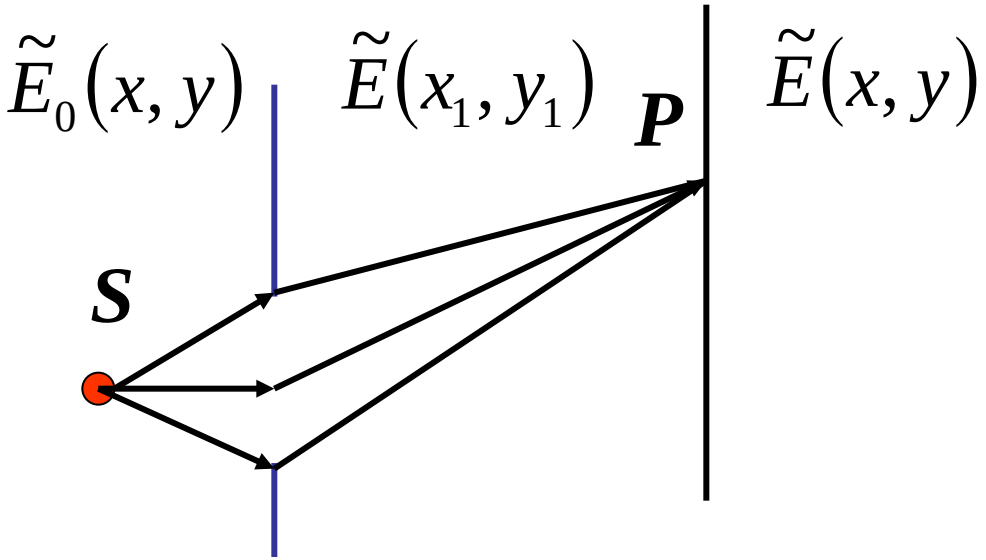
第十三章 衍射补充例题

衍射系统的基本配置：光源、衍射屏和观察屏



衍射现象的基本问题：

1）已知a、b，求c

2）已知b、c，求a

3）已知a、c，求b

光栅的衍射强度分布＝单元的衍射因子×$[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}]^2$

单元的衍射因子

$$\tilde{E}_s = C\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \tilde{t}(x_1)\exp(-iklx_1)dx_1$$

$$\tilde{E}_s = C\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (1+B\cos\frac{2\pi}{d}x_1)\exp(-iklx_1)dx_1$$

$$= \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} [1+\frac{B}{2}\exp(i\frac{2\pi}{d}x_1)+\frac{B}{2}\exp(-i\frac{2\pi}{d}x_1)]\exp(-iklx_1)dx_1$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{B}{2}\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\alpha+\pi}+\frac{B}{2}\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\alpha-\pi}$$

光栅的衍射强度分布

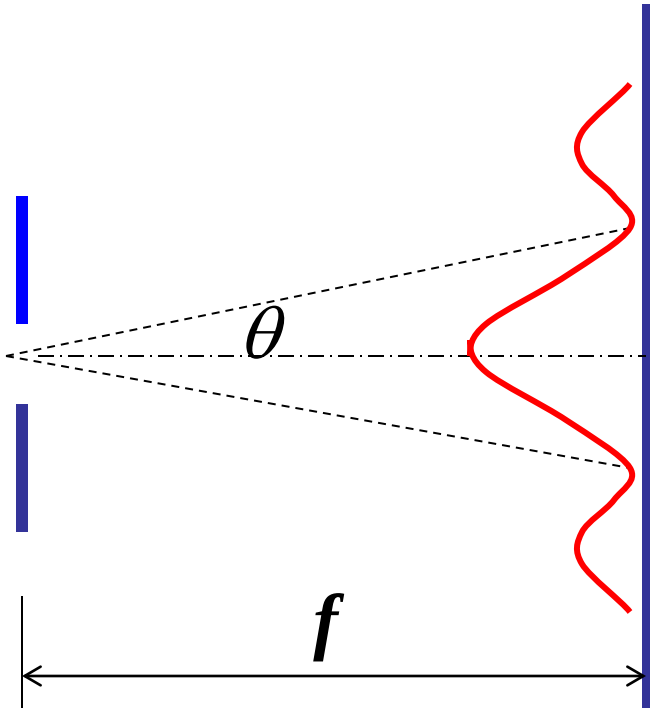
$$I = I_0\left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{B}{2}\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\alpha+\pi}+\frac{B}{2}\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\alpha-\pi}\right]^2[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}]^2$$

