^1=\frac{1}{2}$

（2）若为不放回抽样：

$$P(B)=\frac{26}{52}\cdot\frac{26}{51}+\frac{26}{52}\cdot\frac{26}{51}=C_{26}^1C_{26}^1/C_{52}^2=\frac{26}{51}$$

例： 某行业进行专业劳动技能考核，一个月安排一次，每人最多参加3次。某人第一次参加能通过的概率为60%；如果第一次未通过就去参加第二次，这时能通过的概率为80%；如果第二次再未通过，则去参加第三次，此时能通过的概率为90%。求这人能通过考核的概率。

解： 设 A_i={ 这人第i次通过考核 }，i=1, 2, 3

A={ 这人通过考核 }，$A=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

$$P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2\mid\bar{A}_1)+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=0.60+0.4\times0.8+0.4\times0.2\times0.9=0.992$$

$P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)$

$1-P(A_2\mid\bar{A}_1)$

$=1-0.8=0.2$

亦可：

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=1-0.4\times0.2\times0.1=0.992$$

例1　某单位有甲、乙两人，已知甲近期出差的概率为80%；
若甲出差，则乙出差的概率为20%；
若甲不出差，则乙出差的概率为90%。
(1)求近期乙出差的概率；
(2)若已知乙近期出差在外，求甲出差的概率。

解：设A={甲出差}，B={乙出差}

已知 $P(A)=0.80,\quad P(B|A)=0.20,\quad P(B|\bar{A})=0.90$

(1) $P(B)=P(AB\cup\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$=0.8\times0.2+0.2\times0.9=34\ \%$

全概率公式

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(AB)+P(\bar{A}B)}=\dfrac{16}{34}=\dfrac{8}{17}$

Bayes公式

例2 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的检测具有5%的假阳性及5%的假阴性。即

设 A={检测是阳性}，C={被诊断患有癌症}

则有：$P(A|\bar{C})=5\%, P(\bar{A}|C)=5\%,$

已知癌症患病率 P(C)=0.005，此法能否用于癌症普查？

解： 考察P(C|A)

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(C)\cdot P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}=0.087$$

若用于普查，100个阳性病人中被诊断患有癌症的大约只有8.7个，很不准确，不宜用于普查。

例1　某电子设备厂所用的晶体管是由三家元件制造厂提供的,数据如下:

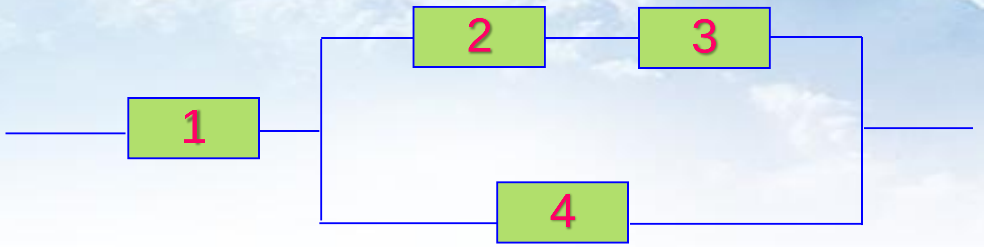
元件制造厂	次品率	提供的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

(1) 任取一只晶体管，求它是次品的概率.

(2) 任取一只, 若它是次品，则由三家工厂 生产的概率分别是多少?

例2　对以往数据分析结果表明，当机器调整得良好时，产品的合格率为90%, 而当机器发生某一故障时, 其合格率为30%.
每天早晨开动时机器调整良好的概率为75%.
试求已知某日早上第一件产品是合格品时，机器调整得良好的概率是多少?

例1　有4个独立元件构成的系统(如图)，设每个元件能正常运行的概率为p，求系统正常运行的概率。



注意：这里系统的概念与电路 中的概念不同，指可靠性系统。

解：设$A_i=\{$第i个元件运行正常$\}, i=1,2,3,4$

$A=\{$系统运行正常$\}$　　则：$A=A_1(A_2A_3\cup A_4)$

由题意知，A_1,A_2,A_3,A_4相互独立

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2A_3\cup A_4)=p(p^2+p-p^3)$$

另解，$P(A)=P(A_1A_2A_3\bigcup A_1A_4)=p^3+p^2-p^5$，对吗？

例2 两架飞机依次轮番对同一目标投弹轰炸。每架飞机各带3颗炸弹，每次投下一颗炸弹。
第1架飞机每次投弹命中的概率为0.3，第2架飞机为 0.4，求炸弹耗尽前能命中目标的概率。

解：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{A}_3\overline{B}_3)$$

$$=1-0.7^3\times0.6^3$$

$$=1-0.343\times0.216=1-0.074=0.926$$

例 设每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，求来自不同地区的100个人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率。

解 设这100 个人的血清混合液中含有肝炎病毒为事件 A,
第 i 个人的血清中含有肝炎病毒为事件 A_i

$i=1,2,\ldots,100$

则 $A=\bigcup_{i=1}^{100} A_i$

$$P(A)=1-\prod_{i=1}^{100}\left[1-P(A_i)\right]=1-(1-0.004)^{100}\approx 0.33$$

若B_n 表示 n 个人的血清混合液中含有肝炎病毒，则

$$P(B_n)=1-(1-\varepsilon)^n, \qquad 0<\varepsilon<1$$

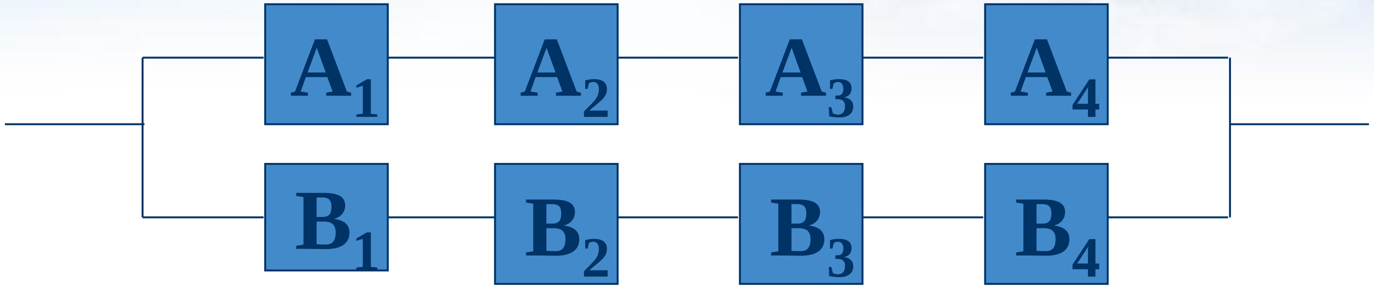
$$n=1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n)=1$$

—— 不能忽视小概率事件，小概率事件迟早要发生

例3 设有8个元件,每个元件的可靠性 (元件能正常工作的概率)均为p，按如下两种方式组成系统，试比较两个系统的可靠性.

系统1：先串联后并联 (并串联）



解：

$$R_1 = P(A_1A_2A_3A_4 \cup B_1B_2B_3B_4)$$

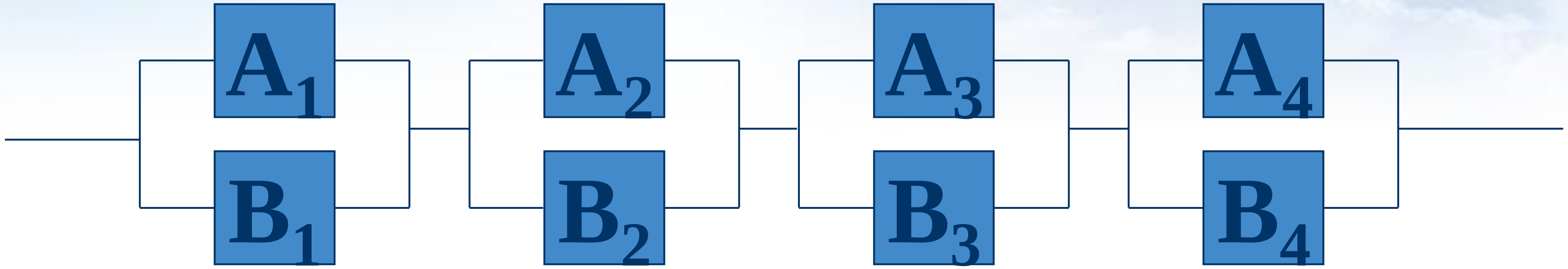
$$= P(A_1A_2A_3A_4) + P(B_1B_2B_3B_4) - P(A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4)$$

利用独立性：

$$= p^4 + p^4 - p^8 = p^4(2 - p^4)$$

例3 设有8个元件,每个元件的可靠性 (元件能正常工作的概率)均为p，按如下两种方式组成系统，试比较两个系统的可靠性.

