第32届全国部分地区大学生物理竞赛试卷

北京物理学会编印　　　　2015年12月6日

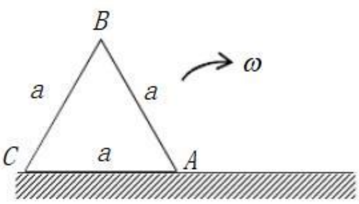
题号	一	二			
	1 ~ 10	11	12	13	14
分数					
阅卷人					

题号	三			总分
	15	16	17	
分数				
阅卷人				

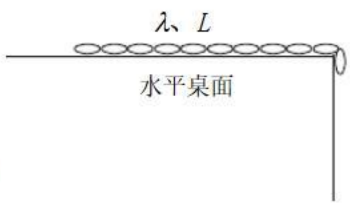
答题说明：前14题是必做题，满分是120分；文管组和农林医组只做必做题；除必做题外，非物理B组限做15题，满分140分；非物理A组限做15、16题，满分160分；物理组限做15、17题，满分160分。请同学们自觉填上与准考证上一致的考生类别，若两者不符，按废卷处理。请各组考生按上述要求做题，多做者不加分，少做者按规定扣分。

一、填空题（必做，共10题，每题2空，每空3分，共60分）

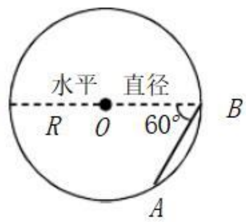
1.如图所示，每边长为 a 的正三角板在水平地面上，朝一个方向不停地作无滑动的翻滚，每次翻滚都是绕着图示右着地顶点（例如图中的 A 点）转动，转动角速度恒为常量 ω。当一条边（例如 AB 边）着地后，又会立即绕着新的右着地顶点（例如 B 点）继续作上述匀角速转动。如此继续下去，三角板的每一个顶点在翻滚的一个周期过程中，其曲线运动平均速率为__________。翻滚过程中，三角板内作匀速率曲线运动的点部位，其速率为_________。



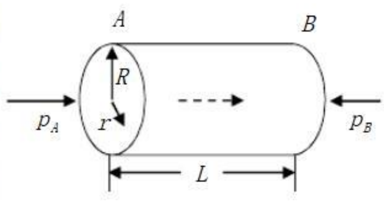
2.如图所示，质量线密度为 λ 、长为 L 的匀质轻绳，绝大部分沿长度方向伸直地静放在水平桌面上，且与桌面侧棱垂直。仅有很少一部分绳段静止地垂直悬挂在桌子的侧面上，而后绳将从静止开始滑动，设系统处处无摩擦。当桌面侧面绳段长度达 l（取 $l<\frac{L}{2}$）时，软绳各部位运动速度大小为 $v=$_________，桌面侧棱给绳的支持力 $\vec{N}$ 的水平分量 $N_{\parallel}=$____________。



3.如图所示，在某竖直平面内有一个半径为 R 的固定圆环，一根长为 R 、质量为 M 的均匀细杆 AB 静止在环内侧，与水平直径夹角为 $60°$。自由释放后，设杆的 A 、B 端只能沿环内侧无摩擦地运动。当杆处于水平方位时，A 端运动速率 $v=$__________，A 端受环的作用力大小为 $N_A=$_____________。

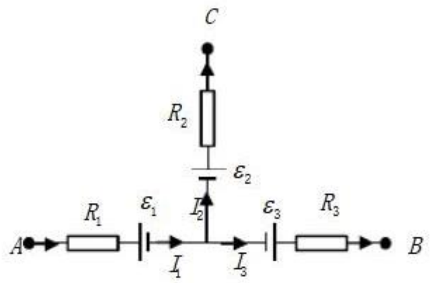


4.如图所示，黏度为 η 的流体在半径为 R 的水平管道内，沿轴方向稳定地分层流动，流体与管壁接触处的流速为零。取长为 L 的 AB 管道段，已知 A 端、B 端的外加水平压强分别为 p_A、p_B 常量，且 $p_A>p_B$，则管内流体流速的径向分布函数 $v(r)=$______________。将单位时间内流过管道截面的流体体积 Q_V 表述为 $Q_V=(p_A-p_B)/R_f$，称 R_f 为该流管的流阻，则 $R_f=$_______________。

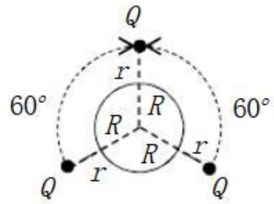


5.真实理想气体占据三维空间区域，每个分子都在作三维运动。设想一种被约束在二维空间区域内的理想气体，其中每个分子都在作二维运动。分子质量记为 m，此种气体处于温度为 T 的热平衡态时，分子的速度分布函数为 $F_2(\vec{v})=$____________________，分子的速率分布函数为 $f_2(v)=$______________________。

