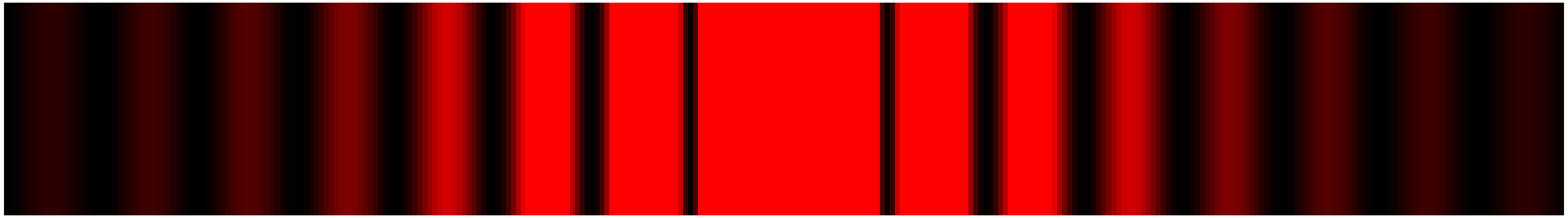
第十三章　光的衍射



§13.1 光波衍射的基本理论

§13.3 典型孔径的夫琅和费衍射(傅里叶变换)

§13.5   多缝的夫琅和费衍射

§13.4 光学成像系统的衍射和分辨本领

§13.6   衍射光栅

13.1 光波衍射的基本理论

一、光的衍射现象

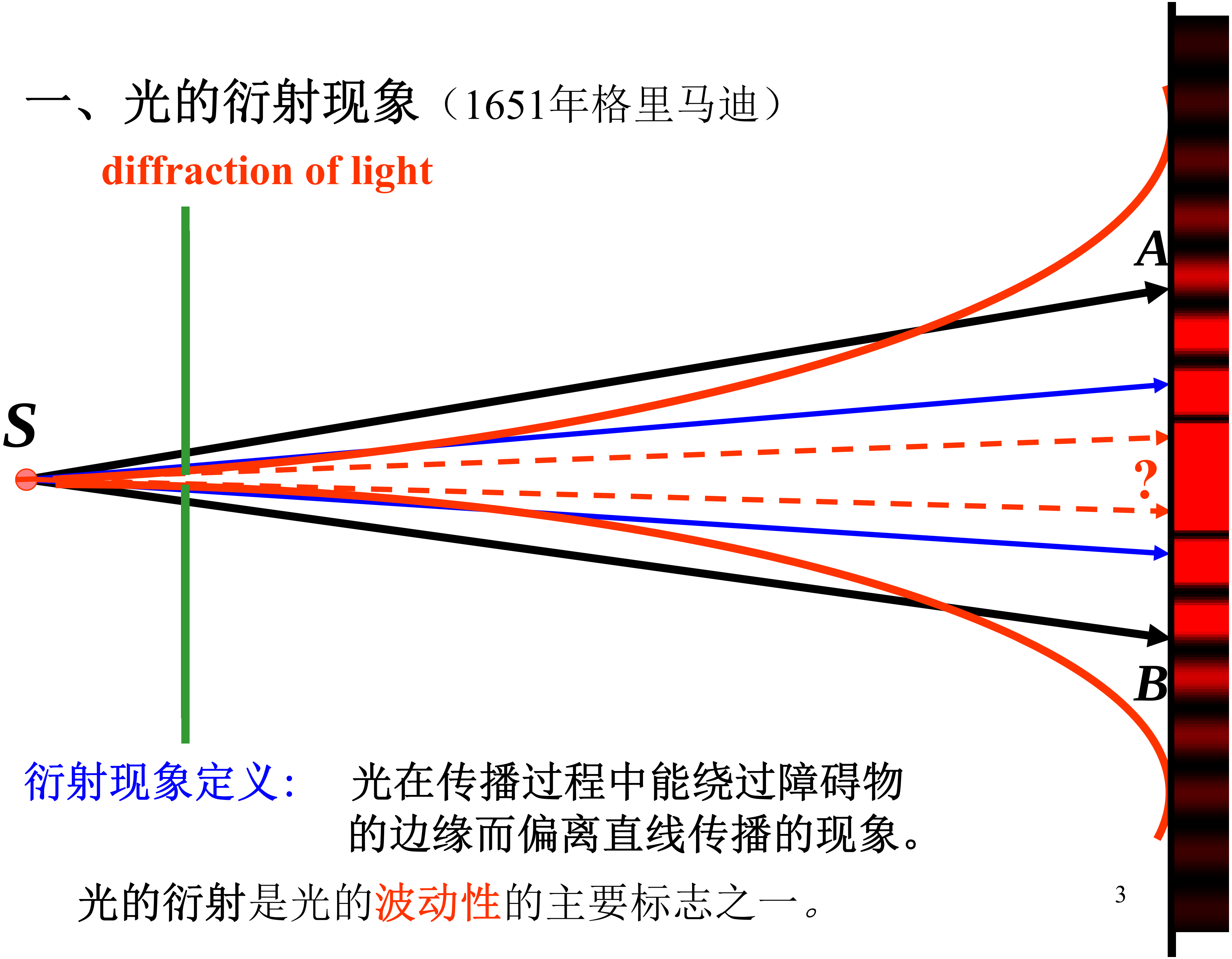
二、惠更斯－菲涅耳原理

三、菲涅耳－基尔霍夫衍射公式

四、基尔霍夫衍射公式的近似

一、光的衍射现象（1651年格里马迪）

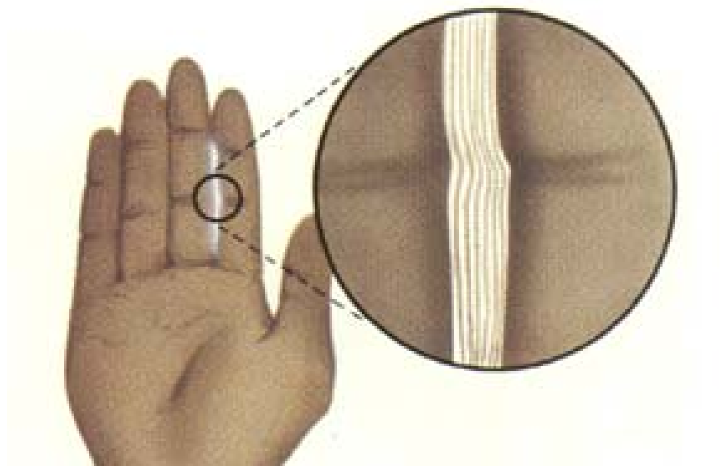
diffraction of light



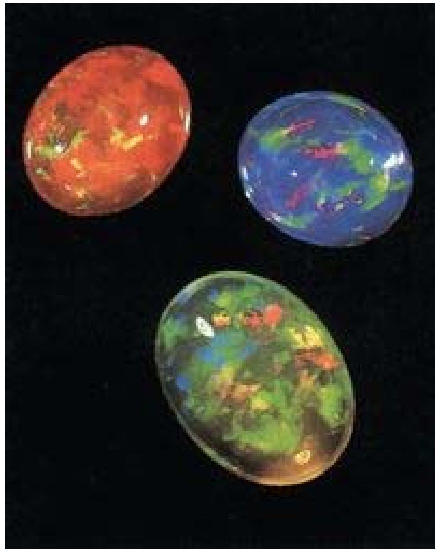
衍射现象定义：　光在传播过程中能绕过障碍物的边缘而偏离直线传播的现象。

光的衍射是光的波动性的主要标志之一。

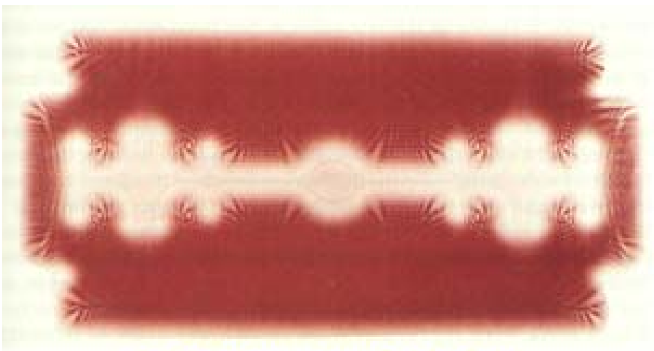
生活中衍射现象



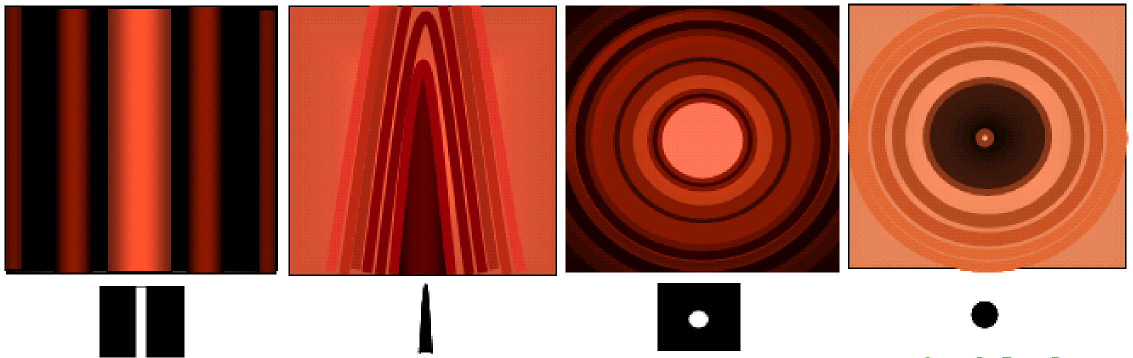
指缝的衍射现象



在**欧泊石** 的内部，由无数规则的二氧化硅球粒一间隙形成了很多的三维衍射光栅，当光线射入到欧泊石内部时，出现了光线的衍射作用，衍射的角度随波长的变化而变化，从而在不同的角度可见不同的颜色，亦就是所谓的变彩。



