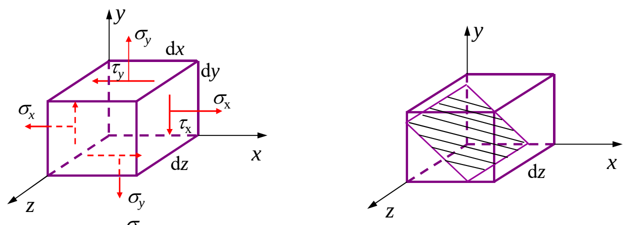
工程力学 —回顾

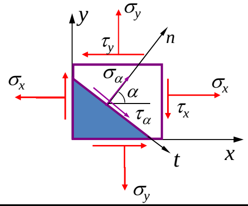
上一讲回顾

建立强度条件的依据	材料基本实验
材料物质点应力状况	通过构件内一点，所作各微截面的应力状况，称为该点处的应力状态
平面应力状态应力分析	微体有一对平行表面不受力的应力状态。

1

工程力学 —回顾



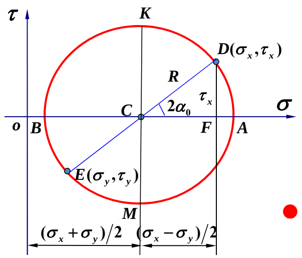


$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

2

工程力学 —回顾



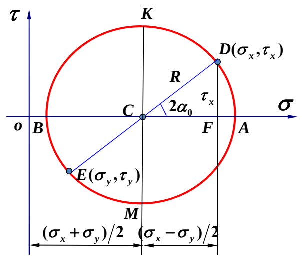
- 应力圆的画法：确定x面和y面的应力坐标点D、E以DE为直径作应力圆。
- 应力圆点与微体面对应关系