系统2：先并联后串联（串并联）



解： 令$C_i = A_i \cup B_i, i = 1,2,3,4$

$$P(C_i) = P(A_i \cup B_i) = p + p - p^2 = p(2 - p)$$

$$R_2 = P(C_1C_2C_3C_4) = p^4(2 - p)^4$$

比较可知： $R_2 > R_1$

例3　甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局甲胜的概率为$p, p \geq \frac{1}{2}$，

对甲而言，采用三局二胜制有利，还是采用五局三胜制有利？

设各局胜负相互独立。

解：设$A_i = \{第i局甲胜\} \Rightarrow P(A_i) = p,\ i = 1, 2, \cdots, 5$　再设$A = \{甲胜\}$

(1)　三局二胜制：

$$P(A) = P\left(A_1A_2 \cup A_1\bar{A}_2A_3 \cup \bar{A}_1A_2A_3\right) = p^2 + 2p^2(1-p) \doteq p_1$$

(2)五局三胜制：

$$P(A) = P\left\{A_1A_2A_3 \cup (前三次有一次输)A_4 \cup (前四次有两次输)A_5\right\}$$

$$= p^3 + C_3^1(1-p)p^3 + C_4^2(1-p)^2 p^3 \doteq p_2$$

$$P_2 - P_1 = 3P^2(P-1)^2(2P-1) \qquad \Rightarrow \begin{cases} p_2 > p_1，当p > \dfrac{1}{2} \\ p_2 = p_1，当p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

例5 学术论文造假问题。

第一次造假没被揭发的 概率 $q_1 = 95/100$

第二次造假没被揭发的 概率 $q_2 = 90/95$

第j次造假没被揭发的概率 $q_j = (100-5j)/(100-5(j-1))$

求造假n次没被揭发的概率 P_n

解: A_j :第j次造假没被揭发，$B = A_1A_2\cdots A_n$

$$P_n = P(B) = P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$$

$$= \frac{95}{100}\,\frac{90}{95}\,\frac{85}{90}\cdots\frac{100-5(n-1)}{100-5(n-2)}\,\frac{100-5n}{100-5(n-1)}$$

$$= \frac{100-5n}{100} = 1-\frac{n}{20}$$

例1　敏感问题调查。

问题：请在心里任选一个整数（不说出）
若最后一位是奇数，请回答：你选的是奇数吗？　（是，否）
若最后一位是偶数，请回答：你吸毒吗？

若回答“是”的概率为p_1，求吸毒的概率p。

解: 设A:选的奇数；B:回答“是”

$$P(A)=0.5,\ P(\overline{A})=0.5,\ p=P(B|\overline{A})$$

$$p_1=P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times1+0.5\times p$$

所以，$p=2p_1-1$

在n个问卷中，回答“是”的有k人，$\hat{p}_1=k/n$

所以，$\hat{p}=2\hat{p}_1-1=\dfrac{2k}{n}-1$

例2 设人质被藏匿在A_j地区的概率为$p_j, j=1,2,\cdots,6$。

人质在A_j地区被解救的概率为$b_j, j=1,2,\cdots,6$。

j	1	2	3	4	5	6
P	0.3	0.25	0.2	0.15	0.05	0.05
b	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95

求人质能被解救的概率。

解: 设A_j：人质被藏在地区j，B：人质被解救

$$P(A_j)=p_j, P(B|A_j)=b_j$$

$$P(B)=\sum_{j=1}^{6}P(A_j)P(B|A_j)=\sum_{j=1}^{6}p_jb_j=0.7775$$

例1. 离散型 X，已知分布律可求出分布函数.

X	-1	2	3
p_k	1/4	1/2	1/4

求X的分布函数，并求P{ X≤1/2}, P{3/2<X≤5/2}.

离散型随机变量的分布函数F(x)是阶梯函数，

在X的每个可能取值x_k处$F(x)$有一个跳跃p_k，

若X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k,\ k = 1, 2, \cdots$$

则分布函数为

$$F(x) = P\{X \le x\} = \sum_{x_k \le x} p_k .$$

反之，若已知分布函数求分布律用如下公式求解：

$$p_k = P\{X = x_k\} = F(x_k) - F(x_k - 0).$$

例2 设X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, 当x<-1\\ \frac{1}{4}, 当-1\le x<0\\ \frac{3}{4}, 当0\le x<1\\ 1, 当x\ge 1\end{cases}$$

求X的分布律.

2. 求分布律的步骤

(1) 明确X的一切可能取值;

(2) 利用概率的计算方法计算X取各个确定值的概率,
即可写出X的分布律.

例2　3个人随机进入编号为 1, 2, 3, 4的4个房间中，每个房间容纳的人数不限。
设 X 代表有人的房间的最大房号，求 X 的分布律。

解:

$$P\{X=1\}=\frac{1^3}{4^3}=\frac{1}{64} \qquad P\{X=3\}=\frac{3^3-2^3}{4^3}=\frac{19}{64}$$

$$P\{X=2\}=\frac{2^3-1^3}{4^3}=\frac{7}{64} \qquad P\{X=4\}=\frac{4^3-3^3}{4^3}=\frac{37}{64}$$

X	1	2	3	4
P	1/64	7/64	19/64	37/64

例4 某种电子元件的使用寿命超过1500小时为一级品。已知一大批该产品的一级品率为0.2, 从中随机抽查20只, 求这20只元件中的一级品数 X 的分布律.

$$X \sim B(20, 0.2)$$

$$P\{X = 4\} = C_{20}^{4} \, 0.2^{4} 0.8^{16}$$

例5 某人进行射击, 每次命中率为0.02, 独立射击300次, 试求至少击中两次的概率.

$$X \sim B(300, 0.02),$$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - 0.98^{300} - 300 \times 0.02 \times 0.98^{399}$$

例6 某人进行射击，每次命中率为0.02，独立射击300次，试求至少击中两次的概率.

$$X \sim B(300, 0.02), \qquad \lambda = np = 300 \times 0.02 = 6,$$

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - (0.98)^{300} - 300 \times (0.02) \times (0.98)^{299}$$

$$\approx 1 - e^{-6} - 6e^{-6} \approx 0.983.$$

求至少击中10次的概率.

$$P\{X \geq 10\} = 1 - P\{X < 9\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{6^k}{k!} e^{-6}$$

$$= \sum_{k=10}^{\infty} \frac{6^k}{k!} e^{-6} = 0.083924$$

查泊松分布表

例4 设有同类型设备300台, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是0.01。 设一台设备的故障由一个工人处理, 问至少需配备多少工人, 才能保证当设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01?

解 设X为出现的故障数, X~B(300, 0.01)~P(3)

有n个维修工，要求

$$P\{X > n\} = 1 - P\{X \le n\}$$

$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} e^{-3} < 0.01$$

例5

设手机在[0,t]时段内收到短信数$X \sim P(\lambda), \lambda = \mu t$.

每条短信是垃圾短信的概率是$p > 0$.

短信是否为垃圾短信与短信到达时间独立。

（1）已知[0,t]时段内收到n条短信，求此时垃圾短信数Y的概率分布。

(2) 计算[0,t]时段内收到的垃圾短信数Y的概率分布。

解 （1）$P(Y = k \mid X = n) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim B(n, p)$

$$(2)\quad P(Y = k) = \sum_{j=0}^{\infty} P(Y = k, X = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j) P(Y = k \mid X = j) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \sim P(\lambda p)$$

4、几何分布（首中概率）

进行重复独立试验, 设每次试验成功的概率为p, 失败的概率为1-p=q (0<p<1), 将试验进行到出现一次成功为止, 以X表示所需的试验次数, 则X的分布律为:

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p,\quad k=1, 2, \dots$$

称为X服从参数为p的几何分布.

n重贝努力
概型的
首中概率

例 设某种社会定期发行的奖券,每券1元,中奖率为p，某人每次购买1张奖券, 如果没有中奖下次继续再买1张, 直到中奖止，求购买次数X的分布律.

若该人只有10元钱, 如果中奖就停止, 否则下次再购买1张, 直到10元花完为止, 求购买次数Y的分布律.

例

设某国100个导弹发射井中有10个真井,90个假井。在对该国的第一波精确打击中，至少要摧毁多少个发射井，才能保证真井全部被摧毁的概率大于90%?

解 设需要摧毁n个发射井，X表示其中的真井个数，

$$X \sim H(100,10,n) \qquad P(X=10)=\frac{C_{10}^{10}C_{90}^{n-10}}{C_{100}^{n}}$$

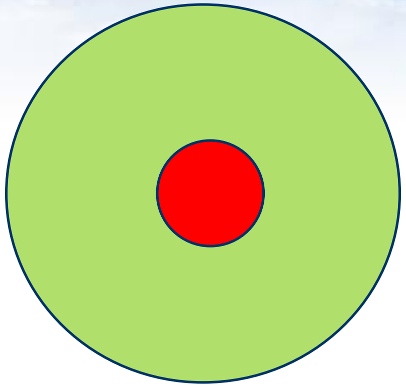
用*Matlab*可计算出 Pn=hygepdf (10,100,10,n)

n	99	98	97	96	95	94	< 94
p	0.900	0.809	0.726	0.652	0.584	0.522	~

摧毁99个才行!

例1 一个靶子是半径为1米的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并设射击都能击中靶，以X表示弹着点与圆心的距离．试求X的分布函数.