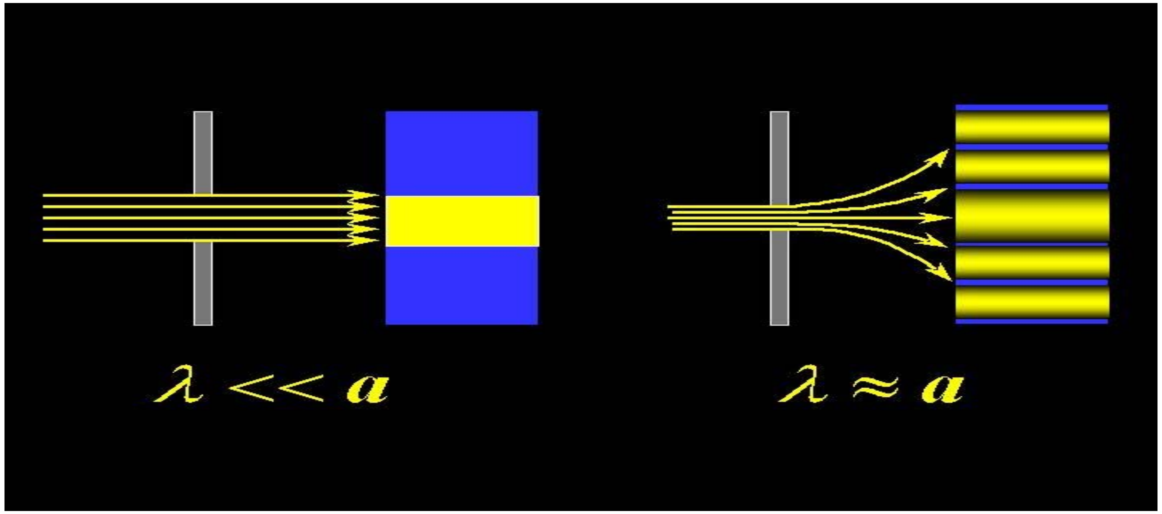
剃须刀片的衍射现象

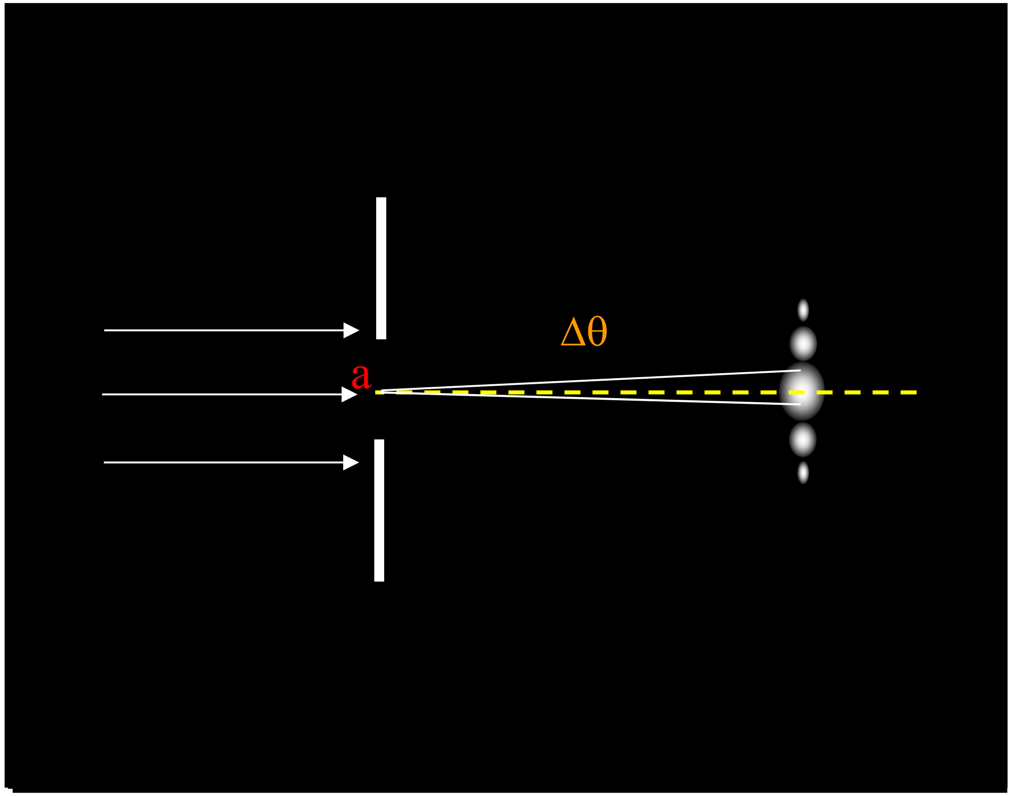


狭缝　针尖　圆孔　圆屏

衍射的一般特点：

1、限制与展宽



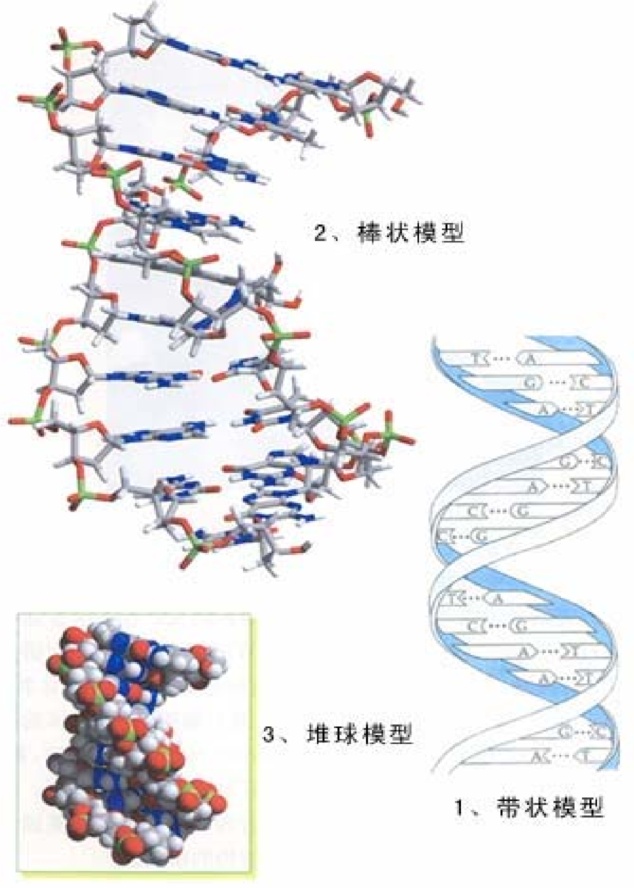


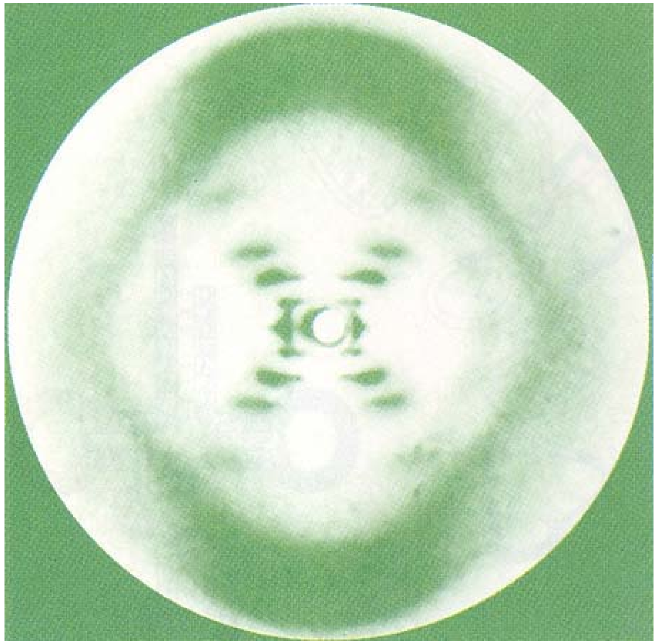
发散角、波长和
限制尺度的关系：

$$a \cdot \Delta\theta \sim \lambda$$

2、衍射图样和衍射屏的结构一一对应，结构越细微，相应的衍射图样越扩大。

微结构 ⇄ **衍射图样**



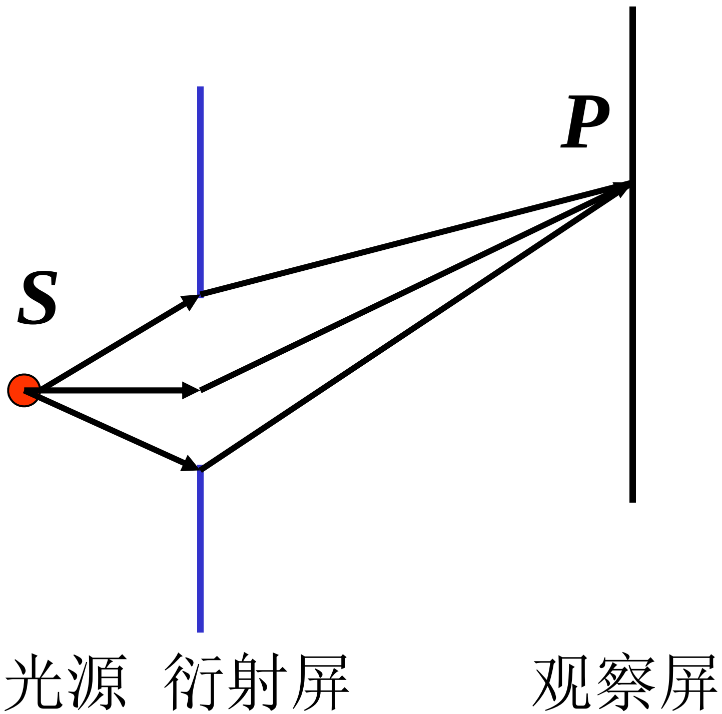


DNA的X光衍射照片

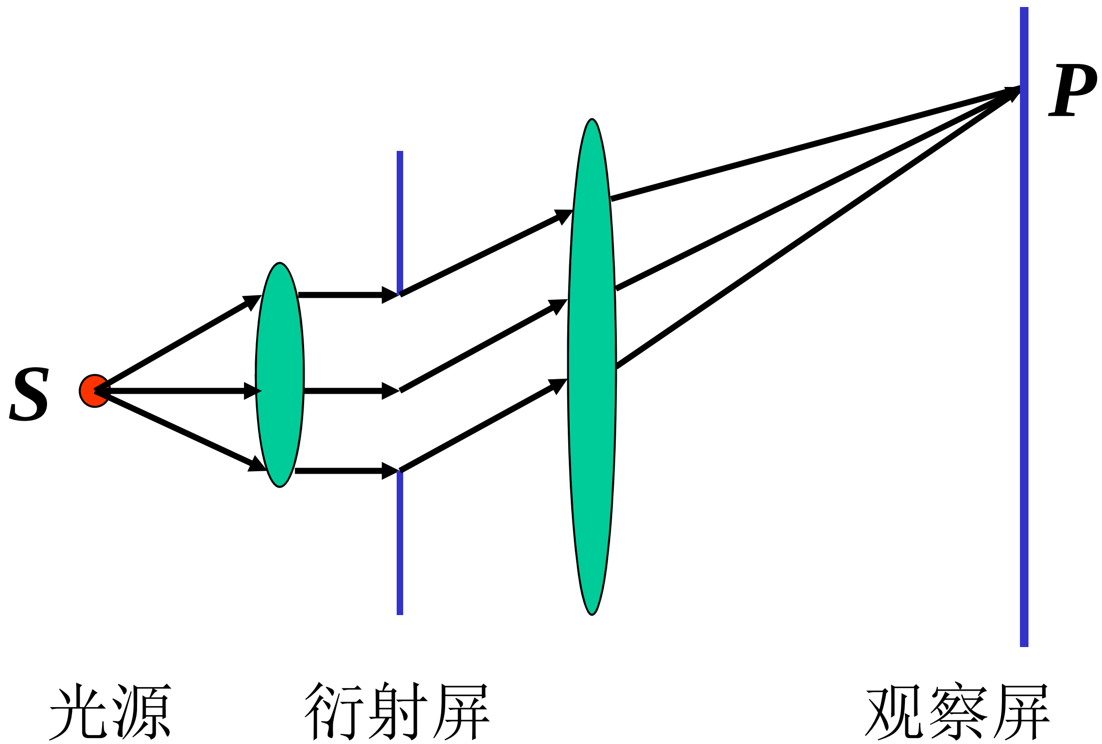
衍射现象的**分类**：

（1）菲涅耳衍射：观察屏在距离衍射屏不是太远时观察到的 衍射现象。

（2）夫琅和费衍射：光源和观察屏距离衍射屏都相当于无限远处的衍射现象。

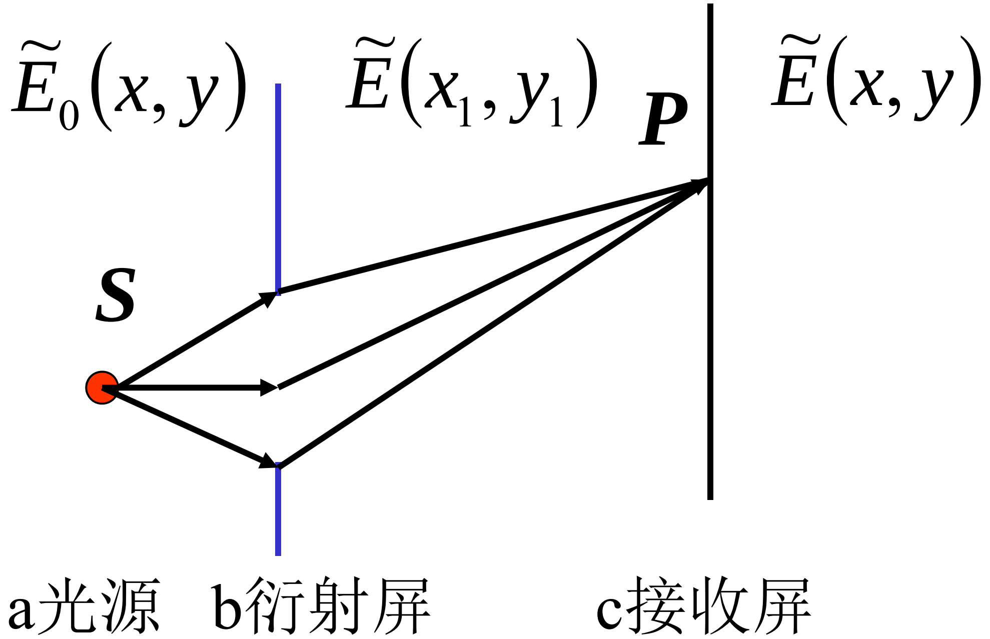