6.某直流电路中的部分电路，及其中直流电源、电阻参量和电流方向如图所示。电流 I_1、I_2、I_3 间的关系为__________________，C 点到 B 点的电压 $U_{CB}=$______________________。



7.空间三个固定点电荷和一个半径为 R 的几何球面的球心共面，它们的方位如图所示。点电荷电量同为 Q，点电荷与球心相距同为 $r>R$，则 R 球面上的场强平均值 $\overline{\vec{E}}_{球面}=$______________________；R 球面上的电势平均值 $\overline{U}_{球面}=$____________________。



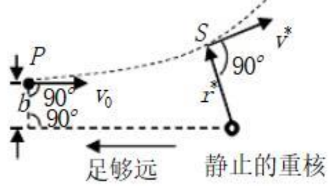
8.自然界中尚未发现磁荷（磁单极子）的存在，真空电磁场方程组为

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V_S}\rho_e dV \quad (1) \qquad \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_{S_L}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \quad (2)$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0 \quad (3) \qquad \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left(\iint_{S_L}(\vec{j}_e+\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{s}\right) \quad (4)$$

自然界中若也有磁荷存在，则上述四个方程中需要修改的是方程______________（填写方程顺序号，有几个填几个）。自然界中若也有满足守恒定律的磁荷存在，且真空静止点磁荷 q_m 激发磁场满足"磁库伦定律"：$\vec{H}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{q_m\vec{r}}{r^3}$，其中 $\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}$ 是真空磁场强度。引入磁荷密度 ρ_m 和磁流密度 $\vec{j}_m$，则上一填空号内的方程需修改为____。

9.将行星绕太阳运动的动能与引力势能之和记为 E，则 $E<0$ 时行星轨道为椭圆，$E=0$ 时行星轨道为抛物线，$E>0$ 时行星轨道为双曲线。α 粒子（氦核）P 的散射过程如图所示，静止重核的质子数为 Z。P 到达图中 S 点时与重核相距 r^*，速度大小记为 v^*。你能建立的两个联立后可求解 r^* 和 v^* 的方程为____________________________、____________________________，其中 m 为 P 的质量。



10. 一水平细绳的一端固定于墙壁，另一端则使其在竖直方向上作小振幅的简谐振动，其振幅为 A_0。若绳上形成驻波，并出现 $(n+1)$ 个节点（包括绳在墙壁的固定点），各个波腹的振幅为 $2A_0$，相邻两节点的间距均为 d，则绳长的最短值为_________________________，最长值为______________________。

二、计算题（必做，共4题，每题15分，共60分）

11.（15分）一肥皂膜的厚度为 $0.550\mu m$，折射率为1.35，白光（波长范围为 $4000\sim7000\mathring{A}$）垂直照射。问在反射光中哪些波长的光得到最大增强？哪些波长的光干涉相消？（保留两位有效数字即可）

12.（15 分）电路如图 1 所示，开始时断路，电容器上无电量。$t=0$时合上电键K，设$\varepsilon\sim t$的关系如图 2 所示，且$T=RC$。引入时刻标记量$t_N=NT$，和该时刻电容器正极板上的电量标记量Q_N。

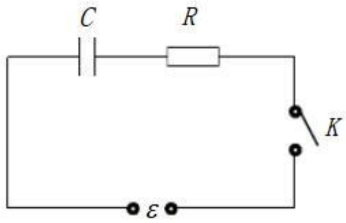


图 1

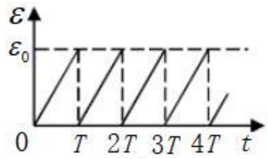


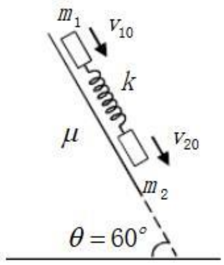
图 2

（1）试求Q_1，答案中包含的参量只能是C 与ε_0，下同；

（2）再求Q_2；

（3）最后求$\lim\limits_{N\to\infty}Q_N$。

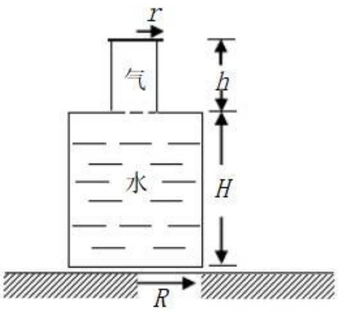
13.（15 分）足够长的斜面上两个小物块$m_1=0.4kg$、$m_2=0.2kg$，它们由一根$k=0.6N/m$的轻质弹簧连接。物块与斜面间摩擦因数同为$\mu=0.10$，斜面倾角$\theta=60°$。开始时m_1下滑速度$v_{10}=0.50m/s$，m_2下滑速度$v_{20}=2.0m/s$，弹簧处于原长，试求弹簧再次处于原长时，两物块的相对运动速率。



