解析几何的基本思想就是用代数方法来处理几何问题. 为了把代数运算引入到几何中, 需要把空间结构代数化. 为此需要引进向量的代数运算, 通过向量引进坐标系. 本讲义主要讨论向量的运算与空间解析几何的基本内容.

§1 向量及其线性运算

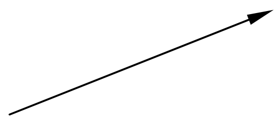
1. 向量概念

向量是数学的基本概念之一，是空间解析几何的重要工具, 它在许多与数学相关的学科中也是解决问题的有力工具.

我们把既有大小，又有方向的量叫做向量或矢量. 例如位移、速度、加速度、力、力矩等都是向量. 而通常把只有大小的量叫做数量.

在数学中，利用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点, B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$ （图 1）. 有时用加箭头的字母或用粗体字母作为向量的记号，例如向量 $\vec{a}$, $\vec{f}$, $\overrightarrow{W}$ 或向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{W}$ 等.

B



A　　　图 1

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，就说 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的向量，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

注意, 在数学中我们只考虑向量的大小和方向, 而不论它的起点在什么地方. 即向量可以自由地平行移动, 且平移前后都代表相等的向量(同一个向量). 由于向量起点的任意性，数学上称这种向量为自由向量. 我们只讨论自由向量.

向量的大小叫做向量的模或长度. 向量 $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{a}|$. 模是 1 的向量叫做单位向量. 模是 0 的向量叫做零向量, 记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 注意, 零向量的起点和终点重合，零向量的方向可以看作是任意的.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反，就称两个向量共线也叫平行，记为 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ (共线或平行). 由于零向量的方向是任意的，因此认为零向量与任

何向量都平行，记为$\vec{0} // \boldsymbol{a}$.

类似还有向量共面的概念. 如果k个向量平行于同一个平面，就称这k个向量共面. 此时若把它们的起点放在同一点，则k个终点和公共起点必在同一个平面上.

2. 向量的线性运算

2.1 向量的加减法

设两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，任取一点A，作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作$\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$，连接$AC$ （图 2），那么向量$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和，记作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

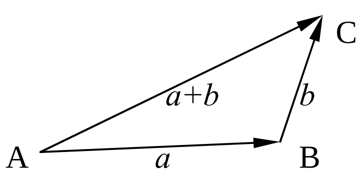


图 2

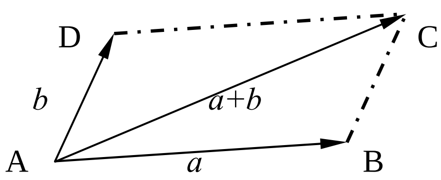


图 3

力学上有求合力的平行四边形法则，数学上也有向量相加的平行四边形法则. 这就是：设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不平行，作$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a},\ \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为边作一平行四边形 ABCD，连接对角线 AC（图 3），显然，向量$\overrightarrow{AC}$等于向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法符合下列运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

这是因为，按向量加法的规定（三角形法则），从图 3 可见：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$$

所以符合交换律，又如图 4 所示，先作$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$再加上$\boldsymbol{c}$，即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$相加，则得同一结果，即符合结合律.

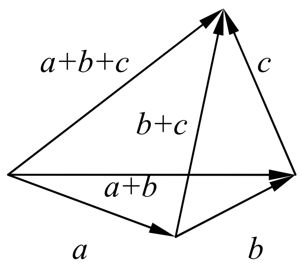


图 4

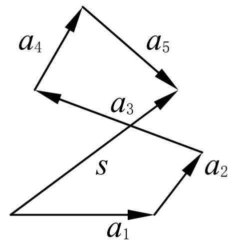


图 5

由于向量加法符合交换律和结合律，故n个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$相加可写成：

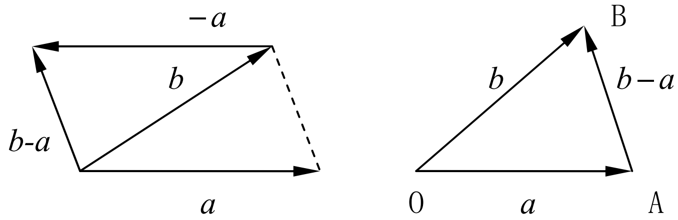
$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_\mathrm{n},$$

并按向量相加的三角形法则，可得n个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$，再以第一向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 5，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

设$\boldsymbol{a}$为向量，与$\boldsymbol{a}$的模相同而方向相反的向量叫做$\boldsymbol{a}$的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$. 由此，规定两个向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差：　$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，

即把向量$-\boldsymbol{a}$加到向量$\boldsymbol{b}$上，便得$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 6(a)）.



(a)　(b)

图 6

显然，任给向量$\overrightarrow{AB}$及点O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

因此，若把向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$移到同一个点O，则从$\boldsymbol{a}$的终点A向$\boldsymbol{b}$的终点B所引向量便是向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$的差$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 6(b)）.

特别地，当$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$时，有　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad \text{及} \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2.2 数乘向量法

规定实数 λ 乘向量 $\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

特别地， 当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向是任意的.

当 $\lambda=\pm1$ 时， $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数乘向量满足下列性质：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为由数乘向量规定可知, 向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a}),\ \mu(\lambda\boldsymbol{a}),\ (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 、都是平行的向量，它们的指向也是相同的，且 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|$，

所以 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$； $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这个规律同样可用数乘向量定义来证明，证明从略.

注 向量的加法及数乘统称为向量的线性运算.

例 1 平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点（图 7）.

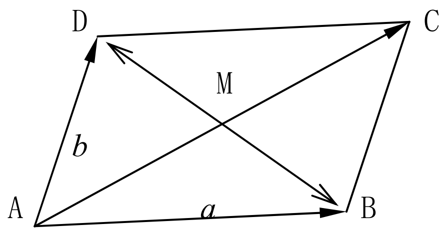


图 7

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}, \qquad -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$$

于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，且$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

前面已经规定,模为 1 的向量叫<u>单位向量</u>. 对于非零向量$\boldsymbol{a}$，与它同方向的单位向量叫做<u>向量$\boldsymbol{a}$ 的单位向量</u>，常记为$\boldsymbol{a}^0$或$\boldsymbol{e}_a$. 这里有$|\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{e}_a|=1$.

按照向量的数乘规定，$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$与$\boldsymbol{a}^0$（即$\boldsymbol{a}$）的方向相同，$\boldsymbol{a}$的模也相同. 显然有公式：$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 或写成 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$. 即向量$\boldsymbol{a}$<u>等于它的模与它的单位向量乘积</u>.

规定当$\lambda\neq0$时，$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. ，则$\boldsymbol{a}$ 的单位向量公式为:

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}，\quad 或 \quad \boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

这表示一个非零向量$\boldsymbol{a}$除以它的模是同方向的单位向量$\boldsymbol{a}^0$.

利用$\lambda\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}$共线(平行)，可得向量的<u>共线定理</u>.

定理 1 设向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$. 则，向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$共线的充要条件是：存在唯一的实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. （此定理也叫‘共线定理’）.

推论 1 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$（共线）$\Leftrightarrow$ 存在数λ，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

推论 2 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充要条件是存在不全为 0 的数k,l 使得

$$k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}=\vec{0}.$$

证 充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设$\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$，取$|\lambda|=|\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向时$\lambda$取正值，当$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$反向时$\lambda$取负值，即有$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时$\boldsymbol{b}$与$\lambda\boldsymbol{a}$同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数λ的唯一性. 设$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，即|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因$|\boldsymbol{a}|\neq0$，故$|\lambda-\mu|=0$，即$\lambda=\mu$. 证毕.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点O及单位向量$\boldsymbol{i}$确定了数轴Ox（图 8）.

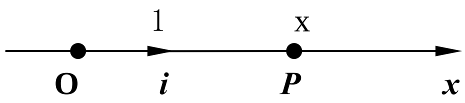


图 8

对于轴上任一点P，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP}\,//\,\boldsymbol{i}$，根据定理 1，必有唯一的实数$x$，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数$x$叫做有向线段$\overrightarrow{OP}$的值），并且$\overrightarrow{OP}$与实数$x$一一对应.

于是有关系：　　点$P\leftrightarrow$向量$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow$实数$x$.

从而轴上的点P与实数x有一一对应的关系. 据此，定义实数x为数轴上点P的坐标. 由此可知，轴上点P的坐标为x的充要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

3. 空间直角坐标系

在空间取定一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以O为原点的两两垂直的数轴，依次记为x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为$Oxyz$坐标或$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系（图 9）. 通常把$x$轴和$y$轴配置在水平面上，而$z$轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住z轴，当右手的四个手指从正向x轴以$\dfrac{\pi}{2}$角度转向正向y轴时，大拇指的指向就是z轴的正向，如图 10.

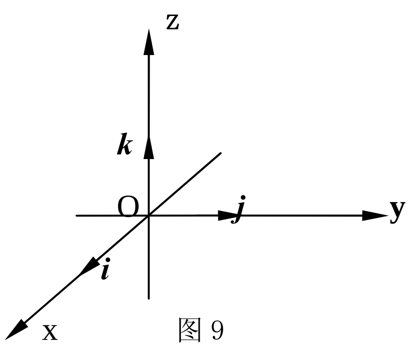


图 9

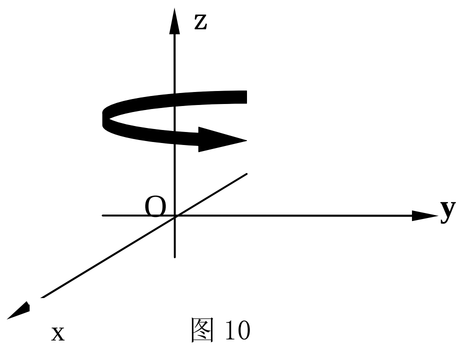


图 10

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标

面. x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面. 三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做一个卦限. 含有 x 轴 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示（图 11）.

