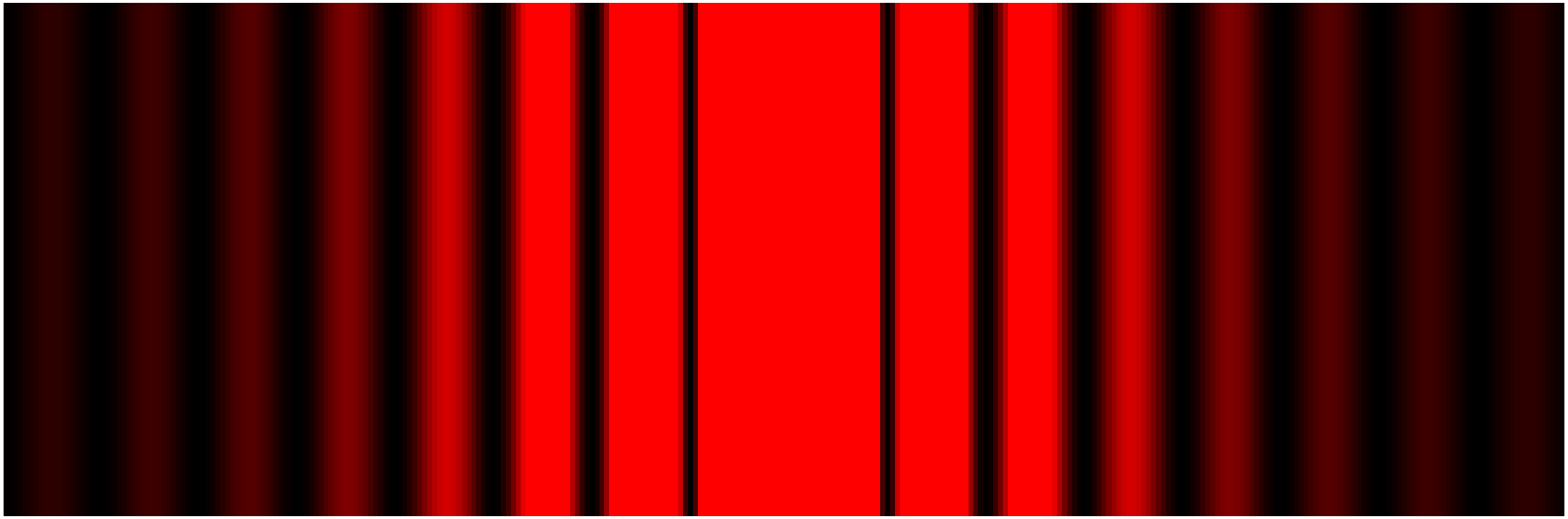
# 第十三章　光的衍射

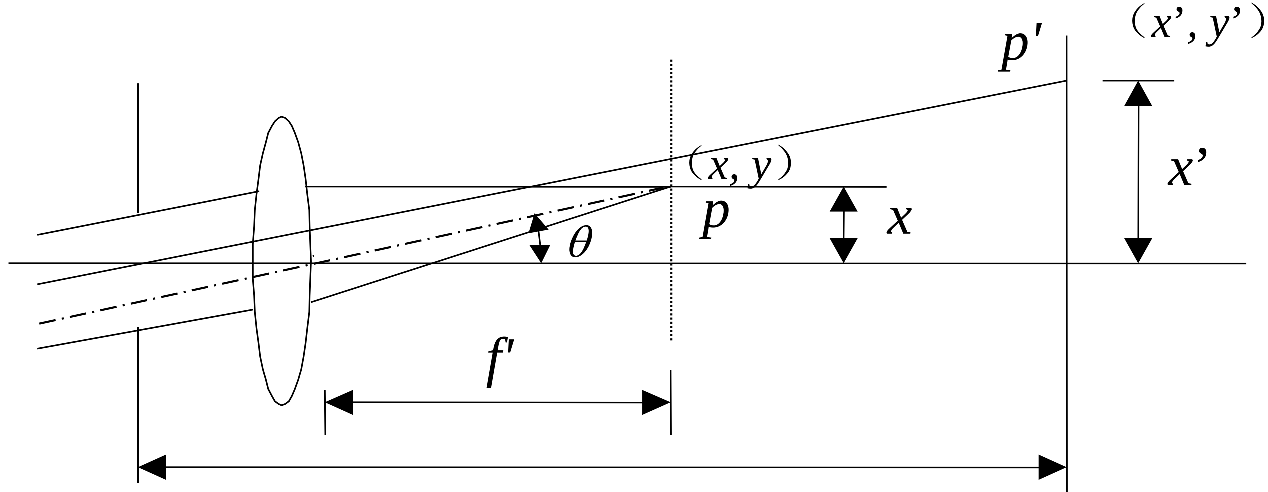
## §13－3 典型孔径的夫琅和费衍射



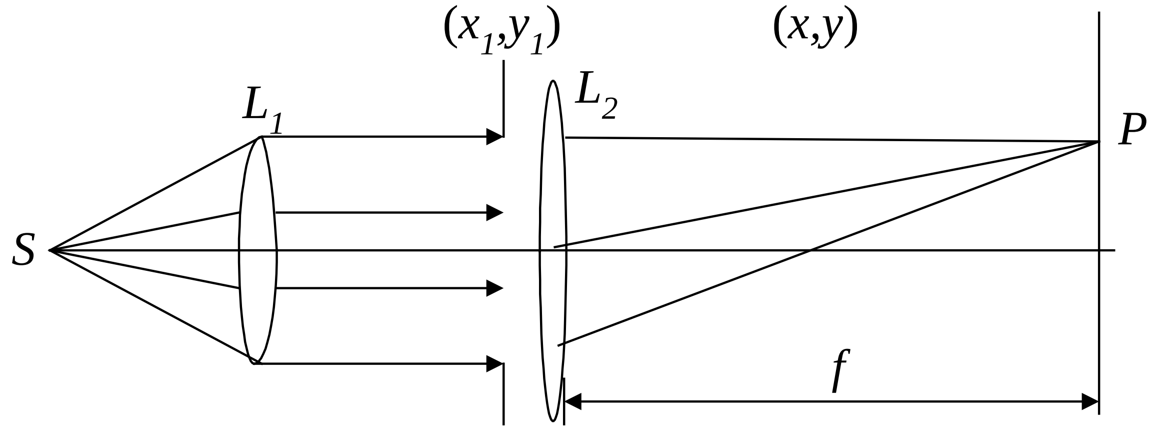
# 一、衍射系统与透镜作用

夫琅和费衍射对z的要求　λ=600nm, $\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)_{\max}=2cm^2$

$$z >> \frac{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)_{\mathbf{max}}}{\lambda} \approx 330m$$




在焦平面观察到的衍射图像与没有透镜时在远场观察到的衍射图样相似，只是大小比例缩小为$f'/z_1$




夫琅和费衍射装置

透镜的作用：无穷远处的衍射图样成像在焦平面上。

## 二、夫琅和费衍射公式的意义

加有透镜之后，夫琅和费衍射公式会发生变化

$$\tilde{E}(x,y)=C\iint \tilde{E}(x_1,y_1)\exp\left[-i\frac{k}{z_1}(xx_1+yy_1)\right]dx_1dy_1$$