● 点面对应：微体截面上的应力值与应力圆上点的坐标值一一对应。

● 二倍角对应：应力圆半径转过的角度是微体截面方位角变化的两倍，且二者转向相同。

3

工程力学 —回顾



● 极值应力与主应力

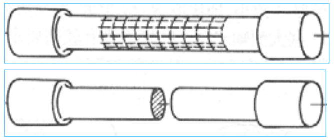
对于平面应力状态：

- 是否一定存在正应力为零的面？
- 是否一定存在切应力为零的面？
- 正应力最大与最小的面上，切应力有什么性质？
- 正应力最大与最小的面在几何上有何特征？

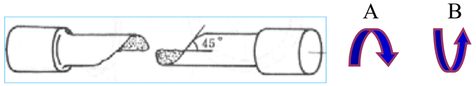
4

例：纯剪应力状态下不同的断裂机理：

低碳钢材料圆轴扭转时滑移与剪断发生在τ_{max}的作用面：



铸铁材料圆轴扭转时断裂发生在σ_{max} 的作用面：



思考：1. 如何扭才能造成上图所示的断裂面？A 还是B？

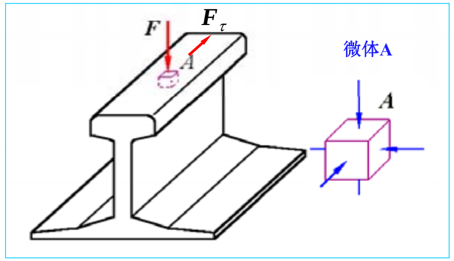
2. 如果两端再加上一拉力，则断裂面的角度大于还是小于45°？

§ 13－4 复杂应力状态的最大应力

例：火车通过时，导轨面一点的应力分析

•分析：截取微元体　三向应力状态。

•对复杂应力状态，我们最关注 什么？如何研究？



一. 三向应力圆

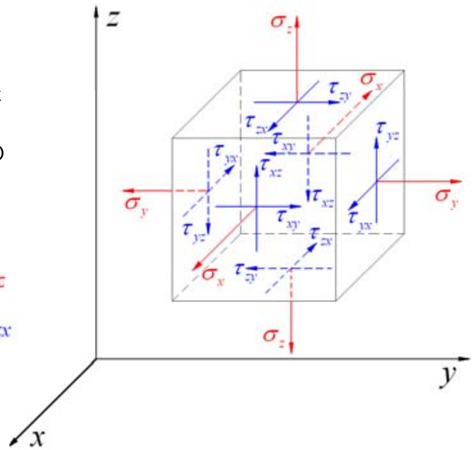
物质点应力微体

一般情况（三维）

独立6分量

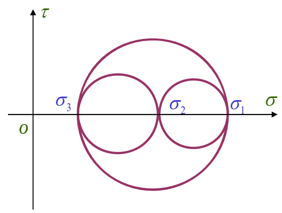
σ_x　σ_y　σ_z

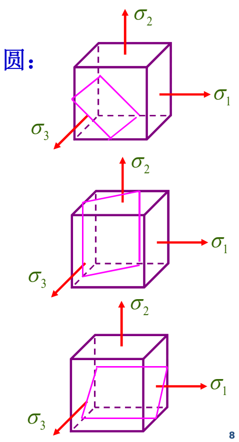
τ_{xy}　τ_{yz}　τ_{zx}



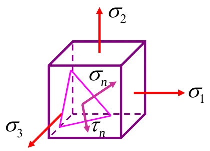
（1）三组特殊的平面应力对应于三个应力圆：
平行σ_3平面，由σ_1和σ_2作应力圆；
平行σ_2平面，由σ_1和σ_3作应力圆；
平行σ_1平面，由σ_2和σ_3作应力圆。

（2）三向应力圆



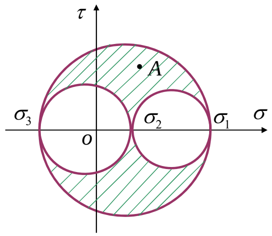


（3）任意斜截面的应力与三向应力圆对应关系



$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma$$

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma - \sigma_n^2}$$



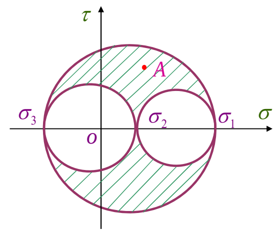
任意斜截面的应力值位于三向应力圆的阴影区内

二． 最大与最小应力

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3$$

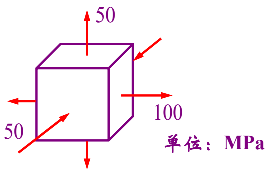
$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

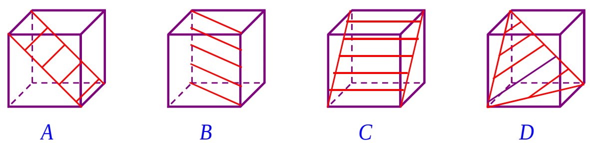


τ_{max} 位于与 σ_1 和 σ_3 均成 45° 的截面内

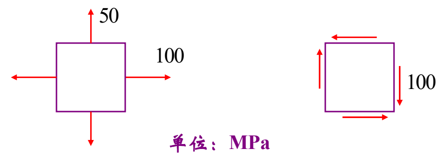
例 图示单元体最大切应力作用面是图______

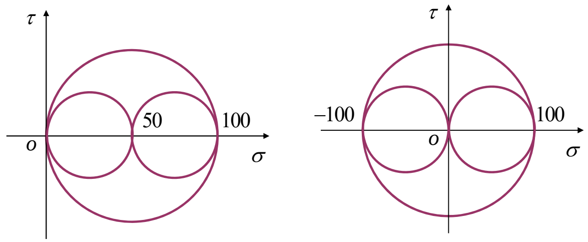
答： *B*





例 试作图示平面应力状态微体的三向应力圆

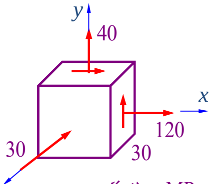




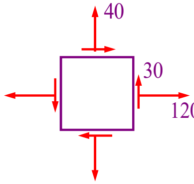
例 试计算图a所示微体的 $\sigma_{\max},\sigma_{\min},\tau_{\max}$，主应力与第一主应力方位，画出微体三向应力圆。

分析：垂直于z轴的平面是一个主平面

进行平面应力分析



(a) 单位：MPa



(b)

1）计算微体的 $\sigma_{\max},\sigma_{\min},\tau_{\max}$ 和主应力

i) 解析法

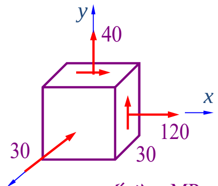
思考：下述计算是否正确？

$$\sigma_{\max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$=\frac{120+40}{2}+\sqrt{\left(\frac{120-40}{2}\right)^2+30^2}=130$$

$$\sigma_{\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=30$$

$$\tau_{\max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\sqrt{\left(\frac{120-40}{2}\right)^2+30^2}=50$$



(a) 单位：MPa

•左面计算的是平行于z轴截面的极值应力，不是微体最大最小应力。

i) 解析法（单位：MPa)

•对于垂直于z轴的截面极值应力

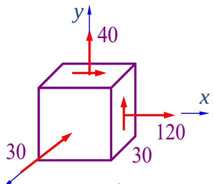
$$\sigma_{\max}\big|_{xy}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=130$$

$$\sigma_{\min}\big|_{xy}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=30$$