任给向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，$\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向径. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK\text{-}OPNQ$. 如图 12 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\qquad \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，

则 $\qquad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ （向径公式）

上式称为向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

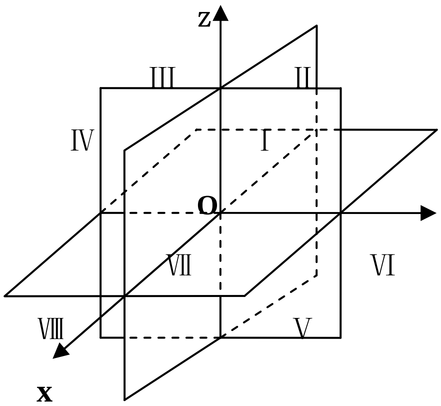


图 11

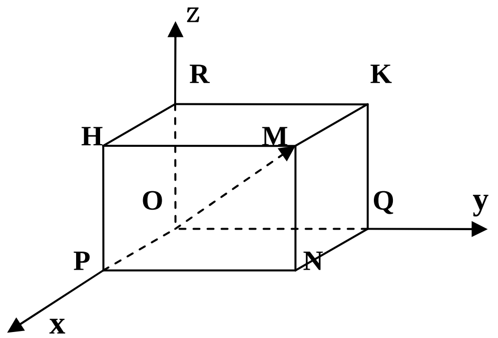


图 12

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，就确定了点 M，进而确定了三个有序数 $(x,\ y,\ z)$；反之，给定三个有序数 $(x,\ y,\ z)$，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与点 M. 于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与有序数组 $(x,\ y,\ z)$ 之间有一一对应关系:

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,\ y,\ z).$$

据此，可把向量$\boldsymbol{r}$记作：　$\underline{\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,\ y,\ z)}$（向量坐标公式）.

称有数组$(x,\ y,\ z)$为向量$\boldsymbol{r}$（在坐标系$Oxyz$中）的坐标；　而且$(x,\ y,\ z)$也称为点M的坐标，记作　$\underline{M(x,\ y,\ z)}$.

这里，向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的向径. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号$(x,\ y,\ z)$既表示点M，也表示向量$\overrightarrow{OM}$（向径）.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：如果点M在yOz面上，则$x=0$；同样，在zOx面上的点，$y=0$；在面xOy上的点，$z=0$. 如果点M在z轴上的点，则$x=y=0$. 特别，原点O的坐标为$O(0,0,0)$.

4. **利用坐标作向量运算**

利用向量的坐标，可得向量的加减法以及向量的数乘法的运算如下：

设　$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\qquad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$$

即　$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律和结合律，以及向量数乘法的结合律与分配律，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_2)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda a_2)\boldsymbol{j}+(\lambda a_3)\boldsymbol{k}\ ,\ (\lambda\text{为实数}),$$

即　$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\ ,$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)\ ,$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3).$$

由此可见，对向量进行加、减及与数乘，只需对向量的各个坐标进行相应的数量运算即可.

定理1指出，当向量$\boldsymbol{a}\neq 0$时，向量$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$相当于$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，坐标式为

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_1,\ b_2,\ b_3)=\lambda(a_1,\ a_2,\ a_3)\ ,$$

这也就相当于向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$对应的坐标成比例，可得：

$$\boldsymbol{b} // \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}^{*}$$ （平行共线定理）.[①]

例 2　求解未知元是向量的线性方程组

$$\begin{cases} 5\boldsymbol{X} - 3\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{a}, & \boldsymbol{a} = (2,\ 1,\ 2) \\ 3\boldsymbol{X} - 2\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} = (-1, 1, -2) \end{cases}$$

解　如同解实数为未知元的方程组一样，可解得

$$\boldsymbol{X} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{Y} = 3\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}.$$

以 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$$\boldsymbol{X} = 2(2,1,2) - 3(-1,1,-2) = (7, -1,\ 10),\quad \boldsymbol{Y} = (11,\ -2,\ 16).$$

例 3　已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线 AB 上求点 M，使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$　（图 13）.

解　如图 13 所示, 由于

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$

因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$$

从而得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$$ (<u>分点公式</u>)

以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A，B 的坐标）代入，即得 $\overrightarrow{OM}$ 与 M 的坐标：

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right).$$

定理 2　**设 O 为固定点．则点 M 在直线 AB 上(共线)的充要条件是**

存在实数 k, l 使得　$\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB}$,　且 $k + l = 1$.

证　在<u>分点公式</u>中令 $k = \dfrac{1}{1+\lambda}$, $l = \dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ 即得必要性．充分性用定理 1 可得.

[①] 当 a_1, a_2, a_3 有一个为零，如 $a_1 = 0,\ a_2, a_3 \neq 0$，这时（*）式应理解为

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \Leftrightarrow b_3 = 0,\ \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_2}{a_3}$$;

当 a_1, a_2, a_3 有两个为零，例如 $a_1 = a_2 = 0,\ a_3 \neq 0$ 这时（*）式应理解为

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \Leftrightarrow b_1 = 0,\ b_2 = 0.$$

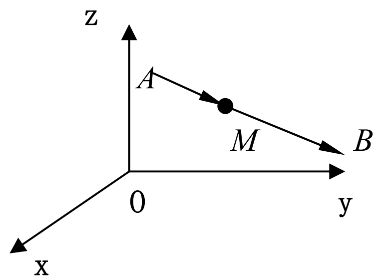


图 13

本例中的点 M 叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 当 $\lambda=1$ 时，得 $\overrightarrow{AB}$ 的中点公式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\text{（中点公式）}$$

它的坐标为 $\overrightarrow{OM}=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$， 这也是点 M 的坐标.

注 通过本例，我们应注意以下两点：(1) 由于点 M 与向径 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标，因此，求点 M 的坐标，就是求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标。(2) 记号 (x,y,z) 既可表示点 M，又可表示向量 $\overrightarrow{OM}$，在几何上点与向量是两个不同的概念，不可混淆. 因此，看到记号 (x,y,z) 时，须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量，当 (x,y,z) 表示向量时，可对它进行运算；当 (x,y,z) 表示点时，就不可进行运算.

5. 向量的模与方向角

5.1 向量的模与两点向量公式

设向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，如图 12 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}，\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}，\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}，\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}.$$

按勾股定理可得 $|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$

由 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，

得 $|OP|=|x|$，$|OQ|=|y|$，$|OR|=|z|$，

于是得向量模长公式

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \text{（模公式）}.$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和点 $B(x_2,y_2,z_2)$，则点 A 与点 B 间的距离 $|AB|$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$

的模. 利用公式$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 可得如下“两点向量公式”.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\ \text{(两点公式)} \qquad (**)$$

由此利用模公式得 A, B 两点的距离公式

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ \text{(两点模公式)}$$

注意 两点公式$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$是很有用的坐标公式.

例 4 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $\boldsymbol{M}(0,0,z)$，依题意有

$$|MA|=|MB|$$

即
$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号，解得 $z=\frac{14}{9}$，所求的点为

$$\boldsymbol{M}(0,0,\frac{14}{9}).$$

例 5 已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解 由两点公式知 $\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,\ 1,\ -2)$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14},$$

由单位化公式得

$$\boldsymbol{e}=\overrightarrow{AB}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

5.2 方向角与方向余弦

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 、$\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O. 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过$\pi$的$\angle AOB$（设$\varphi=\angle AOB.\ 0\le\varphi\le\pi$）称为向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的夹角（图 14），记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$中有一个是零向量，规定它们的夹角在$0$与$\pi$之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一个轴的夹角或空间两轴的夹角，不再赘述.

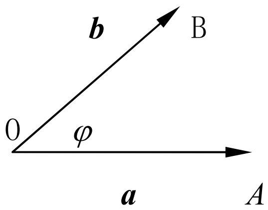


图 14

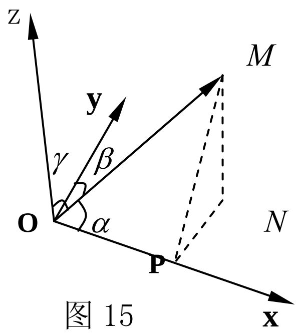


图 15

非零向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 与三条坐标轴的夹角 α 、β 、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的<u>方向角</u>(图 15).

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ ，由于 x 是有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值，$MP\perp OP$ ，故

$$\cos\alpha=\frac{x}{\left|OM\right|}=\frac{x}{\left|\boldsymbol{r}\right|}$$

同理可知
$$\cos\beta=\frac{y}{\left|\boldsymbol{r}\right|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{\left|\boldsymbol{r}\right|}$$

从而得单位向量公式

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x}{\left|\boldsymbol{r}\right|},\frac{y}{\left|\boldsymbol{r}\right|},\frac{z}{\left|\boldsymbol{r}\right|}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{\left|\boldsymbol{r}\right|}=\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{r}=\left|\boldsymbol{r}\right|\boldsymbol{e}_r=\left|\boldsymbol{r}\right|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x,y,z).$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦. 上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 并由此可得余弦公式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

例 6 已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 由<u>两点公式</u> $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$ ；

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{1^2+1^2+2}=2 ;$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2} ;\quad \alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 7 设点 A 位于第 I 卦限，向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 6$，求点 A 的坐标.

解 $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{\pi}{4}$. 由公式 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$，得

$\cos^2\gamma = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$， $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$.（因为 A 点在第Ⅰ卦限， $\cos\gamma > 0$）

$$\overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OA}\right|(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = 6\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, 3\sqrt{2}, 3)$$

这也就是点 A 的坐标.

5.3 向量在轴上的投影

如果撇开 y 轴和 z 轴，单独考虑 x 轴与向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 的关系，那么从图 15 可见，过点 M 作与 x 轴垂直的平面，此平面与 x 轴的交点即是点 P. 作出点 P，即得 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴上的分向量 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$， 便得向量在 x 轴上的坐标 $x = |\boldsymbol{r}|\cos\alpha$.

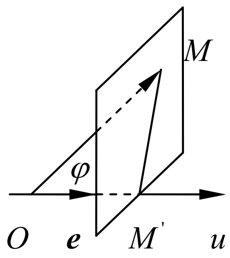


图 16

一般地，设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴（图 16）. 任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$， 再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 叫作点 M 在 u 轴上的投影），则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称作向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r} = \lambda$ 或 $(\boldsymbol{r})_u = \lambda$. 特别注意，投影 $(\boldsymbol{r})_u = \lambda$ 是一个数值 .

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x、 a_y、 a_z 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即 $a_x = Prj_x\boldsymbol{a}$， $a_y = Prj_y\boldsymbol{a}$， $a_z = Prj_z\boldsymbol{a}$

可记为 $a_1 = a_x = (\boldsymbol{a})_x,\ a_2 = a_y = (\boldsymbol{a})_y,\ a_3 = a_z = (\boldsymbol{a})_z$.

向量的投影具有下列性质：（设 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角）

性质 1 $(\boldsymbol{a})_u = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$（即 $Prj_u\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$）；

性质 2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$（即 $Prj_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=Prj_u\boldsymbol{a}+Prj_u\boldsymbol{b}$）；

性质 3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$.