解： X可能取值范围为 $[0, 1]$



当 $x < 0$, $\{X \le x\}$是不可能事件

故 $F(x) = P\{X \le x\} = 0$

当 $0 \le x \le 1$, $F(x) = P\{X \le x\}$

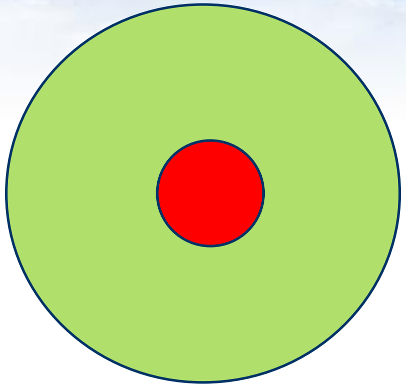
$$= P\{0 < X\} + P\{0 \le X \le x\}$$

$$= \frac{\pi x^2}{\pi \times 1^2} = x^2$$

当 $x > 1$, $\{X \le x\}$是必然事件

故 $F(x) = P\{X \le x\} = 1$

例1 一个靶子是半径为1米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比， 并设射击都能击中靶， 以X表示弹着点与圆心的距离． 试求X的分布函数．



解：

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ 1 & \text{其它}\end{cases}$$

例2 设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-3x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

试确定常数k.

解：利用 pdf 的非负归一特性

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} ke^{-3x}dx=\frac{k}{3}$$

所以可知 $k=3$

若概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$$

则称X服从参数为θ的指数分布.

例1 设$X \sim N(2,4^2)$, (1) 求$P\{-3 \le X \le 5\}$

解： $P\{-3 \le X \le 5\} = F(5) - F(-3)$

$$= \Phi\left(\frac{5-2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-3-2}{4}\right) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.25)$$

$$= 0.7734 - 0.1056 = 0.6678$$

例1 (2) 求a,满足$P\{|X-a| > a\} = 0.7583$

解： $0.7583 = P\{|X-a| > a\} = 1 - P\{|X-a| \le a\}$

$$= 1 - P\{-a \le X - a \le a\} = 1 - P\{0 \le X \le 2a\}$$

$$= 1 - [F(2a) - F(0)] = 1 - \left[\Phi\left(\frac{2a-2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{4}\right)\right]$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{a}{2} - 0.5\right) + \Phi(-0.5) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{2} - 0.5\right) + 0.3085$$

$$\Phi\left(\frac{a}{2} - 0.5\right) = 0.5502 \qquad \frac{a}{2} - 0.5 = 0.125 \qquad a = 1.25$$

例2 设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，试用分位点表示常数a,b：

（1） $\mu=0,\sigma=1, P\{-X<a\}=0.025$

（2） $\mu=1,\sigma=2, P\{|X-1|\le b\}=0.75$

解： （1） $P\{-X<a\}=1-P\{X\le -a\}=0.025$

$$P\{X\le -a\}=\Phi\left(\frac{-a-0}{1}\right)=0.975$$

$$-a=z_{0.975} \qquad a=-z_{0.975}=z_{0.0.025}$$

（2） $P\{|X-1|\le b\}=P\{\left|\frac{X-1}{2}\right|\le\frac{b}{2}\}$

$$=P\{|Z|\le\frac{b}{2}\}=\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{b}{2}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{b}{2}\right)\right] \quad =2\Phi\left(\frac{b}{2}\right)-1=0.75$$

$$\Phi\left(\frac{b}{2}\right)=0.875 \quad b=2z_{0.875}$$

例3 设中国人身高 $X \sim N(1.75, 0.005^2)$，问公共汽车门至少多高才能保证需要低头通过的人不超过5%？

解： $P\{X \geq h\} \leq 0.05$， $P\{X < h\} \geq 0.95$，

$$\Phi\left(\frac{h-1.75}{0.005}\right) \geq 0.975$$

$$\frac{h-1.75}{0.005} \geq z_{0.95} = 2.58$$

$$h \geq 0.005 \times 2.58 + 1.75 = 1.879$$

例2 设商店出售的白糖每包标准为500克,设每包重量X(以克计)是随机变量, X~N(500, 25),求:

(1) 随机抽查一包, 其重量大于510克的概率;

(2) 随机抽查一包, 其重量与标准重量之差的绝对值在8克之内的概率;

(3 求常数c,使每包的重量小于c的概率为0.05.

注

(1) 由$\Phi(x)=0.05$怎样查表求x的值?

(2) 服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的r.v. X之值基本上落入$[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$之内, 几乎全部落入$[\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$内.

特别强调N(0,1)的情况在计算中的应用.

§3.4 随机变量函数的分布

1、离散型随机变量函数的分布

问题： 已知离散型随机变量X的分布律，如何求出函数 Y = g(X) 的分布律？

例1. 设X具有以下的分布律，求Y=2X-1的分布律:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

X	-1	0	1	2
2X-1	-3	-1	1	3
P	0.2	0.3	0.1	0.4

例2. 设X具有以下的分布律，求$Y=X^2-1$的分布律:

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

X	-1	0	1	2
X^2-1	0	-1	0	3
P	0.2	0.3	0.1	0.4

X	0	-1和1	2
X^2-1	-1	0	3
P	0.3	0.3	0.4

例5. 设随机变量X有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

求$Y=2X+8$的概率密度.

解: $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}$

当$0<\frac{y-8}{2}<4$,即$8<y<16$时

$$=F_X(\frac{y-8}{2})=\int_0^{\frac{y-8}{2}}\frac{x}{8}dx$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{\left(\frac{y-8}{2}\right)}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{y-8}{32}\qquad 8<y<16$$

例6　设随机变量X具有概率密度
求Y=X²的概率密度。

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & 其他\end{cases}$$

解：分别记X, Y的分布函数为 $F_X(x),\ F_Y(y)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}<X<\sqrt{y}\}$$

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=0$;

当 $y\ge 16$时，$F_Y(y)=1$

当 $0<y<16$ 时，

$$F_Y(y)=P\{0<X<\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})=\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}f_X(t)dt$$

$f(x)$连续时，$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)}f(t)dt=f(u(x))u'(x)$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}), & 0<y<16\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{8}=\dfrac{1}{16}, & 0<y<16\\ 0, & 其他\end{cases}$$

Y在区间(0, 16)上均匀分布。

例：设X服从参数为λ的指数分布，$F(x)$为X的分布函数。

(1) 求$F(x)$;

(2)设$Y=F(X)$,试证$Y \sim U(0,1)$(即均匀分布)。

解:(1) 由前知, $X \sim f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(2) $Y=F(X)=\begin{cases}1-e^{-\lambda X}, & X>0 \\ 0, & X\le 0\end{cases} \Rightarrow 0\le Y\le 1$

记$F_Y(y)$为Y的概率分布函数,

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=0$　　当$y\ge 1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=1$

当$0<y<1$时，$F_Y(y)=P\{1-e^{-\lambda X}\le y\}=P\{e^{-\lambda X}\ge 1-y\}$

$$=P\left\{X\le -\frac{1}{\lambda}ln(1-y)\right\}=1-e^{-\lambda\left[-\frac{1}{\lambda}ln(1-y)\right]}=y$$

即 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0 \\ y, & 0<y<1 \\ 1, & y\ge 1\end{cases}$, $\therefore\ Y\sim U(0,1)$

例： 设X的概率密度为$f(x)$, $|x|<\infty$, $Y=X^2$，

求Y的概率密度$f_Y(y)$。

解：设Y的概率分布函数为$F_Y(y)$

当 $y>0$时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)dt=\int_0^{\sqrt{y}} f(t)dt-\int_0^{-\sqrt{y}} f(t)dt$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}[f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})]\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0\\ 0\,, & y\le 0\end{cases}$$

例8. 设$X \sim N(0,1)$, 试求$Y = X^2$的密度函数

解: $y = x^2$在$(-\infty,\infty)$上分段单调:

在$(-\infty,0]$上，反函数$x = -\sqrt{y} = h_1(y)$,

在$(0,+\infty)$上，反函数$x = \sqrt{y} = h_2(y)$,

$Y = X^2$在$[0,\infty)$上取值。当 $y > 0$ 时

$$f_Y(y) = \varphi(-\sqrt{y})\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + \varphi(\sqrt{y})\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y > 0)$$

此时称Y 服从自由度为1的χ^2分布.

例8. 设X ~ N(0,1), 试求$Y = X^2$的密度函数

解: $P(Y>0)=1$, 取$D=\{y>0\}$。在D上有

$$P(Y=y)=P(X^2=y)=P(X=\pm\sqrt{y})$$

$$=P(X=-\sqrt{y})+P(X=\sqrt{y})$$

$$=\left|\varphi(-\sqrt{y})d(-\sqrt{y})\right|+\left|\varphi(\sqrt{y})d(\sqrt{y})\right|$$

$$=\varphi(-\sqrt{y})\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|dy+\varphi(\sqrt{y})\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|dy$$

由此可得 $f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} \quad (y>0)$

例1. 设 X 在1, 2, 3, 4四个整数中等可能地取值, Y则在1~X中等可能地取一整数, 试求(X, Y)的分布律.

