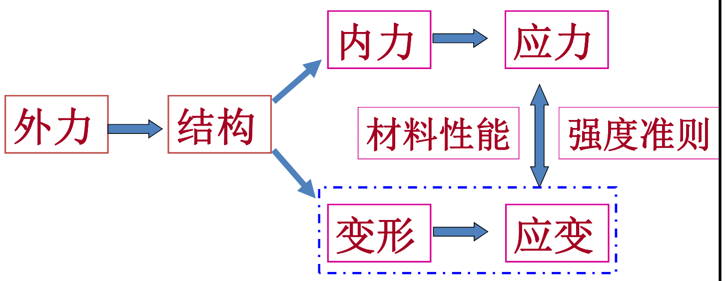
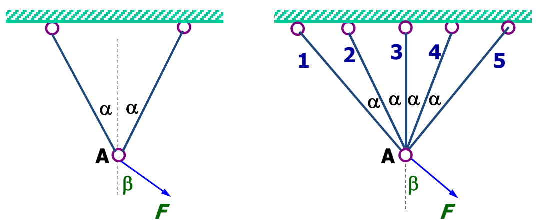
材料力学分析的基本过程



第八章　轴向拉伸与压缩

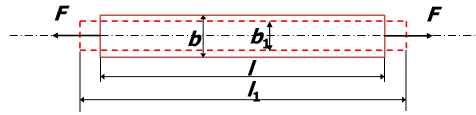
§8-7　胡克定律与拉压杆的变形



思考：为什么要研究变形？下述问题是否与变形相关？

- 各杆内力？
- *A*点位移？是否与力*F*同方向？

§8-7　胡克定律与拉压杆的变形

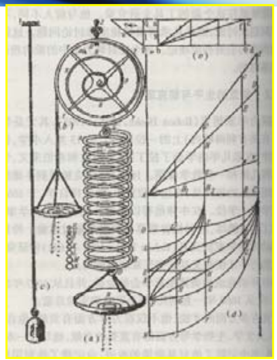


杆件受轴向载荷时，其轴向与横向尺寸均发生变化。

- 纵向变形：杆件沿轴向或载荷方向的变形
- 横向变形：垂直于轴向或载荷方向的变形

纵向变形　$\Delta l = l_1 - l$　　纵向正应变　$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$

横向变形　$\Delta b = b_1 - b$　　横向正应变　$\varepsilon' = \dfrac{\Delta b}{b}$



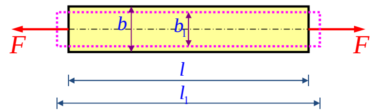
胡克的弹性实验装置

Robert Hooke (1635~1703)，英国科学家。少时热爱制作活动玩具与画图，18岁在牛津基督教堂充当唱诗班指挥员，27岁获得工艺学硕士，之后致力于显微术，29岁成为Gresham学院的几何学教授。他一生中完成大量的实验、发明与新仪器。其中著名成果包括：

1. 载荷大小与变形的关系；
2. 弹性能的概念；
3. 万有引力与惯性的概念；
4. 光的横向振动；
5. 梁弯曲实验中纵向纤维的变形。

中国郑玄（127-200）在《考工记》的注就提到弓的“每加物一石，则张一尺”。唐初贾公考有对此做了详细解释。

一、纵向变形与胡克定律

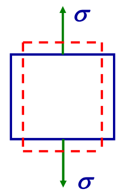


回顾物理弹簧伸长量与外力关系：$F=kx$

胡克定律

试验表明：比例极限内，正应力与正应变成正比

单向受力

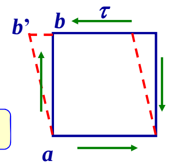


$$\sigma = E\varepsilon$$

弹性(杨氏)模量

胡克定律

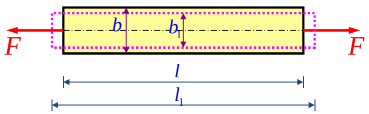
纯剪切



切变模量

$$\tau = G\gamma$$

剪切胡克定律



•轴向变形$\Delta l = l_1 - l$ (伸长为正)

