上次课内容

平面任意力系向一点的简化

$\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$

$\Updownarrow$

$\{F_R', M_O\}$

与简化中心位置无关　与简化中心位置相关

$F_R' \neq 0 \quad M_O = 0$ 合力

只出现在某些特定的点上

$F_R' = 0 \quad M_O \neq 0$ 合力偶

在一个点上为零，必处处为零

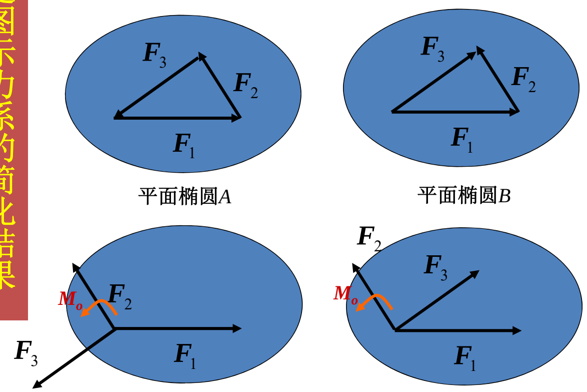
$F_R' = 0,\ M_O = 0$ 力系平衡

$$\begin{cases}\sum F_x = 0\\ \sum F_y = 0\\ \sum M_o(F) = 0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum F_x = 0\\ \sum M_A(F) = 0\\ \sum M_B(F) = 0\end{cases}\qquad \begin{cases}\sum M_A(F) = 0\\ \sum M_B(F) = 0\\ \sum M_C(F) = 0\end{cases}$$

可以对刚体外的点取矩！

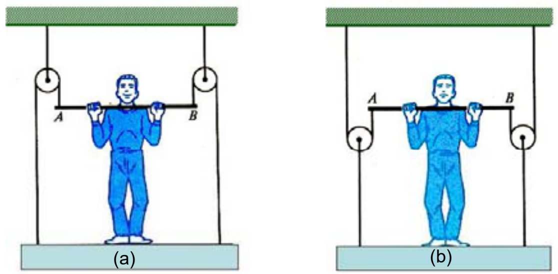
确定图示力系的简化结果

力多边形自行封闭是汇交力系平衡的几何条件



思考题：人重*W*，板重*P*，若人有足够大的力量，一定能维持平衡的是

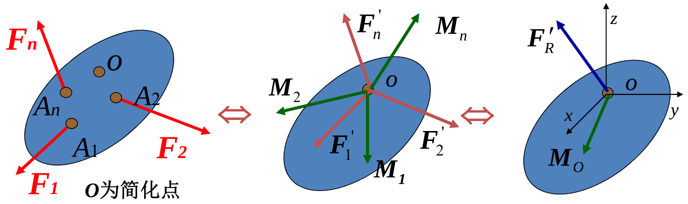
A：图(a)　B：图(b)　C:图(a)和(b)



第五章 空间任意力系

- 空间任意力系的简化
- 空间任意力系的平衡条件

§5－1 空间任意力系的简化



$\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \Leftrightarrow \{F_1', F_2', \cdots, F_n', \quad M_1, M_2, \cdots, M_n\}$

$\Leftrightarrow \{F_R', M_O\}$ F_R' 一个作用在O点上的力；M_O 一个作用在刚体上的力偶

•主矢 $F_R' = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i'$ （与简化点无关）

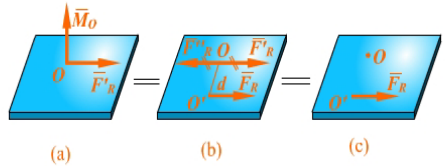
•主矩 $M_O = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i$ （与简化点有关）

• 空间任意力系的简化结果分析（最终结果）

（1） 合力

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O = 0$ ➡ 合力

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R' \perp \vec{M}_O$ ➡ 合力. 合力作用线距简化中心为 $d = |\vec{M}_O| / F_R'$