Y X	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

$$F(3,\ 2)=\sum_{\substack{x_i\le 3\\ y_j\le 2}} p_{ij}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}$$

续例 1 求 X, Y的边缘分布。

Y / X	1	2	3	4	P_{i*}
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
P_{*j}	25/48	13/48	7/48	1/16	

$$F_X(3) = P\{X \le 3\} = \frac{3}{4}$$

$$F_Y(2) = P\{Y \le 2\} = \frac{25}{48} + \frac{13}{48} = \frac{38}{48}$$

定理： X,Y相互独立的充要条件是

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

例2 已知二维随机变量 (X, Y)的分布律为

Y X	0	1	2	p_{i*}
0	3/30	6/30	1/30	1/3
1	2/30	12/30	6/30	2/3
p_{*j}	5/30	18/30	7/30	

判断 X与 Y 是否相互独立？

不独立！

例3 已知一部手机在$[0,t]$时段内收到的短信数$N \sim P(\lambda)$，

其中$\lambda = \mu t$。设每条短信的到达时间与是否为广告独立，

若短信是广告的概率为p，

求证在$[0,t]$时段内收到的广告短信数X与非广告数Z独立。

证明 $[0,t]$时段内收到的广告短信数$X \sim P(\lambda p)$

$[0,t]$时段内收到的非广告短信数$Z \sim P(\lambda q)$

$$P(X=k,Z=j)=P(X=k,N-X=j)=P(X=k,N=k+j)$$

$$=P(N=k+j)P(X=k\mid N=k+j)$$

$$=\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda}\times C_{k+j}^{k}p^{k}q^{j}=\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}e^{-\lambda}\times\frac{(k+j)!}{k!\,j!}p^{k}q^{j}$$

$$=\frac{(\lambda p)^{k}}{k!}e^{-\lambda p}\times\frac{(\lambda q)^{j}}{j!}e^{-\lambda q}\quad=P(X=k)\times P(Z=j)$$

可加性

例3. 单位元内的均匀分布

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi},\quad D: x^2+y^2<1$$

求X,Y的边缘分布。

解: 对 $-1\le x\le 1$:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} I_D(x,y)f(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}},\quad |x|\le 1$$

同理

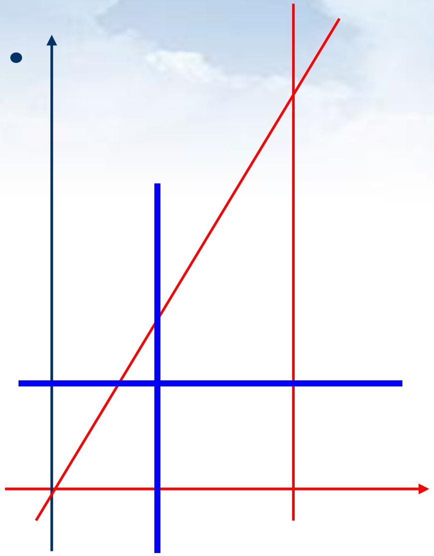
$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},\quad |y|\le 1$$

不独立!

例4. 设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}2xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求边沿密度函数$f_X(x), f_Y(y)$.



解: 对$0\le x\le 1$:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} I_D(x,y)f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{2x} 2xydy = xy^2\Big|_0^{2x} = 4x^3$$

对$0\le y\le 2$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} I_D(x,y)f(x,y)dx$$

$$=\int_{y/2}^{1} 2xydx = x^2y\Big|_{y/2}^{1} = y-\frac{1}{4}y^3$$

不独立！

例5 已知二维随机变量 (X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3xy, & 0\le y\le 1,\quad 0\le x\le 2-y\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求X,Y的边缘密度，判断 X与 Y 是否相互独立?

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 3xydy=\frac{3}{2}x^3, & 0\le x\le 1\\ \int_0^{2-x} 3xydy=\frac{3}{2}x^3-6x^2+6x, & 1\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

不独立!

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{2-y} 3xydx=6(y-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

例6　已知二维随机变量 (X, Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}-e^{-3y}+e^{-(2x+3y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

判断 X与 Y 是否相互独立?

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$F(x,y)=F_X(x)\times F_Y(y)$$

$$f_X(x)=2e^{-2x},\quad x>0$$

$$f_Y(x)=3e^{-2y},\quad y>0$$

$$f(x,y)=6e^{-2x-3y},$$
$$x>0,y>0$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

独立!

例7 设某型钻头的寿命服从 λ=0.002 的指数分布。欲打一口深度为500m的钻井，求恰好需要使用两支钻头的概率。

解： $P\{\text{恰好需要两支钻头}\} = P\{X < 500, X + Y \geq 500\}$

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 0.002^2 e^{-0.002(x+y)} \quad x, y > 0$$

$$P\{X < 500, X + Y \geq 500\}$$

$$= \iint\limits_{\substack{x<500 \\ x+y\geq 500}} 0.002^2 e^{-0.002(x+y)} dxdy$$

$$= \int_0^{500} 0.002 e^{-0.002x} dx \int_{500-x}^{+\infty} 0.002 e^{-0.002y} dy$$

$$= e^{-1} \approx 0.3679$$

例2. 设$X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$且相互独立，证明$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。

解: $P\{Z = k\} = P\{X + Y = k\}$

$$= P\left(\bigcup_{i=0}^{k}\{X = i, Y = k - i\}\right) = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i, Y = k - i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P\{X = i\} P\{Y = k - i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1{}^{i} e^{-\lambda_1}}{i!} \frac{\lambda_2{}^{k-i} e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda_1{}^{i} \lambda_2{}^{k-i}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k \quad k = 0,1,2,\cdots$$

Poisson分布的可加性

例3. 设$X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p)$且相互独立，证明$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$。

解：

二项分布的可加性

例1： 设X,Y独立，都服从$N(0,1)$。

求$R=\sqrt{X^2+Y^2}$的分布。

解： $F_R(r)=P(R\le r)=P(\sqrt{X^2+Y^2}\le r)$

$$=\iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le r}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r\frac{1}{2\pi}ze^{-z^2/2}dz\right)d\theta=\int_0^r ze^{-z^2/2}dz$$

$$f_R(r)=re^{-r^2/2},r>0$$

这个分布称为瑞利（Rayleigh）分布。

例2： 设X,Y独立，$X \sim E(\lambda), Y \sim E(\mu)$。

求$U = X + Y$的分布。

解： $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I[x > 0], \quad f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} I[y > 0]$

$$f_U(u) = f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(u-x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} I[x > 0] \mu e^{-\mu(u-x)} I[u-x > 0]dx$$

$$= \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} \times \mu e^{-\mu(u-x)} dx$$

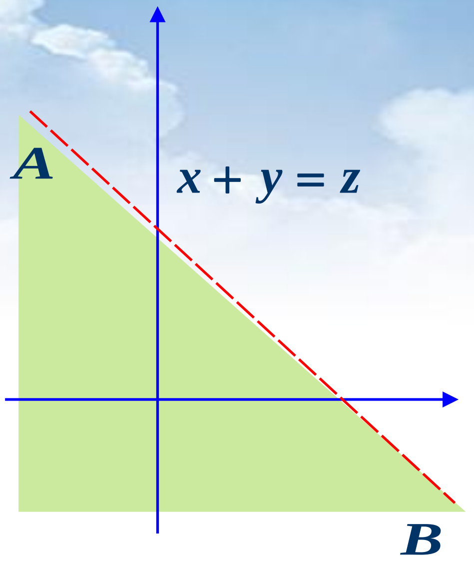
$$= \lambda\mu e^{-\mu u} \int_0^u e^{-(\lambda-\mu)x} dx$$

$$f_U(u) = \begin{cases} \lambda \mu u e^{-\mu u}, & \lambda = \mu \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}(e^{-\mu u} - e^{-\lambda u}) & \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

$$=\int_{AB} f(x,y)\,dx$$

可视为沿有向直线
x+y = z 的对坐标x
的曲线积分。



$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$$

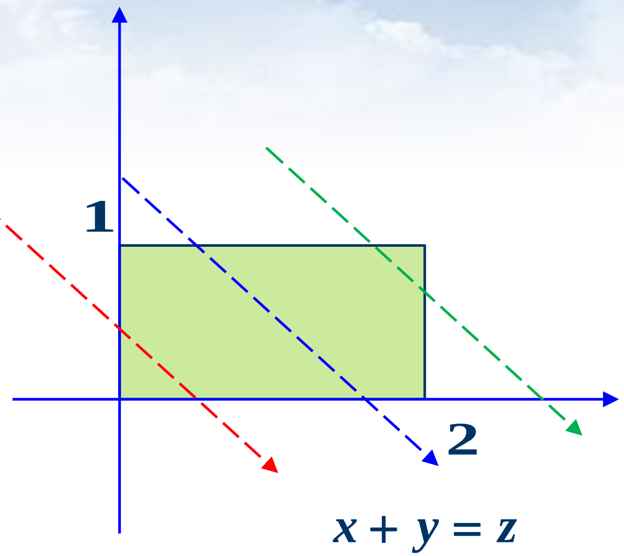
$$=\int_{BA} f(x,y)\,dy$$

可视为沿有向直线
x+y = z 的对坐标y
的曲线积分。

例3. 设(X,Y)的 pdf 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 Z=X+Y 的概率密度函数。



解: $f_Z(z)=\int_{z=x+y} f(x,y)\,dx$

当 $0\le z\le 1$ (沿红线)

$$f_Z(z)=\int_0^z f(x,z-x)\,dx$$

$$=\int_0^z \tfrac{1}{3}(x+(z-x))\,dx=\int_0^z \tfrac{1}{3}z\,dx=\tfrac{1}{3}z^2$$