14.（15 分）定量的水在$t_0=0°C$的体积若为V_0，在定温$t>0°C$时的体积则为

$$V=V_0(1+\alpha t)$$

称常量α为水的体膨胀系数。玻璃的体膨胀效应较小，故可略。



如图所示，在室温$t=27°C$的水平桌面上直立着一个薄玻璃瓶。瓶的下部是半径为R、高为H的封底圆筒形区域，其内充满水。瓶的上部是半径$r<R$、高度$h<H$的圆筒形区域，其内充满纯净水蒸气，上方有不漏气的瓶盖封顶。

今将题图所示的瓶直立地放进$t_0=0°C$的冰箱内，热平衡后尚未结冰前，瓶的上方区域内侧壁上出现一些水珠。

设上述已给的量均为已知量，且水在$t_0=0°C$和在$t=27°C$的饱和水蒸气压强p_0和p，以及水在$t_0=0°C$的密度ρ_0也均为已知量。

（1）请给出水珠出现的原因。

（2）试求此时瓶内水蒸气占据的体积$V_{气0}$。

（3）引入比例系数　$\beta=V_{气0}/V_{气}$　　$V_{气}$：$t=27°C$ 初态水蒸气体积

取　$\alpha=1.5\times10^{-4}/°C$

$R=2r$，$H=3h$

$p_0=6.1\times10^2Pa$，$p=36\times10^2Pa$

水的摩尔质量$\mu_{水}=1.8\times10^{-2}kg/mol$

$0°C$ 时水的密度$\rho_0=10^3kg/m^3$

三、限做题（根据考生类别选做）

15.（20 分）方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{（辅助量 } c=\sqrt{a^2-b^2}\text{ ）}$$

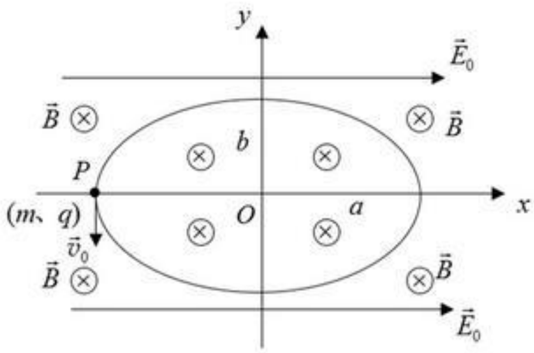
的椭圆，其上任意一点 (x, y) 处的曲率半径为

$$\rho=\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}\Big/\left(a^4b^4\right)$$

(x, y) 处椭圆切线与 X 轴夹角记为 ϕ $(2\pi>\phi\geq 0)$。

如图所示，在 $O-xy$ 平面上有场强为 $\vec{E}_0$ 沿 X 轴方向的匀强电场，还有垂直向内的磁场，磁感应强度大小仅随 X 变化，且有

$$B=B(x)\begin{cases}=0 & x=-a\text{ 时}\\ >0 & x>-a\text{ 时}\end{cases}$$



在 $(x=-a, y=0)$ 处有一个质量为 m、电量 $q>0$ 的质点 P，初始时刻有沿 Y 轴负方向的速度 V_0，而后其运动轨迹恰好为图中的椭圆。

（1）将前面给出的曲率半径改造为 X 的一元函数，即导出表述式

$$\rho=\rho(x)$$

再为前面给出的 ϕ 角导出 $\sin\phi$ 随 X 变化的一元函数，即导出表述式

$$\sin\phi \sim x$$

（2）试求题图中的 V_0 值。

（3）导出函数 $B(x)$。

16.（20 分）玩具章鱼保罗有一个轴对称的身体和八条腿，身体质量近似等于八条腿质量之和。开始时将保罗静立在水平桌面上如图 1 所示，后因扰动滑到在地如图 2 所示。本题欲讨论保罗在滑到过程中，腿的着地点是否会从桌面跳起？如果不会跳起，那么腿和身体几乎能一起与地面发生碰撞；若为弹性碰撞，那么保罗能否又恢复到初始状态，形成周期运动？