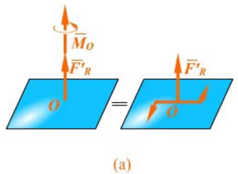
(a) (b) (c)

（2）合力偶

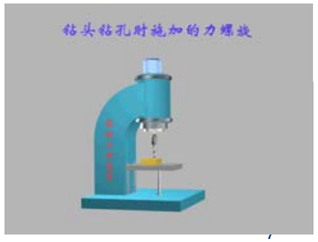
$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O \neq 0$ ➡ 一个合力偶，此时与简化中心无关。

（3）力螺旋

$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R' /\!/ \vec{M}_O$ ➡ 中心轴过简化中心的力螺旋

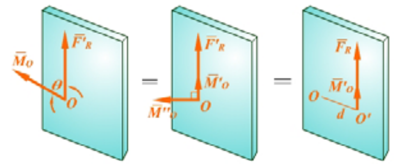


(a)



$\vec{F}_R' \neq 0, \vec{M}_O \neq 0, \vec{F}_R', \vec{M}_O$ 既不平行也不垂直

➡ 力螺旋, 中心轴距简化中心为 $d = \dfrac{M_O \sin\theta}{F_R'}$



（4） $\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O = 0$ — 平衡

同样可以证明，这种情况下空间任意力系在任意简化点的主矢、主矩为零

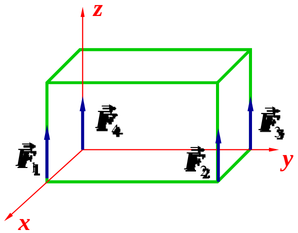
一空间平行力系如图示，该力系的最终简化结果是：

A.一合力；

B.一合力偶；

C.一力螺旋；

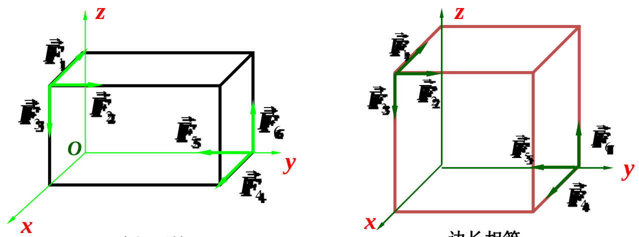
D.平衡



答案：**A**

在图示六面体上沿棱边作用6个力，各力大小都等于F，此力系的最终简化结果为：

A. 一合力； **B.** 一合力偶； **C.** 一力螺旋； **D.** 平衡



边长不等 边长相等

答案：B 答案：D

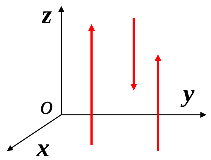
§5－2 空间任意力系的平衡条件

◆ 空间任意力系的平衡条件

$$\vec{F}_R' = 0, \vec{M}_O = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \\ &\sum F_y = 0 \\ &\sum F_z = 0 \\ &[\sum M_o(\mathbf{F})]_x = \sum M_x(\mathbf{F}) = 0 \\ &[\sum M_o(\mathbf{F})]_y = \sum M_y(\mathbf{F}) = 0 \\ &[\sum M_o(\mathbf{F})]_z = \sum M_z(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned}\right\}$$

◆ 空间平行力系的平衡条件



$$\left.\begin{aligned} &\sum F_z = 0 \\ &\sum M_x(F) = 0 \\ &\sum M_y(F) = 0 \end{aligned}\right\}$$

各类力系平衡条件小结

一、基本原理和定理

力系平衡原理：设空间任意力系 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \Leftrightarrow \{F_R, M_O\}$

其平衡的充分必要条件是 $F_R = 0, M_O = 0$

二力平衡原理

作用于刚体上的二力为平衡力系的充分必要条件是此二力等值、反向、共线。

三力平衡定理

作用于刚体上的三个力若为平衡力系，则这三个力共面；或汇交于一点，或平行。

二、空间任意力系的平衡条件

空间任意力系简化 $\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n\}\Leftrightarrow\{\boldsymbol{F}_R,\boldsymbol{M}_O\}$