当 $1<z\le 2$ (沿蓝线)

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^z f(x,z-x)\,dx$$

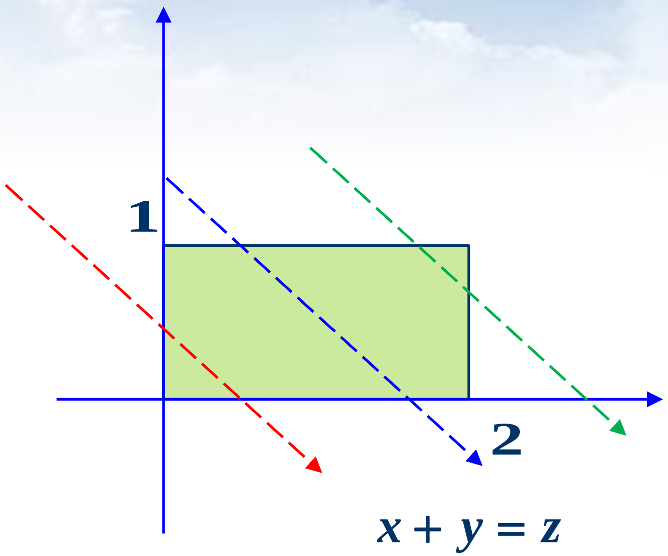
$$=\int_{z-1}^z \tfrac{1}{3}(x+(z-x))\,dx=\int_{z-1}^z \tfrac{1}{3}z\,dx=\tfrac{1}{3}z$$

当$2 < z \le 3$(沿绿线)

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{2} f(x, z-x)\,dx$$

$$= \int_{z-1}^{2} \tfrac{1}{3}(x + (z-x))\,dx$$

$$= \int_{z-1}^{2} \tfrac{1}{3} z\,dx = \tfrac{1}{3} z(3-z) = z - \tfrac{1}{3} z^2$$



$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} z^2 & 0 \le z \le 1 \\ \frac{1}{3} z & 1 < z \le 2 \\ z - \frac{1}{3} z^2 & 2 < z \le 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例4. 设(X,Y) 在区域 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x$ 上均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 （1）Z =2X+Y （2） Z=X-Y 的概率密度函数。

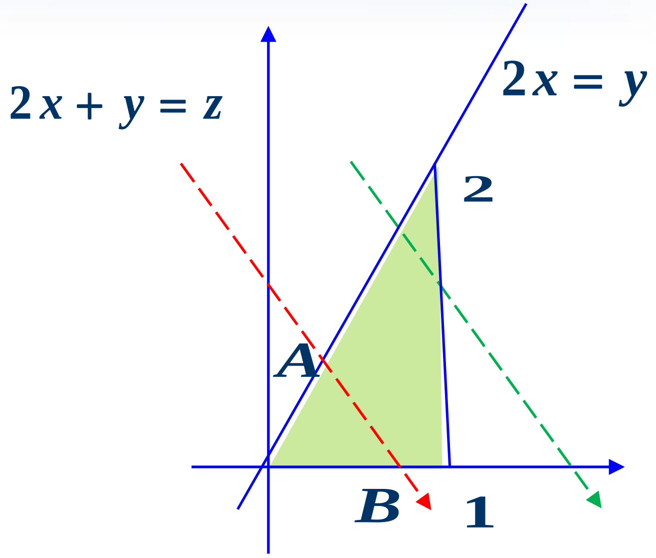
解(1): $f_Z(z)=\int_{AB} f(x,y)\,dx$

当 $0\le z\le 2$ (沿红线）

$$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{4}}^{\frac{z}{2}} 1\,dx \;=\tfrac{1}{4}z$$

当 $2<z\le 4$ (沿绿线）

$$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{4}}^{1} 1\,dx=1-\tfrac{1}{4}z$$



$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}z & 0\le z\le 2\\ 1-\frac{1}{4}z & 2<z\le 4\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例4. 设(X,Y) 在区域 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x$ 上均匀分布

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）Z =2X+Y（2） Z=X-Y 的概率密度函数。

解(2): $f_Z(z)=\int_{x-y=z} f(x,y)\,dx$

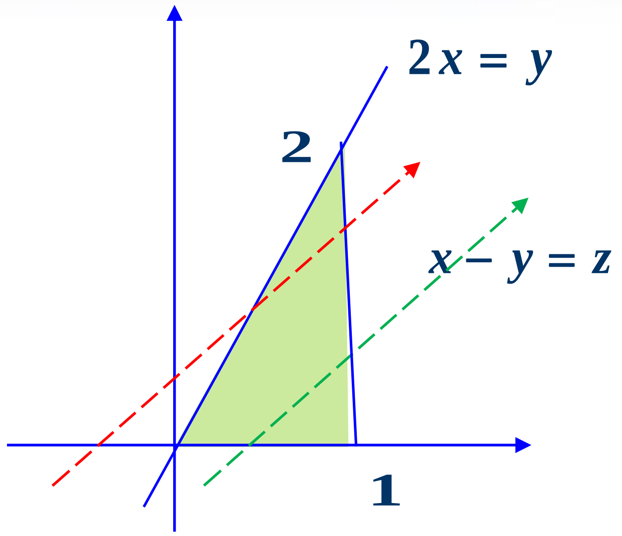
当 $-1\le z\le 0$ (沿红线)

$$f_Z(z)=\int_{-z}^{1} 1\,dx=1+z$$

当 $0<z\le 1$ (沿绿线)

$$f_Z(z)=\int_{z}^{1} 1\,dx=1-z$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}1+z & -1\le z\le 0\\ 1-z & 0<z\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



例5. $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

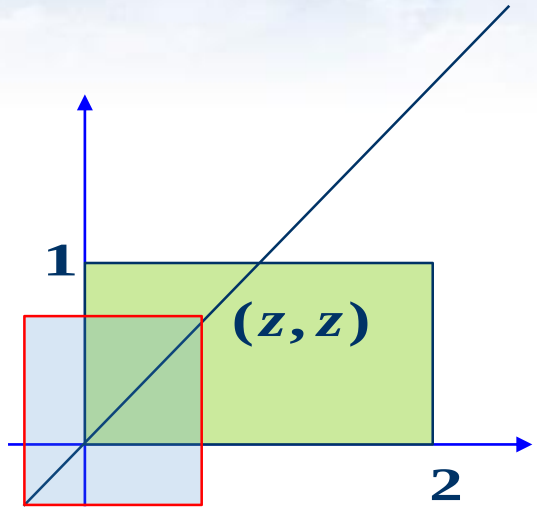
求 Z = max(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解1: $F_{\max}(z)=F(z,z)=\int_{x\le z,y\le z} f(x,y)dxdy$

当$z<0$, $F(z,z)=\int_{x\le z,y\le z} 0\,dxdy=0$

当$0\le z\le 1$,

$$F(z,z)=\int_0^z dx\int_0^z \tfrac{1}{5}(2x+y)\,dxdy=\tfrac{3}{10}z^3$$



例5. $(X,Y) \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

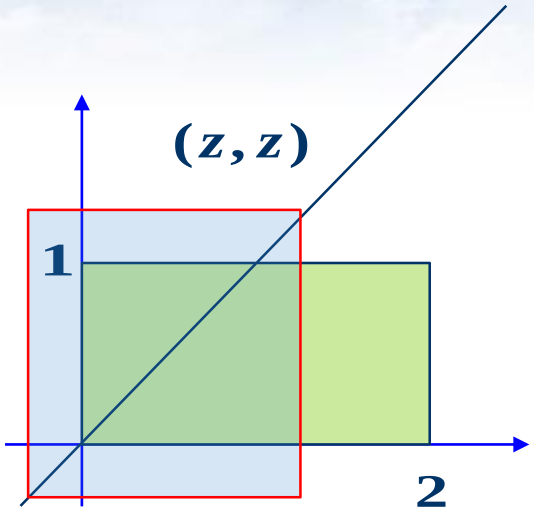
求 Z = max(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解1: $F_{\max}(z) = F(z,z) = \int_{x \le z, y \le z} f(x,y)dxdy$

当$z<0$, $F(z,z) = \int_{x \le z, y \le z} 0\,dxdy = 0$

当$0 \le z \le 1$,

$$F(z,z) = \int_0^z dx \int_0^z \frac{1}{5}(2x+y)\,dxdy = \frac{3}{10}z^3$$



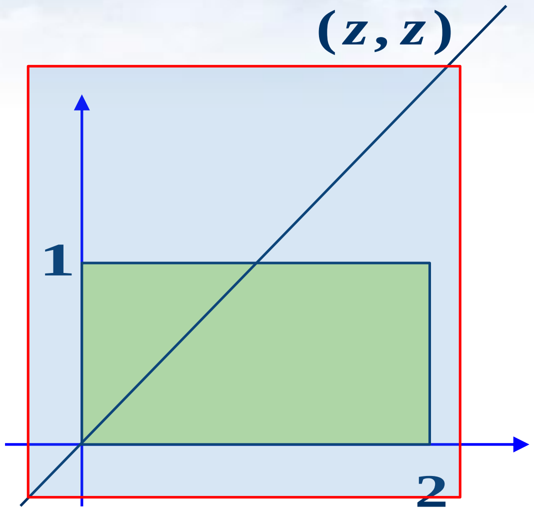
当$1 < z \le 2$,

$$F(z,z) = \int_0^z dx \int_0^1 \frac{1}{5}(2x+y)\,dxdy = \frac{1}{5}z^2 + \frac{1}{10}z$$