例 8 设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}$ [①].

解 如图 17 所示，记 $\angle MOA=\varphi$，有

$$\cos\varphi=\frac{|OA|}{|OM|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

由投影公式得 $(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

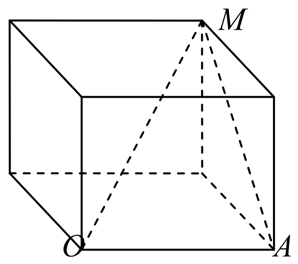


图 17

习题 1

1. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

2. 把 ΔABC 的 BC 边五等分. 设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4，再把各点与点 A 连接. 试以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

3. 已知两点 $M_1(0,1,2)$ 和 $M_2(1,-1,0)$. 试用坐标表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $-2\overrightarrow{M_1M_2}$.

4. 在直角坐标系中指出下列各点所在的卦限： $A(1,-2,3), B(2,3,-4), C(2,-3,-4)$.

5. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有何特征？指出点 $A(0,4,3)$，$B(3,4,0)$ 的位置.

6. 求点 $P(a,b,c)$ 关于（1）各坐标面；（2）坐标原点的对称点的坐标.

7. 自点 $P(a,b,c)$ 分别作各坐标面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标. 求点 P 到各坐标轴的距离.

8. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

9. 证明三点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $(2,4,3)$ 是等腰直角三角形的顶点.

[①] 向量 $\boldsymbol{r}$ 在向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$ 的方向上的投影 $(\boldsymbol{r})_{\boldsymbol{a}}$ 是指 $\boldsymbol{r}$ 在一条与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的轴上的投影.

10. 设两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

11. 设向量的方向余弦分别满足(1) $\cos\alpha=0$；(2) $\cos\beta=1$；(3) $\cos\alpha=\cos\beta=0$，问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

12．设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与轴 u 的夹角是 60°，求 $\boldsymbol{r}$ 在轴 u 上的投影.

13．一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7. 求这向量的起点 A 的坐标与 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

14. 设 M 是线段 AB 的中点，证明对任意一点 O，有中点公式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}.$$

15. 利用向量的数乘与中点公式证明：平行四边形的对角线互相平分.

§2 向量的内积 外积与混合积

1. 向量的内积

设一物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到 M_2. $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示位移. 由物理学知道，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为 $W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角(图 18）.

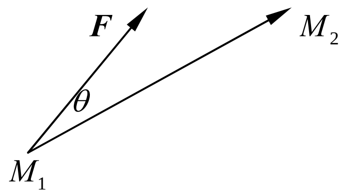


图 18

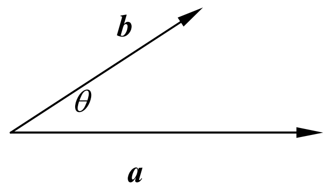


图 19

从这个例子可引出两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的内积(点积) 运算.

定义 设向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的<u>内积</u>为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的内积也叫做<u>点积</u>或<u>数量积</u>.

注 内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 运算的结果是一个数（图 19）.

据此定义，上述问题中的功 W 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的内积：$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$.

若 $\boldsymbol{a}\neq 0$，向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影记为 $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$，

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

同理当$\boldsymbol{b}\neq 0$时也有$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影 $(\boldsymbol{a})_b = |\boldsymbol{a}|\cos\theta$

由内积定义得投影公式： $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_a$； $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_b$

或 $(\boldsymbol{b})_a=\dfrac{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$； $(\boldsymbol{a})_b=\dfrac{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

定理（垂直条件） 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$[①].

这是因为如果$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$，由于$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以$\cos\theta=0$，$\theta=\pi/2$，即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\theta=\pi/2$， $\cos\theta=0$，于是$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

注 零向量的方向是任意的，可认为零向量与任何向量都垂直：$\vec{0}\perp\boldsymbol{b}$.

内积有下列**运算规律**：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}$ (2)结合律$(\lambda\boldsymbol{a})\bullet\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$，$\lambda$为数

(3)分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}$

因为当$\boldsymbol{c}=0$时，(3)式显然成立；当$\boldsymbol{c}\neq 0$时，由投影公式与投影性质得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c,\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c=(\boldsymbol{a})_c+(\boldsymbol{b})_c.$$

可知 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_c+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_c=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}$.

推论 （1） $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$； （2） $|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})\bullet(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2\pm 2\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$

注 为方便可引入“平方记号” $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a}$.

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

证 设$\triangle ABC$中，$\angle BCA=\theta$（图 20），$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，要证$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$. 记$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$从而

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\bullet(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

由$|\boldsymbol{a}|=a, |\boldsymbol{b}|=b, |\boldsymbol{c}|=c$，及$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$，

得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$.

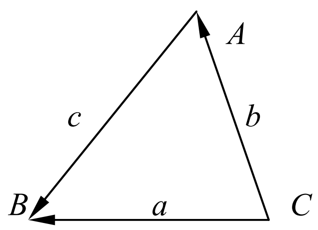


图 20

[①] 如果向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角$\theta=\pi/2$，就称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$互相垂直，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

下面我们来推导点积的坐标式. 设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$.

由于$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 互相垂直，所以$\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{i}=0$， $\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{k}=0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{i}+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{k})\bullet(\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{i}+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{k})\\
&=a_1b_1\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{k}+\\
&\quad a_2b_1\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{k}+\\
&\quad a_3b_1\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

由于$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的模均为 1，所以$\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k}=1$. 因而得

$$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

由于$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 所以有夹角公式$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

把$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标代入上式，可得夹角坐标公式

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}+b_3^{\ 2}}}.$$

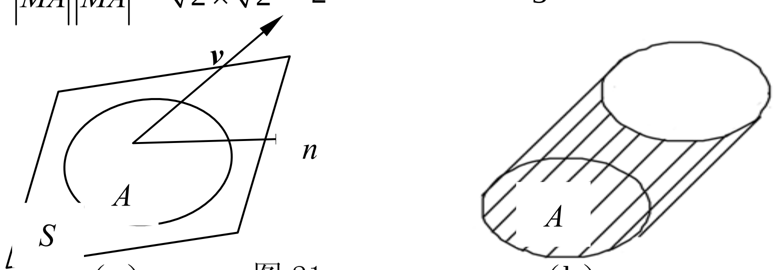
例 2 已知三点$M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$和$B(2,1,2)$，求$\angle AMB$.

解 作向量$\overrightarrow{MA}$及$\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$就是向量$\overrightarrow{MA}$及$\overrightarrow{MB}$的夹角，这里，$\overrightarrow{MA}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{MB}=(1,0,1)$，从而 $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1$；

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}\text{；}\quad\left|\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

代入向量夹角余弦公式，

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MA}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2},\qquad\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$



（a）　　图 21　　（b）

例 3 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域，液体在这区域上各点处的流速均为（常向量）$\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量, 图 21(a). 计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量 P (液体的密度为 ρ).

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A 、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体(图 21(b))，这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ，所以以这柱体的高为 $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$，体积为 $A|\boldsymbol{v}|\cos\theta = A\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{n}$.

从而，单位时间内经过这个区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指向一侧的液体的质量为

$$P = \rho A\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{n}.$$

2. **向量的外积**

在研究物体转动问题时，不但要考虑这物体所受的力，还要分析这些力所产生的力矩. 例如，设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与 $\overline{OP}$ 的夹角为 θ（图 22). 由力学规定，力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$，它的模为 $|\boldsymbol{M}| = |OQ||\boldsymbol{F}| = |\overline{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$

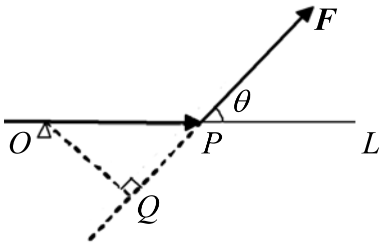


图 22

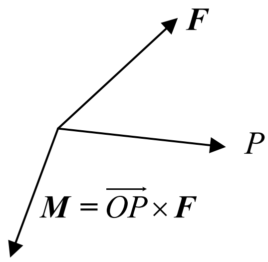


图 23

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overline{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从 $\overline{OP}$ 以不超过 π 的角转到 $\boldsymbol{F}$ 来确定的，即当右手的四个手指从 $\overline{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是 $\boldsymbol{M}$ 的指向（图 23）.

这种由两个已知向量按上面的规则来确定另一个向量的情况，在其他力学和物理问题中也会遇到，从而可以抽象出两个向量的外积（叉积）概念.

定义 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的<u>外积</u>（也叫向量积或 叉积）记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 它是一个向量 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，满足:

(1) 模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}, (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$），且$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向按右手规则由$\boldsymbol{a}$转向$\boldsymbol{b}$来确定（图 24）.

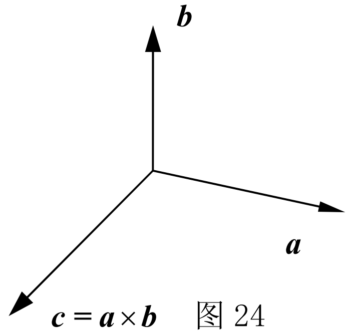


图 24

因此上面的力矩$\boldsymbol{M}$等于$\overrightarrow{OP}$与$\boldsymbol{F}$的外积，$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$

由外积的定义可以推得：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\vec{0}$

这是因为夹角$\theta=0$，所以$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

这是因为如果$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}$，且$|\boldsymbol{a}|\neq 0,|\boldsymbol{b}|\neq 0$，故必有$\sin\theta=0$，于是$\theta=0$或$\pi$，即$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$；反之，$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，那么$\theta=0$或$\pi$，于是$\sin\theta=0$，从而$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\vec{0}$.

注　零向量与任何向量都平行$\vec{0}//\boldsymbol{b}$.

外积符合下列运算规律（证明从略）：

(1)反交换律$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　(2)结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(3)分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

下面推导外积的坐标表示式.

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，利用$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$，可得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，利用行列式，上式可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}，\quad\text{或写}\quad\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\quad(*)$$

例 4　设$\boldsymbol{a}=(2,1,-1), \boldsymbol{b}=(1,-1,2)$，计算$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(1,-5,-3).$$

例 5　已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3),B(3,4,5),C(2,4,7)$ 求三角形 ABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$， $\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(4,\ -6,\ 2).$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

例 6　设刚体以等角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕 l 轴旋转，计算刚体上一点 M 的线速度.

