基础物理复习
–力学

庞丹阳

物理科学与核能工程学院

北京航空航天大学

May 4, 2016

第一章：质点运动学::数学

由 $\vec{a}$ 求 $\vec{v}$, $\vec{r}$：常微分方程，初始值问题

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)d\tau + C, \tag{1}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{v}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)d\tau + C, \tag{2}$$

这里常数 C 由初始值 $\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$确定。

一维直线运动：

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at, \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} \tag{3}$$

第一章

质点运动学

第一章：质点运动学::术语

- 质点、参考系和坐标系
- 位置：$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{\vec{e}}_i + y(t)\hat{\vec{e}}_j + z(t)\hat{\vec{e}}_k$
- 位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\vec{e}}_i + (y_2 - y_1)\hat{\vec{e}}_j + (z_2 - z_1)\hat{\vec{e}}_k$
- 速度：$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
- 加速度：$\vec{a} = \dot{\vec{v}} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$
- 角速度：$\omega = \dot{\theta} \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
- 角加速度：$\beta = \dot{\omega} \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
- 横向速度、径向速度
- 运动方程：质点的位置矢量 $\vec{r}$ 随时间的变化关系 $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- 伽利略变换，牵连速度

第一章：质点运动学::习题1

一质点作直线运动，其加速度为 $a=-2x$，求该质点的速度与位置坐标之间的关系（设当 $x=0$ 时 $v_0=4$ m/s）。

数学基础：对于二阶奇次方程

$$y''+py'+qy=0 \tag{4}$$

若 r_1, r_2 为其特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根，则：

1. 若 $r_1\neq r_2$，则 $Y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
2. 若 $r_1=r_2=r$，则 $Y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
3. 若 $r_1=a+bi, r_2=a-bi$，则 $Y=e^{ax}[C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx)]$

我们的题目：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2x$$

第一章：质点运动学::习题1

由题目：$\frac{d^2x}{dt^2} = -2x$, $p = 0$, $q = 2$，我们有$r_1 = \sqrt{2}i$, $r_2 = -\sqrt{2}i$, i.e., $a = 0$, $b = \sqrt{2}$, 因此

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t) \\ \Rightarrow v(t) &= -\sqrt{2}C_1 \sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}C_2 \cos(\sqrt{2}t) \end{aligned} \tag{5}$$

初始值：

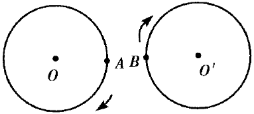
$t = 0$ 时 $x = 0 \Rightarrow C_1 = 0$,

$x = 0$ $(t = 0)$, $v(t = 0) = 4$ m/s, $\Rightarrow C_2 = 2\sqrt{2}$, 因此我们有：

$$x(t) = 2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t),\ v(t) = 4\cos(\sqrt{2}t) \Rightarrow 2x^2(t) + v^2(t) = 16. \tag{6}$$

第一章：质点运动学::习题2

A, B 两质点在同一平面上分别绕两个固定圆心 O 和 O' 按顺时针方向做匀速圆周运动，角速度都是 ω，这两个圆的半径都是 R，O 和 O' 之间的距离为 $3R$。已知 $t=0$ 时两个质点的距离最近，为 R，如图所示。求质点 B 相对于质点 A 的轨迹方程、速度和加速度（要求速度和加速度用矢量表示）。



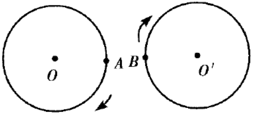
第一章：质点运动学::习题2

数学知识：向量的表示

$$x, y = \vec{r} = x\hat{\vec{e}}_i + y\hat{\vec{e}}_j = re^{i\theta}, \quad x = r\cos\theta, \, y = r\sin\theta \tag{7}$$

以 O 为原点建立坐标系，x 轴向右，y 轴向上，则点 A 和 B 的坐标分别为：

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= Re^{-i\omega t} \\ \vec{r}_B &= 3R + Re^{-i\omega t + i\pi} = 3R - Re^{-i\omega t} \end{aligned}$$



则 B 相对于 A 的运动方程为：

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = 3R - 2Re^{-i\omega t} = (3R - 2R\cos\omega t)\hat{\vec{e}}_i + 2R\sin\omega t\hat{\vec{e}}_j$$

第一章：质点运动学::习题2

$$\vec{r}_{BA}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=3R-2Re^{-i\omega t}=(3R-2R\cos\omega t)\hat{\vec{e}}_i+2R\sin\omega t\hat{\vec{e}}_j$$

以 A 为坐标原点，建立 x', y' 坐标系，x' 和 y' 分别平行于 x, y 轴，则 B 在 x', y' 坐标系中的坐标为：

$$x'=3R-2R\cos\omega t,\quad y'=2R\sin\omega t \tag{8}$$

因此，B 点相对于 A 点的轨迹方程为：$(x'-3R)^2+y'^2=4R^2$.

$$\vec{v}'=\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}=2R\omega\sin\omega t\hat{\vec{e}}_i+2R\omega\cos\omega t\hat{\vec{e}}_j=2R\omega(\sin\omega t\hat{\vec{e}}_i+\cos\omega t\hat{\vec{e}}_j)$$

$$\vec{a}'=\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t}=2R\omega^2(\cos\omega t\hat{\vec{e}}_i-\sin\omega t\hat{\vec{e}}_j) \tag{9}$$

第一章：助教反馈

第 1.18 题： 质点沿 x 轴正向运动，加速度为 $a=-kv$，k 为常数，设从原点出发是速度为 v_0，求运动方程 $x=x(t)$。

解： 先求速度随时间的变化：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}t$

$\Rightarrow \mathrm{d}(\ln v)=-k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln v=-kt+C \Rightarrow v(t)=e^{C}\times e^{-kt}$

初始条件：$t=0$ 时 $v=v_0$

$\Rightarrow e^{C}=v_0 \Rightarrow v(t)=v_0e^{-kt}$。

再求位置随时间的变化：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= v(t)=v_0e^{-kt} \\
\Rightarrow x(t) &= v_0\int_0^t e^{-k\tau}\mathrm{d}\tau+C=\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})+C
\end{aligned}$$

初始条件：$t=0$ 时 $x(0)=0$

第二章

牛顿力学基本定律

第二章：牛顿定律：内容提要

- 牛顿三定律。

  第一定律 惯性和力的概念，惯性系的定义。

  第二定律 $\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{p}=m\vec{v}$，当 m 为常量是，$\vec{F}=m\vec{a}$

  第三定律 $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

  叠加原理 $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots$

- 惯性系与非惯性系：相对惯性参考系做匀速直线运动的任何其它参考系一定也是惯性系。
- 牛顿定律只有在惯性参考系中才成立，或者说惯性参考系就是用牛顿第一定律定义的参考系。
- 惯性力：为形式地利用牛顿第二定律分析问题而引入的概念。