例题1、波长为5460Å的平行光垂直照射在a=0.437mm的单缝上，缝后有焦距为40cm的凸透镜，求透镜焦平面上出现的衍射中央明纹的宽度。

解：

$$a\sin\theta = \lambda$$

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{a}$$



$$L = 2x = 2f \cdot tg\theta$$

$$\approx 2f\theta = \frac{2\lambda f}{a}$$

$$= \frac{2\times 5.460\times 10^{-7}\times 0.40}{0.437\times 10^{-3}} = 1.0\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

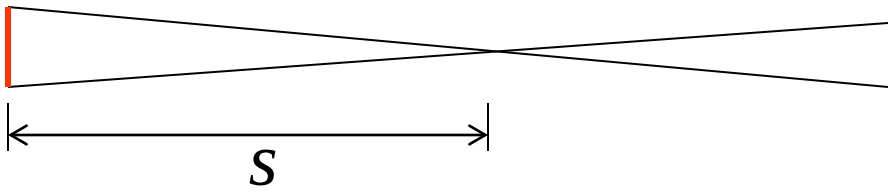
例题2、在通常亮度下，人眼的瞳孔直径为3mm，问：人眼最小分辨角为多大？（λ=5500A）如果窗纱上两根细丝之间的距离为2.0mm，问：人在多远恰能分辨。

解：

$$\delta\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$= 1.22 \times \frac{5500 \times 10^{-10}}{3 \times 10^{-3}} = 2.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad}(1')$$

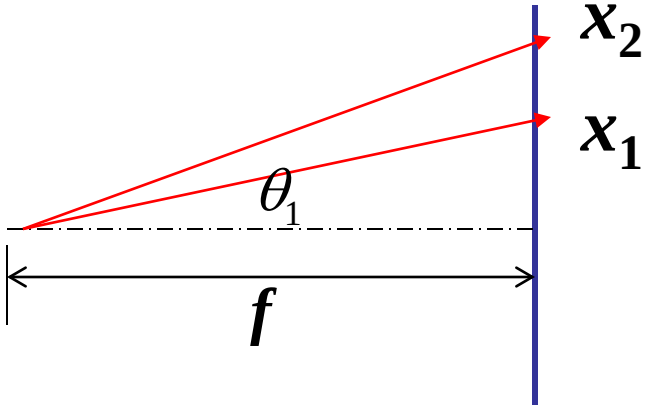
$$\delta\theta = \frac{l}{s}$$



$$s = \frac{l}{\delta\theta} = \frac{2.0 \times 10^{-3}}{2.2 \times 10^{-4}} = 9.1\mathrm{m}$$

例题3、波长为5000Å和5200Å的两种单色光同时垂直入射在光栅常数为0.002cm的光栅上，紧靠光栅后用焦距为2米的透镜把光线聚焦在屏幕上。求这两束光的第三级谱线之间的距离。

解： $d\sin\theta = m\lambda$



$$\sin\theta_1 = \frac{3\lambda_1}{d} \qquad \sin\theta_2 = \frac{3\lambda_2}{d}$$

$$x_1 = f\cdot tg\theta_1 \qquad x_2 = f\cdot tg\theta_2 \qquad \sin\theta \approx tg\theta$$

$$\Delta x = f(tg\theta_2 - tg\theta_1) = f\left(\frac{3\lambda_2}{d} - \frac{3\lambda_1}{d}\right) = 0.006\ \mathrm{m}$$