解　刚体绕 l 轴旋转时，我们可以用在 l 轴上的一个向量 $\boldsymbol{\omega}$ 表示角速度，它的大小等于角速度的大小，它们的方向由右手规则定出：即以右手握住 l 轴，当右手的四个手指的弯曲方向与刚体的旋转方向一致时，拇指的指向就是 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向（图 25）. 设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a 再在 l 轴上任取一点 O 做向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，

并以 θ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 的夹角，那么　$a=|\boldsymbol{r}|\sin\theta$.

设线速度为 $\boldsymbol{v}$，那么由物理学上线速度与角速度的关系可知，$\boldsymbol{v}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{\omega}|a=|\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\theta.$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向垂直于过 M 点与 l 轴的平面，即 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 又 $\boldsymbol{v}$ 的指向使 $\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}\}$ 符合右手规则，因此有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

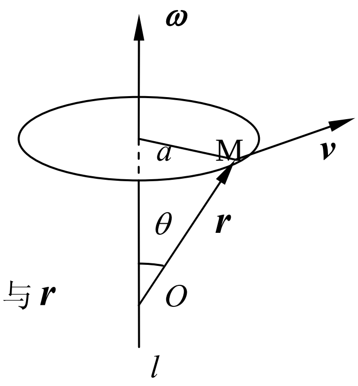


图 25

3. 向量的混合积

设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$， $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$. 如果先作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，再作内积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫做三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

设　$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，

因为 $\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$,

再按两向量数量积的坐标式，得

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=c_1\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

可写成 3 阶行列式（混合积公式）

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

注 向量的混合积有下述几何意义：

混合积 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}$ 是这样一个数，它的绝对值等于以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 如果 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成右手系（即 $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定），则混合积是正数；若 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成左手系，则混合积是负数.

事实上，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$ 是一个向量，它的模等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，它的方向垂直于这平行四边形的平面，且当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成右手系时，向量 $\boldsymbol{f}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的同侧（图 26）；

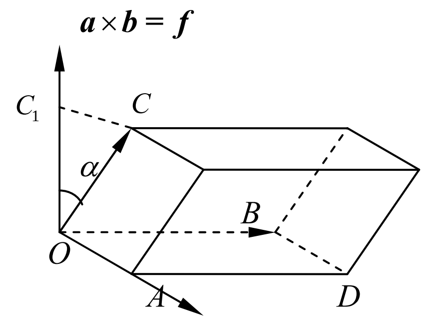


图 26

当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成左手系时，$\boldsymbol{f}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的异侧. 所以，如设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，那么当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成右手系时，α 为锐角；当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 组成左手系时，α 为钝角. 由于 $\quad [\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\alpha$，

所以当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成右手系时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为正；当 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 成左手系时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为负.

又向量$\boldsymbol{a,b,c}$为棱的平行六面体的底面积等于$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高$h$等于向量$\boldsymbol{c}$在向量$\boldsymbol{f}$上的投影的绝对值，即 $h=|\mathrm{Prj}_f\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}||\cos\alpha|$，

所以平行六面体的体积为

$$V=Ah=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\alpha|=|[\boldsymbol{abc}]|.$$

例 7 已知不在一个平面上的四点：$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3)$与$D(x_4,y_4,z_4)$．求四面体$ABCD$的体积$V_T$.

解 由立体几何可知，四面体的体积V_T等于以向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$和$\overrightarrow{AD}$为棱的平行六面体的体积的六分之一. 因而

$$V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$$

由于

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,y_4-y_1,z_4-z_1),$$

所以

$$V_T=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}.$$

习题 2

1. 设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 求(1) $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$与$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$的夹角

2. 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$为单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\bullet\boldsymbol{a}$.

3. 设$\boldsymbol{A}(1,-1,2),\boldsymbol{B}(3,3,1),\boldsymbol{C}(3,1,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$同时垂直的单位向量.

4. (1)求$\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$在向量$\boldsymbol{b}=(2,2,1)$上的投影；(2)求$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角余弦.

5. 设$\boldsymbol{a}=(3,\ 5,-2),\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，求数$\lambda$与$t$的关系，使得$\lambda\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$与$z$轴垂直.

6. 已知$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$互相垂直，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，求$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$的长度.

7. 设$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，计算$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}$与$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}$

8. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求三角形$\triangle OAB$的面积.

9. 已知向量$\boldsymbol{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3),\ \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

(1)利用混合积的几何意义证明三向量$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$共面的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

(2)利用行列式性质证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\bullet\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\bullet\boldsymbol{b}$

10. 证明:$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\bullet\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ 与 $|\vec{a}\bullet\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$.

11. 用向量证明不等式$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\ge|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$

其中a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3为任意实数，并指出等号成立的条件.

§3 曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

如同在平面解析几何中把平面曲线当作动点的轨迹一样，在空间解析几何中，任何曲面都看作点的轨迹. 在这样的意义下，如果曲面S与三元方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1}$$

有下述关系：

（1）曲面S上任一点的坐标都满足方程（1）；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程（1），

那么，方程（1）就叫做曲面S的方程，而曲面S就叫做方程（1）的图形（图 28）.

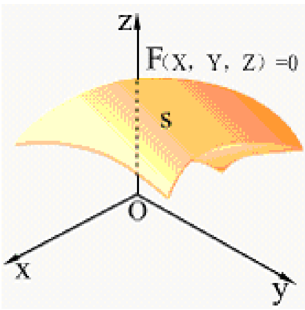


图 28

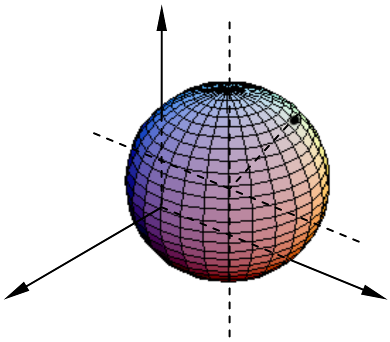


图 29

例 1　建立球心在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，半径为R的球面的方程.

解　设$M(x,y,z)$是球面上的任一点（图 29），那么 $|M_0M|=R$.

由于 $$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

所以 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或 $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (2)$$

这就是球面上点的坐标所满足的方程. 而不在球面上的点的坐标都不满足这方程. 所以方程（2）就是以$M_0(x_0,y_0,z_0)$为球心, R为半径的球面方程.

如果球心在原点，那么$x_0=y_0=z_0=0$，从而球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例 2　设有点$A(1,2,3)$和$B(2,-1,4)$，求线段AB的垂直平分面的方程.

解　由题意知，所求的平面就是与A和B等距离的点的轨迹，设$M(x,y,z)$为所求平面上的任一点，由于　$|AM|=|BM|$

所以 $$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

等式两边平方，便得　$2x-6y+2z-7=0$.

这个方程就是所求平面的方程.

在空间解析几何中关于曲面，有下列两个基本问题：

（1）已知一曲面作为点的几何轨迹时，建立这曲面的方程；

（2）已知坐标x，y和z间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

下面举一个由已知方程研究它所表示的曲面的例子.

例 3　方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$表示怎样的曲面？

解　通过配方，原方程可以改写成　$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

由此可知原方程表示球心在点$M_0(1,-2,0)$、半径为$R=\sqrt{5}$的球面.

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面，旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴.

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 C，它的方程为：

$$f(y,z)=0$$

把这曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面（图 30），它的方程可以求得如下：

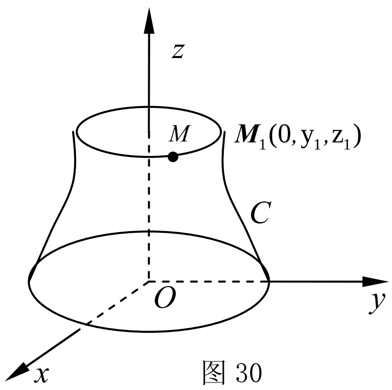


图 30

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线 C 上的任一点则有 $f(y_1,z_1)=0$ (3)

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 绕 z 轴转到另一点 $M(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$.

将 $z_1=z$，$y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代入 (3)式，有 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$ (4)

这就是旋转曲面的方程.

由此可知在曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中将 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面方程. 同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转面的方程为

$$f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2}\ )=0 \quad . \qquad (5)$$

例 4　直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做圆锥面. 两直线的交点叫做圆锥面的顶点，两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 叫做圆锥面的半顶角. 试建立顶点在坐标原点 O，旋转轴为 z 轴，半顶角为 α 的圆锥面（图 31）的方程.

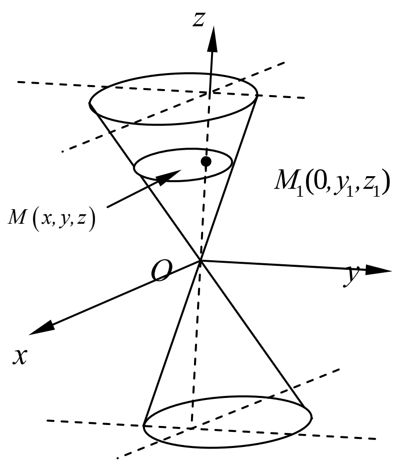


图 31

解　在 yOz 坐标面上，直线 L 的方程为

$$z=y\cot\alpha\ , \qquad （6）$$

因为旋转轴为 z 轴，所以只要将方程（6）中的 y 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便得到这圆锥面的方程：$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$

可写　$z^2=a^2(x^2+y^2)$，$a=\cot\alpha$.　（7）

例 5　将 xz 面上双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋绕，求旋转面的方程.

解　绕 z 轴旋转所成的旋转曲面叫做旋转单叶双曲面（图 32），它的方程为

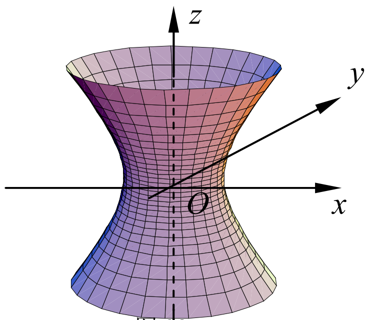


图 32

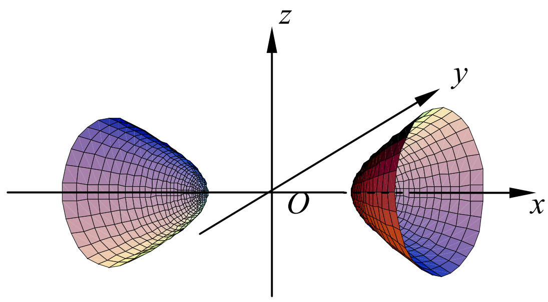


图 33

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

绕 x 轴旋转所成的旋转面叫做旋转双叶双曲面（图 33），它的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1.$$

3. 柱面

先讨论一个具体的例子： 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?