其中

$$C=\frac{1}{i\lambda z_1}\mathbf{exp[}ik\mathbf{(}z_1+\frac{x^2+y^2}{2z_1}\mathbf{)]}$$

可以写成

$$\tilde{E}(x,y)=C\iint \tilde{E}(x_1,y_1)\exp\left[-ik\left(x_1\frac{x}{z_1}+y_1\frac{y}{z_1}\right)\right]dx_1dy_1$$

在无透镜时，观察点为P’；有透镜时，在透镜焦平面上为P

$$x'/z_1 \approx \theta \approx x/f'$$

加有透镜之后，在公式中 $z_1$ 由 $f'$ 代替。计算公式变为：

$$\boxed{\tilde{E}(x,y) = C\iint \tilde{E}(x_1,y_1)\exp\left[-ik\left(x_1\frac{x}{f'}+y_1\frac{y}{f'}\right)\right]dx_1dy_1}$$

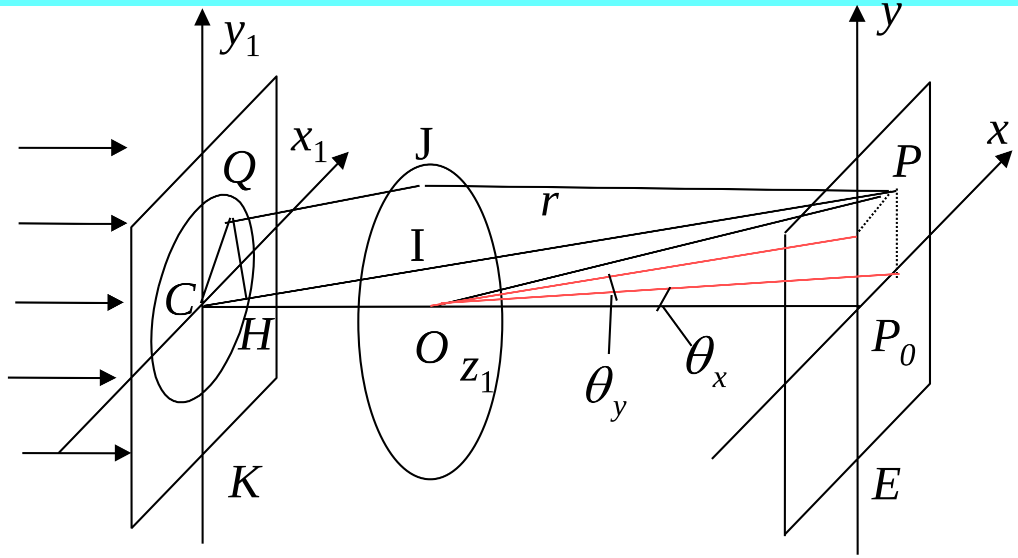
$$C = \frac{\exp[ik(f'+\frac{x^2+y^2}{2f'})]}{i\lambda f'}$$

分析公式的意义：

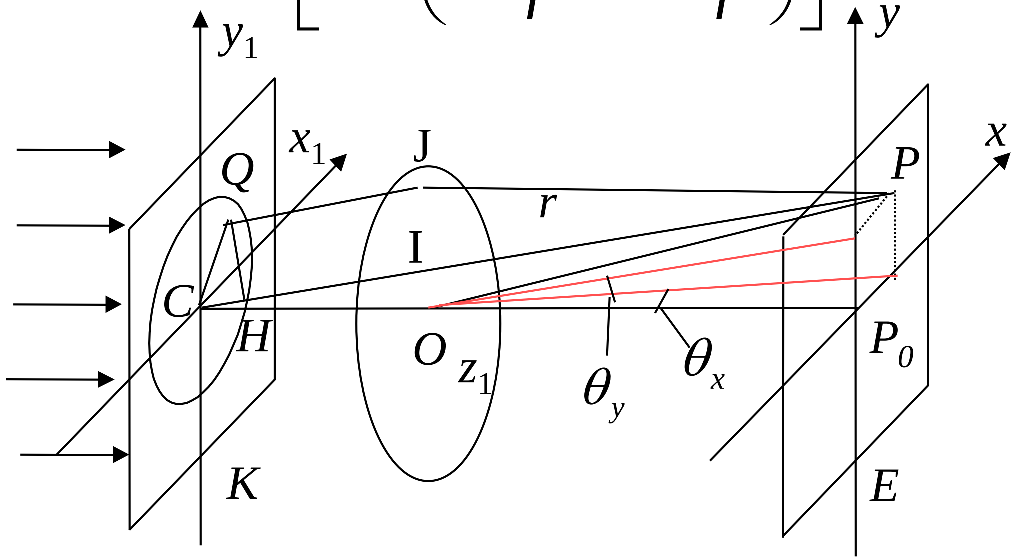
（1）复指数因子 $\exp[ik(f'+\frac{x^2+y^2}{2f'})]$

菲涅耳近似下： $f'+\frac{x^2+y^2}{2f'}\approx\sqrt{f'^2+\left(x^2+y^2\right)}=\left|CP\right|\approx r$

结论：若孔径很靠近透镜，$r$ 是孔径原点C处发出的子波到 $P$ 点的光程，而 kr 则是 $C$ 点到 $P$ 点的位相延迟。



（2）复指数因子 $\exp\left[-ik\left(x_1\dfrac{x}{f'}+y_1\dfrac{y}{f'}\right)\right]$




两个近似：

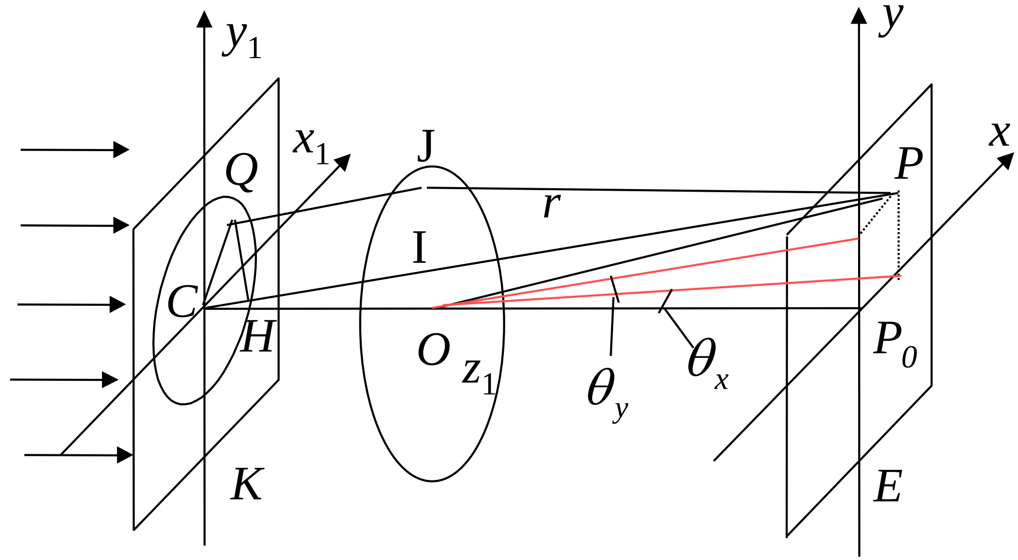
1. 透镜紧靠孔径，C与O重合

2. P靠近$P_0$，傍轴近似

CI的方向余弦与OP的方向余弦相同为：

$$l=\sin\theta_x=\frac{x}{r}\approx\frac{x}{f'},\ w=\sin\theta_y=\frac{y}{r}\approx\frac{y}{f'}$$