菲涅耳衍射



夫琅和费衍射

衍射系统的**基本配置**：光源、衍射屏和观察屏



衍射现象的**基本问题**：

1） 已知a、b，求c

2） 已知b、c，求a

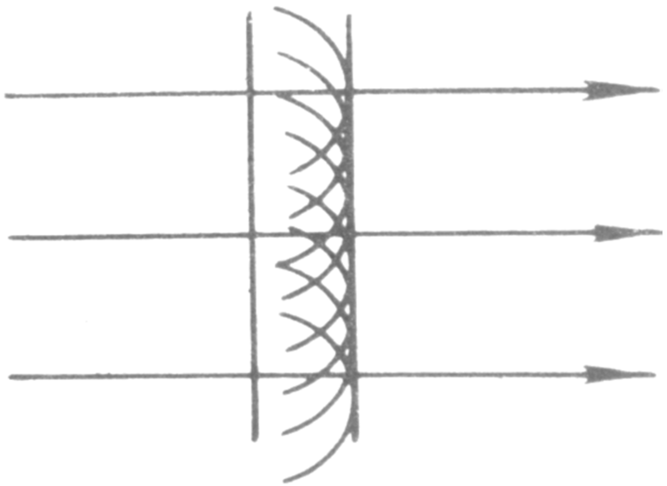
3） 已知a、c，求b

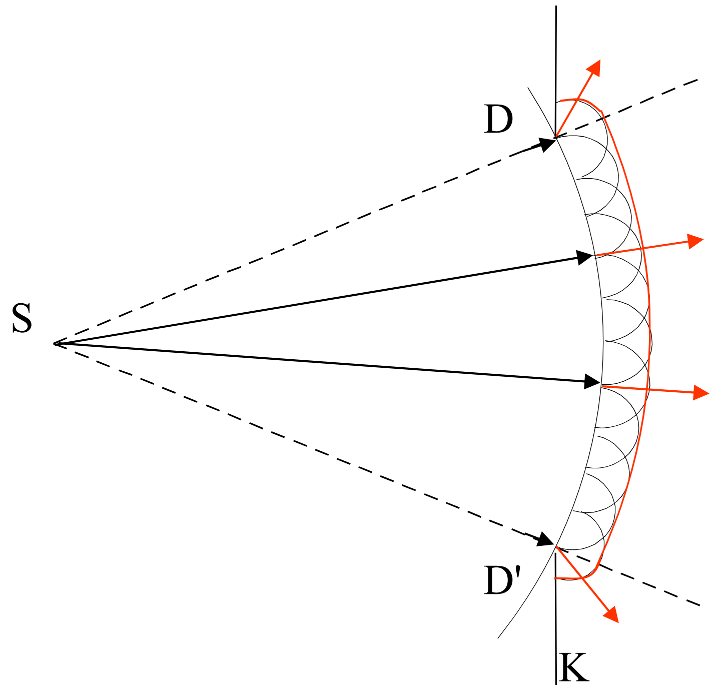
二、惠更斯－菲涅耳原理

1、惠更斯原理（**1690 《论光》** ）：

（1）波阵面的形成

（2）光波的传播方向





光波通过圆孔的惠更斯作图法

2、惠更斯－菲涅耳原理

波阵面外任一点光振动应该是波面上所有子波相干叠加的结果。

惠更斯的子波概念

继承

吸取

光波干涉概念

（Augustin-Jean Fresnel ）

补充和发展

提出

子波相干叠加的概念

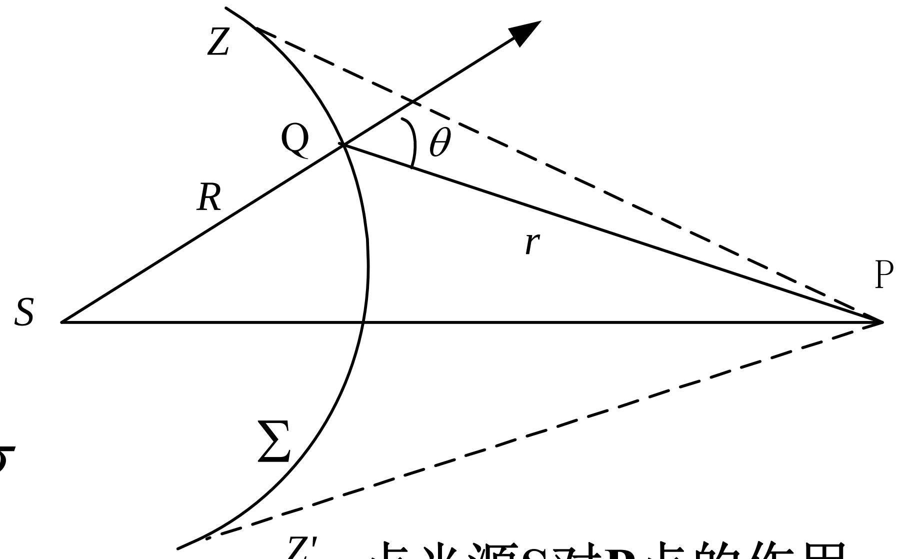
统一的衍射分析的理论框架
惠更斯—菲涅耳原理

菲涅耳是法国物理学家和铁路工程师。 1788年5月10日生于布罗利耶，1806年毕业于巴黎工艺学院，1809年又毕业于巴黎桥梁与公路学校。1823年当选为法国科学院院士，1825年被选为英国皇家学会会员。1827年7月14日因肺病医治无效而逝世，终年仅39岁。