解　$x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点半径为 R 的圆 C. 在空间直角坐标系中，这方程不含竖坐标 z ，即不论点的竖坐标 z 怎样，只要它的前两个坐标 x 和 y 能满足方程，那么这些点就在曲面上. 可知若直线 l 通过 xOy 面内圆 c 上一点 $M(x,y,0)$，且平行于 z 轴，则 l 在这曲面上，因此，这曲面可以看作是由平行于 z 轴的直线 l 沿 xOy 面上的圆 C 移动而形成的. 这曲面叫做圆柱面（图 34），xOy 面上的圆 C 叫做它的准线，这平行于 z 轴的直线 l 叫做它的母线.

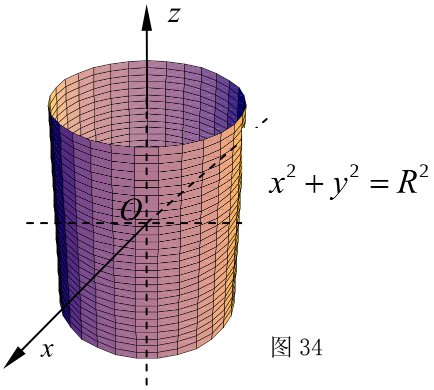


图 34

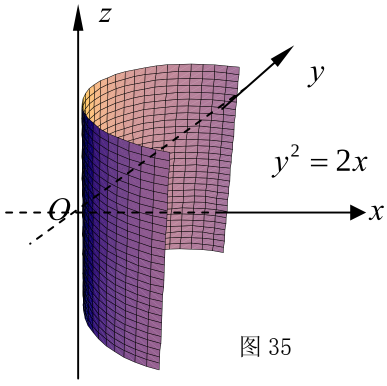


图 35

一般地，平行于定直线l_0并沿定曲线C移动的直线L形成的轨迹叫做柱面，定曲线C叫做柱面的准线，动直线L叫做柱面的母线.

上面我们看到，不含z的方程$x^2+y^2=R^2$在空间直角坐标系中表示圆柱面，它的母线平行于z轴，它的准线是xOy面上的圆$x^2+y^2=R^2$.

类似地，方程$y^2=2x$表示母线平行于z轴的柱面，它的准线是xOy面上的抛物线$y^2=2x$，该柱面叫做抛物柱面（图 35）.

又如，方程$x-y=0$表示母线平行于z轴的柱面，其准线是xOy面上的直线$x-y=0$，所以它是过z轴的平面（图 36）.

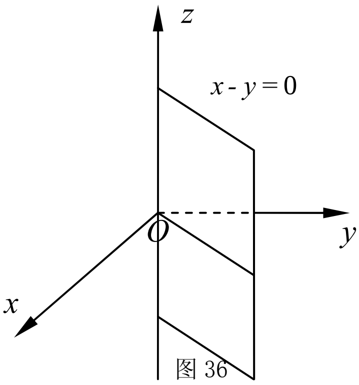


图 36

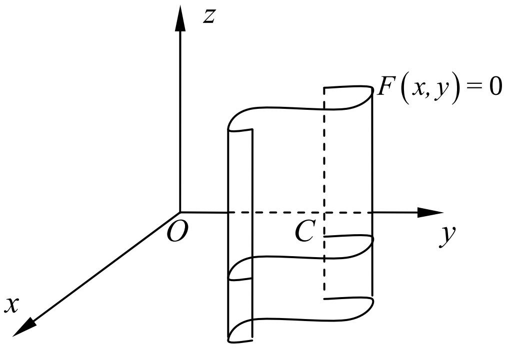


图 37

一般地，只含x、y而缺z的方程$F(x,y)=0$在空间直角坐标系中表示母线平行于z轴的柱面，其准线是xOy面上的曲线C：$F(x,y)=0$（图 37）.

类似可知，只含x、z而缺y的方程$G(x,z)=0$和只含y、z而缺x的方程$H(y,z)=0$分别表示母线平行于y轴和x轴的柱面.

例如，方程$x-z=0$表示母线平行于y轴的柱面，其准线是xOz面上的直线$x-z=0$，所以它是过y轴的平面（图 38）.

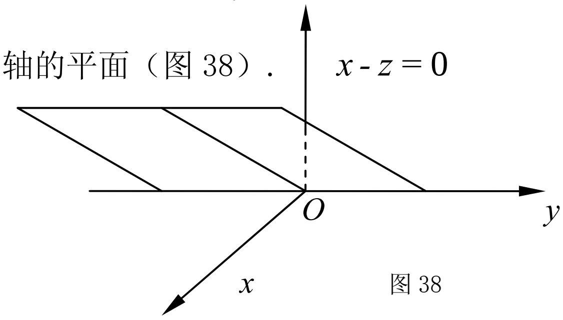


图 38

4. 二次曲面

与平面解析几何中规定的二次曲线相类似，我们把三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面. 而把平面称为一次曲面.

二次曲面有九种，适当选取空间直角坐标系，可得它们的标准方程.

（1）椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

以垂直 z 轴的平面 $z=t$ 截此面，当 $t\neq 0$ 时，得平面 $z=t$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1.$$

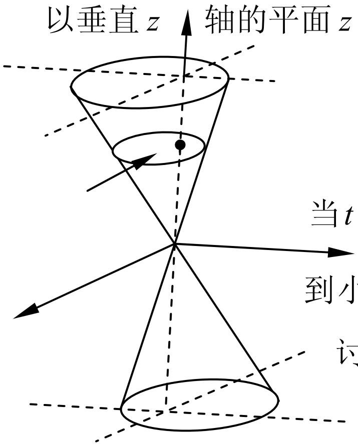


图 39

当 t 变化时，上式表示一族长短轴比例不变的椭圆，当 $|t|$ 从大到小并变为 0 时，这族椭圆从大到小并缩为一点. 综合上述讨论，可得椭圆锥面（1）的形状如（图 39）所示.

平面 $z=t$ 与曲面 $F(x,y,z)=0$ 的交线称为截痕. 通过截痕的变化来了解曲面形状的方法称为截痕法.

我们还可以用伸缩变形的方法来得出椭圆锥面（1）的形状.

先说明 xOy 平面上的图形伸缩变形的方法. 在 xOy 平面上，把点 $M(x,y)$ 变为点 $M'(x,\lambda y)$，从而把点 M 的轨迹 C 变为点 M' 的轨迹 C'，称为把图像 C 沿 y 轴方向伸缩 λ 倍变成图形 C'. 假如 C 为曲线 $F(x,y)=0$，点 $M(x_1,y_1)\in C$，点 M 变为点 $M'(x_2,y_2)$，其中 $x_2=x_1$，$y_2=\lambda y_1$，即 $x_1=x_2$，$y_1=\lambda^{-1}y_2$，因点 $M\in C$，有 $F(x_1,y_1)=0$，故 $F(x_2,\lambda^{-1}y_2)=0$，因此点 $M'(x_2,y_2)$ 的轨迹 C' 的方程为 $F(x,\lambda^{-1}y)=0$. 例如把圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿 y 轴方向伸缩 b/a 倍，就变为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（图 40）.

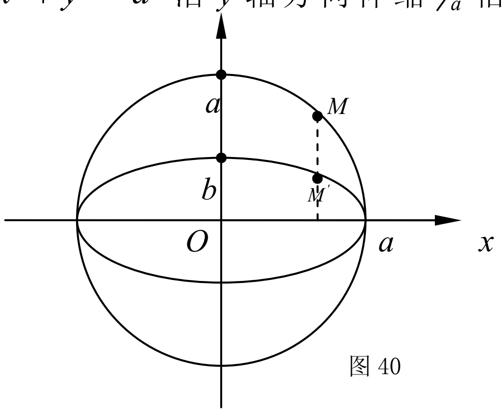


图 40

(2) 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把 xOz 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，所得曲面称为旋转椭球面，其方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

再把旋转椭球面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，便得椭球面（2）的形状如图 41 所示.

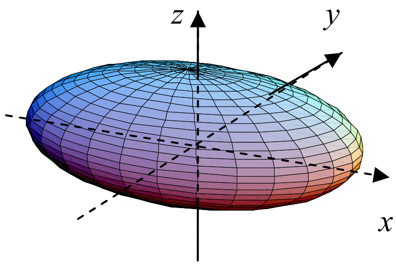


图 41

当 $a=b=c$ 时方程（2）成为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，这是球心在原点半径为 a 的球面. 显然，球面是旋转椭圆球面的特殊情形，旋转椭球面是椭球面的特殊情形. 把球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 沿 z 轴方向伸缩 $\dfrac{c}{a}$ 倍，即得旋转椭球面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；再沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，即得椭球面（2）.

（3）单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把 xOz 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转，得旋转单叶双曲面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$（图 32）. 把此曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，得单叶双曲面（3）.

（4）双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把 xOz 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转，得旋转双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$（图 33）. 把此曲面沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{c}$ 倍，即得双叶双曲面（4）.

（5）椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

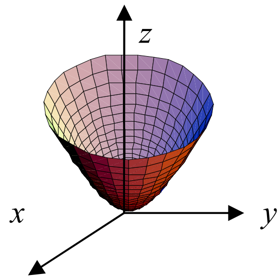


图 42

把 xz 面上的抛物线 $x^2\big/a^2=z$ 绕 z 轴旋转，所得曲面叫做旋转抛物面，如图 42 所示. 把此旋转曲面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍，即得椭圆抛物面（5）.

（6）双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

双曲抛物面又称马鞍面，可用截痕法来讨论它的形状.

用平面 $x=t$ 截此曲面，得截痕 l 为平面 $x=t$ 上的抛物线：$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2}$，

此抛物线开口朝下，其顶点为 $x=t$，$y=0$，$z=\frac{t^2}{a^2}$.

当 t 变化时，l 的位置只作上下平移，而 l 的顶点的轨迹 L 为平面 $y=0$ 上的抛物线 $z=\frac{x^2}{a^2}$. 因此以 l 为母线，L 为准线，母线 l 的顶点在准线 L 上滑动，且母线平行移动，这样得到的曲面便是双曲抛物面（6），如图 43.