例题4、用每毫米500条栅纹的光栅，观察钠光谱线（λ=5900Å）问：（1）光线垂直入射；（2）光线以入射角30°入射时，最多能看到几级条纹？

解： （1） $d\sin\theta = m\lambda$

$$m = \frac{d}{\lambda}\sin\theta \qquad \sin\theta = 1 \quad (\theta = 90°) \qquad \textbf{m最大}$$

$$d = \frac{1\times10^{-3}}{500} = 2\times10^{-6}\,\mathrm{m}$$

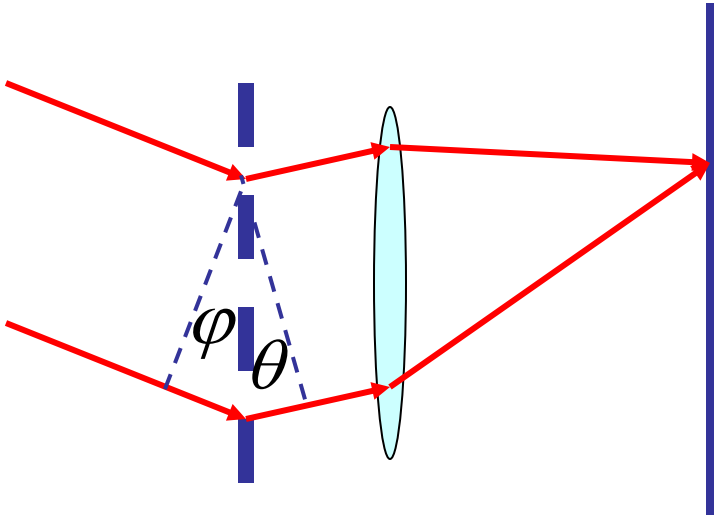
$$m = \frac{d}{\lambda} = \frac{2\times10^{-6}}{5900\times10^{-10}} \approx 3.39 \qquad \text{取 } m = 3$$