$\theta_x,\theta_y$二维衍射角




孔径上其它点发出的子波与C 点发出的子波到达P点的光程差：

$$\Delta = CH = |CIP| - |QJP| = \mathrm{q} \bullet \overrightarrow{CQ} = lx_1 + wy_1 = \frac{x}{f'}x_1 + \frac{y}{f'}y$$

CI方向的单位矢量

而位相差 $\delta = k\Delta = k\left(x_1\frac{x}{f'} + y_1\frac{y}{f'}\right)$

公式意义：孔径面内各点发出的子波在方向余弦l和w代表的方向上的相干叠加。

## 夫琅和费衍射公式的意义（总结）

$$\tilde{E}(x,y)=C\iint \tilde{E}(x_1,y_1)\exp\left[-ik\left(x_1\frac{x}{f'}+y_1\frac{y}{f'}\right)\right]dx_1dy_1$$

$$C=\frac{1}{i\lambda f'}\mathbf{exp[}ik\mathbf{(}f'+\frac{x^2+y^2}{2f'}\mathbf{)]}$$

*C*点到*P*点的位相延迟

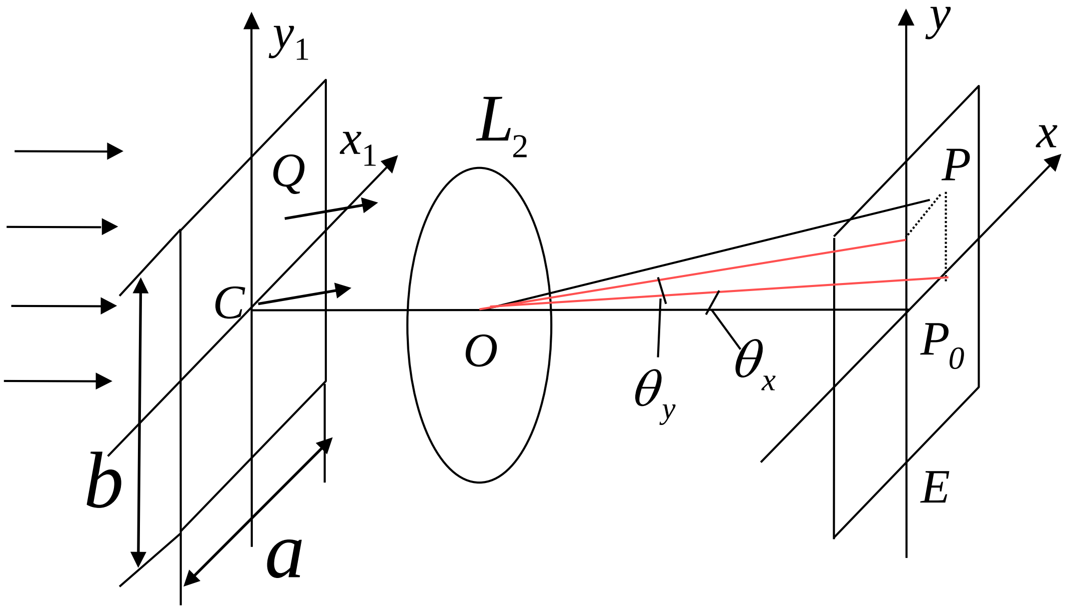
孔径上其它点发出的子波与C 点发出的子波的到达P点的的位相差。

积分中是孔径上各点发出的子波在方向余弦l和w代表的方向上的相干叠加。叠加结果取决于各点发出的子波与中心点发出子波的位相差。由于透镜的作用，l和w代表的方向上的子波聚焦在透镜焦面上的P点。

## 三、矩孔衍射

1、复振幅分布计算

设矩形孔的长和宽分别为 a 和 b，用单位平面波照射




矩孔夫琅和费衍射装置

即

$$\tilde{E}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & \text{在矩孔以内} \\ 0 & \text{在矩孔以外} \end{cases}$$

$$\tilde{E}(x, y) = C\int\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1, y_1)\exp\left[-ik\left(x_1\frac{x}{f'} + y_1\frac{y}{f'}\right)\right]dx_1 dy_1$$

设 $l = \dfrac{x}{f'}, \quad w = \dfrac{y}{f'}$

$$\tilde{E}(x, y) = C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left[-ik(lx_1 + wy_1)\right]dx_1 dy_1$$

$$\tilde{E}(x,y)=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\exp\left[-ik\left(lx_1+wy_1\right)\right]dx_1dy_1$$

$$=C\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\exp\left[-iklx_1\right]dx_1\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\exp\left[-ikwy_1\right]dy_1$$

$$=Cab\frac{\sin\left(\frac{kla}{2}\right)}{\left(\frac{kla}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{kwb}{2}\right)}{\left(\frac{kwb}{2}\right)}$$

若令：$\alpha=\dfrac{kla}{2}=\dfrac{\pi x}{\lambda f'}a,\quad \beta=\dfrac{kwb}{2}=\dfrac{\pi y}{\lambda f'}b,$ 和 $\tilde{E}_0=abC$

则 $$\boxed{\tilde{E}(x,y)=\tilde{E}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}}$$

2、强度分布特点

$$I=\tilde{E}\bullet\tilde{E}^{*}=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2,\quad I_0=\left|E_0\right|^2=(Cab)^2$$

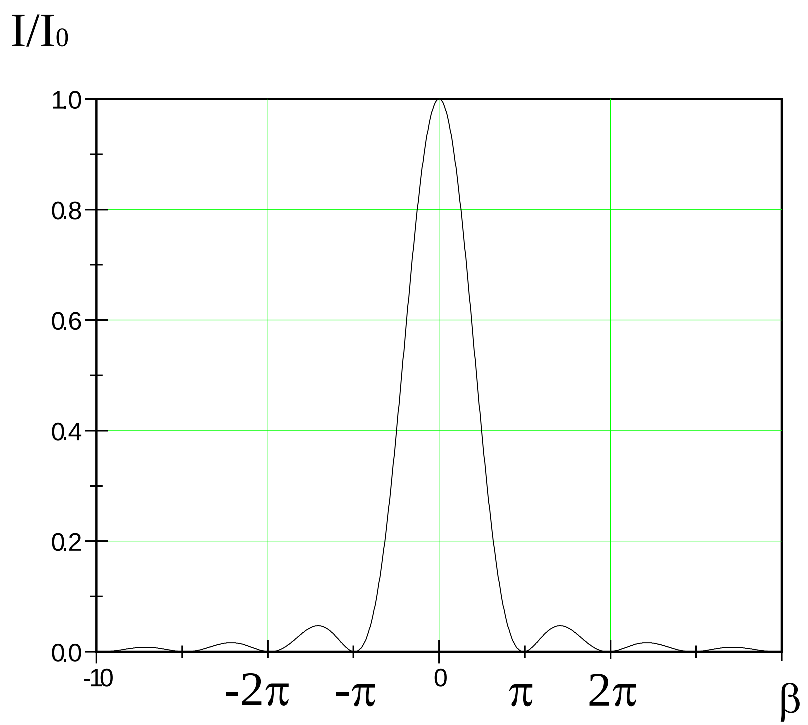
先讨论沿y轴方向的分布。

在Y轴上，$\alpha\to 0,\quad \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\to 1$