第二章：牛顿定律：在经典力学中的地位

经典力学包含两组定律：**牛顿三定律**和**力的结构性定律**。

牛顿三定律是核心内容，由此演绎出动量、能量、角动量三定律，具有普适性。

力的结构性定律涉及物体（或物质）间具体的相互作用规律，其中包括牛顿万有引力定律、胡克弹性力定律、摩擦力定律、库仑定律等。

两组定律结合展开成**经典力学体系**，可以统一地解释宏观世界和部分宇观世界中出现的种种力学现象。

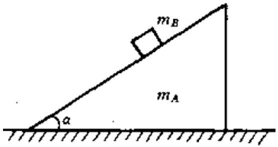
– 舒幼生，《力学》，北京大学出版社，2005 年 9 月第 1 版

第二章习题分类

1. 利用 $\vec{F}=m\vec{a}$：第 1-5、9、10 题
2. 利用 $\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$（注意确定加速度方向）：第 6-8、20、21 题
3. 转动非惯性系中的惯性力–离心力和科里奥利力：第 11-14、18、19、22、23 题
4. 万有引力定律：第 15、16 题
5. 万有引力的性质：密度均匀的球壳对它内部任一质点的引力为零：第 17 题

第二章：牛顿定律：习题 2.4

（教材第 2.4 题）如图，物体 B 与物体 A 之间无摩擦，A 与水平面之间的摩擦因数为 μ，当 B 沿斜面下滑时，求 μ 等于多大才能使 A 相对地面不动？

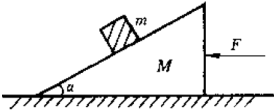


$$
\begin{aligned}
f_\mu &= R\mu \\
f_\mu &\geq N'\sin\alpha \\
N' = N &= m_B g\cos\alpha \\
R &= m_A g + N'\cos\alpha \\
\Rightarrow \mu &\geq \frac{m_B\cos\alpha\sin\alpha}{m_A + m_B\cos^2\alpha}
\end{aligned}
$$

第二章：牛顿定律：习题 2.7

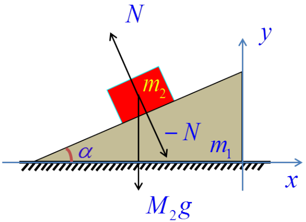
（教材第 2.7 题）如图，质量为 M 的三角形块放在光滑水平面上，斜边与水平方向夹角为 α，在斜边上放一质量为 m 的木块，设 M 与 m 之间无摩擦，求：

1. 两木块运动的加速度；
2. 若使两木块相对静止，需要在 M 上施加的水平方向上的恒力 F 应该是多大？



第二章：牛顿定律：习题 2.7：解答

分别分析 M 和 m 的受力，列方程：



$$\begin{aligned} N\sin\alpha &= ma_{mx} \\ mg - N\cos\alpha &= ma_{my} \\ -N\sin\alpha &= Ma_{Mx} \end{aligned}$$

还需要一个方程：从相对运动角度看，m 相对于 M 的加速度 a'_m 始终沿着斜面方向，因此有：

$$\frac{a'_{my}}{a'_{mx}} = \tan\alpha$$

其中 $a'_{my} = a_{my}$，$a'_{mx} = a_{mx} - a_{Mx}$。由此可以解出：

$$N = \frac{Mmg\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \quad a_{mx} = \frac{M\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g, \quad a_{my} = -\frac{(M+m)\sin^2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$

第二章：牛顿定律：习题 2.20

习题 2.20：升降机中水平桌上有质量为 m 的物体 A，它被细线所系，细线跨过滑轮与质量也为 m 的物体 B 相连。当升降机以加速度 $a=g/2$ 上升时，机内的人和地面上的人将观察到 A, B两物体的加速度分别是多少？

此题关键：地面参考系与升降机参考系中的加速度（$\vec{a}$ 和 $\vec{a}'$）的关系：$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}'$，其中 $\vec{a}_0$ 为升降机的加速度。

从地面看：

$$\begin{aligned} T &= ma_A \\ mg-T &= ma_B \\ a_B &= a_A+(-a) \\ \Rightarrow a_A &= \frac{3}{4}g,\ a_B=\frac{1}{4}g. \end{aligned}$$

从升降机内看：

$$\begin{aligned} T &= ma_A \\ m[g-(-a)]-T &= ma_B \\ a_B &= a_A \\ \Rightarrow a_A &= a_B=\frac{3}{4}g. \end{aligned}$$

第二章：牛顿定律：习题 2.9

习题 2.9：质点在空气中无处速度自由下落时，在速度不大的情况下阻力 $\vec{F}$ 的大小与速度成正比，即 $\vec{F}=-k\vec{v}$，k 为常数。使用积分法求质点速度随时间的变化关系。

解：此题与 1.18 题非常相似，初始条件不一样而已。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v=g$$

两端同时乘上 $e^{\frac{k}{m}t}$，有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{k}{m}t}\right)+\frac{k}{m}ve^{\frac{k}{m}t}=ge^{\frac{k}{m}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\left(ve^{\frac{k}{m}t}\right)}{\mathrm{d}t}=ge^{\frac{k}{m}t}\Rightarrow ve^{\frac{k}{m}t}=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+C.$$

初始条件：$t=0,\ v=0\Rightarrow C=-mg/k$

$$\Rightarrow v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

第二章：牛顿定律：习题 2.14

- 习题 2.14：一条均匀的绳子，质量为 m，长度为 ℓ，将它一头拴在转轴上，以角速度 ω 旋转。试证明略去重力时绳中的张力分布为$T(r) = \frac{m\omega^2}{2\ell}(l^2 - r^2)$，式中 r 为绳元到转轴的距离。

- 解：绳子的密度为 $\rho = m/\ell$。分析 r 和 $r + dr$ 这一段绳子的运动（其质量为 $\rho \mathrm{d}r$）：

$$\mathrm{d}T(r) = -(\rho \mathrm{d}r)\omega^2 r,$$

$$\Rightarrow T(r) = -\frac{m\omega^2}{\ell}\int_0^r r' \mathrm{d}r' + C \Rightarrow T(r) = -\frac{m}{2\ell}\omega^2 r^2 + C$$

初始条件：$T(\ell) = 0 \Rightarrow C = \frac{m\omega^2 \ell}{2}$，因此：

$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2\ell}(l^2 - r^2).$$

补充问题：匀质球对球外物体万有引力的计算

- 题目：证明密度均匀的球体对球外质点的引力等效于球体质量全部集中于球心时对球外质点的引力。
- 解：设球的密度为 ρ_0，半径为 R，球外质点到球心的距离为 a $(a > R)$。以球心为原点，球心到球外质点的连线为 Z 轴，由球心到球外质点方向为 Z 轴正方向建立坐标系。由球体的对称性及质量分布的均匀性可知匀质球对球外质点引力的 x, y 方向的引力 $F_x = F_y = 0$。所求引力沿 Z 轴的分量为：

$$F_z = \iiint\limits_{\Omega} G\rho_0 \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} \mathrm{d}v$$