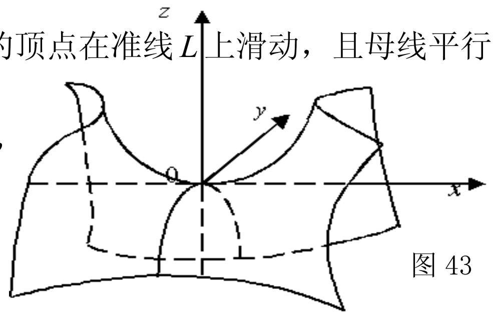


图 43

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$x^2=ay$，依次称为椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面. 柱面的形状在第三目中已经讨论过，这里不再赘述.

习题 3

1. 一动点与两定点 $(2,3,1)$ 和 $(4,5,6)$ 等距离，求这动点的轨迹方程.

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面？

3. 将 xOy 坐标面上双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴及 y 轴旋转，求所生成的旋转曲面方程.

4. 指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

（1） $x=2$；　（2） $x^2+y^2=4$；　（3） $x^2-y^2=1$.

5. 说明下列旋转曲面是怎样形成的：

（1） $x^2-y^2-z^2=1$；（2） $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$；（3） $(z-a)^2=x^2+y^2$.

6. 指出下列旋转面的母线和旋转轴：(1) $z=2(x^2+y^2)$； (2) $z^2=3(x^2+y^2)$.

7. 画出下列方程所表示的曲面：

（1） $4x^2+y^2-z^2=4$；（2） $x^2-y^2-4z^2=4$.

§4 空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 是两个曲面的方程，它们的交线为 C（图 44）. 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{1}$$

方程组（1）叫做空间曲线 C 的一般方程.

例 1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解 方程组中第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面；方程组中第二个方程表示一个平面. 方程组就表示上述平面与圆柱面的交线，如图 45 所示.

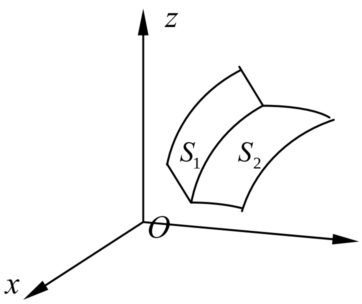


图 44

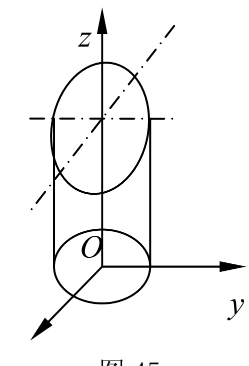


图 45

例 2 下列方程组表示怎样的曲线？

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$

解　方程组中第一个方程表示球心在坐标原点O，半径为a的上半球面. 第二个方程表示母线平行于z轴的圆柱面，它的准线是xOy面上的圆，这圆的圆心在点$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$，半径为$\dfrac{a}{2}$. 方程组就表示上述半球面与圆柱面的交线，如图 46 所示.

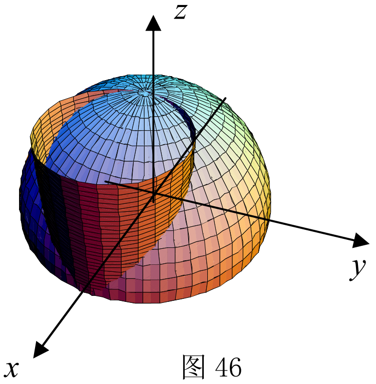


图 46

2. **空间曲线的参数方程**

空间曲线C上动点$M(x,y,z)$的坐标也可用参数写成参数t的函数：

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ z=z(t). \qquad (2)$$

随着t的变动可得曲线C上的全部点. 方程（2）叫做空间曲线的参数方程.

例 3　如果空间一点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿z轴的正方向上升（其中ω，v都是常数），那么点M构成的图形叫做螺旋线. 试建立其参数方程.

解　取时间t为参数. 设当$t=0$时，动点位于x轴上的一点$A(a,0,0)$处. 经过

时间t，动点A运动到$M(x,y,z)$（图 47）. 记M在xOy面上的投影为M'，M'的坐标为$(x,y,0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度ω绕z轴旋转，经过时间t得，

$\angle AOM'=\omega t$. 从而

$$x=\left|OM'\right|\cos\angle AOM'=a\cos\omega t$$

$$y=\left|OM'\right|\sin\angle AOM'=a\sin\omega t$$

由于动点同时以线速度v沿z轴的正方向上升，所以

$$z=M'M=vt.$$

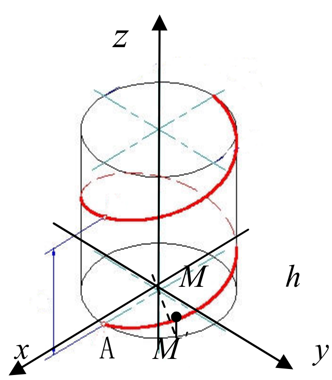


图 47

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

也可以用其他变量作参数；例如令$\theta = \omega t$，则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

这里$b = \dfrac{v}{\omega}$，而参数为θ.

螺旋线有一个重要性质：当θ从θ_0变到$\theta_0 + \alpha$时，z轴由$b\theta_0$变成$b\theta_0 + b\alpha$.这说明当OM'转过角α时，M点沿螺旋线上升了高度$b\alpha$，即上升的高度与OM'转过的角度成正比. 特别是当OM'转过一周，即$\alpha = 2\pi$时，M点就上升固定的高度$h = 2\pi b$. 这个高度$h = 2\pi b$在工程技术上叫做螺距.

曲面的参数方程

曲面的参数方程通常是含两个参数的方程，形如

$$\begin{cases} x = x(s,\ t) \\ y = y(s,\ t) \\ z = z(s,\ t). \end{cases} \qquad (3)$$

例如空间曲线Γ

$$\begin{cases} x = x(\ t) \\ y = y(\ t) \\ z = z(\ t). \end{cases} \quad (\ \alpha \le t \le \beta)$$

绕z轴旋转，所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{\left[x(t)\right]^2 + \left[\mathrm{y}(t)\right]^2}\cos\theta, \\ y = \sqrt{\left[x(t)\right]^2 + \left[\mathrm{y}(t)\right]^2}\sin\theta, \\ z = z(t). \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \le t \le \beta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix} \qquad (4)$$

这是因为，固定一个t，得Γ上一点$M_1(x(\mathrm{t}), y(\mathrm{t}), z(\mathrm{t}))$，点$M_1$绕$z$轴旋转，得空间的一个圆，该圆在平面$z = z(t)$上，其半径等于点$M_1$到$z$轴的距离:

$\sqrt{[x(t)]^2+[y(t)]^2}$，因此，固定t的方程（4）就是该圆的参数方程. 再令t在$[\alpha,\beta]$内变动，方程（4）便是旋转曲面的方程.

例如直线Γ： $x=1$， $y=t$， $z=2t$. 绕z轴旋转得旋转曲面（图 48）的方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta, \\ z=2t. \end{cases}$$

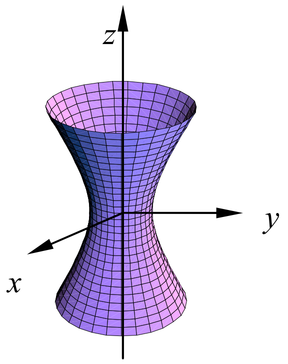


图 48

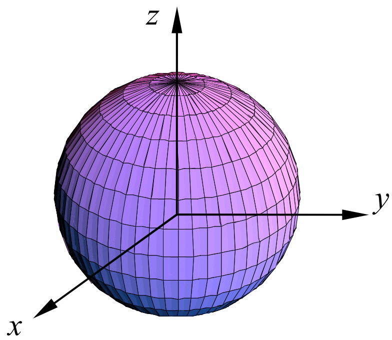


图 49

（上式消去t和θ，得曲面的直角坐标方程为$x^2+y^2=1+\dfrac{z^2}{4}$）.

又如球面$x^2+y^2+z^2=a^2$可看成zOx面上的半圆周

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi, \\ y=0, \quad 0\le\varphi\le\pi \\ z=a\cos\varphi. \end{cases}$$

绕z轴旋转所得（图 49），故球面方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta, \\ y=a\sin\varphi\sin\theta, \\ z=a\cos\varphi. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{matrix}$$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线C的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \qquad (5)$$

现在我们来研究由方程组（5）消去变量z后所得的方程

$$H(x,y)=0 \qquad (6)$$

由于方程（6）是由方程组（5）消去z后得到的结果，因此当x，y和z满足方程组（5）时，前两个数x，y必定满足方程（6），这说明曲线C上的所有点都在由方程（6）所表示的曲面上.

由上节知道，方程（6）表示一个母线平行于z轴的柱面. 由上述的讨论可知，这柱面必定包含曲线C. 以曲线C为准线、母线平行于z轴（即垂直于xOy面）的柱面叫做曲线C关于xOy面的投影柱面. 投影柱面与xOy面的交线叫做空间曲线C在xOy面上的投影曲线，或简称投影. 因此，方程（6）所表示的柱面必定包含投影柱面，而方程 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0. \end{cases}$

所表示的曲线必定包含空间曲线C在xOy面上的投影.

同理，消去方程组（5）中的变量x或变量y，在分别和$x=0$或$y=0$联立，就可得到包含曲线C在yOz面或xOz面上的投影的曲线方程：

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0. \end{cases} \text{或} \begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 4　已知两球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{7}$$

和

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \tag{8}$$

求它们的交线C在xOy面上的投影方程.

解　先求包含交线C而母线平行于z轴的柱面方程。因此要由方程（7）、（8）消去z，为此可先从（7）式减去（8）式并简化，得到

$$y+z=1$$

再以$z=1-y$代入方程（7）或（8）即得所求的柱面方程为

$$x^2+2y^2-2y=0$$

容易看出，这就是交线C在xOy面的投影柱面方程，于是两球面的交线在xOy面

上的投影方程是

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

在重积分和曲面积分的计算中，往往需要确定一个立体或曲面在坐标面上的投影，这时要利用投影柱面和投影曲线.

例 5　设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成（图 50），求它在 xOy 面上的投影.

解　半球面和锥面的交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$$

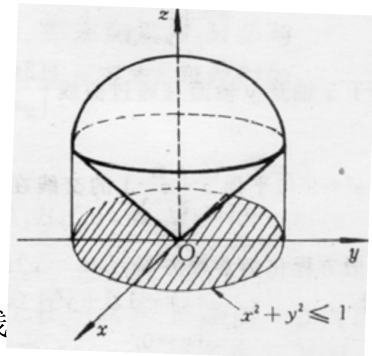


图 50

由上列方程组消去 z，得到 $x^2+y^2=1$. 这是一个母线平行于 z 轴的圆柱面，容易看出，这恰好是交线 C 关于 xOy 面的投影柱面，因此交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

这是 xOy 面上的一个圆，于是所求立体在 xOy 面上的投影，就是该圆在 xOy 面上所围的部分：$x^2+y^2\le 1$.