弹性模量

$$\sigma = E\varepsilon \ (\sigma \le \sigma_p)$$

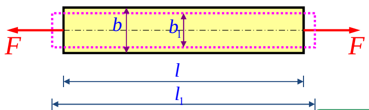
$$\sigma = \frac{F_N}{A}, \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\left.\right\} \frac{F_N}{A} = E\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \boxed{\Delta l = \frac{F_N l}{EA}}$$

拉压刚度

•适用范围：线弹性体、比例极限内

二、拉压杆的轴向变形与泊松比



$$\Delta b = b_1 - b \qquad \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$$

横向正应变

试验表明：对传统材料，在比例极限内，$\varepsilon' \propto \varepsilon$ 且异号。

定义：$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ $(0 \le \mu \le 0.5)$，μ ——泊松比

泊松（1781-1840）

西莫恩·德尼·泊松是法国数学家、几何学家和物理学家。1798年入巴黎综合工科学校，成为拉格朗日、拉普拉斯的得意门生。1806年任该校教授（21岁），1812年当选为巴黎科学院院士（31岁）……

数学中以他的名字命名的有：
泊松定理、泊松公式、泊松方程、泊松分布、泊松过程、泊松积分、泊松级数、泊松变换、泊松代数、泊松比、泊松流、泊松核、泊松括号、泊松稳定性、泊松积分表示、泊松求和法……

关于泊松比

- 1821年，纳维首次用分子理论研究各向同性弹性体的平衡问题，其基本方程中只包含一个弹性常数。
- 1825年，柯西把纳维的理论推广到各向异性弹性体，当退化到各向同性弹性体时得到两个弹性常数。但柯西认为纳维的单常数理论才是正确的。
- 1829年，泊松用纳维—柯西方法讨论板的平衡问题时指出，各向同性弹性杆受到单向拉伸，产生纵向应变，同时会联带产生横向收缩，此横向应变为$-\mu\varepsilon_x$，并证明$\mu=1/4$。纳维—柯西—泊松的单常数理论

- 1833年，格林研究电磁波在弹性介质表面上的反射与折射时，首次用能量法证明，各向同性弹性材料的应变能函数中应当包括两个弹性常数。
- 许多人通过试验来验证泊松比为1/4的理论结论
  维尔泰姆(1848)：试验结果表明μ接近1/3；
  基尔霍夫(1859)：测出了三种钢材和两种黄铜，$\mu\neq1/4$；
  科尔纽(1869)：光学干涉法测出玻璃$\mu=0.237$；
- 1879年，马洛克测出了一系列材料的泊松比，指出泊松比是独立的材料常数，否定了单常数理论。

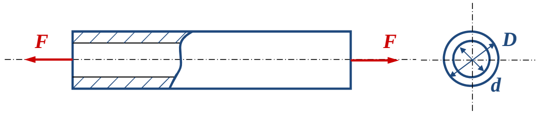
典型材料常数

弹性常数	钢与合金钢	铝合金	铜	铸铁	木(顺纹)
E/GPa	200-220	70-72	100-120	80-160	8-12
μ	0.25-0.30	0.26-0.34	0.33-0.35	0.23-0.27	

对于各向同性材料，三个材料常数存在如下关系：

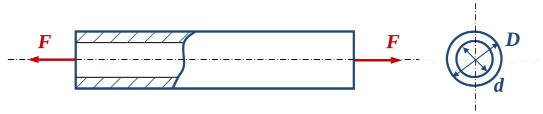
$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

例：已知E，D，d，F，求D和d的改变量。



思考：当圆管受拉时，外径减小，内径增大还是减小？

例：已知E，D，d，F，求D和d的改变量。



解：$\varepsilon=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F}{AE}=\dfrac{4F}{\pi\left(D^2-d^2\right)E}$　$\varepsilon'=-\mu\varepsilon=-\dfrac{4\mu F}{\pi\left(D^2-d^2\right)E}$