故：$$I_y=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$

（1）主极大值的位置：

**当β =0时，I有主极大值 $I_{max}=I_0$**



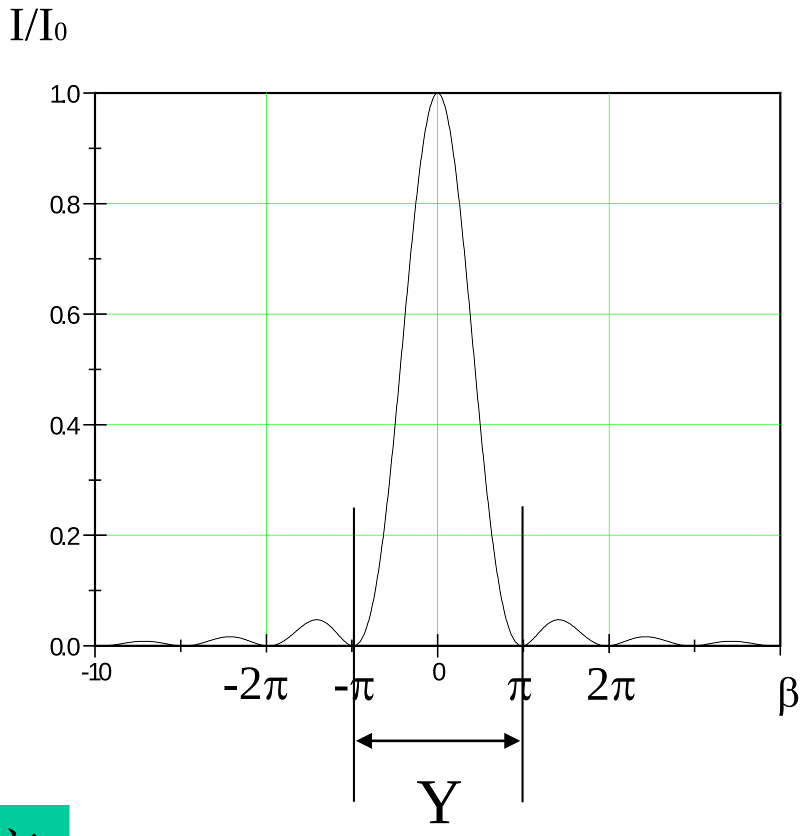
（2）极小值的位置：

**当β=nπ, n=±1,±2,…时，即**

$$\frac{\pi y b}{\lambda f'}=n\pi,\ y=n\frac{\lambda f'}{b},\ b\sin\theta_y=n\lambda$$

***I=0,有极小值***。

$$I_y=I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$




主极大值的边缘位置和宽度：

$$\beta=\pm\pi \qquad y_0=\pm\frac{\lambda f'}{b} \qquad Y=2\frac{\lambda f'}{b}$$

结论：衍射扩展与矩孔的宽度成反比，与光波波长成正比

（3）次极大值的位置：

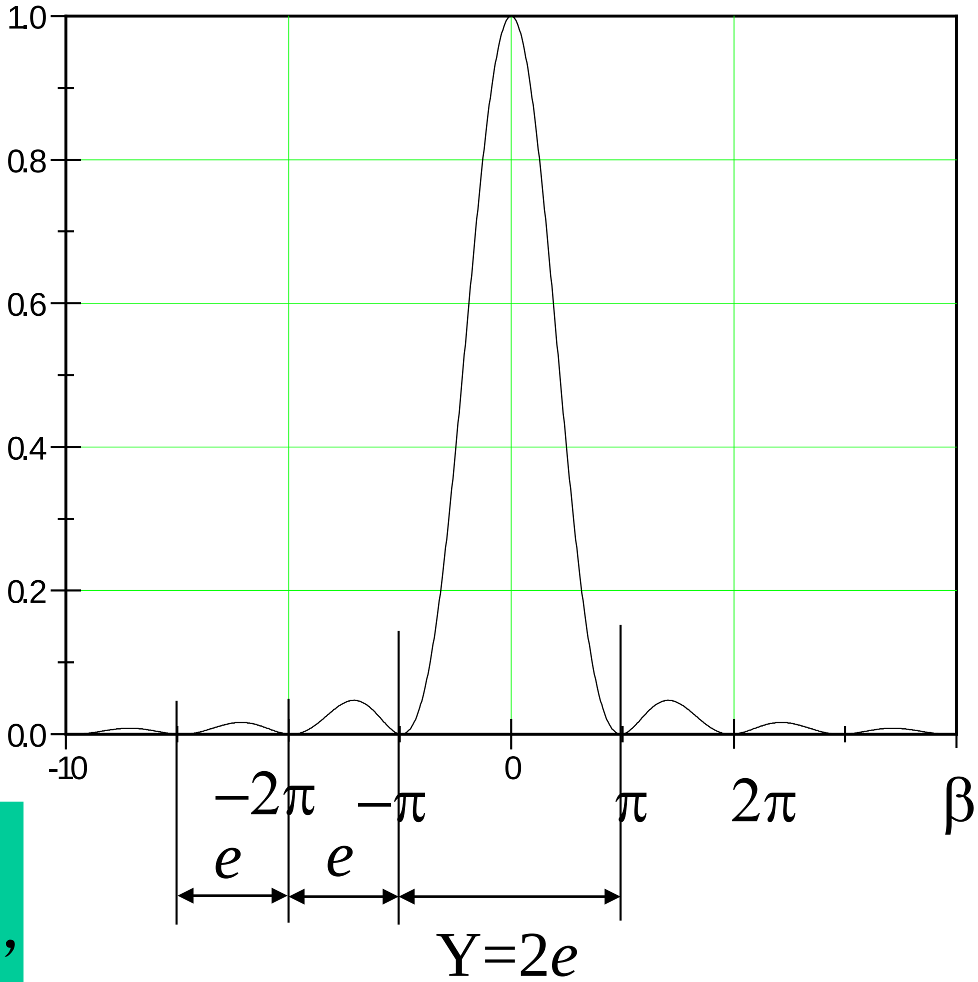
对于其它的极大值点，有

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = 0，\text{即} tg\beta = \beta$$