平衡 $\longleftrightarrow$ $\boldsymbol{F}_R=0,\boldsymbol{M}_O=0$

$$\boldsymbol{F}_R=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \qquad F_R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2+(\sum F_z)^2}$$

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i \qquad M_O=\sqrt{(\sum M_{Ox})^2+(\sum M_{Oy})^2+(\sum M_{Oz})^2}$$

空间任意力系平衡的充分必要条件：

$$\boldsymbol{F}_R=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases} \quad \boldsymbol{M}_O=0\Leftrightarrow\begin{cases}\sum M_{Ox}(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_{Oy}(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_{Oz}(\boldsymbol{F})=0\end{cases}=\begin{cases}\sum M_x(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\\ \sum M_z(\boldsymbol{F})=0\end{cases}$$

三、其它力系的平衡条件

汇交力系平衡的充分必要条件：$\boldsymbol{F}_R=0$

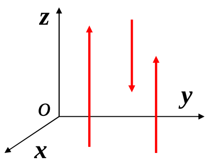
空间问题 $\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0,\\ \sum F_z=0\end{cases}$ 平面问题 $\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\end{cases}$,

力偶系平衡的充分必要条件： $\boldsymbol{M}_O=0$

空间问题 $\begin{cases}\sum M_x(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_y(\boldsymbol{F})=0,\\ \sum M_z(\boldsymbol{F})=0\end{cases}$ 平面问题 $\sum M=0$

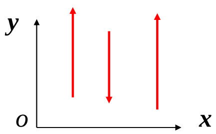
平行力系平衡的充分必要条件：

空间问题



$$\begin{cases}\sum F_z=0\\ \sum M_x(\boldsymbol{F})=0,\\ \sum M_y(\boldsymbol{F})=0\end{cases}$$

平面问题



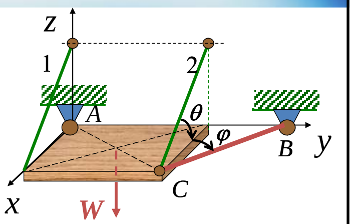
$$\begin{cases}\sum F_y=0\\ \sum M_O(\boldsymbol{F})=0\end{cases}$$

思考题：下列方程中的投影轴和取矩轴不是同一根轴，该方程组能否作为空间任意力系的平衡方程。

$$\begin{cases}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{cases} \quad \begin{cases}\sum M_{x'}(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_{y'}(\boldsymbol{F})=0,\\ \sum M_{z'}(\boldsymbol{F})=0\end{cases}$$

问题：上述方程中x,y,z是否必须正交？x',y',z'轴是否必须正交？

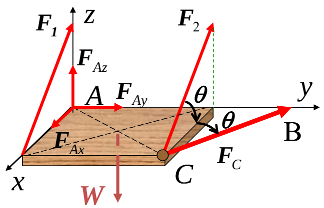
例1：重为*W*的均质正方形板水平支承在铅垂墙壁上，求绳1、2的拉力，*BC*杆的内力和球铰链*A*的约束力。



解：取板为研究对象、画受力图

方法一：基本方程

$$\left.\begin{aligned}\sum F_x=0\\ \sum F_y=0\\ \sum F_z=0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\sum M_x(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_y(\boldsymbol{F})=0\\ \sum M_z(\boldsymbol{F})=0\end{aligned}\right\}$$