补充问题：匀质球对球外物体万有引力的计算

$$
\begin{aligned}
F_z &= \iiint\limits_{\Omega} Gm\rho_0 \frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}}\mathrm{d}v \\
&= Gm\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{3/2}} \\
&= Gm\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{[\rho^2+(z-a)^2]^{3/2}} \\
&= 2\pi Gm\rho_0 \int_{-R}^{R} (z-a)\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{\sqrt{R^2-2az+a^2}}\right) dz \\
&= 2\pi Gm\rho_0 \left[-2R + \frac{1}{a}\int_{-R}^{R} (z-a)\mathrm{d}\sqrt{R^2-2az+a^2}\right] \\
&= 2\pi Gm\rho_0 \left(-2R+2R-\frac{2R^3}{3a^2}\right) = -Gm\frac{4\pi R^3}{3}\rho_0\frac{1}{a^2} = -G\frac{Mm}{a^2}
\end{aligned}
$$

补充问题：匀质球对球外物体万有引力的计算：数学基础

定积分（数学手册）：

1: $\int \frac{x\mathrm{d}\,x}{(x^2 \pm a^2)^{n/2}} = \frac{(x^2 \pm a^2)^{1-n/2}}{2-n} + C$

2: $\int \sqrt{a+bx}\mathrm{d}x = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2} + C$

分步积分的应用：$\int u\mathrm{d}v = \int \mathrm{d}uv - \int v\mathrm{d}u$

第二章：牛顿定律：小结

惯性系 S： $m\vec{a} = \vec{F}$

非惯性系 S'： $m\vec{a}' = \vec{F}' \quad \vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{惯性力}}$，

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

平移惯性力： $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$

惯性离心力： $\vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

科里奥利力： $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$

横向惯性力： $-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$

第三、四、五章

动量、机械能、角动量及其守恒

力学的理论体系

惯性系S $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$

非惯性系S' $\boxed{m\vec{a}' = \vec{F}'}$ $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{惯性力}$

$\vec{F}dt$

动量定理

动量守恒定律

$\vec{F} \cdot d\vec{r}$

动能定理

机械能守恒定律

能量守恒定律

$\vec{r} \times \vec{F}$

角动量定理

角动量守恒定律

概念的引入

动量： 由考察作用力 $\vec{F}$ 的时间积累效应引入

$$\vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{a}\mathrm{d}t = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = m\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(m\vec{v}) = \mathrm{d}\vec{p} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

动量：$\vec{p} \equiv m\vec{v}$；若 $\vec{F} = 0$ 则 $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow$ 动量守恒。

动能： 由考察作用力 $\vec{F}$ 做功引入

$$\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = m\vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{\ell} = m\mathrm{d}\vec{v}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} = \mathrm{d}(\frac{1}{2}m\vec{v}^2)$$

动能：$E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2$，$\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}\vec{\ell}} = \vec{F} \Rightarrow$ 场 $\Rightarrow$ 势能、机械能。

角动量： 由考察作用力 $\vec{F}$ 的力矩引入

$$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{v}}{\mathrm{d}t} - m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{v} = \frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}$$

角动量：$\vec{L} \equiv \vec{r}\times\vec{p}$，$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow$ 角动量守恒。

守恒量与对称性

诺特（Emmy Noether (1882-1935)）论证了对称性与守恒律之间存在的普遍联系：

连续变换的对称性都对应一条守恒定律

时间平移对称性 $\Rightarrow$ 能量守恒定律

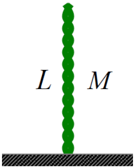
空间平移对称性 $\Rightarrow$ 动量守恒定律

空间转动对称性 $\Rightarrow$ 角动量守恒定律

魏尔（H. Weyl）：对称性是系统在某种变换下具有的不变性。

第三章：习题 1

题目：质量为 M 的匀质细软绳，下端正好与水平地面接触，上端用手提住使绳子处于静止伸直状态。而后松手，绳子自由下落，求绳子落下 $\ell < L$ 长度的时刻地面所受正压力的大小 N。



解法一：绳子下落长度 ℓ 时，地面所受压力分为两部分：静止绳子的压力 $N_1 = \frac{\ell}{L}Mg$ 和下落绳子的压力 N_2。

下落速度 $v = \sqrt{2gl}$

$$N_2 dt = \mathrm{d}p = (\mathrm{d}m)v = \frac{v\mathrm{d}t}{L}Mv \Rightarrow N_2 = 2Mg\frac{\ell}{L}$$

所以总压力 $N = N_1 + N_2 = 3Mg\frac{\ell}{L}$。

第三章：习题 1

解法二：利用质点系动量定理：

质点系所受合外力提供的冲量等于质点系的动量增量：$\vec{F}_{\text{合外}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$。

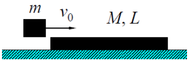
将绳子作为一个整体，考虑它的受力和动量的增量，根据上式，沿竖直朝下方向有（利用 $v = \sqrt{2g\ell}$ 和 $\ell = v^2/2g$）：

$$
\begin{aligned}
Mg - N = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L-\ell}{L}Mv\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L-\frac{v^2}{2g}}{L}Mv\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Mv - \frac{M}{2gL}v^3\right) \\
&= Mg - 3Mg\frac{\ell}{L}.
\end{aligned}
$$

因此，$N = 3Mg\frac{\ell}{L}$.

第四章：习题 1

题目：长 L、质量为 M 的平板放在光滑水平面上，质量为 m 的小木块以水平初速度 v_0 滑入平板上表面，两者之间摩擦系数为 μ，求小木块刚好未能滑离平板的条件。



解法一：小木块移动到平板右端时与平板速度相同，$(M+m)v = mv_0$

过程中 m 与 M 之间的摩擦力做功为：$W = -\mu mgL$

利用地面惯性系中动能定理：$W = \frac{1}{2}(M+m)v^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$

可以得出：$v_0^2 = 2\mu\frac{M+m}{M}gL$

第四章：两体碰撞：质心系

质量为 m 的物体 以 v_0 的速度与质量为 M 的物体，假定 M 静止不动 ($\vec{r}_M = 0$)。

质心速度：$\vec{R}_{cm} = \frac{m\vec{r}_m + M\vec{r}_M}{M+m} = \frac{m}{M+m}\vec{r}_m \Rightarrow V_{cm} = \frac{m}{M+m}v_0$

m 和 M相对质心的动能（有用能）：

$$\begin{aligned} E_{cm} &= \frac{1}{2}m{v'_m}^2 + \frac{1}{2}M{v'_M}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\frac{M^2}{(M+m)^2}v_0^2 + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{(M+m)^2}v_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0^2 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 \end{aligned}$$

例子：粒子对撞机。

第四章：习题 1

解法二：当做两体问题处理：

木块以初速度 v_0 滑入，两体在质心系相对运动的动能为

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+M}v_0^2$$

最后静止在木板右端，两体在质心系相对运动的动能为 0.