看到7条条纹

（2）

$$d(\sin\phi + \sin\theta) = m\lambda$$

$$m = \frac{d(\sin\phi + \sin\theta)}{\lambda}$$

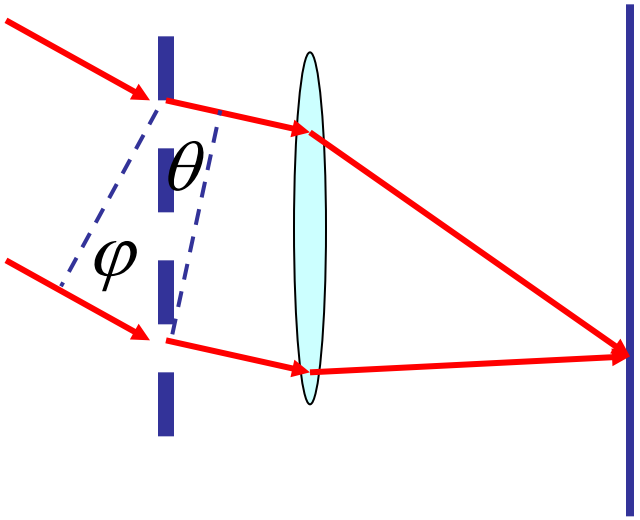


$\sin\theta = 1 \quad (\theta = 90°)$ **m最大**

$$m = \frac{2\times10^{-6}\times(\sin 30° + 1)}{5900\times10^{-10}} \approx 5$$

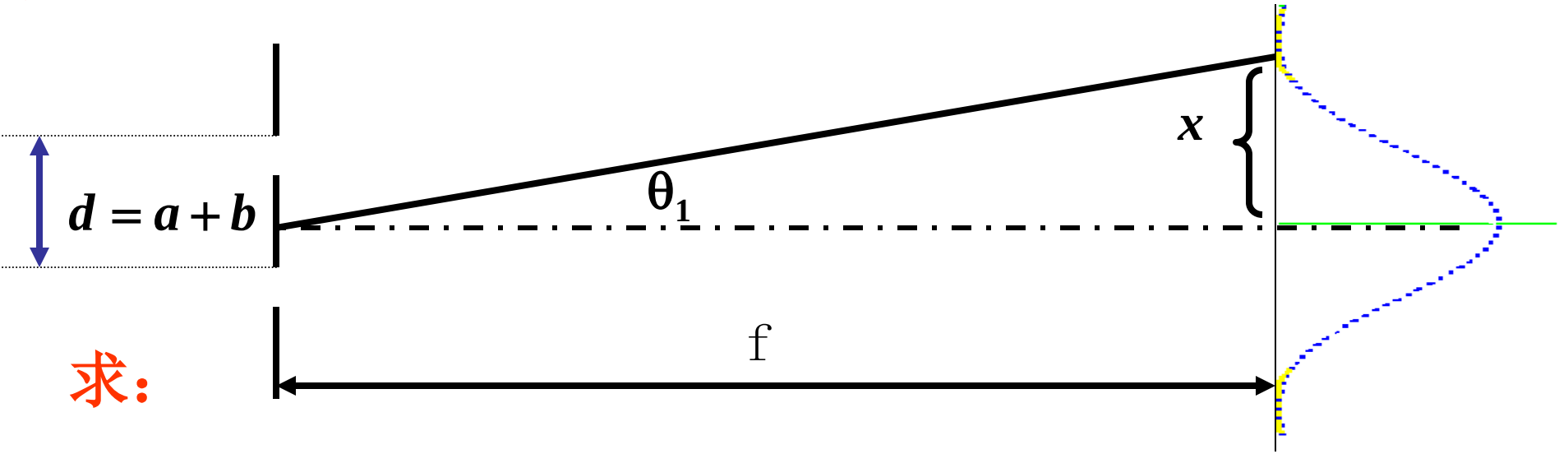
$$m = \frac{d(\sin\phi - \sin\theta)}{\lambda}$$

$= -1.69$ 取 m =-1



看到7条条纹

例题5、已知 $f = 50cm, \lambda = 480nm, d = 0.1mm, a = 0.02mm$



求：

（1）双缝衍射相邻两条明纹间距

（2）包络线中的‘x’

（3）双缝衍射的第 1 级明纹的相对强度

（4）中央明纹的包线中，共包含了 几条完整的明纹？

（5）中央明纹包线中恰好11 条明纹，如何设计 a 、 d ？

解：（1）： $\Delta x = \frac{f}{d}\lambda$ **$= 2.4mm$**

（2）： $x = f\,tg\theta_1 \approx f\sin\theta_1 = f\frac{\lambda}{a} = 12mm$

（3）双缝衍射的第 1 级明纹的相对强度

根据 $$I_\theta = I_m(\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\frac{I_\theta}{I_m} = (\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

根据题意：

$$d\sin\theta = 1\lambda$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = \pi \\ \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = \frac{a}{d}\pi = \frac{0\cdot 02}{0\cdot 1}\pi = \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\frac{I_\theta}{I_m} = (\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\frac{\pi}{5}})^2(\cos\pi)^2 = 86\%$$

（4）中央明纹的包线中，共包含了 几条完整的明条纹？

包线的第一极小的衍射角：$a\sin\theta_1 = n\lambda \Rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a}$

设中央明纹中共有 **m** 级明纹　　$d\sin\theta_1 = k\lambda$

$$d\frac{\lambda}{a} = \mathrm{m}\lambda \quad \Rightarrow \mathrm{m} = \frac{d}{a} = \frac{0\cdot 1}{0\cdot 02} = 5$$

(第 5 级缺级 ！)

包含了　**2×4+1＝9**　条明条纹

（5）若要中央明纹的包线中恰好 有 **11** 条明纹，应如何设计 **a** 、 **d** ？

$$\begin{cases} a\sin\theta = n\lambda \cdots\cdots (1)\cdots (n=1) \\ d\sin\theta = (\mathrm{m}+\frac{1}{2})\lambda \cdots\cdots (2) \quad \mathrm{m} = ? \end{cases}$$

$(\mathrm{m} = 5!)$

(1)/(2)：　　$\frac{a}{d} = \frac{2}{11}$