波面ZZ'上Q点的复振幅：

$$\tilde{E}_Q = A \cdot \frac{\exp(ikR)}{R}$$

波阵面外任一点光振动应该是波面上所有子波*相干叠加*的结果。



点光源S对P点的作用

Q点处次级面光源$d\sigma$对P点的贡献为：

$$d\tilde{E}(P) = CK(\theta) \cdot \tilde{E}_Q \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} d\sigma$$

子波向P点的球面波公式

子波法线方向的振幅

子波振幅随θ角的变化

$$d\widetilde{E}(P)=CK(\theta)\cdot\widetilde{E}_Q\cdot\frac{\exp(ikr)}{r}d\sigma$$

菲涅耳假设：

当θ = 0 时，$K(\theta)$=Max, θ>= π/2 时，$K(\theta)=0$.

（实验证明是不对的）

若S发出的光源振幅为A（单位距离处）ZZ'范围内的波面上的面元发出的子波对P点产生的复振幅总和为：

$$\widetilde{E}(P)=\frac{CA}{R}\exp(ikR)\iint_{\Sigma}K(\theta)\frac{\exp(ikr)}{r}d\sigma$$

求解此公式主要问题：C、$K(\theta)$没有确切的表达式。

三、菲涅耳－基尔霍夫衍射公式（确定了C、$K(\theta)$）

基尔霍夫从波动方程出发，用场论得出了比较严格的公式。

$$\tilde{E}(P)=\frac{A}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\exp(ikl)}{l}\cdot\frac{\exp(ikr)}{r}\left[\frac{\cos(n,r)-\cos(n,l)}{2}\right]d\sigma$$

其中，方向角 (n, l) 和 (n, r) 为Σ的法线与 l 和 r 的夹角。

表明：P点处复振幅由Σ多个虚设的子波源产生。

与惠更斯－菲涅尔公式相比：

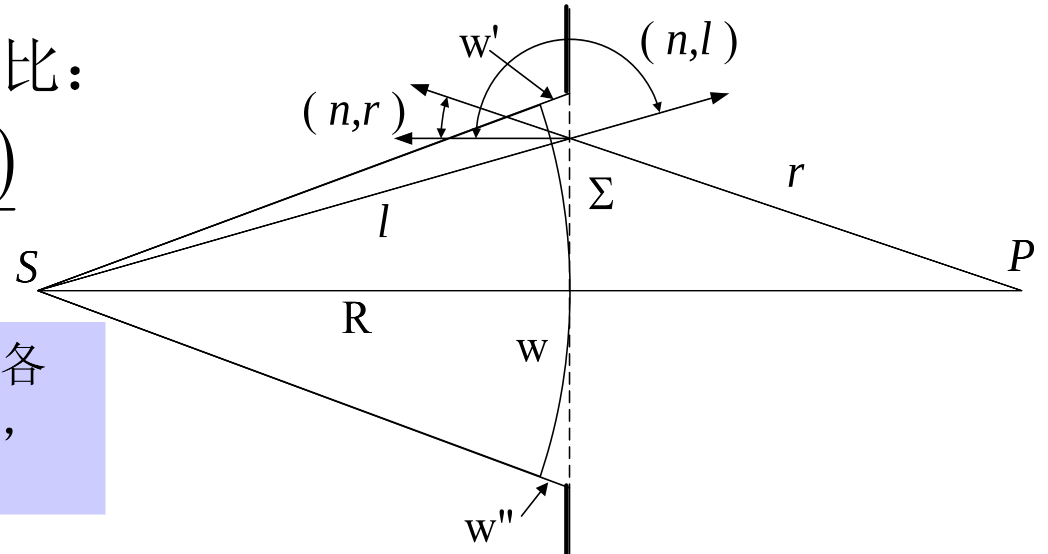
$$K(\theta)=\frac{\cos(n,r)-\cos(n,l)}{2}$$