习题 4

1. 画出下列曲线（在第一卦限内）的图形，并且求曲线（3）的参数方程：

（1）$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2+z^2=a^2 \end{cases}$　　（3）$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3z=6 \end{cases}$

2. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影的方程.

4. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2,(0\le z\le 4)$ 在三坐标面上的投影.

5. 求三平面 $x+3y+z=1$，$2x-y-z=0$，$-x+2y+2z=3$ 的交点

§5 平面及其方程

1. 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的法向量，容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

因为过空间一点可以作而且只能作一平面垂直于一已知直线，所以当平面 Π 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为已知时，平面 Π 的位置就完全确定了. 下面我们来建立平面 Π 的方程.

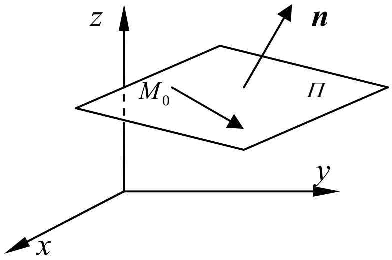


图 51

设 $M(x,y,z)$ 是平面 Π 上的任一点（图 51）. 那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必与平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即它们的数量积等于零：

$$\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{M_0M}=0$$

由于 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$， $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ ，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

这就是平面 Π 上任一点 M 的坐标 (x,y,z) 所满足的方程.

反过来，如果 $M(x,y,z)$ 不在平面 Π 上，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与法线向量 $\boldsymbol{n}$ 不垂直，从而 $\boldsymbol{n}\bullet\overrightarrow{M_0M}\neq 0$，既不在平面 Π 上的点 M 的坐标 (x,y,z) 不满足方程（1）.

由于方程（1）是由平面 Π 上的一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 及它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 确定，所以方程（1）叫做平面的点法式方程.

例 1　求过点 $(2,-3,0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3)$ 为法线向量的平面的方程.

解　根据平面的点法式方程（1)，所求平面的方程为

$$(x-2)-2(y+3)+3z=0,$$

即
$$x-2y+3z-8=0.$$

例 2　求过三点 $M_1(2,-1,4)$、$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程。

解　先找出这平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 由于向量 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直，而

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$，$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$，所以可取它们的叉积为法向 $\boldsymbol{n}$：

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=(14,\ 9,\ -1)$$

根据点法式方程，所求平面方程为： $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$

即 $$14x+9y-z-15=0.$$

2．平面的一般方程

由于平面的点法式方程（1）是 x，y，z 的一次方程，而任一平面都可以用它上面的一点及它的法线向量来确定，所以任一平面都可以用三元一次方程来表示. 反过来，设有三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (2)$$

任取满足该方程的一组 x_0,y_0,z_0 即 $$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \qquad (3)$$

把上述两等式相减，得 $$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (4)$$

把它和平面的点法式方程（1）作比较，可以知道方程（4）是通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法线向量的平面方程. 但方程（2）与方程（4）同解，这是因为由（2）减去（3）即得（4），又由（4）加上（3）就得（2），由此可知，任一三元一次方程（2）的图形总是一个平面. 方程（2）称为平面的一般方程，其中 x、y、z 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标，即 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

对于一些特殊的三元一次方程，应该熟悉它们的图形的特点.

当 $D=0$ 时，方程（2）成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面。

当 $A=0$ 时，方程（2）成为 $By+Cz+D=0$，法线向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于 x 轴的平面.

当 $A=B=0$，方程（2）成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\dfrac{D}{C}$，法向量 $\boldsymbol{n}=\left(0,0,C\right)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

例 3 求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

解 由于平面通过 x 轴，从而它的法线向量垂直于 x 轴，于是法线向量在 x 轴上的投影为零，即 $A=0$；又由于平面通过 x 轴，它必通过原点，于是 $D=0$. 因此，可以设这平面的方程为 $By+Cz=0$

又因这平面通过点 $(4,-3,-1)$，于是有 $-3B-C=0$，即 $C=-3B$

代入所设方程并除以 $B(B\neq 0)$，得所求平面方程为 $y-3z=0$.

例 4 设一平面与 x、y、z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ 三点（图 52），求这平面的方程（其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$）.

解 设所求平面的方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

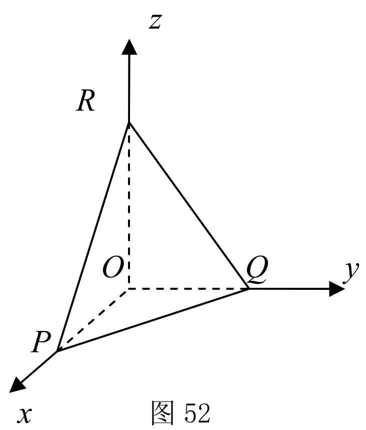


图 52

因 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$ 三点都在这平面上，所以点 P、Q、R 的坐标都满足方程（2）；即有

$$aA+D=0,\quad bB+D=0,\quad cC+D=0$$

得 $A=-\dfrac{D}{a}$，$B=-\dfrac{D}{b}$，$C=-\dfrac{D}{c}$

以此代入（2）并除以 $D(D\neq 0)$，便得所求的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (5)$$

方程（5）叫做平面的截距式方程，a,b,c 依次叫做平面在 x,y,z 轴上的截距.

3. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角（通常指锐角），称为两平面的夹角.

设平面 Π_1 和 Π_2 的法线向量依次为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么平面 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ（图 53）应是 $(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 和 $(-\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)=\pi-(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)$ 两者中的锐角，因此，$\cos\theta=\left|\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)\right|$. 按向量夹角余弦的公式，两平面的夹角 θ 公式为

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{6}$$

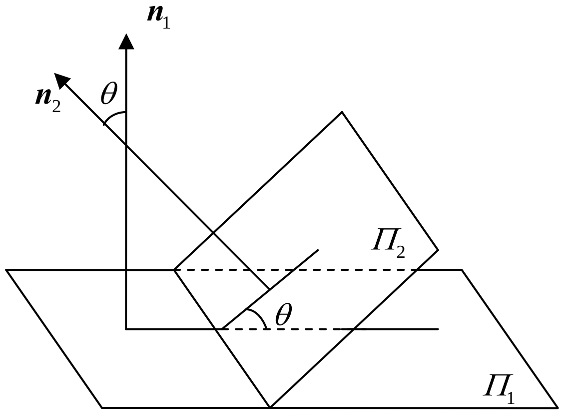


图 53

从两向量垂直、平行的充分必要条件推得下列结论：

Π_1、Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

Π_1、Π_2 互相平行或重合相当于 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

例 5 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解 由公式（6）有

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\bullet\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

因此，所求夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 6 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到平面的距离.

解 在平面上取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，作一法向量 $\boldsymbol{n}$（如图 54），考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角可能是钝角，由投影定义得所求距离为

$$d=|Prj_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|=|(\overrightarrow{P_1P_0})_{\boldsymbol{n}}|$$

利用点积与向量投影公式，可知

$$(\overrightarrow{P_1P_0})_{\boldsymbol{n}}=\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\bullet\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$$

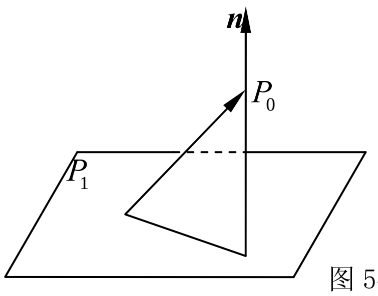


图 54

因为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$, $\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$

所以

$$d = |(\overrightarrow{P_1P_0})_{\boldsymbol{n}}| = |\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}| = \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

由于 $$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

即得点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad (7)$$

习题 5

1. 求过 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

2. 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

3. 求过 $(1,1,-1)$，$(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

4. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

5. 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，求这平面的方程.

6. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

§6　空间直线方程

1．空间直线的一般方程

空间直线 L 可以看作是两个平面 Π_1 和 Π_2 的交线（图 55）. 如果两个相交的平面 Π_1 和 Π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，那么直线 L 上的任一点的坐标应同时满足这两个平面的方程，即应满足方程组

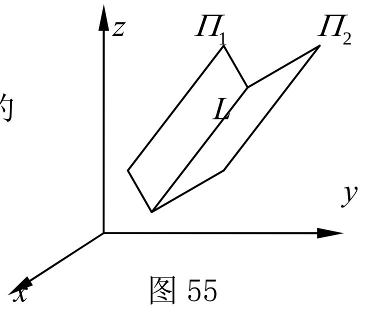


图 55

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么它不可能同时在平面 Π_1 和 Π_2 上，所以它的坐标不满足方程组(1). 因此，直线 L 可以用方

程组（1）来表示. 方程组（1）叫做空间直线的一般方程.

通过空间一直线 L 的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线 L.

2. 直线的对称方程与参数方程

如果一个非零向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于一条已知直线 L，这个向量就叫做这直线的方向向量. 显然，任一平行于该直线的非 0 向量都可以作为的方向向量.

由于过空间一点可作而且只能作一条直线平行于一已知直线，所以直线 L 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 和它的一方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为已知时，直线 L 的位置就完全确定了. 下面我们来建立这直线的方程.

设点 $M\left(x,y,z\right)$ 是直线 L 上的任一点，那么向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 平行（图 56），所以两向量的对应坐标成比例，由于 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$， $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，从而有

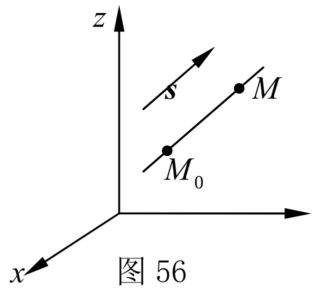


图 56

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \text{[1]} \qquad (2)$$

反过来，如果点 M 不在直线 L 上，那么由于 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行，这两个向量的对应坐标就不成比例. 因此方程组（2）就是直线 L 的方程，叫做直线的对称式方程或点向式方程.

直线的任一方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 m,n,p 叫做这直线的一组方向数，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦叫做这直线的方向余弦.

由直线的对称式容易导出直线的参数方程，如设

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

[1] 当 m,n,p 中有一个为零，例如 $m=0$，而 $n,p\neq 0$ 时，这方程组应理解为

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$$

那么 $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{3}$$

方程组（3）就是直线的参数方程.