相对运动动能的减少等于摩擦力所做的功，因此

$$\mu mgL = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+M}v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = 2\mu gL\frac{M+m}{M}.$$

第四章：习题 1

解法三：随木板运动的非惯性系中，木块以初速度 v_0 滑入，随后静止在木板右端，在这个过程中摩擦力和惯性力做功。

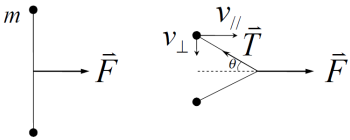
非惯性系的平动加速度为：$a_0 = \mu \frac{m}{M} g$

木块所受惯性力：$F_i = -ma_0 = -m\frac{\mu mg}{M}$

按照动能定理：$m\frac{\mu mg}{M}L + \mu mgL = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0^2 = 2\mu gL\frac{M+m}{M}.$

第四章：习题 2

题目：质量同为 m 的两个小球，用长为 2ℓ 的轻绳连接后静止放在光滑桌面上，受绳中央的恒力 F 作用。问在两球第一次碰撞前的瞬间，小球在垂直于 F 的方向上的速度分量为多大？



解法一：绳中张力的水平分量 $T_x = F/2$

因此，小球在平行方向做匀加速运动，设两球碰撞前的行程 s，则 $v_{\|} = \sqrt{2\frac{F/2}{m}s}$

利用动能定理：

$$F(s+\ell) = 2 \times \frac{1}{2}m(v_{\|}^2 + v_{\perp}^2) \Rightarrow v_{\perp} = \sqrt{\frac{F\ell}{m}}$$

第四章：习题 2

解法二：在某一时刻，绳中张力的垂直分量：$T_\perp = \frac{F}{2}\tan\theta$

小球在垂直方向上的位移为 $s = \ell\sin\theta \Rightarrow \mathrm{d}s = \ell\cos\theta\mathrm{d}\theta$

利用动能定理，我们有：

$$\int_L^0 -T_\perp \mathrm{d}s = -\int_{\pi/2}^0 \frac{F\ell}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{F\ell}{2} = \frac{1}{2}mv_\perp^2$$

因此有：

$$v_\perp = \sqrt{\frac{F\ell}{m}}$$

第四章：习题 2

解法三： 在随小球沿受力方向平行运动的非惯性系中，只有 F 做功，做功距离为 ℓ

利用动能定理：

$$F\ell = 2 \times \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \Rightarrow v_{\perp}^2 = \sqrt{\frac{F\ell}{m}}.$$

第四章：习题 3

结合机械能守恒和动量守恒解课本第 3.3 节例题：

斜面、滑块和地球系统机械能守恒，因此：

$$mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2). \tag{10}$$

在 x 方向上动量守恒：

$$MV = mv_x. \tag{11}$$

另外，相对于斜面滑块的 x 和 y 方向的速度满足：

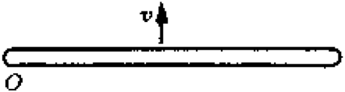
$$\frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x + V} = \tan\alpha. \tag{12}$$

联立以上三个方程，可得：

$$V^2 = \frac{2m^2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}$$

第五章：习题 1

习题 5.3：质量为 m、长为 ℓ 的均匀细棒在光滑水平面上以 v 匀速运动，求某时刻棒对端点 O 的角动量。



解：考察质元 $\mathrm{d}m$ 对 O 点的角动量：

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}m$$

$\mathrm{d}\vec{L}$ 的方向通过右手规则确定，位矢 $\vec{r}$ 与速度 $\vec{v}$ 垂直，$\mathrm{d}\vec{L}$ 的大小为

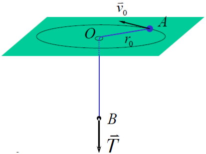
$$\mathrm{d}L = rv\mathrm{d}m$$

而 $\mathrm{d}m = \frac{m}{\ell}\mathrm{d}\ell$，因此

$$\mathrm{d}L = v\frac{m}{\ell}r\mathrm{d}r \Rightarrow L = \int \mathrm{d}L = \int_0^\ell v\frac{m}{\ell}r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}m\ell v.$$

第五章：习题 2

题目：小球绕 O 作圆周运动，速度为 v_0，半径为 r_0，如图所示。求（1）B 端所受竖直向下的外力 T_0；（2）T_0极缓慢地增加到 $2T_0$，求 v；（3）用功的定义式求拉力所做的功。



解：分析物理过程：

以 O 为参考点，力矩为零，角动量守恒。T_0 极缓慢增大，径向速度可以忽略，中间过程近似为圆周运动。因此

1. $T_0 = m\frac{v_0^2}{r_0}$
2. 对于圆周运动，$\frac{mv^2}{r} = 2T_0 = \frac{2mv_0^2}{r_0}$。利用角动量守恒 $mvr = mv_0r_0$，因此有：$v = \sqrt[3]{2}v_0$，$r = \frac{r_0}{\sqrt[3]{2}}$
3. 拉动过程中小球做螺旋线运动，$\mathrm{d}W = \vec{T}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -T\mathrm{d}r$，而拉力 $T = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv_0^2r_0^2}{r^3}$，因此 $W = -\int_{r_0}^{r_0/\sqrt[3]{2}} \frac{mv_0^2r_0^2}{r^3}dr = \frac{1}{2}mv_0^2(\sqrt[3]{4}-1)$.

第五章：习题 3

题目：水平面内一静止的均匀细棒，长 L、质量 M，可绕通过棒端且垂直于棒长的光滑固定轴 O在水平面内转动。一质量 m，速率 v 的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为 $\frac{1}{2}v$，则此时棒的角速度应为：

(A) $\frac{mv}{ML}$ (B) $\frac{3mv}{2ML}$

(C) $\frac{5mv}{3ML}$ (D) $\frac{7mv}{4ML}$

第七章内容概述

1. 刚体绕定轴转动运动学描述

(1) 角坐标θ　　$\theta=\theta(t)$

(2) 角速度ω　　$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

(3) 角加速度β　　$\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

(4) 线量和角量的关系

$$s=r\Delta\theta \qquad v=r\omega \qquad a_{\mathrm{t}}=r\beta \qquad a_{\mathrm{n}}=r\omega^2$$

(5) 匀变速定轴转动

$$\omega=\omega_0+\beta t \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$$

– 王金良老师讲义

第七章内容概述（续）

2. 刚体绕定轴转动的转动惯量------刚体转动惯性的量度

(1) 转动惯量 $J=\sum_i m_i r_i^2$ 或 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