表示子波的振幅在各个方向上是不同的，其值在0与1之间

$$C=\frac{1}{i\lambda}$$

$$\frac{1}{i}=-i=\exp[-i\frac{\pi}{2}]$$

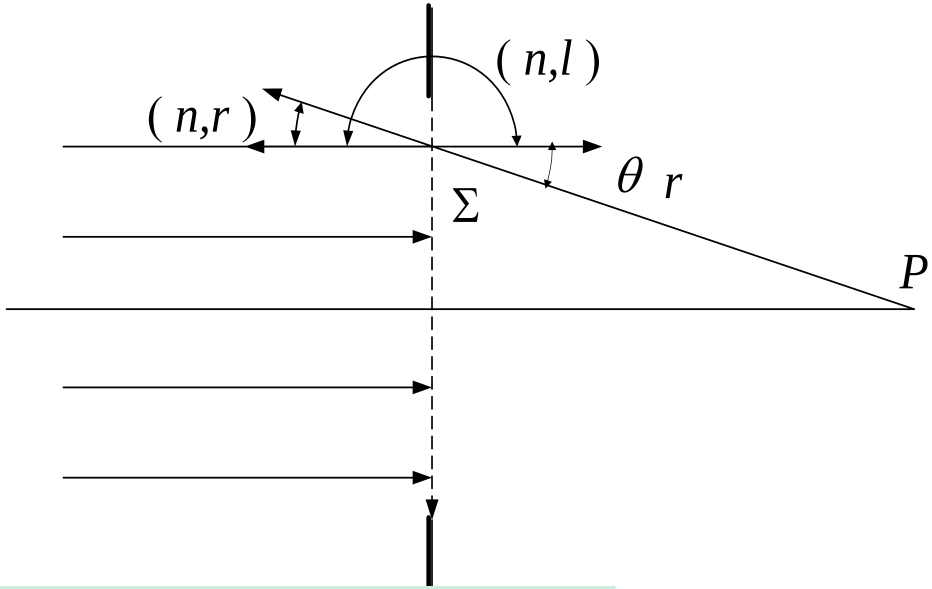
表示子波的振动超前于入射波90°



当光线近似为正入射时，可得到下列近似：

$$\cos(n,l) = -1,$$

$$\cos(n,r) = \cos\theta$$



则 $K(\theta)=\dfrac{(1+\cos\theta)}{2}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$K(\theta)=\dfrac{1}{2}$

这一结论表明菲涅尔关于$K(\theta)$的假设是错误的。

将近似条件代入基尔霍夫公式得到近似式：

$$\tilde{E}(P)=-\frac{i}{2\lambda}A\iint_{\Sigma}\frac{\exp(ikl)}{l}\frac{\exp(ikr)}{r}(1+\cos\theta)d\sigma$$

四、基尔霍夫衍射公式的近似

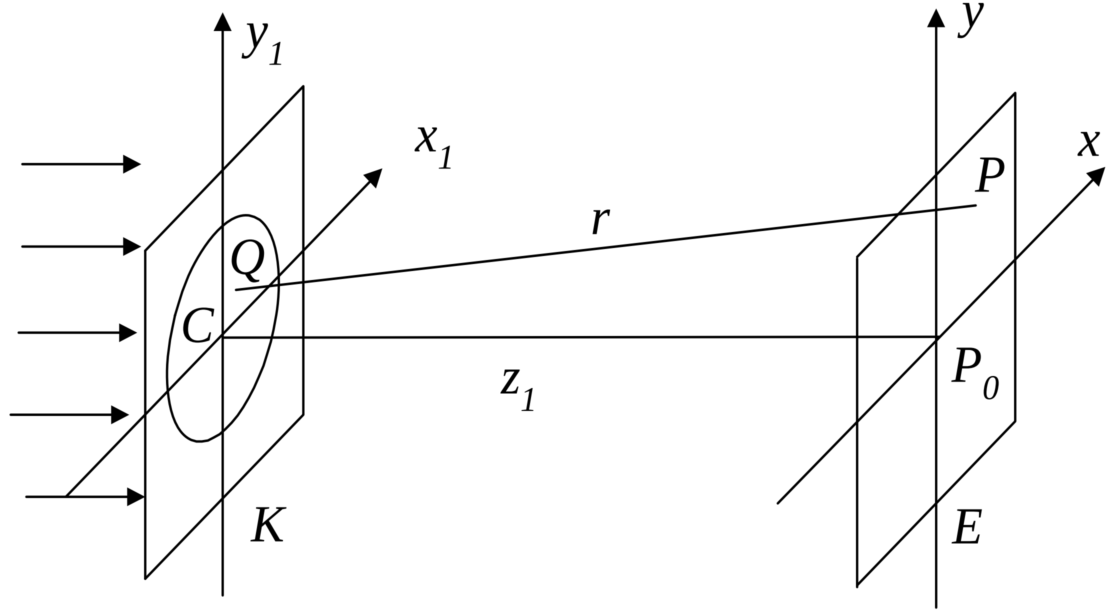
$$\widetilde{E}(P)=-\frac{i}{2\lambda}A\iint_{\Sigma}\frac{\exp(ikl)}{l}\frac{\exp(ikr)}{r}(1+\cos\theta)d\sigma$$

1.初步近似（傍轴近似、两点近似）

(1) $\mathbf{cos}(\vec{n}\cdot\vec{r})=\mathbf{cos}\,\theta\approx 1$　　　$K(\theta)=\frac{(1+\cos\theta)}{2}\approx 1$

(2)在振幅项中

$$\frac{1}{r}\approx\frac{1}{z_1}$$



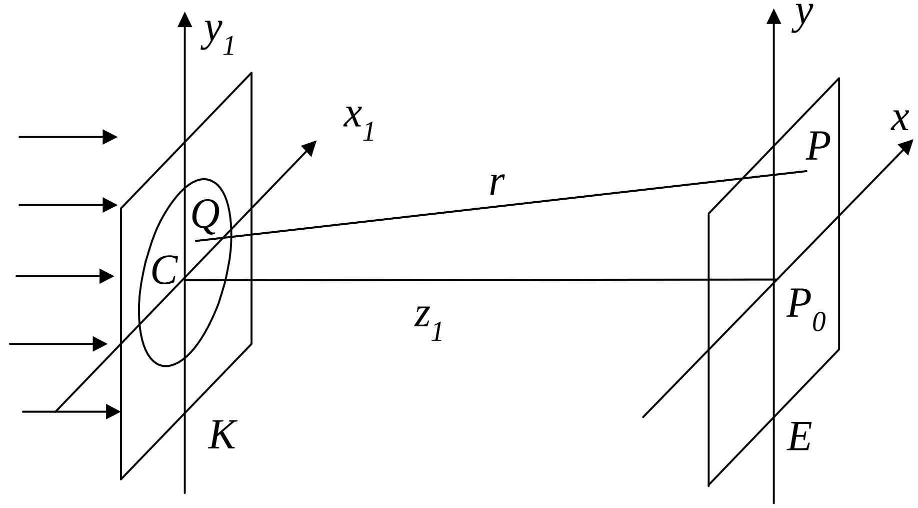
孔径 Σ的衍射

(3)设定孔径函数 $\widetilde{E}\left(x_1, y_1\right)$, $d\sigma = dx_1 dy_1$

它在 Σ 之外 $\widetilde{E}\left(x_1, y_1\right) = 0$ 在 Σ 之内 $\widetilde{E}\left(x_1, y_1\right) = A\dfrac{\exp(ikl)}{l}$

$$\widetilde{E}(x, y) = -\frac{i}{\lambda z} A \int\int_{-\infty}^{\infty} E\left(x_1, y_1\right) \mathbf{exp}(ikr) dx_1 dy_1$$

进一步的计算需要将exp(*ikr*)中的*r*表示成(*x*,*y*,*z*)的函数。



孔径 Σ的衍射

2.菲涅耳近似（对位相项的近似）

$$r=\sqrt{z_1^{\ 2}+(x-x_1)^2+\left(y-y_1\right)^2}=z_1\sqrt{1+\frac{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}{z_1^{\ 2}}}$$

$$=z_1+\underline{\underline{\frac{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}{2z_1}}}-\frac{[\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2]^2}{8z_1^{\ 3}}+....$$