例5. $(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x+y) & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求 Z = max(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解1: $F_{\max}(z)=F(z,z)=\int_{x\le z, y\le z} f(x,y)dxdy$



当$z<0$, $F(z,z)=\int_{x\le z, y\le z} 0\,dxdy=0$

当$0 \le z \le 1$,

$$F(z,z)=\int_0^z dx\int_0^z \tfrac{1}{5}(2x+y)\,dxdy=\tfrac{3}{10}z^3$$

当$1<z\le 2$,

$$F(z,z)=\int_0^z dx\int_0^1 \tfrac{1}{5}(2x+y)\,dxdy=\tfrac{1}{5}z^2+\tfrac{1}{10}z$$

当$z>2$,

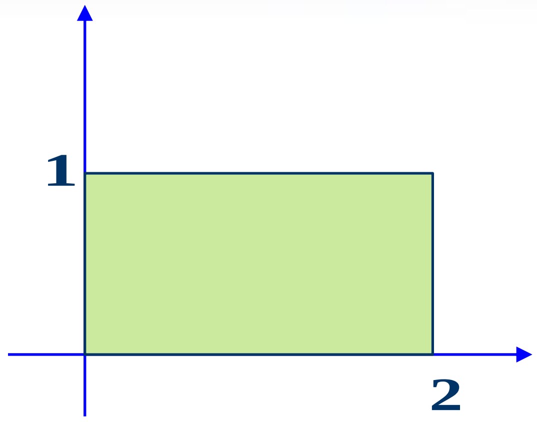
$$F(z,z)=\int_0^2 dx\int_0^1 \tfrac{1}{5}(2x+y)\,dxdy=1$$

例5. $(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求 Z = max(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解1:

$$F_{\max}=F(z,z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ \frac{3}{10}z^3 & 0\le z\le 1 \\ \frac{1}{5}z^2+\frac{1}{10}z & 1<z\le 2 \\ 1 & z>2 \end{cases}$$



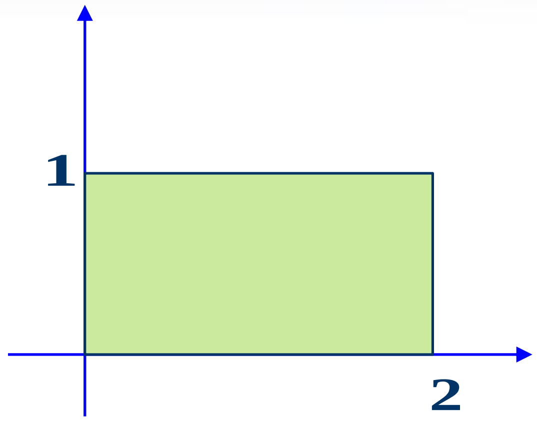
$$f_{\max}=F'_{\max}(z)=\begin{cases} \frac{9}{10}z^2 & 0\le z\le 1 \\ \frac{2}{5}z+\frac{1}{10} & 1<z\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例5. $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x+y) & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

求 Z = max(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解2:

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ 或 } y<0\\ \frac{1}{5}(x^2y+\frac{1}{2}xy^2) & 0\le x\le 2,0\le y\le 1\\ \frac{1}{5}(x^2+\frac{1}{2}x) & 0\le x\le 2, y>1\\ \frac{1}{5}(y^2+4y) & x>2, 0\le y\le 1\\ 1 & x>2, y>1\end{cases}$$



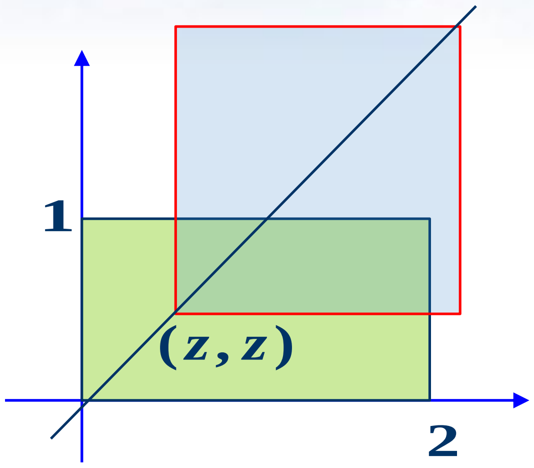
$$F_{\max}=F(z,z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{3}{10}z^3 & 0\le z\le 1\\ \frac{1}{5}z^2+\frac{1}{10}z & 1<z\le 2\\ 1 & z>2\end{cases}$$

$$f_{\max}=F'_{\max}(z)=\begin{cases}\frac{9}{10}z^2 & 0\le z\le 1\\ \frac{2}{5}z+\frac{1}{10} & 1<z\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

例6. $(X,Y) \sim f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{5}(2x+y) & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

求 Z = min(X,Y) 的分布函数和密度函数。

解1: $$F_{\min}(z)=1-\iint\limits_{x>z,y>z} f(x,y)\,dxdy$$



当$z<0$, $F_{\min}(z)=1-1=0$

当$z>1$, $F_{\min}(z)=1-0=1$

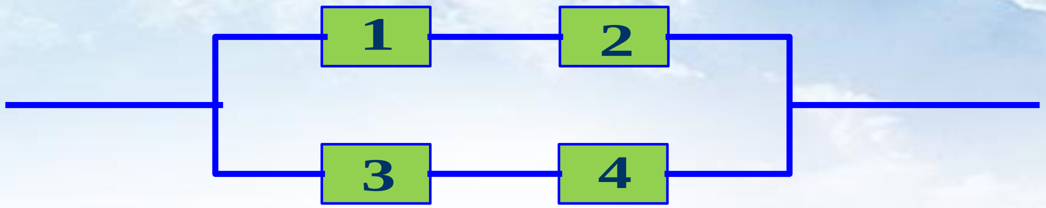
当$0\le z\le 1$,

$$F_{\min}(z)=1-\int_z^2 dx\int_z^1 \frac{1}{5}(2x+y)\,dxdy$$

$$=-\frac{3}{10}z^3+\frac{2}{5}z^2+\frac{9}{10}z$$

$$f_{\min}(z)=F'_{\min}(z)=\begin{cases} -\frac{9}{10}z^2+\frac{4}{5}z+\frac{9}{10} & 0\le z\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

例7. 设各子系统寿命$X_i \sim f(x_i)=\lambda e^{-\lambda x_i}$，$x_i>0$,



相互独立同分布。求系统寿命Z的概率密度函数。

解: 令$Y_1=\min(X_1,X_2)$, $Y_2=\min(X_3,X_4)$

则$Z=\max(Y_1,Y_2)$

$$F(x_i)=1-e^{-\lambda x_i} \qquad f(x_i)=\lambda e^{-\lambda x_i},\ x_i>0$$

$$F_{Y_i}(y_i)=1-[1-F(y)]^2=1-e^{-2\lambda y_i},\ y_i>0$$

$$F_Z(z)=[F_{Y_1}(z)]^2=(1-e^{-2\lambda z})^2,\quad z>0$$

$$f_Z(z)=4\lambda(1-e^{-2\lambda z})e^{-2\lambda z},\quad z>0$$

例1 $P(X=x,Y=y)=f(x,y)dxdy$,作线性变换

$U=2X-Y, V=2X+3Y$

求(U,V)的联合密度。

解: 从$u=2x-y, v=2x+3y$可以反解出

$$x=(3u+v)/8,\ y=(-u+v)/4$$

$$J^{-1}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=8,\ J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{8},$$

$$dxdy=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=|J|dudv$$

$$P(U=u,V=v)=P(2X-Y=u,2X+3Y=v)$$

$$=P(X=(3u+v)/8,Y=(v-u)/4)$$

$$=f((3u+v)/8,(v-u)/4)|J|dudv$$

$$\Rightarrow\quad g(u,v)=\frac{1}{8}f\left(\frac{3u+v}{8},\frac{v-u}{4}\right)$$

例 1　设 X 在1, 2, 3, 4四个整数中等可能地取值，Y在1~X中等可能地取值, 已求出 (X, Y)的分布律以及X和Y的边沿分布。
试求 Y|X=3 条件下X的条件分布，以及 X|Y=3 条件下X的条件分布。

Y / X	1	2	3	4	P_{i*}
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
P_{*j}	25/48	13/48	7/48	1/16	

Y \ X	1	2	3	4	P_{i*}
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
P_{*j}	25/48	13/48	7/48	1/16	

$$P\{Y=1 \mid X=3\}=\frac{p_{31}}{p_{3\bullet}}=\frac{1/12}{1/4}=\frac{1}{3}$$

$$P\{X=4 \mid Y=3\}=\frac{p_{43}}{p_{\bullet 3}}=\frac{1/16}{7/48}=\frac{3}{7}$$

例2 一射击手进行射击, 击中目标的概率为$p(0<p<1)$, 射击到击中目标两次为止。
以X表示首次击中目标进行的射击次数, 以Y表示总共进行的射击次数, 试求 X和Y的联合分布律和条件分布律.