β可用作图求解。

（4）暗条纹的间隔

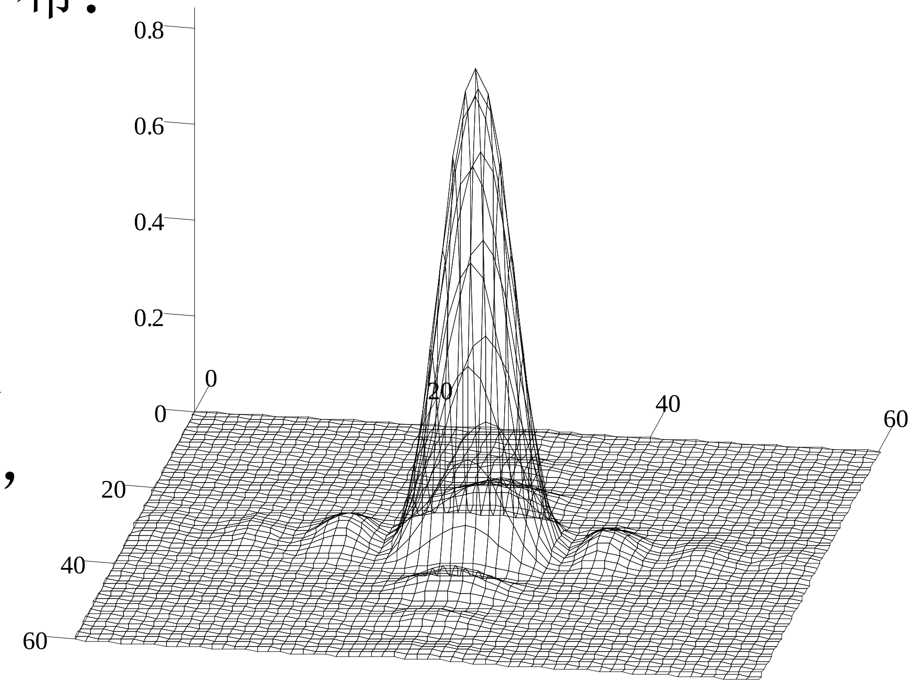
$$e = \frac{\lambda f'}{b}$$




结论：相邻两个零强度点之间的距离与矩孔的宽度成反比，与光波波长成正比

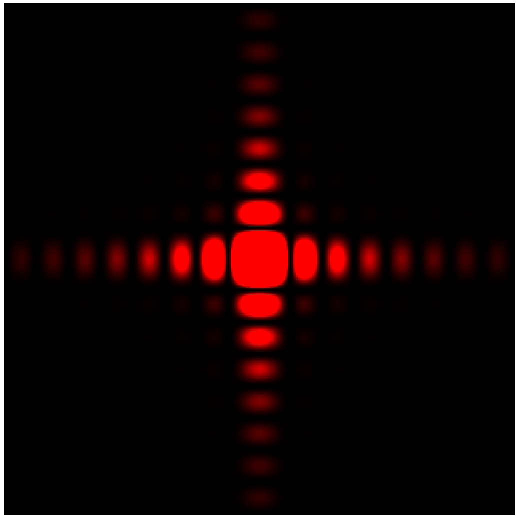
（5）沿X轴与 Y 轴有同样的分布：

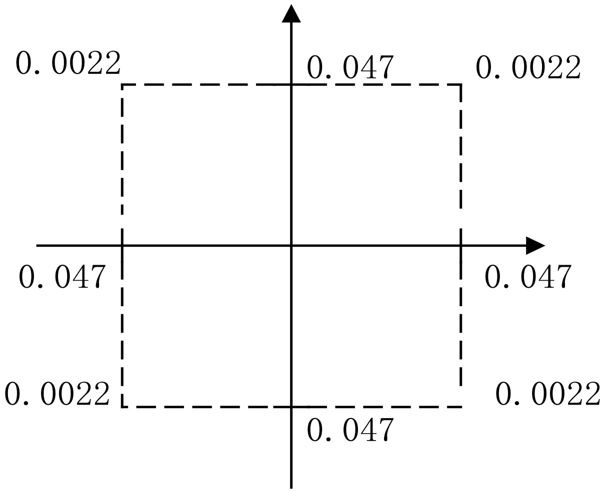
$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \bullet \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$




衍射在 X轴呈现与 Y 轴同样的分布。在空间的其它点上，由两者的乘积决定。

衍射图样





# 四、单缝衍射

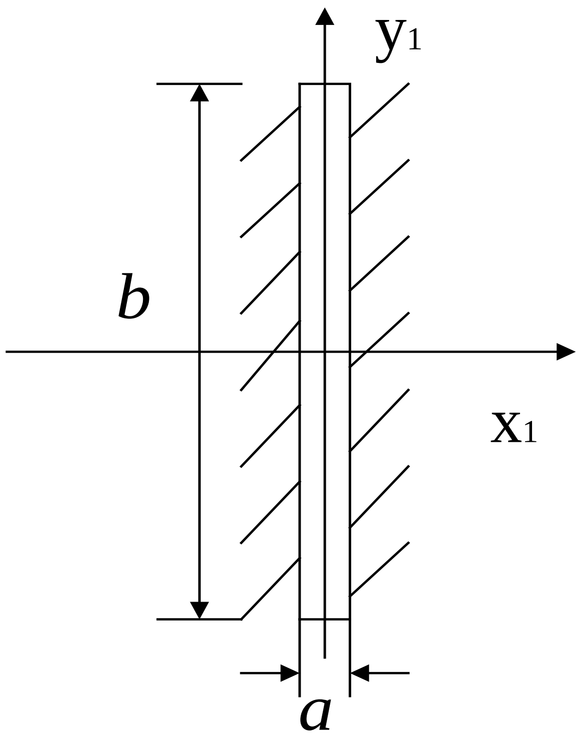
1. 复振幅分布计算

已知矩孔衍射的复振幅分布：

$$\tilde{E}(x,y)=\tilde{E}_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}$$

其中 $\alpha=\dfrac{\pi x}{\lambda f'}a,\ \beta=\dfrac{\pi y}{\lambda f'}b$

当b>>a时，矩孔变为狭缝，




此时，入射光在Y方向上的衍射效应可以忽略。

因此单缝衍射的复振幅分布为 $\tilde{E}(x)=\tilde{E}_0\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

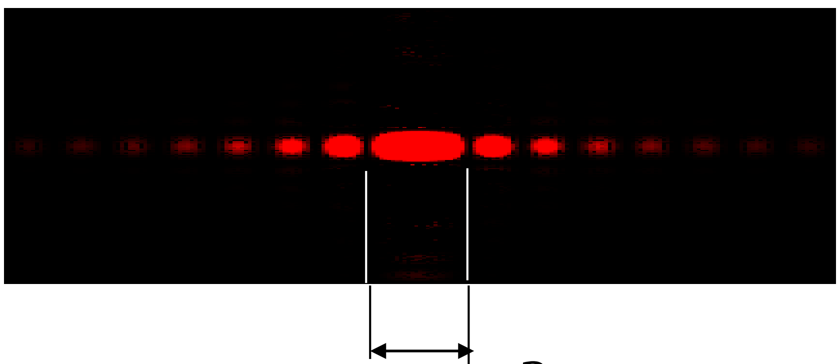
## 2. 光强分布特点

单缝衍射因子

衍射角

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \alpha = \frac{kla}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$