(级数展开式$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...$)

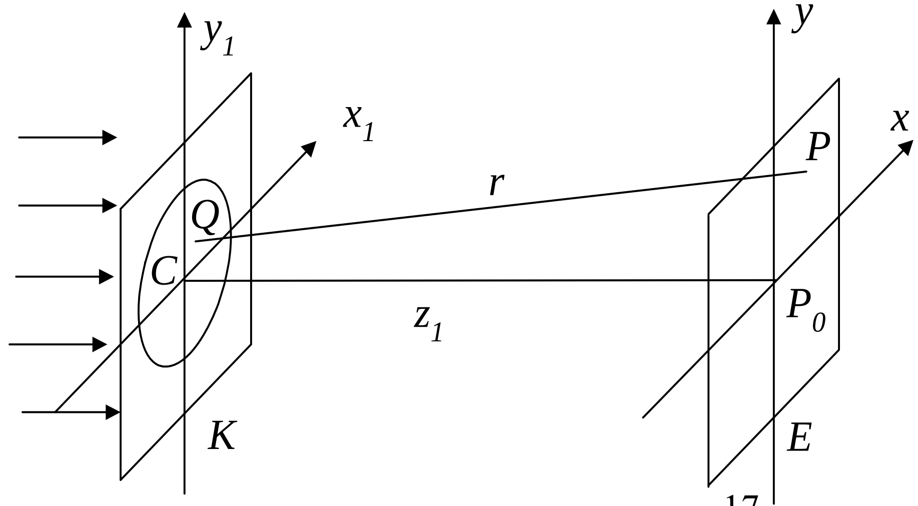
当z大到一定程度时，

取前两项：

$$r\approx z_1+\frac{\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2}{2z_1}$$

近似条件：

$$\frac{[\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2]^2}{z_1^{\ 3}}<<4\lambda$$

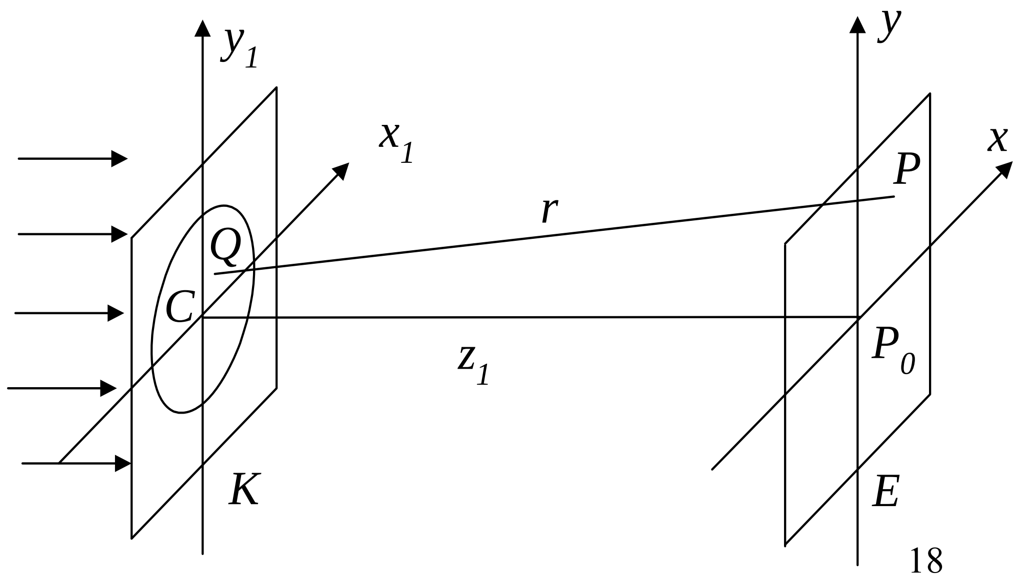


$$\boxed{r \approx z_1 + \frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{2z_1}}$$

称为菲涅耳近似。

得到菲涅耳衍射：

$$\tilde{E}(x,y) = \frac{e^{ikz_1}}{i\lambda z_1} \int\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(x_1,y_1) \exp\left[i \frac{k}{2z_1} \left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \right] \right] dx_1 dy_1$$



3.夫琅和费近似

继续展开 $$r \approx z_1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2z_1}$$

$$= \underline{\underline{z_1 + \frac{-x_1 x - y_1 y}{z_1} + \frac{x^2 + y^2}{2z_1}}} + \frac{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2}}{2z_1}$$

取上式前三项 $$\boxed{r \approx z_1 + \frac{-x_1 x - y_1 y}{z_1} + \frac{x^2 + y^2}{2z_1}}$$

$$\widetilde{E}(x, y) = \frac{\exp[ik(z_1 + \frac{x^2 + y^2}{2z_1})]}{i\lambda z_1} \int\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{E}(x_1, y_1) \exp\left[-i\frac{k}{z_1}(xx_1 + yy_1)\right] dx_1 dy_1$$