方法二：六矩式方程

$$\sum M_{CE}=0\Rightarrow F_{Az}$$

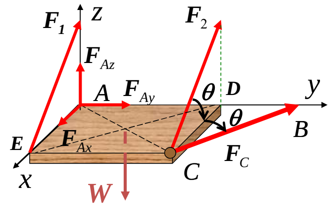
$$\sum M_x=0\Rightarrow F_2$$

$$\sum M_z=0\Rightarrow F_C$$

$$\sum M_y=0\Rightarrow F_1$$

$$\sum M_{Dz}=0\Rightarrow F_{Ax}$$

$$\sum M_{Cz}=0\Rightarrow F_{Ay}$$



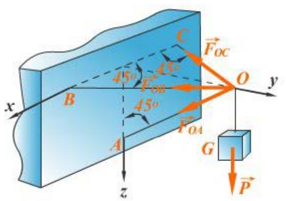
•取矩轴选取的原则？
•取矩轴选取的限制？

•在同一平面内
最多取两个平行的取矩轴

•在空间
最多取三个平行的取矩轴

例2：已知：*G*的重力为*P*，各杆自重不计，求：三根杆所受力。

取节点0为研究对象，画其受力图



$$\sum F_x=0$$

$$F_{OB}\cos45°-F_{OC}\cos45°=0$$

$$\sum F_y=0$$

$$-F_{OA}\sin45°-2F_{OB}\sin45°=0$$

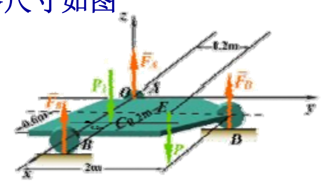
$$\sum F_z=0\,,\ P+F_{OA}\cos45°=0$$

$$F_{OA}=-\sqrt{2}P\qquad F_{OB}=F_{OC}=\frac{P}{\sqrt{2}}$$

例3：已知：*P*=8kN，$P_1=10$**kN**，各尺寸如图

求：*A*、*B*、*D* 处约束力

解：研究对象：小车在空间平行力系作用下平衡



列平衡方程

$$\sum F_z=0\qquad -P-P_1+F_A+F_B+F_D=0$$

$$\sum M_x(F)=0\qquad -0.2P_1-1.2P+2F_D=0$$

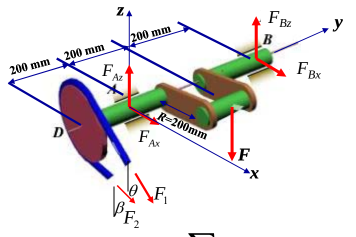
$$\sum M_y(F)=0\qquad 0.8P_1+0.6P-1.2F_B-0.6F_D=0$$

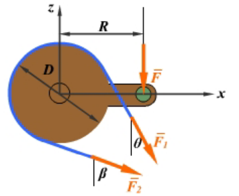
$$\Rightarrow\quad F_D=5.8\text{kN},F_B=7.777\text{kN},F_A=4.423\text{kN}$$

例4：已知：曲轴尺寸如图 $F = 2000\mathbf{N}, F_2 = 2F_1, \theta = 30^\circ, \beta = 60^\circ$,

$D = 800/3\ \text{mm}$ 求：F_1, F_2 及A、B处约束力

解：建立坐标系，画研究对象一曲轴完整的受力图

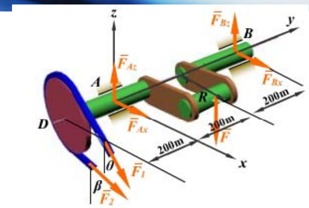


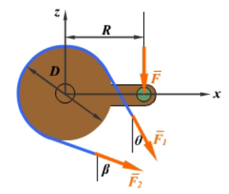


列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ + F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\cancel{\sum F_y = 0 \quad 0 = 0} \rightarrow \quad F_2 = 2F_1$$





$$\sum F_z = 0 \quad -F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F + F_{Az} + F_{Bz} = 0$$

$$\sum M_x(F) = 0$$

$$F_1 \cos 30^\circ \times 200 + F_2 \cos 60^\circ \times 200 - F \times 200 + F_{Bz} \times 400 = 0$$

$$\sum M_y(F) = 0 \qquad F \cdot R - \frac{D}{2} \times (F_2 - F_1) = 0$$

$$\sum M_z(F) = 0 \quad (F_1 \sin 30^\circ + F_2 \sin 60^\circ) \times 200 - F_{Bx} \times 400 = 0$$