衍射图样



$2e_0$

因为θ较小，sinθ=*x/f'*≈θ, 中央极大条纹的角半径半宽度：

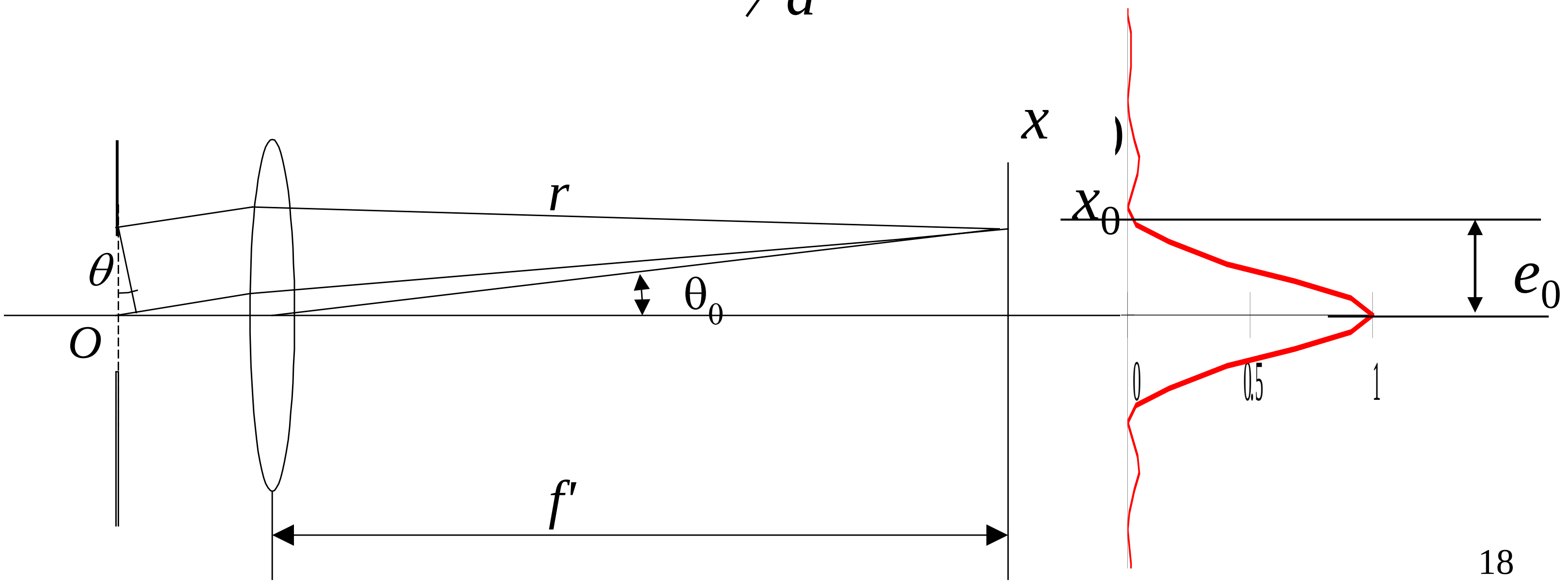
$$\theta_0 \approx \frac{x_0}{f'} = \lambda/a$$

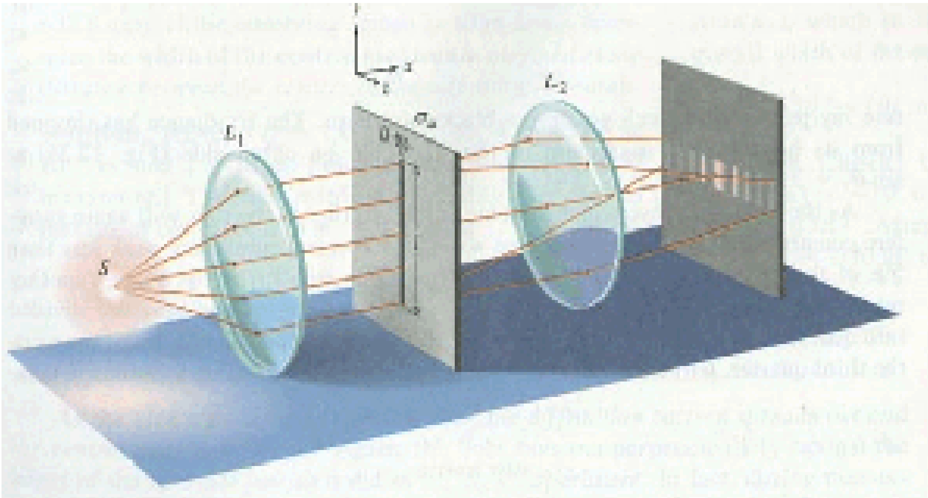
主极大值的边缘位置和宽度：

$$x_0 = \pm\frac{\lambda f'}{a} \qquad X = 2e_0 = 2\frac{\lambda f'}{a}$$

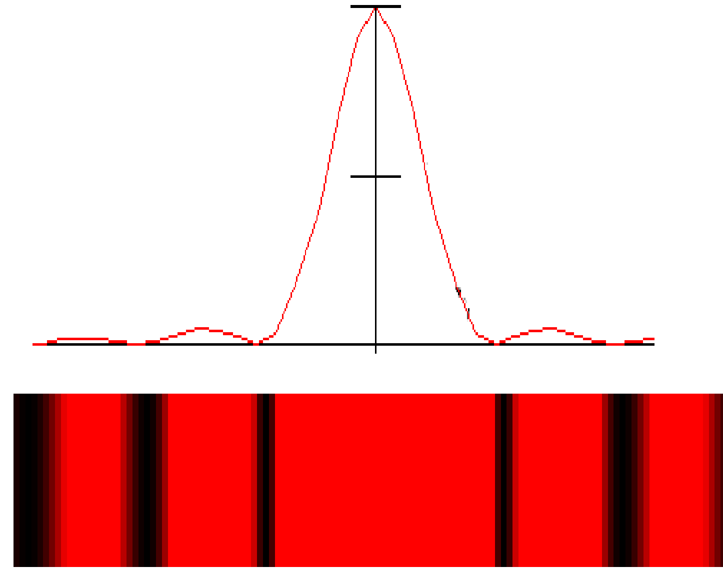
暗条纹的间隔

$$e = e_0 = \lambda/a \cdot f'$$





单缝夫琅和费衍射装置



衍射图样

在单缝衍射实验中。常常用取向与单缝平行的线光源来代替点光源。

## 五、圆孔衍射

### 1、复振幅分布计算

设圆孔半径为$a$，则孔径函数变为

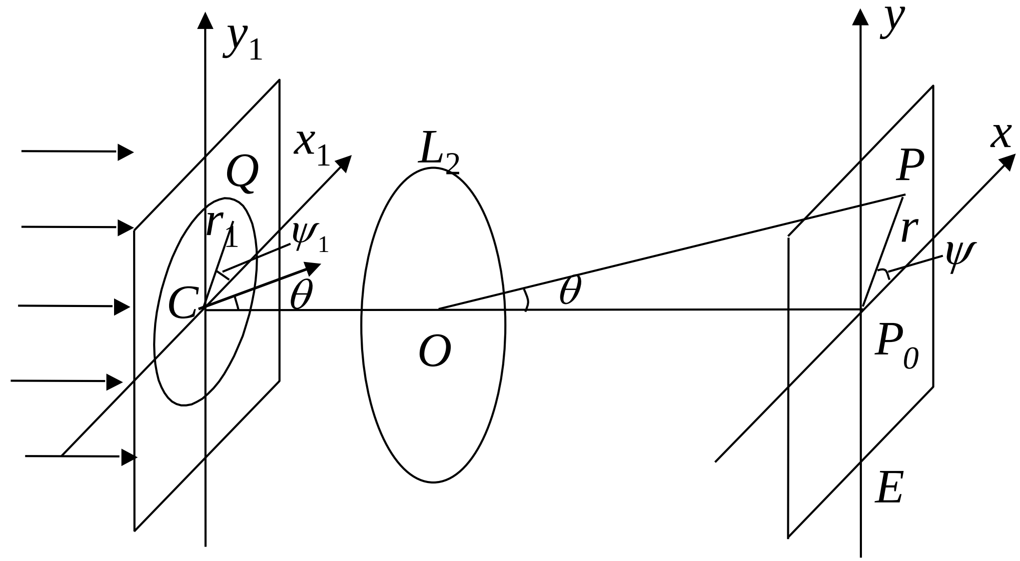
$$E=\begin{cases}1 & 当\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\le a\\ 0 & 当\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}>a\end{cases}$$ 变为极坐标 $$E=\begin{cases}1 & r\le a\\ 0 & r>a\end{cases}$$

