



第二章 汇交力系

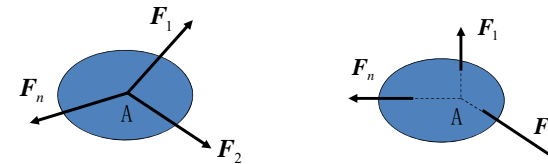
- 汇交力系的合成
- 汇交力系的平衡条件

1



§ 2-1 汇交力系的合成

汇交力系：力作用线汇交于一点的力系。



若汇交力系中,力的作用线在同一平面内,则称为**平面汇交力系**

若汇交力系中,力的作用线**不**在同一平面内,则称为**空间汇交力系**

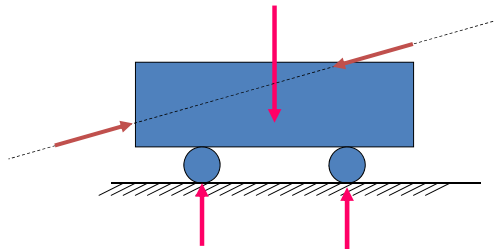
2



一、力的可传性原理

公理二：

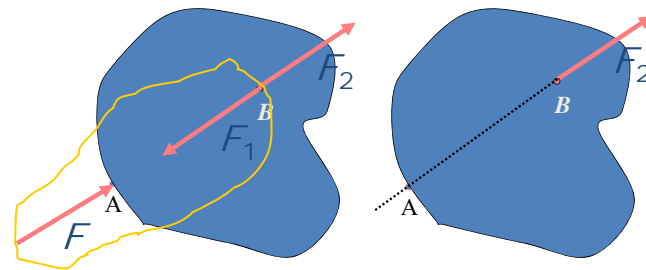
在刚体上增加或减去一组平衡力系,不会改变原力系对刚体的作用效应。 **增减平衡力系原理**



3



推论：作用于刚体上的力,可以沿其作用线滑移,而不改变对刚体的作用效应。 **力的可传性原理：**



4

工程力学 一 第二章 汇交力系

力的可传性原理适用对象: **刚体!!**

刚体

变形体

作用于刚体上力的三要素: 大小、方向、作用线

对刚体而言, 力是滑移矢量

工程力学 一 第二章 汇交力系

二、汇交力系合成的几何法 (矢量法)

作用于物体上同一点的两个力可以合成为一个合力, 合力的作用点仍在该点, 合力的大小和方向是以这两个力为边所作的平行四边形的对角线来表示。力的平行四边形法则

合力的大小由余弦定理确定:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha}$$

方向由正弦定理确定

$$\frac{F_1}{\sin \varphi} = \frac{F_R}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

工程力学 一 第二章 汇交力系

设 $\{F_1, F_2, F_3\}$ 为作用在A点的力系, 求其合力

力多边形

$F_{R12} = F_1 + F_2$ $F_R = F_{R12} + F_3$ $F_R = F_1 + F_2 + F_3$

设 $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 为作用在A点的汇交力系, 则其合力

$\{F_R\} \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 的力矢可由力多边形的封闭边表示

矢量表示 $F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i$

工程力学 一 第二章 汇交力系

三、汇交力系合成的解析法

● 力在轴上的投影

$F_x = \pm ab = F \cos \alpha$

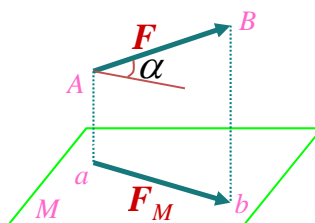
同理 \hookrightarrow

$F_y = F \cos \beta$ $F_z = F \cos \gamma$

力在轴上的投影是代数量 (标量)