解:

$$P(X=i,Y=j)=q^{i-1}p\times q^{j-i-1}p$$

$$=q^{j-2}p^{2},\quad 1\le i<j$$

$$P(Y=j)=\sum_{i=0}^{j-1}P(X=i,Y=j)=\sum_{i=0}^{j-1}(q^{j-2}p^{2})$$

$$=(j-1)q^{j-2}p^{2},\quad j=2,3,4,\cdots$$

$$P(X=i\,|\,Y=j)=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}$$

$$=\frac{q^{j-2}p^{2}}{(j-1)q^{j-2}p^{2}}=\frac{1}{j-1},\quad 1\le i<j$$

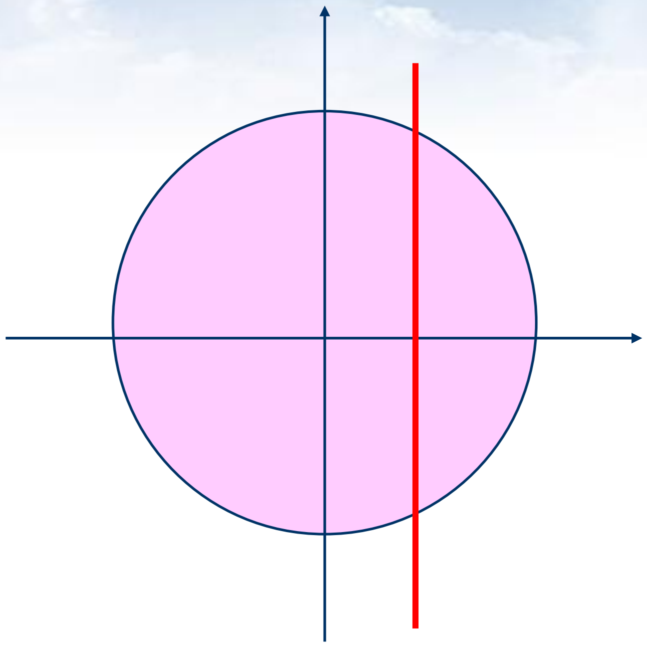
等可能
均匀分布

例 3 设(X,Y)在圆域$x^2+y^2\le 1$上服从均匀分布,求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

解: $f(x,y)=1/\pi,\quad x^2+y^2\le 1$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\quad |x|\le 1$$

$$=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$



$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1/\pi}{2\sqrt{1-x^2}/\pi}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\quad |y|\le\sqrt{1-x^2}$$

例4: 设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求条件密度函数$f_{X|Y}(x|1), f_{Y|X}(y|1/2)$.

解: $$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2xy}{y\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)}=\frac{8x}{4-y^2},\quad \boxed{\frac{y}{2}\le x\le 1}$$

$$f_{X|Y}(x|1)=\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{2x}{3/4}=\frac{8x}{3},\quad \boxed{\frac{1}{2}\le x\le 1}$$

同理: $$f_{Y|X}(y|\tfrac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})}=\frac{y}{4(\frac{1}{2})^3}=2y,\quad \boxed{0\le y\le 1}$$

$$P\{X\ge \tfrac{3}{4}|Y=1\}=\int_{\frac{3}{4}}^{\infty} f_{X|Y}(x|1)dx=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{8x}{3}dx=\frac{7}{12}$$

$$P\{Y\le \tfrac{1}{2}|X=\tfrac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_{Y|X}(y|\tfrac{1}{2})\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}2y\,dy=\frac{1}{4}$$

例4: 设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求条件密度函数$f_{X|Y}(x|1), f_{Y|X}(y|1/2)$.

解2: 视 $f(x,y)$中的y为常数，有

$$\frac{y}{2}\le x\le 1$$

$$f_{X|Y}(x|y)=kx,$$

由 $\int_{y/2}^{1}kxdx=1$ 知 $k=\dfrac{8}{4-y^2}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{8x}{4-y^2},\ \frac{y}{2}\le x\le 1$$

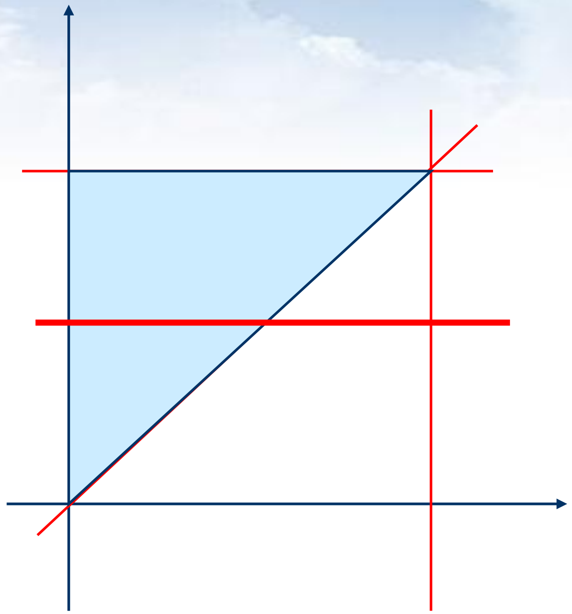
例5 设 X 在区间(0, 1)上随机地取值, 当观察到 X = x ($0< x <1$) 时，Y在区间 (x, 1) 上随机地取值。求 Y 的概率密度.

解：$f_X(x)=1 \quad 0<x<1$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1}{1-x} \quad x<y<1$$

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)$$

$$=\frac{1}{1-x} \quad 0<x<1;\ x<y<1$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)|_0^y=-\ln(1-y) \quad 0<y<1$$

第5章 随机变量的数字特征

§5.1　数学期望

1. 问题引入 —— 加权平均

例：某射手进行了100次射击。其中10次命中7环，20次命中8环，40次命中9环，30次命中10环。射手命中平均环数为

$$(7\times10+8\times20+9\times40+10\times30)\times\frac{1}{100}$$

$$=(7\times\frac{10}{100}+8\times\frac{20}{100}+9\times\frac{40}{100}+10\times\frac{30}{100})$$

$$=(7\times f_7+8\times f_8+9\times f_9+10\times f_{10})$$

$$\approx(7\times p_7+8\times p_8+9\times p_9+10\times p_{10})$$

例1 甲,乙两人进行打靶, 所得分数分别记为X_1, X_2, 它们的分布律分别为:

X_1	0	1	2
p_1	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
P_2	0.6	0.3	0.1

试评定他们的成绩好坏.

$$E(X_1) = (1\times 0.2 + 2\times 0.8) = 1.8$$

$$E(X_2) = (0\times 0.6 + 1\times 0.3 + 2\times 0.1) = 0.4$$

$$E(X_1 - 1.8)^2$$
$$= (0-1.8)^2\times 0 + (1-1.8)^2\times 0.2 + (2-1.8)^2\times 0.8 = 0.16$$

$$E(X_2 - 0.4)^2$$
$$= (0-0.4)^2\times 0.6 + (1-0.4)^2\times 0.3 + (2-0.4)^2\times 0.1 = 0.46$$

例2 赌金分配问题 甲,乙两人各出50法郎进行赌博，胜率都是0.5，五局三胜制，胜者赢得全部赌金。前三局中甲胜2局，乙胜1局，因故停止赌博。

问：如何合理分配这100法郎的赌金？

解： 后两局若继续赌下去，可能的结果为：

甲乙	乙甲	甲甲	乙乙
0.25	0.25	0.25	0.25

结合前三局的结果，只有“乙乙”时甲会输掉100法郎。

$$P(X=0)=0.25, P(X=100)=0.75$$

$$E(X)=0\times 0.25+100\times 0.75=75$$

甲预期分得75法郎，乙预期分得25法郎。

例3 你下注a元玩**21点游戏**。庄家从6副牌（每副5张）扑克牌中随机发2张牌，若为对子，庄家赔你10倍，否则你输掉赌注。问：如下注100元，期望赢多少？

解：

$$P(X=10a)=\frac{13C_{4\times 6}^{2}}{C_{52\times 6}^{2}}=0.074$$

$$P(X=-a)=1-0.074=0.926$$

$$E(X)=10a\times 0.074-a\times 0.926=-0.186a$$

下注100元，预期会输掉18.6元。

例4 已知随机变量 X 的概率密度函数（pdf）为

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1< x\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$.