(2) 平行轴定理 $J=J_{\mathrm{C}}+md^2$

3. 刚体绕定轴转动的转动定律

$$M=J\beta$$

4. 刚体绕定轴转动的功和能

(1) 刚体转动动能 $E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}J\omega^2$

(2) 力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

(3) 刚体绕定轴转动的动能定理 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$

– 王金良老师讲义

第七章内容概述（续）

(4) 刚体的重力势能 $E_p = mgh_C$

(5) 机械能守恒定律

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时， $E = E_k + E_p =$ 常量

5. 刚体绕定轴转动的角动量

(1) 刚体的角动量 $L = J\omega$

(2) 刚体的角动量定理 $M = \dfrac{d}{dt}(J\omega)$

(3) 角动量守恒定律

当 $M = 0$ 时， $J\omega =$ 常量

(4) 刚体进动的角速度公式 $\Omega = \dfrac{M}{L}$

– 王金良老师讲义

常见物体的转动惯量

刚体（质量为m）	转轴位置	转动惯量
细棒（棒长为l）	通过中心与棒垂直	$J_C = \frac{1}{12} ml^2$
	通过端点与棒垂直	$J_D = \frac{1}{3} ml^2$
细圆环（半径为R）	通过中心与环面垂直	$J_C = mR^2$
	直径	$J_x = J_y = \frac{1}{2} mR^2$
薄圆盘（半径为R）	通过中心与盘面垂直	$J_C = \frac{1}{2} mR^2$
	直径	$J_x = J_y = \frac{1}{4} mR^2$
空心圆柱（内外半径为R_1和R_2）	对称轴	$J_C = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
球壳（半径为R）	中心轴	$J_C = \frac{2}{3} mR^2$
球体（半径为R）	中心轴	$J_C = \frac{2}{5} mR^2$

– 王金良老师讲义

质点运动规律与刚体定轴转动规律比较

质点的运动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$	角速度	$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$
加速度	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	角加速度	$\beta=\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
质量	m	转动惯量	$J=\int r^2 dm$
力	$\vec{F}$	力矩	M
运动规律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\beta$
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$	动量	$\vec{p}=\sum \Delta m_i \vec{v}_i$
角动量	$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$	角动量	$L=J\omega$
动量定理	$\vec{F}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$	角动量定理	$M=\dfrac{d(J\omega)}{dt}$

– 王金良老师讲义

质点运动规律与刚体定轴转动规律比较

质点的运动		刚体的定轴转动	
动量守恒	$\sum F_i = 0$时 $\sum m_i v_i =$ 恒量	角动量守恒	$M = 0$时 $\sum J\omega =$ 恒量
力的功	$A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$	力矩的功	$A_{ab} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$
动能	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2$	转动动能	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} J\omega^2$
动能定理	$A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	动能定理	$A = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$
重力势能	$E_\mathrm{p} = mgh$	重力势能	$E_\mathrm{p} = mgh_C$
机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} =$ 恒量	机械能守恒	$A_{外} + A_{非保内} = 0$时 $E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} =$ 恒量

– 王金良老师讲义

第七章：题目相关的几点内容

刚体转动定理： 包括平行轴定理 $I = I_C + md^2$，
定轴转动定理 $M_z = \frac{\mathrm{d}(I\omega)}{\mathrm{d}t} = \vec{R} \times \vec{F}_{xy}$，
动能定理： $\frac{1}{2}I\omega_2 - \frac{1}{2}I\omega_1 = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M\mathrm{d}\phi$

质心运动定理： 包括**质心动量变化定理**（合外力的冲量）、**质心动能定理**（科尼希定理，质心动能与相对质心动能）、**质心角动量变化定理**（作用在质心上的合外力矩，惯性参考系中的固定参考点）、**质心系中的角动量变化定理**（质心系中相对质心的角动量的时间变化率等于对质心的外力矩之和）。

质点组总角动量： 等于质心角动量与相对质心角动量的和

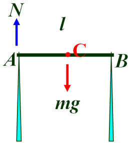
动量守恒： 外力、合外力

机械能守恒： 保守力

角动量守恒： 合外力的力矩

角量和线量： $v = r\omega$, $a = r\beta$

第七章：习题 1



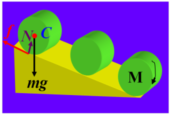
题目：两人抬杠，一方撒手瞬间，另一方承受多大的压力？

解： A和 B 两人抬一水平横杠，B 撒手时刻棒以 A 端为瞬时轴做定轴转动。此瞬间棒受重力 mg 和 A 的支持力 N，故有：

$$
\begin{aligned}
mg - N &= ma_c \quad \text{质心运动定理} \\
mg \times \frac{\ell}{2} &= I\beta \quad \text{绕 A 端转动定律} \\
a_c &= \frac{\ell}{2} \times \beta \\
I &= \frac{1}{3} m\ell^2
\end{aligned}
$$

因此，有 $N = \frac{1}{4} mg$。

第七章：习题 2



题目：非光滑斜面上一圆柱（或圆筒）从静止开始纯滚而下。求下落高度为 h 时物体质心的速度，角速度和静摩擦力。

解： 刚体的平面运动=质心运动+绕质心的转动。

$$\begin{aligned} v_c &= \omega R \quad \text{纯滚条件} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \quad \text{机械能守恒} \\ I_c &= \frac{1}{2}mR^2 \end{aligned}$$

由此可求出质心速度 $v_c = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{gh}$，角速度 $\omega = \frac{v_c}{R} = \frac{2}{\sqrt{3}R}\sqrt{gh}.$

第七章：习题 2

再讨论维持纯滚所需要的静摩擦力：

$$
\begin{aligned}
mg\sin\theta - f &= m\frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} \quad \text{质心运动定理} \\
fR &= I_c\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \quad \text{绕质心转动定理} \\
v_c(t) &= R\omega(t) \quad \text{纯滚条件}
\end{aligned}
$$

由此可求出静摩擦力 $f = \frac{1}{3}mg\sin\theta$.

第七章：习题 2

讨论维持纯滚所需要的静摩擦力的另一种方法：

$$
\begin{aligned}
ma_c &= mg\sin\theta - f && \text{质心运动定理} \\
v_c^2 &= 2a_c s && \text{质心运动为匀加速直线运动} \\
h &= s\sin\theta
\end{aligned}
$$

由此可求出静摩擦力 $f = \frac{1}{3}mg\sin\theta$。设最大静摩擦系数为 μ，

则最大静摩擦力为 $f_{\theta_{max}} = \mu mg\cos\theta$，维持纯滚的条件为：$f_{\theta_{max}} \geq f$，

因此 $\Rightarrow \mu mg\cos\theta \geq \frac{1}{3}mg\sin\theta \Rightarrow \mu \geq \frac{1}{3}\tan(\theta)$.