工程力学 一 第二章 汇交力系

● 力在平面上的投影

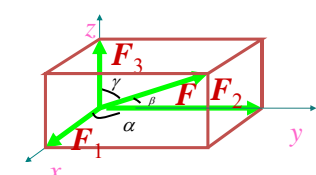


投影矢量 F_M $F_M = F \cos \alpha$

9

工程力学 一 第二章 汇交力系

● 力的解析表示式（正交直角坐标系中）



$$F_1 = F_x i$$

$$F_2 = F_y j$$

$$F_3 = F_z k$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

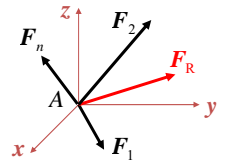
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos(F, i) = \frac{F_x}{F} \quad \cos(F, j) = \frac{F_y}{F} \quad \cos(F, k) = \frac{F_z}{F}$$

10

工程力学 一 第二章 汇交力系

● 汇交力系合成的解析法



$$F_R = \sum F_i$$

$$F_i = F_{ix} i + F_{iy} j + F_{iz} k$$

$$F_R = F_{Rx} i + F_{Ry} j + F_{Rz} k$$

$$F_{Rx} = \sum F_{ix}$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy}$$

$$F_{Rz} = \sum F_{iz}$$

$$F_R = \sum F_{ix} i + \sum F_{iy} j + \sum F_{iz} k$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R} \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} \quad \cos \gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R}$$

其中: α, β, γ 是合力矢量 F_R 与三个坐标轴的夹角

矢量代数: 合力在任一轴上的投影, 等于各分力在同一轴上投影的代数和。

11

工程力学 一 第二章 汇交力系

关于平衡:

公理一: 二力平衡原理: 作用于刚体上的两个力为平衡力系的充分必要条件是: 此二力等值、反向、共线

三力平衡??

12

工程力学 一 第二章 汇交力系

推论：三力平衡汇交定理

当刚体在同一平面内作用线互不平行的三个力作用下平衡时，这三个力的作用线必汇交于一点。

充分条件

必要条件，不是充分条件

13

工程力学 一 第二章 汇交力系

§2-2 汇交力系的平衡条件

一、几何平衡条件

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \Leftrightarrow \{F_R\} = \{0\}$$

$$F_R = \sum F_i \quad F_R = \sum F_i = 0$$

结论：汇交力系的几何平衡条件是力多边形自行封闭

特点：利用几何法（矢量法），便于定性分析平衡问题。

14

工程力学 一 第二章 汇交力系

二、解析平衡条件

结论：汇交力系的解析平衡条件是：

空间力系

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_{ix} = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_{iy} = 0 \\ F_{Rz} &= \sum F_{iz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

有三个独立的平衡方程

平面力系

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_{ix} = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_{iy} = 0 \end{aligned} \right\}$$

有两个独立的平衡方程

特点：利用解析法，便于定量分析平衡问题。

15

工程力学 一 第二章 汇交力系

例1：图示重物重为 $W=30\text{kN}$ ，由绳索AB、AC悬挂，求AB、AC的约束反力。

16

工程力学 一 第二章 汇交力系

例2: 结构如图所示, 已知主动力 F , 确定铰链 O 、 B 约束力的方向 (不计构件自重)

A、 F 作用于 OA 杆 B、 F 作用于 AB 杆

(A) (B)

17

工程力学 一 第二章 汇交力系

本章小结:

本章主要内容是运用几何法和解析法研究平面汇交力系的合成与平衡, 重点是解析法解平面问题, 应熟练掌握。

一、关于力系的合成

(1)几何法: 力多边形的封闭边表示合力的大小和方向;

(2)解析法:

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$\cos(F_R, i) = \frac{\sum F_x}{F_R}$$

18

工程力学 一 第二章 汇交力系

二、关于力系的平衡条件

(1) 在几何法中, 平面汇交力系平衡的几何条件是力多边形自行封闭;