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\cdot x\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x\cdot(2-x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x^2\cdot x\,\mathrm{d}x+\int_1^2 x^2\cdot(2-x)\,\mathrm{d}x=\frac{7}{6}$$

例5 已知随机变量 X 的服从柯西分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad -\infty<x<\infty$$

求 $E(X)$

解： 首先要检查绝对收敛性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\infty \quad \text{发散！}$$

柯西分布的数学期望不存在！

例6 已知公交车到站的时间间隔 X 服从指数分布，求

（1）平均间隔时间

（2）若你已经等了t分钟，预期再等多长时间？

解：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}$$

根据指数分布的无记忆性，
在已经等待 t分钟的条件下，
预期等待时间不变。

$\lambda=6/$小时

平均等待时间为$\frac{1}{6}$小时，即10分钟。

例7 已知随机变量(X, Y)在矩形区域D上均匀分布，其密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2 & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求$E(XY)$

解：

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\ f(x,y)\ dxdy$$

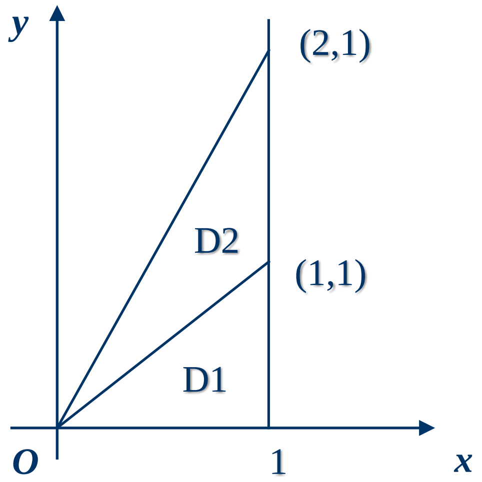
$$=\int_0^1\int_0^2 xy\,\frac{1}{2}\,dxdy=\frac{1}{2}$$

例8 已知随机变量 (X, Y) 的 pdf 为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(x+y) & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E[\max(X,Y)]$.

解:



$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(x,y)\, f(x,y)\ dxdy$$

$$=\int_0^1\int_0^x x\,\frac{3}{4}(x+y)\,dxdy$$

$$+\int_0^1\int_x^{2x} y\,\frac{3}{4}(x+y)\,dxdy$$

$$=1$$

例9 国际市场对我国的某种产品一年内的需求量为 X (单位：吨)，X 在区间 [2000, 4000] 上服从均匀分布。产品出口卖掉后，每吨可挣得外汇 3 万美元，但卖不掉的产品要囤积在仓库，每吨需支付库存费 1 万美元。

（1）出口 y 吨产品的平均收益?

（2） y 取何值时，收益最大?

解： X 的概率密度函数 pdf 为

$$f(x)=\begin{cases} 1/2000 & 2000 \le x \le 4000 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

出口 y 吨(2000 < y < 4000) 产品的收益与需求量 X 有关

$$g(X)=\begin{cases} 3y & \text{当 } X \ge y\text{（全部卖掉了）} \\ 3X-(y-X) & \text{当 } X < y\text{（有剩余卖不掉）} \end{cases}$$

(1) 平均收益 = $E(g(X))$

$$g(X)=\begin{cases}3y & 当\ X\ge y\\ 3X-(y-X) & 当\ X<y\end{cases}$$

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$$

$$=\int_{2000}^{y}[3x-(y-x)]\frac{1}{2000}\,dx+\int_{y}^{4000}3y\frac{1}{2000}\,dx$$

$$=\frac{1}{1000}(-y^2+7000y-4000000)$$

(2) 最佳出口量

令 $\varphi(y)=(-y^2+7000y-4000000)$

令 $\varphi'(y)=(-2y+7000)=0$

得 $y=3500$（吨），此时预期有最大收益。

例2 掷 n 颗骰子，X 代表掷出点数的总和, 求E(X)。

解: 令$X_i = j$表示第i颗骰子的点数为j，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(X_i = j) = \frac{1}{6}，\quad E(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = \frac{7}{2}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{7}{2}n$$

例3 一批产品中有 M 件正品，N 件次品，从中任意抽取 n 件样品，以 X 代表取到的次品件数，求E(X)。

直接计算超几何分布$P(X=k)=\dfrac{C_N^k C_M^{n-k}}{C_{M+N}^n}$数学期望？

解： 视为 n 次 不返回抽样。令

令 $X_i=\begin{cases}0 & \text{第}i\text{次抽到正品}\\ 1 & \text{第}i\text{次抽到次品}\end{cases}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 且

参考抓阄

$P(X_i=1)=\dfrac{N}{M+N}$。 $E(X_i)=\dfrac{N}{M+N}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{N}{M+N}n$$

例4. 设是 X 和 Y 是两个相互独立的事件变量，pdf 为

$$X \sim f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad Y \sim g(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)} & y>5\\ 0 & y\le 5\end{cases}$$

求 E(3XY)。

解： 注意到独立性

$$E(3XY)=3\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\,\mathrm{d}x\times\int_{-\infty}^{+\infty} y\ g(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x\times\int_5^{+\infty} y\,e^{-(y-5)}\,\mathrm{d}y$$

$$=12$$

例5. 设办公室的3台传真机独立工作。传真机对下一个传真的等待时间服从指数分布。

$$X_i \sim E(\lambda_i), i = 1,2,3 \quad \text{相互独立}$$

求办公室对下一个传真的平均等待时间。

解： 视下一个传真是最先到达的传真，Y为等待时间

$$Y = \min(X_1, X_2, X_3)$$

由 $P(X_i > y) = \int_y^{\infty} \lambda_i e^{-\lambda_i x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda_i y}$ 可知

$$P(Y > y) = P(X_1 > y, X_2 > y, X_3 > y)$$

$$= P(X_1 > y)P(X_2 > y)P(X_3 > y) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)y}$$

$$E(Y) = \int_0^{\infty} P(Y > y)dy = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}dy = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

例2. 设二维随机变量(X,Y)分布律如图，Z=3Max(X,Y)，求D(Z)。

Y \ X	0	1
0	1/6	1/6
1	1/3	1/12
2	1/12	1/6

解：Z的分布律为

Z	0	1	2
p	1/6	7/12	1/4

$$E(Z)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{7}{12}+2\times\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$$

$$E(Z^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{7}{12}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{19}{12}$$

$$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{19}{12}-\left(\frac{13}{12}\right)^2=\frac{59}{144}$$

例3　掷 n 颗骰子，X 代表掷出点数的总和，求D(X)。

解：令$X_i = j$表示第i颗骰子的点数为j，$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$P(X_i = j) = \frac{1}{6},\quad E(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = \frac{7}{2}$$

$$E(X_i^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2) = \frac{91}{6}$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

$$= \frac{35}{12} n$$

独立和

例2. 设二维随机变量(X,Y)分布律如图,
求 cov(X,Y)和相关系数ρ。

Y / X	-1	0	1	Pi.
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	2/8
1	1/8	1/8	1/8	3/8
P.j	3/8	2/8	3/8	1

解： EX=0, EY=0

$DX = DX^2 = 6/8$

$DY = EY^2 = 6/8$

XY	-1	0	1
P	2/8	4/8	2/8

EXY = 0　　Cov(X,Y) = EXY-EX*EY= 0

进而可知 ρ= 0。　　但是X, Y并不独立。

例3: 设(X,Y)在单位圆内均匀分布，求Cov(X,Y).

解: (X,Y)的密度函数为 $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi},(x^2+y^2\le 1)$

$$EX=\iint_{x^2+y^2\le 1} xf(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} x\,dxdy=0$$

同理，$EY=0$

$$EXY=\iint_{x^2+y^2\le 1} xy\cdot f(x,y)dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le 1} xy\,dxdy=0$$

不相关，
但是
不独立!

$$Cov(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)=0$$

例4: 设 $(X,Y)\sim N(0,1^2;1,2^2;\rho)$, $Z=X-2Y+1$

求 Z 的分布，以及Z与X 的相关系数。

解: EZ = EX - 2EY+1 = -1

D(Z) = D(X)+D(-2Y) + 2Cov(X,-2Y)

= D(X)+4D(Y) – 4 Cov(X,Y)

$$=1+4*4-4\rho\sigma_1\sigma_2=17-8\rho$$

$$Z\sim N(-1,17-8\rho)$$

$Cov(X,Z)=$ Cov(X, X-2Y+1) = Cov(X,X) – 2 Cov(X,Y)

$$=D(X)-2\rho\sigma_1\sigma_2=1-2\rho$$

$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{1-2\rho}{\sqrt{17-8\rho}}$$

例5: 设θ是$[-\pi,\pi]$上均匀分布的随机变量令
$X=\sin\theta, Y=\cos\theta$,试求$X$与$Y$的相关系数.

例6: 设法构造随机变量X和Y，利用其相关系数证明

$$\left|P(AB)-P(A)P(B)\right| \leq \sqrt{P(A)P(\bar{A})} \times \sqrt{P(B)P(\bar{B})}$$

例1. 某计算机系统120台终端, 每台终端有5%的时间在使用。 若各终端使用与否是相互独立的。求有10台以上终端同时使用的概率。

解： 设X表示同时使用的终端台数, X ~ B(120, 0.05)

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$$

$$= 1 - P\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{10 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left[\frac{10 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$

$$\approx 1 - \Phi\left[\frac{10 - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}}\right] \approx 1 - \Phi[1.68]$$

$$\approx 1 - 0.9535 = 0.0465$$

练习:

1. 抽样检查产品质量时，如果发现次品多于10个，则认为这批产品不能接受，问应检查多少个产品，可使次品率为10%的一批产品不能被接受的概率达到0.9? (147个)

2. 一个复杂的系统，由n个相互独立起作用的部件组成，每个部件的可靠度为0.9，且必须至少有80%的部件工作才能使整个系统工作，问n至少为多少才能使系统的可靠度为0.95? (25个)

3. 设某电话总机要为2000个用户服务，在最忙时，平均每户有3%的时间占线，假设各户是否打电话是相互独立的，问若想以99%的可能性满足用户的要求，最少需要多少条线路？(79条)