第七章：习题 3

题目：质量为 m，半径为 R 的均匀球体沿斜面向下做纯滚动，求其质心加速度。

解法一：分析球的受力：作用在质心上的重力 mg，垂直于斜面的支持力 N，沿斜面的静摩擦力 f。根据质心定理，我们有：

$$mg\sin\theta - f = ma_C,$$

支持力 N 和重力 mg 对质心的力矩皆为零，只有摩擦力对质心有力矩，由转动定理有：

$$fR = I_C\beta$$

有由纯滚动条件：

$$a_C = R\beta$$

结合以上三个方程，可以得到 $a_C = \frac{5}{7}g\sin\theta$

第七章：习题 3

解法二：利用能量微商法。在地球参考系中小球的机械能守恒：

$$E=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2+mgh_C=\mathrm{const}$$

式中 $\frac{1}{2}mv_C^2$ 为质心平动动能，$\frac{1}{2}I_C\omega^2$ 为球对知心的转动动能，mgh_C 为重力势能。将上式对时间做微商，则有：

$$mv_C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}+I_C\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+mg\frac{\mathrm{d}h_C}{\mathrm{d}t}=0$$

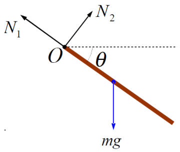
式中

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=a_C,\quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\beta,\quad \frac{\mathrm{d}h_C}{\mathrm{d}t}=-v_C\sin\theta$$

利用纯滚动关系 $v_C=R\omega$, $a_C=R\beta$，同样可求得：

$$a_C=\frac{5}{7}g\sin\theta.$$

第七章：习题 4



题目：质量 m、长 ℓ 的匀质细杆绕水平轴在竖直平面内自由摆动。将杆水平静止释放后，当摆角为 θ 时，求（1）杆的旋转角速度和角加速度；（2）转轴对杆的支持力。

解：（1）

利用机械能守恒：

$$mg\frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}I_o\omega^2, \quad I_o = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}\sin\theta} \Rightarrow \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} = \frac{3g}{2\ell}\cos\theta$$

另外，用角动量定理也可以得到 β：$mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = I_o\beta$

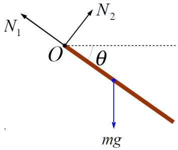
第七章：习题 4

解：（2）求轴对杆的作用力
利用质心运动定理，径向：

$$N_1 - mg\sin\theta = ma_{C径}, \quad a_{C径} = \omega^2\frac{\ell}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{5}{2}mg\sin\theta$$

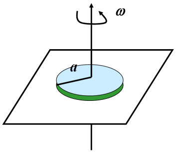
切向：

$$mg\cos\theta - N_2 = ma_{C切}, \quad a_{C切} = \beta\frac{\ell}{2} \Rightarrow N_2 = \frac{1}{4}mg\cos\theta$$



第七章：习题 5

题目：一匀质圆盘，半径 a，放在粗糙水平桌面上，绕过其中心的竖直轴转动，开始时角速度为 ω_0。已知圆盘与桌面的摩擦系数为 μ，问经过多长时间后圆盘将停止？停止时圆盘转过了多少角度？



解：

第一步：求摩擦力对圆盘转轴的力矩：取圆盘上任一一块质量 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}s = \rho r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$，它所受摩擦力为 $\mathrm{d}mg\mu$，此部分摩擦力的力矩为 $\mathrm{d}\vec{M} = -r\mathrm{d}mg\mu = -\mu g r^2 \rho \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，则

$$\vec{M} = -\int_0^a \int_0^{2\pi} \mu g \rho r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\pi\mu\rho g a^3$$

第七章：习题 5

解：第二步：利用定轴转动定理：$\vec{M}=I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，对于匀质圆盘：$I=ma^2/2$，因此（$m=\rho\pi a^2$）

$$\frac{1}{2}ma^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{2}{3}\pi\mu\rho g a^3\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{4}{3}\frac{g\mu}{a}$$

因此

$$\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega=\int_0^t-\frac{4}{3}\frac{g\mu}{a}\Rightarrow t=\frac{3}{4}\frac{a\omega_0}{g\mu}$$

由刚体转动的动能定理：$\Delta E_k=\int_{\theta_0}^{\theta}M\mathrm{d}\theta=0-\frac{1}{2}I\omega_0^2$ 可以得到：

$$-\frac{2}{3}\pi\mu\rho g a^3\Delta\theta=-\frac{1}{4}ma^2\omega_0^2\Rightarrow\Delta\theta=\frac{3}{8}\frac{a\omega_0^2}{\mu g}$$

第七章：习题 6

书上第 7.26 题地面上有一线轴，今用一力拉线，线与地面成 θ 角，假定线轴与地面之间无滑动，试证明（1）$\theta < \arccos(r/R)$ 时线轴向右滚动；（2）$\theta > \arccos(r/R)$ 时线轴向左滚动。

解： 线轴外轴与地面接触点 P 为瞬心（瞬时速度为零的点）,过 P 点做线轴与内轴的切线 AP，如果拉力在切线 AP 上，作用点为 A，则力 F_A 对 P 点的力矩为零，线轴不滚动，此时拉线与地面夹角为

$$\theta_c = \arccos(r/R)$$

（1）若 $\theta < \arccos(r/R)$，力 F 对 P 点的力矩垂直纸面向里，线轴向右滚动；

（2）反之，线轴向左滚动。

第八、九章：振动与波

第八、九章：基本概念

简谐振动： 物体在线性回复力 $f=-kx$ 作用下的运动，满足微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2x=0,\quad \text{其通解为}$$

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi_0)$$

本征频率 ω_0 由系统故有性质决定，A 为振幅，$\phi(t)=\omega_0 t+\phi_0$ 为相位。它们是描述简谐振动的特征量。

振幅： 振动的最大位移，由初条件（初位置和初速度）决定：

$$A=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega_0)^2}$$

振动周期： T 与频率 f 及单位时间内相位的变化 ω（角频率）的关系为$\omega_0=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$

第八、九章：基本概念

机械能： 物体做自由振动时机械能守恒，其机械能为

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

简正模： 多自由度弹性系统的集体运动模式，每一种模式有自己的本征频率，相互独立，线性叠加

振动的合成： （1）同方向同频率的两个简谐振动的合成：

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \phi_{10}) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \phi_{20}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \phi_0) \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_{20} - \phi_{10})} \\ \phi_0 &= \arctan \frac{A_1 \sin\phi_{10} + A_2 \sin\phi_{20}}{A_1 \cos\phi_{10} + A_2 \cos\phi_{20}} \end{aligned}$$