图 1

图 2

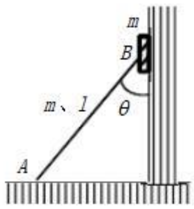


图 3

如图 3 所示，将保罗八条腿合并后，模型化为一根长 l、质量 m 的均匀细杆，下端点 A 可沿桌面不妨设为朝左运动。保罗的身体模型化为质量也是 m 的小圆柱体，通过小而轻的轴承连接在杆的上端点 B，侧面贴在假想的竖直固定轨道上平动且不会离开该轨道。初态静止，杆与竖直轨道间夹角 θ_0 非常小，随后杆倾斜下滑，过程态已在图 3 中示出。再设，系统处处无摩擦。

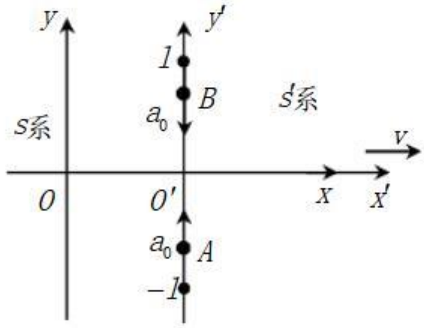
（1）近似取 $\theta_0=0$，先后导出 B 端下行加速度 a_B 以及 A 端受桌面支持力 N 随倾角 θ 变化的函数关系，进而给出 $\theta=45°$ 时对应的 N 值。

（2）假设上述过程中 A 端始终不会离开桌面，此后杆连同 B 端小柱体一起与桌面发生弹性碰撞，碰撞前后瞬间动能相同，碰撞时间记为未知量 Δt。设碰撞前，若某处相对桌面的速度大小为 v，则该处单位质量物质受到桌面竖直向上的平均碰撞力 f 与 v 成正比，比例系数记为未知量 α。再将碰撞过程中细杆与小柱体之间通过轴承在竖直方向上的平均相互作用力大小记为未知量 N_B，碰后瞬间细杆中心点 C 的竖直向上速度大小记为未知量 v_C，细杆绕 C 点旋转角速度大小记为未知量 ω。

（2.1）试求 v_C、ω、$\alpha\Delta t$和 $N_B\Delta t$。

（2.2）若章鱼保罗（即杆与小柱体构成的系统）的运动具有周期性，忽略碰撞时间 Δt，取 $\theta=1°$，导出周期 T 的积分表达式，再利用数值积分公式 $\int_{1°}^{90°}\sqrt{\dfrac{3\sin^2\theta+1}{1-\cos\theta}}d\theta=7.82$ 给出只含参量 l、g（重力加速度）的 T 的表达式。

17.（20 分）惯性系 S、S' 的坐标原点 O、O' 重合时取为 $t=0$、$t'=0$，此时两个静质量同为 m_0 的质点 A、B 分别在 S' 系 y' 轴上的 $y'=-l$、$y'=l$ 两处，从静止开始以相同大小的匀加速度 a_0 各自朝着 O' 运动。某个 $t>0$ 时刻的系统位形如图所示。最终，A、B 在 O' 处碰撞，碰后成为一个大质点，碰撞过程中无任何形式能量耗散。已知 S、S' 系相对速度大小为 $v=\dfrac{3}{5}c$，$a_0=9c^2/(50l)$。



（1）试求大质点在 S' 系中的质量 M'；

（2）再求 A、B 碰前，A 相对 S 系的加速度大小 a，以及碰后大质点在 S 系中的质量 M。

（3）与 B 碰前，A 在 S' 系中的速度记为 u'_y，受力记为 F'_y；A 在 S 系中沿 y 轴方向受力记为 F_y。试导出 $F'_y\sim u'_y$ 关系式和 $F_y\sim F'_y$ 关系式，推导过程中不可利用 $v=\dfrac{3c}{5}$ 和 $a_0=9c^2/(50l)$，因此推导过程也适用于 $v\neq\dfrac{3}{5}c$ 和 $a_0\neq 9c^2/(50l)$。

（4）再将 A 在 S 系中沿 y 轴方向速度记为 u_y，沿 X 轴方向受力记为 F_x，试导出 $F_x\sim\{u_y,F_y\}$ 关系式，推导过程中不可利用 $v=\dfrac{3}{5}c$ 和 $a_0=9c^2/(50l)$。

（5）按题文取 $v=\dfrac{3}{5}c$，$a_0=9c^2/(50l)$，计算 A 在与 B 相碰前的全过程中 F'_y 在 S' 系作功 W'，F_y 在 S 系作功 W_y 和 F_x 在 S 系作功 W_x。