•微体最大最小应力

$\sigma_{\max}=130$ $\quad$ $\sigma_{\min}=-30$

$$\tau_{\max}=\frac{\sigma_{\max}-\sigma_{\min}}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=80$$



(a) 单位：MPa

•微体主应力

$\sigma_1=130$

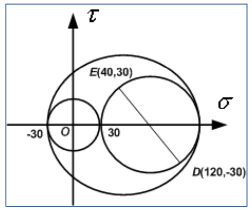
$\sigma_2=30$

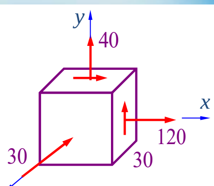
$\sigma_3=-30$

ii) 图解法（单位：MPa)

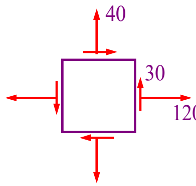
解： ① 作图b所示平面应力微体的应力圆

② 作三向应力圆



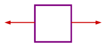


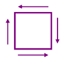
(a) 单位：MPa



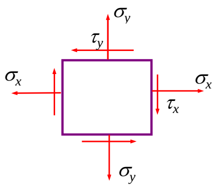
(b)

§13-5 广义胡克定律

•单向应力状态的胡克定理：  $\sigma = E\varepsilon$

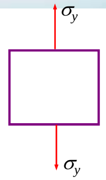
•纯剪应力状态的胡克定理：  $\tau = G\gamma$

•如何确定复杂应力状态下，应力与应变关系？

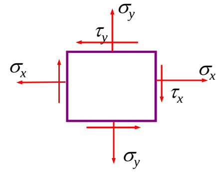


$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x\\ \sigma_y &= E\varepsilon_y\\ \tau_x &= G\gamma_{xy}\end{aligned}\right\}?$$

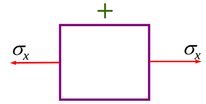
•研究方法：利用叠加原理，由单向受力和纯剪状态的胡克定理推导复杂应力状态的广义胡克定理。



$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \qquad \varepsilon_x = -\frac{\mu\sigma_y}{E}$$

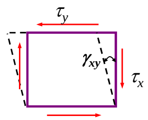


＝ ＋



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\frac{\mu\sigma_x}{E}$$

＋



$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

➤平面应力状态的广义胡克定理

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} \quad \text{或} \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

➤三向应力状态的广义胡克定理

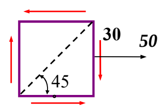
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E} \qquad \gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_z}{E} \qquad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu\sigma_x}{E} - \frac{\mu\sigma_y}{E} \qquad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G$$

➤以上结果成立的条件： •各向同性材料； •线弹性范围内； •小变形.

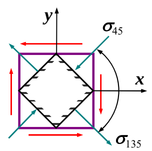
例 已知平面应力状态如图所示，E=70GPa，泊松比 $\mu = 0.33$ 求45º方向的应变



解： $\sigma_x = 50MPa, \sigma_y = 0, \tau_x = 30MPa$

$$\sigma_{45} = \frac{50+0}{2} + \frac{50-0}{2} \times \cos 90^\circ - 30 \times \sin 90^\circ = -5MPa$$

$$\sigma_{135} = \frac{50+0}{2} + \frac{50-0}{2} \times \cos 270^\circ - 30 \times \sin 270^\circ = 55MPa$$



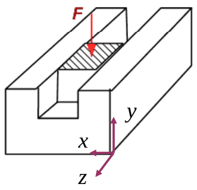
$$\varepsilon_{45^0} = \frac{1}{E}(\sigma_{45^0} - \mu\sigma_{135^0})$$

$$= \frac{1}{70\times10^3} \times (-5 - 0.33\times55)$$

$$= -3.31\times10^{-4}$$

例： 刚性槽，内置a=10 mm 的正方形钢块，受合力$F = 8$ kN 的均布力作用。无摩擦力，E=200GPa，$\mu = 0.3$

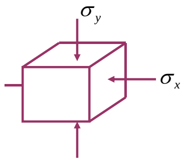
求钢块侧面的应力



$\sigma_z = 0$，二向（平面）应力状态

$$\sigma_y = \frac{F}{A} = \frac{-8000}{0.01} = -8.0\times10^7 (Pa)$$

由广义胡克定律：



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} = 0$$

$$\sigma_x = \mu\sigma_y = 0.3\times(-8.0\times10^7) = -2.4\times10^7 (Pa)$$

作 业

13—7(b)，8，12，14

图示①、②、③、④分别为四个平面应力状态的应力图，
试画出各应力圆对应的主应力微体以及其上所受的主应力。