第八、九章：基本概念

振动的合成：（2）同频率相互垂直的两个简谐振动的合成

$$
\begin{aligned}
x &= A_1\cos(\omega t+\phi_1)\\
y &= A_2\cos(\omega t+\phi_2)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\phi_2-\phi_1)=\sin^2(\phi_2-\phi_1) \qquad (13)
$$

合成轨迹为椭圆

振动的合成：（3）频率接近方向相同的两个简谐振动的合成

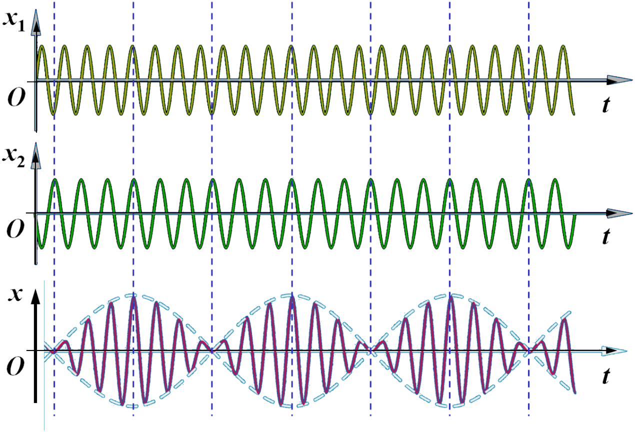
$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_1\cos(\omega_1 t)\\
x_2 &= A_2\cos(\omega_2 t)
\end{aligned}
$$

$$
x=x_1+x_2=2A\cos\left(\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)
$$

拍频 $\omega_b=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$.

拍频

❖ 拍的现象



拍频：单位时间内合振动振幅强弱变化的次数

即：$\nu = \left|(\omega_2 - \omega_1)/(2\pi)\right| = \left|\nu_2 - \nu_1\right|$

– 王金良老师讲义

第八、九章：基本概念

弹性系统阻尼振动： 微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

阻尼因数 $\beta=\gamma/2m$，γ 为阻尼系数，本征频率 $\omega_0=\sqrt{k/m}$。强阻尼、弱阻尼和临界阻尼。

共振： 弹性系统受迫振动的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}\cos(\omega t)$$

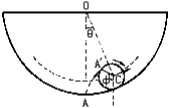
位移共振和速度共振。

品质因数： 共振系统的储能效率

$$Q=2\pi\frac{\Delta E_0}{\Delta E}$$

第八、九章：习题一

题目：质量为 m 半径为 r 的小圆柱体在以固定的大圆桶内表面做纯滚动，设大圆桶半径为 R，当纯滚发生在平衡位置附近时，求质心振动的角频率。



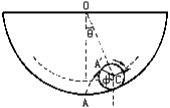
解： 小圆柱体在大圆筒内表面做纯滚动时法向力 N 和摩擦力 f 都不做功，因此系统机械能守恒。若规定 m 在平衡位置时其质心高度处为重力势能零点，则有：

$$mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2=\text{Const}$$

式中 $I_c=\frac{1}{2}mr^2$。根据速度定义，质心速度大小为：

$$v_c=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(R-r)\theta]=(R-r)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}=(R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

第八、九章：习题一



题目：质量为 m 半径为 r 的小圆柱体在以固定的大圆桶内表面做纯滚动，设大圆桶半径为 R，当纯滚发生在平衡位置附近时，求质心振动的角频率。

解（续）：根据纯滚条件，有

$$V_c = r\omega, \quad \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

利用以上关系，我们有：

$$\frac{3}{2}(R-r)\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + g\sin\theta = 0$$

从而得到振动角频率为（$\theta \sim 0$ 时 $\sin\theta \approx \theta$）

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}$$

第八、九章：习题二

题目：求两个同方向的简谐振动 $x_1 = 4\cos\frac{\pi}{2}t$，$x_2 = 6\cos(\pi t/2 + \pi/3)$ 的合振动，x 的单位为 cm，时间单位为秒。

解一：利用振动合成公式，合振动的振幅为：

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})} \\ &= \sqrt{4^2 + 6^2 + 2\times 4\times 6\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{76}\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{初相位为：}\ \phi_0 &= \arctan\frac{A_1\sin\phi_{10} + A_2\sin\phi_{20}}{A_1\cos\phi_{10} + A_2\cos\phi_{20}} \\ &= \arctan\frac{4\sin 0 + 6\sin\frac{\pi}{3}}{4\cos 0 + 6\cos\frac{\pi}{3}} = \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7}\,\mathrm{rad} \end{aligned}$$

振动的角频率为 $\omega = \pi/2$，因此合振动为

第八、九章：习题二

题目：求两个同方向的简谐振动 $x_1 = 4\cos\frac{\pi}{2}t$, $x_2 = 6\cos(\pi t/2 + \pi/3)$ 的合振动，x 的单位为 cm，时间单位为秒

解二：根据简谐量与复数的对应关系，有

$$\tilde{x_1} = 4\exp[i\frac{\pi}{2}t], \quad \tilde{x_2} = 6\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

两个同向同频简谐量的合成对应于两个复数之和，因此

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \tilde{x_1} + \tilde{x_2} = 4e^{i\frac{\pi}{2}t} + 6e^{i\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}\right)} = (4 + 6e^{i\frac{\pi}{3}})e^{i\frac{\pi}{2}t} \\ &= \left[4 + 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\right]e^{i\frac{\pi}{2}t} = (7 + 3\sqrt{3}i)e^{i\frac{\pi}{2}t} \\ &= \sqrt{76}e^{i\left(\frac{\pi}{2}t+\arctan\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)}\end{aligned}$$

因此（取上式实部）：

$$x = \sqrt{76}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \arctan\frac{3\sqrt{3}}{7}\right) \text{ cm}$$

第八、九章：习题二：干涉

合振动的振幅公式和初相位公式非常有用，在今后电磁学、光学的学习中都要用到这个公式，例如振幅公式

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})$$

中的 $2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})$ 成为干涉项，分振动的初相位之差 $\Delta\phi = \phi_{20} - \phi_{10}$ 对合振动的强弱起着决定性作用：

1. 当 $\Delta\phi = 2k\pi \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 时 $A = A_1 + A_2$，振动加强，出现干涉极大；
2. 当 $\Delta\phi = (2k+1)\pi \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 时 $A = |A_1 - A_2|$，振动减弱，出现干涉极小，特别是 $A_1 = A_2$ 时会出现干涉相消。

波动：内容提要

机械波： 基本条件：振动源和介质

波长： 与周期、频率及波速之间的关系

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

简谐波： 以简谐振动传播的波。

平面简谐波：

$$u(x,t) = A\cos[\omega(t - x/v) + \phi_0] = A\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$ 为波数（单位距离内相位的变化）。

球面简谐波： $u(r,t) = \frac{a}{r}\cos(\omega t - kr + \phi_0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

柱面简谐波： $u(r,t) = \frac{b}{\sqrt{r}}\cos(\omega t - kr + \phi_0), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$