$\Delta d=\varepsilon' d=-\dfrac{4\mu Fd}{\pi(D^2-d^2)E}$　$\Delta D=\varepsilon' D=-\dfrac{4\mu FD}{\pi\left(D^2-d^2\right)E}$

上次课内容

应力集中的概念　$\boxed{K=\dfrac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}}$

许用应力与强度条件

许用应力：工作应力的最大容许值$[\sigma]$

$[\sigma]=\dfrac{\sigma_u}{n}$　n—安全因数(子)，n>1

拉压杆强度条件：

变截面杆：$\sigma_{\max}=\left(\dfrac{F_N}{A}\right)_{\max}\le[\sigma]$

等截面杆：$\dfrac{F_{N,\max}}{A}\le[\sigma]$

拉/压载荷下的强度条件可能有所不同(因材料而异)

上次课内容

强度条件的应用

- 三类常见的强度问题
  - •校核强度：已知外力，$[\sigma]$，A，判断 $\sigma_{\max}=\left(\dfrac{F_N}{A}\right)_{\max}\overset{?}{\le}[\sigma]$
  - •截面设计：已知外力，$[\sigma]$，确定 $A\ge\dfrac{F_{N,\max}}{[\sigma]}$
  - •确定承载能力：已知A，$[\sigma]$，确定 $[F_N]=A[\sigma]$

上次课内容

纵向变形与胡克定律

$\sigma = E\varepsilon$ 弹性（杨氏）模量

胡克定律

$\tau = G\gamma$ 切变模量

剪切胡克定律

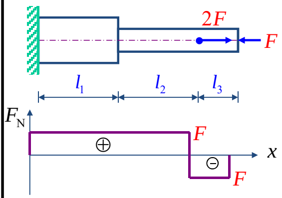
$\Delta l = \dfrac{F_N l}{EA}$ 拉压刚度

拉压杆的轴向应变与泊松比

$\mu = -\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (0 \le \mu \le 0.5)$，$\mu$ ——泊松比

三、多力杆的变形与叠加原理

例：已知E，A_1，A_2，求总伸长 Δl



解 方法一：各段变形叠加法

步骤：*内力分析，轴力图；

*依据杆件的几何和内力特征分段求出变形；

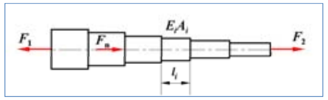
$\dfrac{Fl_1}{EA_1}$ $\dfrac{Fl_2}{EA_2}$ $-\dfrac{Fl_3}{EA_3}$

*变形计算，求代数和。

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{Fl_1}{EA_1} + \frac{Fl_2}{EA_2} - \frac{Fl_3}{EA_3}$$

讨论：

•阶梯形杆：$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{F_{Ni} l_i}{E_i A_i}$

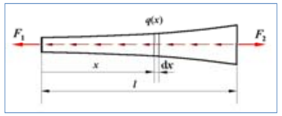


n—总段数

F_{Ni}—杆段 i 轴力

•变截面变轴力杆

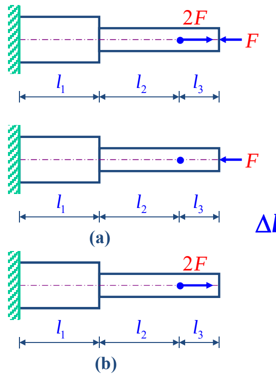
$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{F_N(x)\mathrm{d}x}{EA(x)}$$



$$\Delta l = \int_l \frac{F_N(x)}{EA(x)} dx$$

例：已知E，A_1，A_2，求总伸长 Δl（续）

解法二：各载荷效应叠加



$$\Delta l_a = -\frac{Fl_1}{EA_1} - \frac{F(l_2 + l_3)}{EA_2}$$

$$\Delta l_b = \frac{2Fl_1}{EA_1} + \frac{2Fl_2}{EA_2}$$

$$\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_b = \frac{Fl_1}{EA_1} + \frac{Fl_2}{EA_2} - \frac{Fl_3}{EA_3}$$