$\Rightarrow$ $F_1 = 3000\mathbf{N}, F_2 = 6000\mathbf{N},$

$F_{Ax} = -1004\mathbf{N}, F_{Az} = 9397\mathbf{N},$

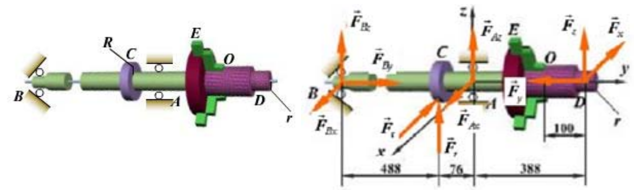
$F_{Bx} = 3348\mathbf{N}, F_{Bz} = -1799\mathbf{N},$

作业

5－1，7

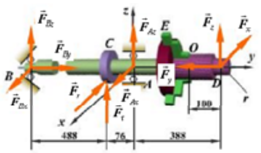
例5：车床主轴受力分析

已知：$F_x=4.25\text{kN}, F_y=6.8\text{kN}, F_z=17\text{kN},$
$F_r=0.36F_\tau$，$R=50\text{mm}$，$r=30\text{mm}$ 各尺寸如图



求：（1）$\vec{F}_r, \vec{F}_\tau$（2）**A**、**B**处约束力（3）**O**处约束力

解：研究对象1：主轴及工件，受力图如图



共7个未知数

$\sum F_x=0 \qquad -F_\tau+F_{Bx}+F_{Ax}-F_x=0$

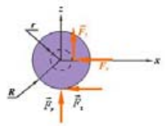
$\sum F_y=0 \qquad F_{By}-F_y=0$

$\sum F_z=0 \qquad F_r+F_{Bz}+F_{Az}+F_z=0$

$\sum M_x(F)=0 \qquad -(488+76)F_{Bz}-76F_r+388F_z=0$

$\sum M_y(F)=0 \qquad F_\tau\cdot R-F_z\cdot r=0$

$\sum M_z(F)=0 \qquad -76F_r+(488+76)F_{Bx}-30F_y+388F_x=0$



又：$F_r=0.36F_\tau$，

$F_\tau=10.2\textbf{kN}$，$F_r=3.67\textbf{kN}$，

$F_{Ax}=16.52\textbf{kN}$，$F_{Az}=-37.52\textbf{kN}$，

$F_{Bx}=-2.07\text{kN}$，$F_{By}=6.8\textbf{kN}$，$F_{Bz}=10.32\textbf{kN}$，

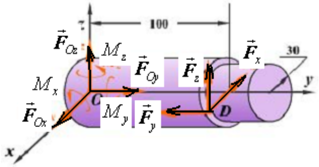
研究对象2：工件受力图如图

列平衡方程

$\sum F_x=0 \qquad F_{Ox}-F_x=0$

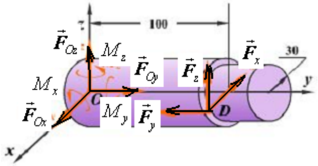
$\sum F_y=0 \qquad F_{Oy}-F_y=0$

$\sum F_z=0 \qquad F_{Oz}+F_z=0$



$$\sum M_x(F)=0 \qquad 100F_Z + M_x = 0$$

$$\sum M_y(F)=0 \qquad -30F_Z + M_y = 0$$



$$\sum M_z(F)=0 \qquad 100F_x - 30F_y + M_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{Ox} = 4.25\mathbf{kN}, F_{Oy} = 6.8\mathbf{kN}, F_{Oz} = -17\mathbf{kN}$$

$$M_x = -1.7\mathbf{kN}\cdot\mathbf{m}, M_y = 0.51\mathbf{kN}\cdot\mathbf{m}, M_z = -0.22\mathbf{kN}\cdot\mathbf{m}$$