直角坐标变极坐标：

$$\begin{cases}x_1=r_1\cos\psi_1\\ y_1=r_1\sin\psi_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=r\cos\psi\\ y=r\sin\psi\end{cases}$$

$$d\sigma=dx_1dy_1=r_1dr_1d\psi_1$$




圆孔夫琅和费衍射装置

代入夫琅和费衍射公式

$$E(x,y)=C\iint \underline{\tilde{E}(x_1,y_1)}\,\mathbf{exp}\left[-ik\left(x_1\frac{x}{f'}+y_1\frac{y}{f'}\right)\right]dx_1dy_1$$

得到极坐标夫琅和费衍射公式：

$$\tilde{E}(r,\psi)=C\int_0^{2\pi}\int_0^a \exp\left[-ik\frac{r}{f'}(r_1\cos\psi_1\cos\psi+r_1\sin\psi_1\sin\psi)\right]r_1dr_1d\psi_1$$

设$\dfrac{r}{f'}=\theta$ 得到：

$$\tilde{E}(\theta,\ \psi)=C\int_0^{2\pi}\int_0^a \mathbf{exp}[-ik\theta r_1\,\mathbf{cos}(\psi_1-\psi)]\cdot r_1dr_1d\psi_1$$

$$\tilde{E}(\theta,\ \psi)=C\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\mathbf{exp}\left[-ik\theta r_1\,\mathbf{cos}(\psi_1-\psi)\right]\cdot r_1dr_1d\psi_1$$

其中 $\int_0^{2\pi}\mathbf{exp}\left[-ik\theta r_1\,\mathbf{cos}(\psi_1-\psi)\right]d\psi_1=2\pi J_0(kr_1\theta)$

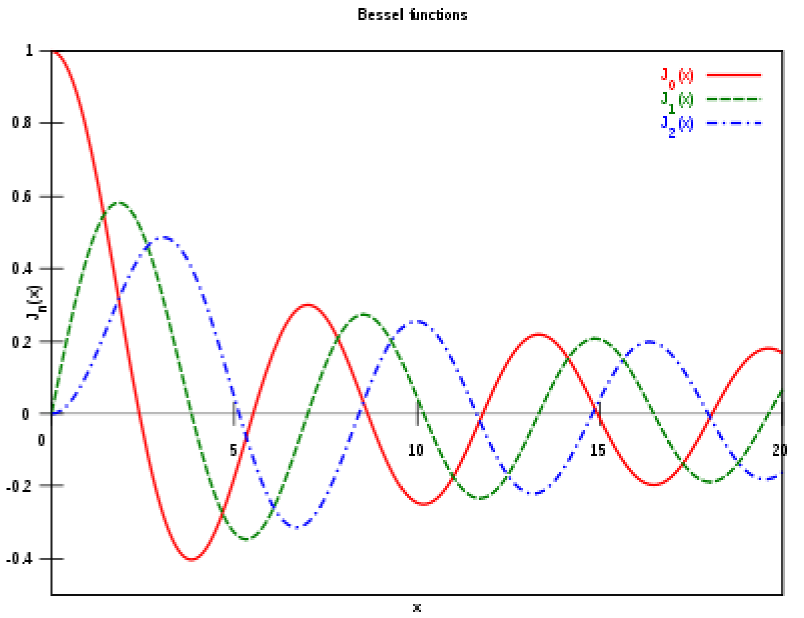
$J_0(kr_1\theta)$ 是零阶贝赛尔函数

$$\tilde{E}(\theta,\ \psi)=C\int_0^{a}r_1 2\pi J_0(kr_1\theta)dr_1=2\pi C\int_0^{k\theta a}(kr_1\theta)J_0(kr_1\theta)d(kr_1\theta)\cdot\frac{1}{(k\theta)^2}$$

其中应用了递推公式 $\int_0^{t}xJ_0(x)dx=tJ_1(x)$

即有 $\int_0^{k\theta a}(kr_1\theta)J_0(kr_1\theta)d(kr_1\theta)=\int_0^{k\theta a}xJ_0(x)dx=ka\theta J_1(ka\theta)$

最后得到 $\tilde{E}(\theta,\psi)=\pi a^2 C\dfrac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}$




其中 $\pi a^2$ 是圆孔面积，设 $I_0=(\pi a^2 C)^2$

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{2J_1(ka\theta)}{ka\theta}\right)^2,\theta=r/f'$$

结论： P点的强度与衍射角θ有关，或与r有关，而与Ψ无关。r相等的光强相同，所以衍射图样是圆环条纹。

2. 光强分布特点

$$I(z)=I_0\left(\frac{2J_1(z)}{z}\right)^2$$ 其中：$z=ka\theta$,

当z=0时，$\lim\limits_{z\to 0}\frac{J_1(z)}{z}=\frac{1}{2}, I=I_0$, 在中心有极大强度点。

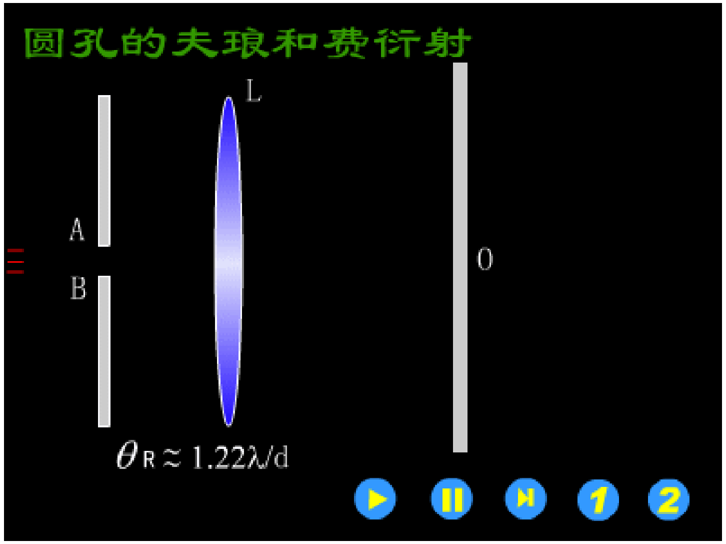
当$z\neq 0$，$J_1(z)=0$时，$I=0$, 出现暗环位置。

出现次级极大的位置是

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_1(z)}{z}\right]=-\frac{J_2(z)}{z}=0$$