与解法一结果一致，引出叠加原理

叠加原理： 几个载荷同时作用所产生的总效果，等于各载荷单独作用产生的效果的总和。

叠加原理的适用范围

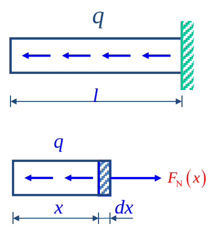
*材料线弹性

*小变形

*结构几何线性

例：已知 q, l, E, A，求 $\Delta l = ?$

- 等轴力、等截面杆的伸长
- 等轴力、非等截面杆的伸长
- 非等轴力、等截面杆的伸长



解：距端点x处截面的轴力为

$$F_N(x) = qx$$

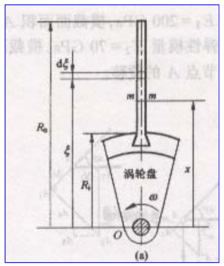
dx 微段伸长

$$d(\Delta l) = \frac{F_N(x)dx}{EA} = \frac{qxdx}{EA}$$

总伸长为 $$\Delta l = \int_0^l d(\Delta l) = \int_0^l \frac{qxdx}{EA} = \frac{ql^2}{2EA}$$

各段变形叠加法

例：图示涡轮叶片，已知A, E, ρ，角速度 ω，求叶片横截m-m面上的正应力与轴向变形。



解：1、叶片的外力(轴力)

作用于微段 $d\xi$上的离心力为

$$dF(\xi) = \xi\omega^2 dm = \omega^2 \rho A \xi d\xi$$

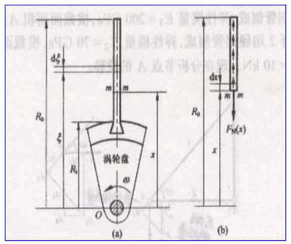
$$q(\xi) = dF(\xi)/d\xi = \omega^2 \rho A \xi$$

2、叶片的内力与应力

$$F_N(x) = \int_x^{R_0} q(\xi)d\xi = \int_x^{R_0} \omega^2 \rho A \xi d\xi = \frac{\omega^2 \rho A}{2}(R_0^2 - x^2)$$

2、叶片的内力与应力

$$F_N(x) = \int_x^{R_0} q(\xi)d\xi = \int_x^{R_0} \omega^2 \rho A \xi d\xi = \frac{\omega^2 \rho A}{2}(R_0^2 - x^2)$$



$$\sigma(x) = \frac{\omega^2 \rho}{2}(R_0^2 - x^2)$$

3、叶片的变形

dx 微段： $$d(\Delta l) = \frac{F_N(x)dx}{EA}$$

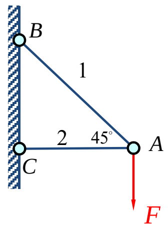
总伸长： $$\Delta l = \int_{R_i}^{R_0} \frac{F_N(x)}{EA}dx = \frac{\omega^2 \rho}{6E}(2R_0^3 - 3R_0^2 R_i + R_i^3)$$

关于桁架的节点位移

- 回顾理想桁架的特征
  1. 节点抽象为光滑铰链
  2. 桁架中的杆件为二力杆件 — 拉压杆
  3 外力(载荷及约束力)都作用于节点上
- 桁架的节点位移