(2) 在解析法中, 平面汇交力系的平衡方程是

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0$$

两个独立方程可解两个未知数。

19

工程力学 一 第二章 汇交力系

三、解题技巧及说明

- 一般地, 对于只受三个力作用的物体, 且角度特殊时用几何法 (解力三角形) 比较简便。
- 一般对于受多个力作用的物体, 无论角度是否特殊, 都用解析法。
- 投影轴常选择与未知力垂直, 最好使每个方程中只有一个未知数。
- 对力的方向判定不准的, 一般用解析法。
- 解析法解题时, 力的方向可以任意设, 如果求出负值, 说明力方向与假设相反。对于二力构件, 一般先设为拉力, 如果求出负值, 说明物体受压力。

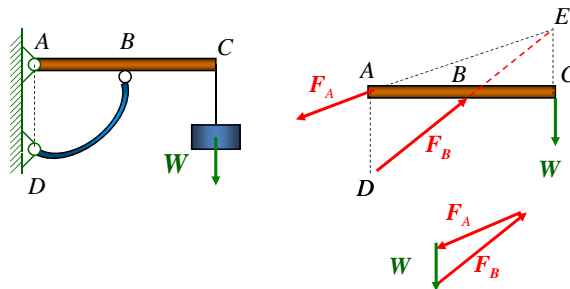
20

工程力学 一 第二章 汇交力系



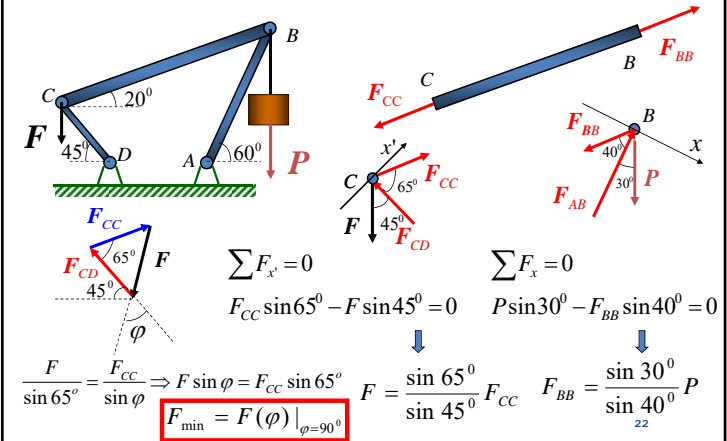
例3: 结构如图所示, 试确定铰链A处约束力的方向。

解: 研究AC杆



21

例4: 已知物体的重量为 P , 求 (a) 平衡时铅垂力 F ,
(b) 维持平衡时 F 的最小值及其方向 (不计构件自重)

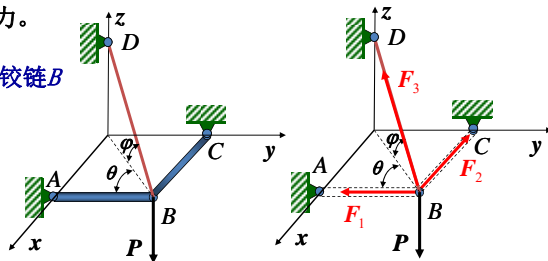


工程力学 一 第二章 汇交力系



例5: 结构如图所示, 杆重不计, 已知力 P , 求两杆的内力和绳BD的拉力。

解: 研究铰链B



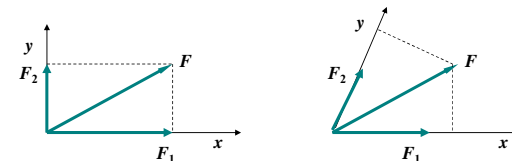
$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \sum F_z = 0 \\ F_3 \sin \varphi - P = 0 \\ F_3 = \frac{P}{\sin \varphi} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ -F_3 \cos \varphi \sin \theta - F_2 = 0 \\ F_2 = -F_3 \cos \varphi \sin \theta \end{array}$$

23

工程力学 一 第二章 汇交力系




思考题: 力在两坐标轴上的投影和力沿两坐标轴的分解有何区别?



24

工程力学 一 第二章 汇交力系



清华大学

作业：2-4，2-6，2-9

25