由二阶贝赛尔函数的零点决定。

结论：相邻暗环间隔不等，次极大光强比中央极大小得多。



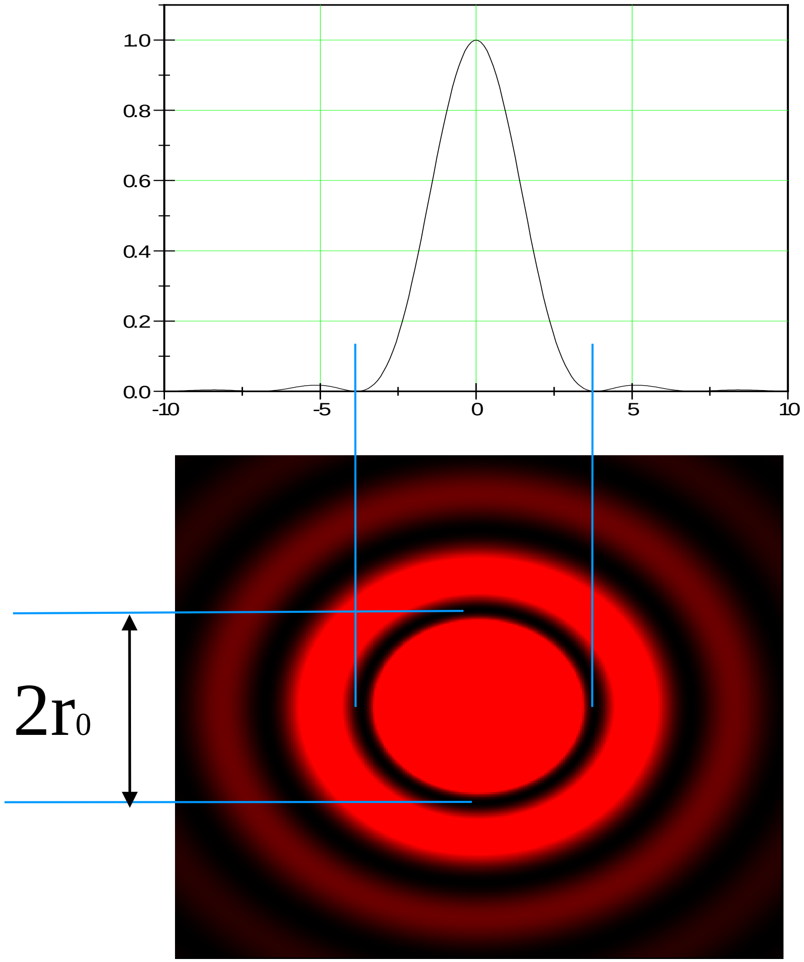
中央亮斑称为爱里斑，

它的半径满足：$z_0=1.22\pi$,即

$$z_0 = ka\theta_0 = ka\frac{r_0}{f'} = 1.22\pi$$

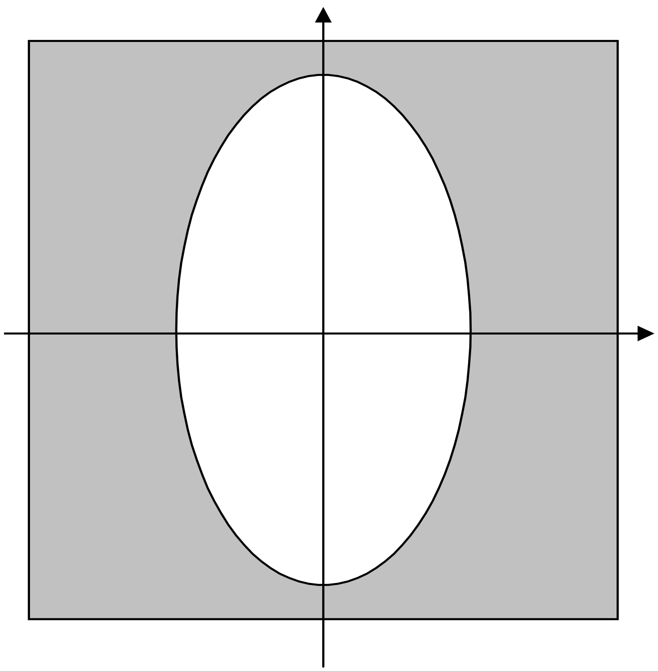
爱里斑的半径：

$$r_0 = \frac{0.61\lambda}{a} f' \qquad \theta_0 = \frac{r_0}{f'} = \frac{0.61\lambda}{a}$$

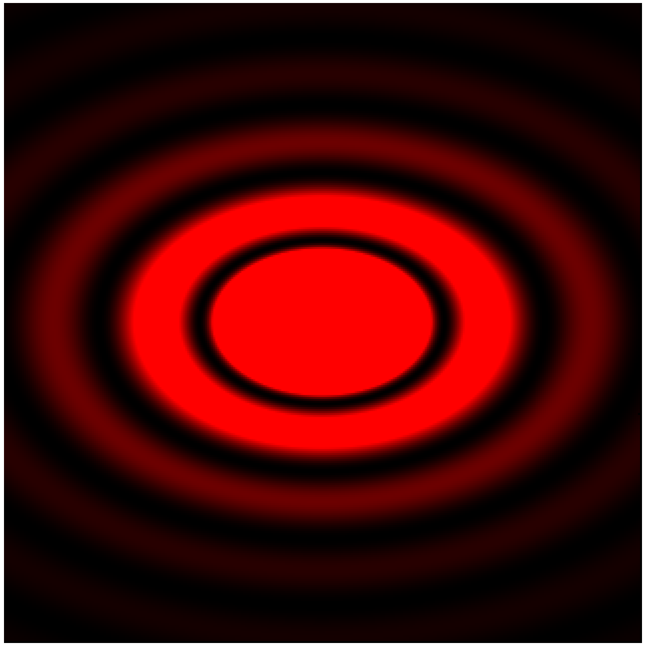



结论：衍射大小与圆孔半径成反比，而与光波波长成正比

## 3、椭圆的衍射图样



衍射屏

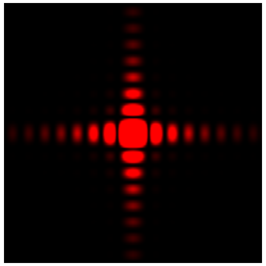


衍射图样

# 本课内容回顾

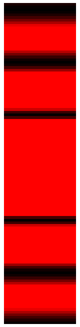
1. **夫琅和费衍射公式的意义**
2. **矩孔衍射**
   - 复振幅分布计算
   - 强度分布特点
   - 衍射图样

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$$



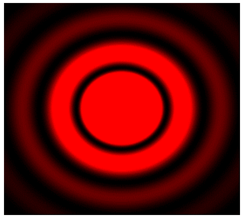
3. **单缝衍射**
   - 复振幅分布计算
   - 强度分布特点
   - 衍射图样

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \alpha = \frac{kla}{2} = \frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta$$



4. **圆孔衍射**
   - 复振幅分布计算
   - 强度分布特点
   - 衍射图样

$$\boldsymbol{I(z)} = I_0\left(\frac{2J_1(z)}{z}\right)^2, z = ka\theta$$



# 作业

- P417页8、9、 10和11题