例 1 用对称式方程及参数方程表示直线 L

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

解 先找出这直线上的一点 (x_0, y_0, z_0). 例如，可以取 $x_0 = 1$，代入方程组（4），

得 $$\begin{cases} y + z = -2 \\ y - 3z = 6 \end{cases}$$

解这个二元方程组，得 $y_0 = 0, z_0 = -2$，即 $(1, 0, -2)$ 是这直线上一点.

下面再找这直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$. 由于两平面的交线与这两个平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{n}_2 = (2,-1,3)$ 都垂直，所以可用外积作为 $\boldsymbol{s}$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (4, -1, -3)$$

因此，所给直线的对称式方程为 $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{-3}$.

令 $$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3} = t$$

得所给直线的参数方程为 $x = 1 + 4t,\ y = -4t,\ z = -2 - 3t.$

3. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角（通常指锐角）叫做两直线的夹角.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$，那么 L_1 和 L_2 的夹角 φ 应是两个角 $(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2}) = \pi - (\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})$ 中的锐角，因此 $\cos\varphi = \left|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2})\right|$. 按两向量的夹角的余弦公式，直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ 公式为

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \tag{5}$$

从两向量垂直, 平行(共线)的充要条件，立即推得下列结论：

两直线 L_1、L_2 互相垂直相当于 $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$；

两直线L_1、L_2互相平行和重合相当于$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

例 2　求直线L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$和$L_2$：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角.

解　直线L_1的方向向量为$\boldsymbol{s}_1=(1,-4,1)$；直线$L_2$的方向向量为$\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$. 设直线$L_1$和$L_2$的交角$\varphi$，那么由公式（5）有

$$\cos\varphi=\frac{|1\times 2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

4. 直线与平面的夹角

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角$\varphi(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2})$称为直线与平面的夹角（图 57），当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为$\dfrac{\pi}{2}$.

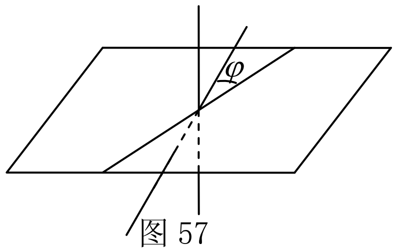


图 57

设直线的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法线向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，直线与平面的夹角为φ，那么$\varphi=|\dfrac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$，因此$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$. 按两向量夹角余弦的坐标表达式，有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\qquad（6）$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向与平面的法向平行，所以，直线与平面垂直相当于

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}\qquad（7）$$

因为直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向与平面的法向垂直，所以，直线与平面平行或直线在平面上相当于

$$Am+Bn+Cp=0\qquad（8）$$

例 3　过点$(1,-2,4)$且与平面$2x-3y+z-4=0$垂直的直线的方程.

解　因为所求直线垂直于已知平面，所以可以取已知平面的法线向量$(2,-3,1)$作为所求直线的方向向量. 由此可得所求直线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

5. 杂例

例 4 求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为 $x=2+t$，$y=3+t$，$z=4+2t$

代入平面方程中，得 $2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0$

解上述方程，得 $t=-1$. 把 t 值代入直线的参数方程，即得交点的坐标为

$$x=1,\quad y=2,\quad z=2.$$

例 5 求过点 $\boldsymbol{A}(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 已知直线的参数方程为

$$x=-1+3t,\ y=1+2t,\ z=-t \qquad (9)$$

令交点为 $\boldsymbol{P}(3t-1,\ 2t+1,\ -t)$，则 $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}=(3t-3,\ 2t,\ -t-3)$，而且

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\perp \boldsymbol{s}=(3,2,-1)\Rightarrow 3(3t-3)+2(2t)+(t+3)=0.$$

得 $t=\frac{3}{7}$， 从而得交点 $\boldsymbol{P}\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$. 所求直线的一个方向向量为

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}=\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4) \qquad (10)$$

故所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

最后我们来介绍平面束的方程.

设直线 L 由方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (11)\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (12)\end{cases}$$

所确定，其中系数 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例. 我们建立三元一次方程：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (13)$$

其中 λ 为任意常数. 因为 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例，所以对于任何一个 λ 值，方程（13）的系数：$A_1+\lambda A_2$，$B_1+\lambda B_2$，$C_1+\lambda C_2$ 不全为零，从而方程（13）表示一个平面，若一

点在直线L上，则点的坐标必同时满足方程（11）和（12），因而也满足方程（13），故方程（13）表示通过直线L的平面，且对应于不同的λ值，方程（13）表示通过直线L的不同的平面. 反之，通过直线L的任何平面（除平面（12）外）都包含在方程（13）所表示的一族平面内. 通过定直线的所有平面的全体称为平面束，而方程（13）就作为通过直线L的平面束的方程（实际上，方程（13）表示只缺少一个平面（12）的平面束）.

例 6 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线的方程.

解 过直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$的平面束的方程为

$$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即
$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

其中λ为待定系数. 这平面与平面$x+y+z=0$垂直的条件是

$$(1+\lambda)\bullet 1+(1-\lambda)\bullet 1+(-1+\lambda)\bullet 1=0$$

即 $\lambda=-1$，代入平面束方程，得

投影平面方程为 $2y-2z-2=0$，即$y-z-1=0$.

所以投影直线的方程为$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0. \end{cases}$ 或 $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$.

习题 6

1. 求过点$(1,2,1)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$都平行的直线方程.

2. 求过点$(4,-1,3)$且平行于直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$的直线方程.

3. 用对称式方程及参数方程表示直线$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

4. 求过点$(2,0,-3)$且与直线$\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$垂直的平面方程.

5. 证明直线$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases}$与直线$\begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$平行.

6. 求过点$(3,1,-2)$且通过直线$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$的平面方程.

7. 求直线$\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$与平面$x-y-z+1=0$的夹角.

8. 设M_0是直线L外一点，M 是直线L上任意一点，且直线的方向向量为$\boldsymbol{s}$，试证：点M_0到直线L的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$.

9. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$的距离.

10. 求直线$\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

总习题

1. 已知$\triangle ABC$的顶点$A(3,2,-1), B(5,-4,7)$和$C(-1,1,2)$，求从顶点C所引中线的长度.

2. 设$\triangle ABC$的三边$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\ \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，三边中点依次为$D$、$E$、$F$，试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$表示$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CF}$，并证明 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$.

3. 用向量证明三角形两边中点连线平行于第三边，且其长度是第三边长的一半.

4. 设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3},\ |\boldsymbol{b}|=1$，且$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 的夹角为$\pi/6$，求向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角.

5. 设$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，求$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$的夹角.

6. 设$\boldsymbol{a}=(2,-3,1), \boldsymbol{b}=(1,-2,3), \boldsymbol{c}=(2,1,2)$，求向量$\boldsymbol{r}$使$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，$(\boldsymbol{r})_c=14$.

7. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都是单位向量，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

8. 设$\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,-1,\ 10)$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a}$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，求$\lambda$.

9. 设$|\boldsymbol{a}|=3, |\boldsymbol{b}|=4, |\boldsymbol{c}|=5$，且$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$______

10. 求通过点$A(3,0,0)$和$B(0,0,1)$且与xOy面成$\pi/3$角的平面的方程.

11. 求过点$(-1,0,4)$，且平行于平面$3x-4y+z-10=0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交的直线的方程(可先求交点坐标).

12. 直线$L:\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转生成旋转面，求这个旋转面的方程.

13. 求点$(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离.

14. 求经过直线 L: $\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z=8$ 夹成 $\pi/4$ 角的平面方程.

15. **共面定理**：若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是

存在实数 k, l 使得 $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b}$．（由平行四边形法则可得）

16. 设数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 不全为 0，且 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=0$，则向量 $\boldsymbol{a,b,c}$ 是共面的（用**共面定理**）

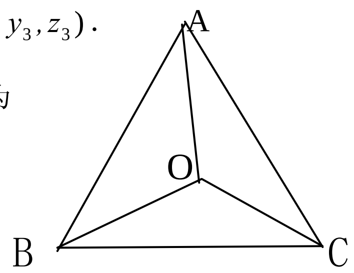
17. 设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2), \boldsymbol{b}=(2,-3,-4), \boldsymbol{c}=(-3,12,6)$. 证明向量 $\boldsymbol{a,b,c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

（提示：由混合积 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}=0$ 可知 3 向量共面，也可用**共面定理**）.

18. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 互相垂直, 且 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ ，$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

(1) 求 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度平方与长度；(2) 求向量 $\vec{s}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角余弦

19. 已知三角形的顶点 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2), C(x_3,y_3,z_3)$.



(1) 证明三角形的重心 G（3 条中线的交点）的向径公式为

$$\overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

(2) 求三角形的重心坐标.

20. (1) 已知 $OB\perp AC$, $OC\perp AB$，用向量证明 $OA\perp BC$ (如图示).

(2) 证明三角形的 3 条高线相交于一点.

（提示：设 $\overrightarrow{OA}=\mathrm{x}, \overrightarrow{OB}=\mathrm{y}, \overrightarrow{OC}=\mathrm{z}$，则 $\overrightarrow{BA}=\mathrm{x}-\mathrm{y}$, $\overrightarrow{BC}=\mathrm{z}-\mathrm{y}$, $\overrightarrow{AC}=\mathrm{z}-\mathrm{x}$. 因为

$OB\perp AC, OC\perp AB$，故 $\mathrm{y}\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{x})=0$, $\mathrm{z}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})=0$，两式相加得 $\mathrm{x}\cdot(\mathrm{z}-\mathrm{y})=0$，即

$OA\perp BC$）.

21. 用向量证明: (1)直径所对的圆周角是直角； (2)直角三角形的勾股定理.

22. 设 $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$. (1) 求叉积 $\overline{AB}\times\overline{AC}$； (2) 求三角形面积 S_{ABC}.

23. 设 $\boldsymbol{a}\neq 0$，证明 $\boldsymbol{a}\perp[\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}]$，且 $[\boldsymbol{b}-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2}]^2=\boldsymbol{b}^2-\dfrac{(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})^2}{\boldsymbol{a}^2}$.

24. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 互相垂直，且 $\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$，则系数 x, y, z 为

$$x=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^2},\ y=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^2},\ z=\frac{\boldsymbol{d}\bullet\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}^2}.$$

25. 已知四顶点 $A(1,1,1), B(7,1,7), C(5,4,1), D(3,0,4)$. 求四面体 $ABCD$ 的体积 V