菲涅耳衍射和夫琅和费衍射是两个经常应用的衍射计算。

菲涅耳衍射和夫琅和费衍射的判别式：

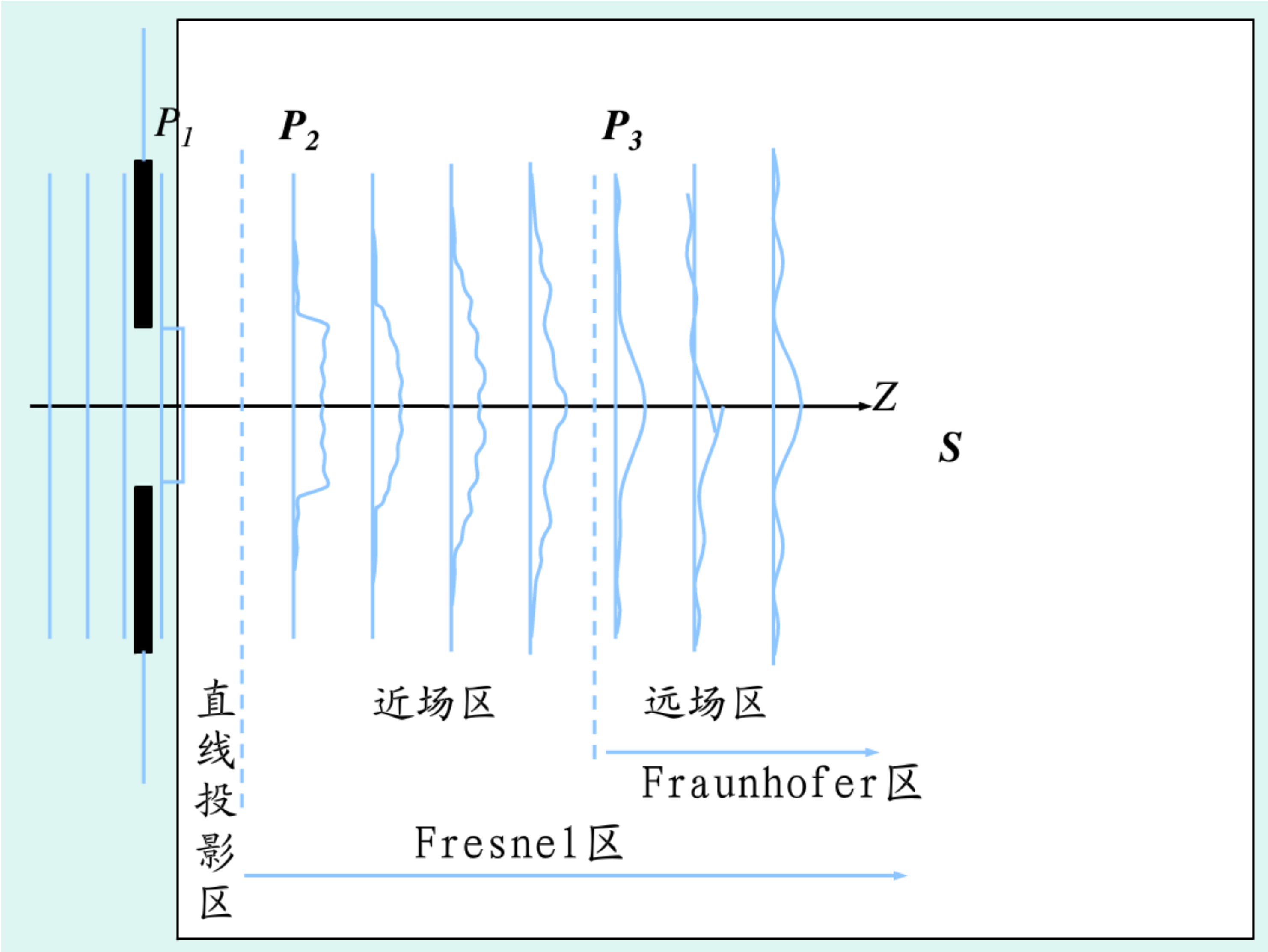
$$k\frac{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)_{\mathbf{max}}}{2z} << \pi$$

或者

$$Z< \frac{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)_{\mathbf{max}}}{\lambda} \quad \text{(菲涅耳衍射)}$$

$$Z> \frac{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)_{\mathbf{max}}}{\lambda} \quad \text{(夫琅和费衍射)}$$

衍射区的划分



本课内容回顾

一、惠更斯－菲涅耳原理

1、惠更斯原理

2、惠更斯－菲涅耳原理

$$\tilde{E}(P)=\frac{CA}{R}\mathbf{exp}(ikR)\iint_{\Sigma}K(\theta)\frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r}d\sigma$$

二、菲涅耳一基尔霍夫衍射公式

精确计算： $$\tilde{E}(P)=\frac{A}{i\lambda}\iint_{\Sigma}\frac{\mathbf{exp}(ikl)}{l}\cdot\frac{\mathbf{exp}(ikr)}{r}\left[\frac{\mathbf{cos}(n,r)-\mathbf{cos}(n,l)}{2}\right]d\sigma$$

近似计算： $$\tilde{E}(P)=-\frac{i}{2\lambda}A\iint_{W}\frac{\exp(ikl)}{l}\frac{\exp(ikr)}{r}(1+\cos\theta)d\sigma$$

三、基尔霍夫衍射公式的近似

$$\widetilde{E}(x,y)=-\frac{i}{\lambda z}A\iint_{-\infty}^{\infty}E(x_1,y_1)\mathbf{exp}(ikr)dx_1dy_1$$

1、菲涅耳近似（对位相项的近似）

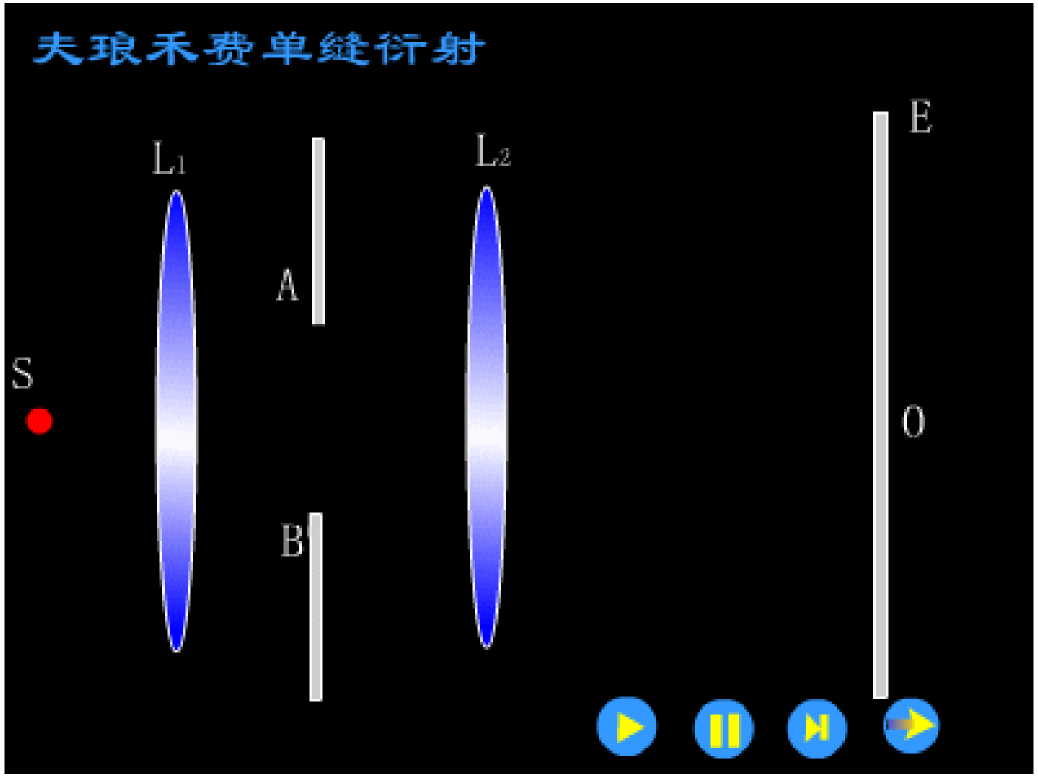
$$\widetilde{E}(x,y)=\frac{e^{ikz}}{i\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)\mathbf{exp}\left[i\frac{k}{2z_1}\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\right]\right]dx_1dy_1$$

$$r\approx z_1+\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{2z_1}$$

2、夫琅和费近似

$$\widetilde{E}(x,y)=\frac{1}{i\lambda z_1}\mathbf{exp}[ik(z_1+\frac{x^2+y^2}{2z_1})]\iint_{-\infty}^{\infty}\widetilde{E}(x_1,y_1)\mathbf{exp}\left[-i\frac{k}{z_1}(xx_1+yy_1)\right]dx_1dy_1$$

$$r\approx z_1+\frac{-x_1x-y_1y}{z_1}+\frac{x^2+y^2}{2z_1}$$


夫琅禾费单缝衍射
E
L1
L2
A
S
O
B