桁架的节点为多个杆件的连接点，其位移同时受多个杆件的移动（平动＋转动）和变形（伸长或缩短）的制约。

例：已知 $E_1A_1 = E_2A_2 = EA, l_2 = l$, 求桁架节点A的水平与铅垂位移



解：1、轴力与变形分析

$F_{N1} = \sqrt{2}F$ （拉）

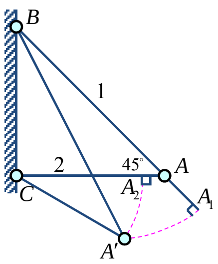
$F_{N2} = F$ （压）

$$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1} = \frac{\sqrt{2}F\sqrt{2}l}{EA} = \frac{2Fl}{EA}$$ （伸长）

$$\Delta l_2 = \frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2} = \frac{Fl}{EA}$$ （缩短）

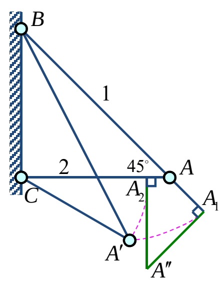
接下来如何确定节点A的新位置（位移）？

2、节点A的位移的精确计算及其困难。



☞ 精确分析方法：

1、轴力难以分析；
2、节点位置难以确定。
3、需反复迭代求解.



3、小变形问题实用（工程）解法

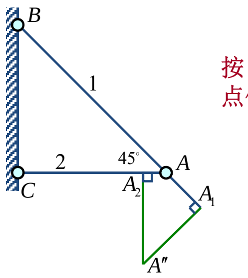
实用解法：

*按结构原几何形状与尺寸计算约束反力与内力—小变形；

*节点运动轨迹采用切线代曲线的方法确定节点位移。

☞ 工程分析方法：

1、精度略有降低；
2、分析极大简化。



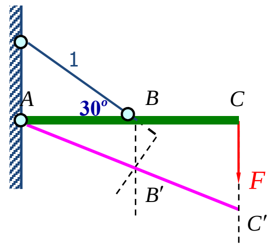
4、节点位移计算

按 "先变形 再转动"的顺序计算节点位移

$$\Delta A_x = \overline{AA_2} = \Delta l_2 = \frac{Fl}{EA}(\leftarrow)$$

$$\Delta A_y = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} + \Delta l_2 = \frac{2\sqrt{2}Fl}{EA} + \frac{Fl}{EA} = \frac{\left(2\sqrt{2}+1\right)Fl}{EA}(\downarrow)$$

例：*ABC*刚性杆，*B* 为*AC* 的中点，求节点*C* 的位移。



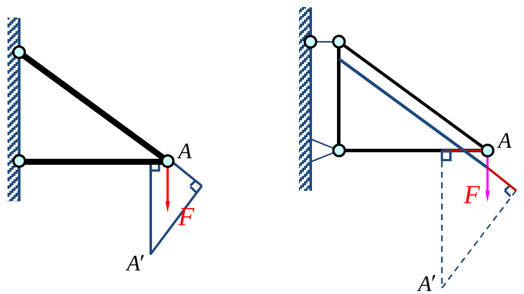
解：先计算杆1内力F_{N1} 与伸长Δl_1

然后画*B*点位移

再画*C*点位移

$$\Delta C_y = 2\Delta B_y = 4\Delta l_1$$

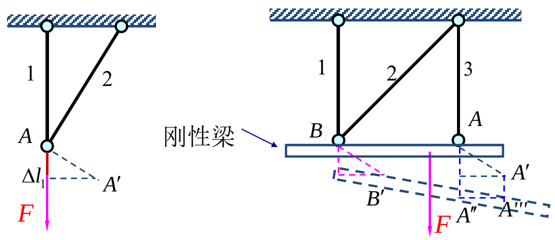
例：画出节点*A*的位移



杆两端均为可动点情形：

平移+变形(伸长或缩短)+ 转动(切线代曲线)

例：画节点*A*的位移



*左图杆2不受力，不伸长转动。

•右图B点位移由杆1和2确定（与左图A点相同）；

•刚梁AB先随B点平动，B至B′点，A至A′点；然后绕B′点转动；

•杆3伸长到A″，然后转动，与刚性梁对应点交于A‴点。

作业

8- 18，24