波动：内容提要

波面： 相位相同的点的集合

连续介质中一维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

波速由介质性质决定（切变模量与杨氏模量）。

波的叠加原理 ：波的独立传播定律。

多普勒效应： 当波源或接收器或两者相对介质运动时，接收器接收到的频率 f' 与波源的频率 f 不同：

$$f' = \frac{v - u'\cos\beta}{v - u\cos\alpha} f$$

波的群速度和相速度： $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$， $v_p = \frac{\lambda}{k} = \frac{\omega}{k}$

色散关系： 角频率 ω 与波数 k 的关系。

第八、九章：习题三

题目：一列沿 x 正方向传播的平面简谐波，已知振幅 A，周期 T 和波长 λ，且 $t=0$ 时刻 O 点的振动位移为最大值，试做出 $x=\lambda/2$ 处的振动图。

解： 波函数为

$$u(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x+\phi_0\right)$$

依题设，A, T 和 λ 已知，仅 ϕ_0 待定。ϕ_0 可由 O 点的初始状态求出：对 O 点，$x=0$，且 $t=0$ 时 $u=A$，因此

$$A=A\cos\phi_0 \Rightarrow \cos\phi_0=1 \Rightarrow \phi_0=0$$

因此

$$u(x,t)=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

把 $x=\lambda/2$ 代入波函数，即可得到此点的振动方程：

第八、九章：习题四

题目：深水表面波的色散关系为 $\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}$，式中 g 为重力加速度，σ 为水的表面张力系数，ρ 为水的密度。

（1）试根据色散关系求出相速度 v_p，

（2）试分析三种情形下的相速 v_p 的值：重力其主要作用，表面张力起主要作用；二者都作用，

（3）根据色散关系求出群速 v_g，

（4）证明像素等于群速时相速最小。

解：

（1）根据定义，相速度（即波速）为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}}$$

第八、九章：习题四

解：

（2）分析色散关系 $\omega^2 = gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}$ 和相速公式可知：

- 重力其主要作用时：$g \gg \frac{\sigma k^2}{\rho}$，则有 $\omega^2 = gk$，$v_p = \sqrt{g/k}$，对应深水表面重力波情形，此时波长 λ 大而波数小。
- 表面张力其主要作用时：$g \ll \frac{\sigma k^2}{\rho}$，则有 $\omega^2 = \sigma k^3/\rho$，$v_p = \sqrt{\sigma k/\rho}$，对应深水表面张力波情形，此时波长小而波数大。
- 在重力和表面张力的共同作用下，波数有个最小值。

（3）根据定义，群速度 v_g 为：

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{g + \frac{3\sigma k^3}{\rho}}{2\sqrt{gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}}}$$

第八、九章：习题四

解：

（4）相速度和群速度相等，则

$$\sqrt{\frac{g}{k}+\frac{\sigma k}{\rho}}=\frac{g+\frac{3\sigma k^3}{\rho}}{2\sqrt{gk+\frac{\sigma k^3}{\rho}}}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}},\ v_p=v_g=\sqrt{2}(\sigma g/\rho)^{1/4}$$

由前面分析可知，相速度有个极小值 $v_{p_{min}}$，将 $v_p(k)$ 对 k 做微商，可求得 $v_{p_{min}}$ 及相应的 k_{min}：

$$v_{p_{min}}=\sqrt{2}(\sigma g/\rho)^{1/4},\quad k_{min}=\sqrt{\rho g/\sigma}$$

这就证明了相速等于群速时相速最小。

第八、九章：习题四：现象

本题告诉我们，当风速和水波相速一致时，空气和水面的能量交换最有效，此时风速决定了水面的波速，从而决定了它的波长，但当风速小于最小相速度 $v_{p_{min}}$ 时，水面波是激发不起来的，即所谓“清风徐来，水波不兴”。

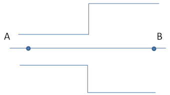
第十章：流体力学：内容提要

- 理想流体：无粘性的不可压缩的流体
- 定常流动：流场个点的流速不随时间变化
- 静止流体内部压强分布规律
  1. 等高点压强相等
  2. 高度差为 h 的压强差为 ρgh
- 连续性原理：不可压缩流体 $v_1 \mathrm{d}S_1 = v_2 \mathrm{d}S_2$
- 伯努利方程：

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

  或 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$ 为常数
- 压强：是标量而不是矢量

流体力学：习题一



题目：如图所示，理想流体在流管内定常流动，且 A, B 点等高，这两点压强是否相等？

答： 不相等。p_A 与 p_B 的关系应根据伯努利方程求出。设流体密度为 ρ，且 A 和 B 两点高度均为 h，则

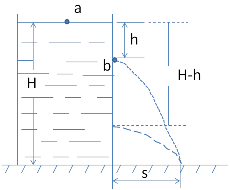
$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h + p_B$$

因此，

$$\frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) = p_B - p_A$$

由于 $v_A > v_B$，因此 $p_B > p_A$.

流体力学：习题二



题目：如图所示开口容器，其中盛水，水深 H，在容器的一侧水下 h 深度处开一小孔，请问在容器的同一侧的何处再开一小孔，可使两孔射出的水流具有相同的射程？

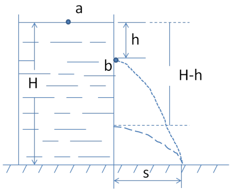
解：根据伯努利方程，对于图中 a, b 两点有：

$$\frac{1}{2}\rho v_a^2 + \rho g h_a + p_a = \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h_b + p_b$$

a, b 两处的压强都为大气压强，即 $p_a = p_b = p_0$。由于容器截面积很大而孔很小，可忽略容器液面下降速度，即 $v_a = 0$，因此

$$\frac{1}{2}\rho v_b^2 = \rho g(h_a - h_b) = \rho g h \quad \Rightarrow v_b = \sqrt{2gh}.$$

流体力学：习题二



题目：如图所示开口容器，其中盛水，水深 H，在容器的一侧水下 h 深度处开一小孔，请问在容器的同一侧的何处再开一小孔，可使两孔射出的水流具有相同的射程？

解（续）：因此，从 b 处射出的水的射程为 $s = v_b t$，而根据自由落体规律

$$H - h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \; s = v_b t = 2\sqrt{h(H-h)}$$

设另一小孔开在水面下 h' 深度，根据题目要求

$$2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{h'(H-h')} \quad \Rightarrow \; h' = H - h.$$

理想流体定常流动的方法

运用伯努利方程和连续性原理求解理想流体定常流动的问题是，必须根据具体情况适当选择流线和流管，选取的原则是：

1. 流线和流管必须包含要考察的点
2. 流管包含要考察点的截面上的压强和流速可以看做是均匀的
3. 选取的点应该是已知数最多的点，使方程中的未知数尽量少