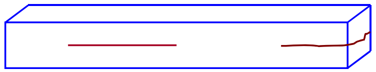
§11-4 对称弯曲切应力

引言：问题的提出

19世纪，铁路开始发展，人们很不理解，枕木为什么沿纵向中截面开裂？



梁的应力

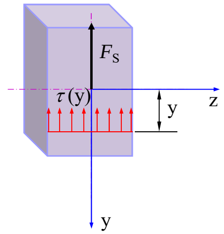
$\sigma \to M$

$\tau \to F_S$

一、矩形截面梁的弯曲切应力（对称弯曲）

☞ 梁在非纯弯段，横截面上一般同时存在剪力和弯矩，此时，横截面上同时存在弯曲正应力和弯曲切应力。

- 横截面两侧边缘的各点：τ//侧边；
- 一般梁横截面窄而高；

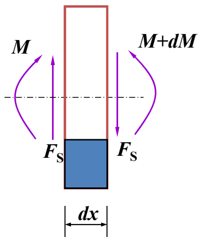


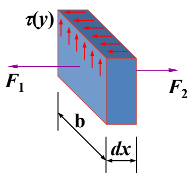
假设$\tau(y)$的分布形式

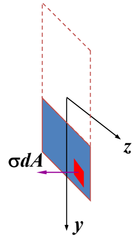
横截面上各点：τ//侧边，

τ沿截面宽度方向均匀分布

☞ 利用分离体平衡来求横截面上的切应力（$q=0$ 的情况）







$F_1 = \int_\omega \sigma dA$

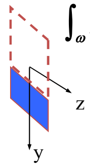
x方向平衡： $F_1 + \tau(y) \cdot b \cdot dx = F_2$

$$\boxed{\tau(y) = \frac{F_2 - F_1}{b \cdot dx}}$$

公式推导过程

$$\boxed{\tau(y) = \frac{F_2 - F_1}{b \cdot dx}}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \int_\omega \sigma dA \\ \sigma &= \frac{My}{I_z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{M}{I_z}\int_\omega ydA \\ \int_\omega ydA &= S_z(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_1 = \frac{MS_z(\omega)}{I_z}$$



$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{MS_z(\omega)}{I_z} \\ F_2 &= \frac{(M+dM)S_z(\omega)}{I_z} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{dM \cdot S_z(\omega)}{I_z \cdot b \cdot dx} \\ dM &= F_S \cdot dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\tau(y) = \frac{F_S \cdot S_z(\omega)}{I_z \cdot b}}$$

工程力学 —第十一章 弯曲应力

弯曲切应力沿横截面的分布规律：

$$\tau(y)=\frac{F_S\cdot S_z(\omega)}{I_z\cdot b}$$

$$S_z(\omega)=b\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\left(y+\frac{h/2-y}{2}\right)$$

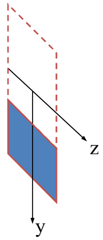
$$=b\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$$

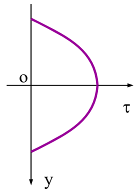
$$=\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

$$I_z=\frac{bh^3}{12}$$

$$\tau(y)=\frac{3F_S}{2bh}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)$$

$$\tau_{\max}=\frac{3F_S}{2bh}=\frac{3}{2}\frac{F_S}{A}$$



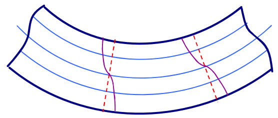


该公式的推导严密吗？

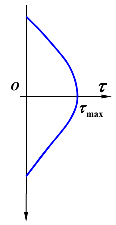
5

工程力学 —第十一章 弯曲应力

截面翘曲与非纯弯推广



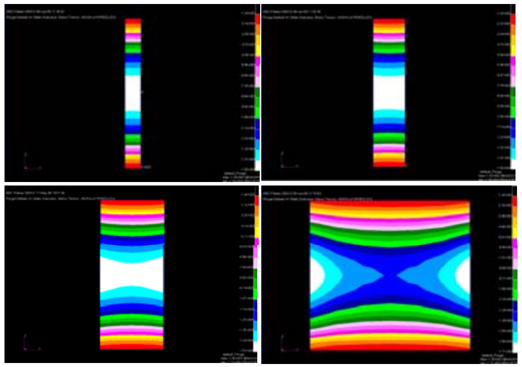
- 切应力利用纯弯正应力公式推导
- 纯弯正应力公式依据平截面假设
- 切应力非均匀分布引起截面翘曲
- 平截面假设不再严格成立➔矛盾解法
- 但当$l \gg h$时，纯弯正应力公式用于横力弯曲仍然相当精确



6

工程力学 —第十一章 弯曲应力

弯曲切应力沿宽度分布（有限元解1）

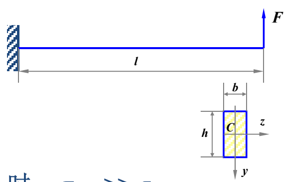


高度/宽度＝10/1～1/1（白颜色最大应力区间）

7

工程力学 —第十一章 弯曲应力

弯曲正应力与弯曲切应力比较



$$\sigma_{\max}=\frac{Fl}{\frac{bh^2}{6}}=\frac{6Fl}{bh^2}\qquad \tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}}=\frac{6Fl}{bh^2}\frac{2bh}{3F}=4\left(\frac{l}{h}\right)\qquad 当\ l>>h\ 时，\sigma_{\max}>>\tau_{\max}$$

***h/b*值对解的影响：**

横截面上各点假设：τ//侧边，或τ//剪力

τ 沿截面宽度方向均匀分布

***h/b*越大，解越精确。(*h/b*>2时，足够精确)**

8

二、工字梁的弯曲切应力

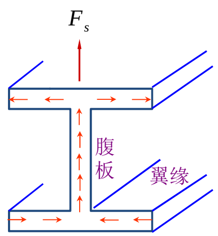
1. 问题分析

(1) 切应力τ 方向与分布假定

•方向:沿截面中心线

依据：切应力互等定理

•大小：沿截面厚度均匀分布



(2) 计算τ 的方法

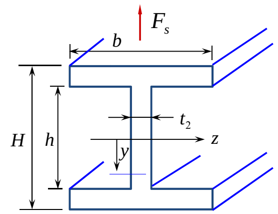
总的原则：依据切应力互等定理，将横向截面上的切应力计算转化为纵向截面上的切应力计算。

中间腹板上的切应力按矩形截面梁公式计算，翼缘参与静矩计算。

翼缘切应力计算另建局部坐标系单独进行。

2. 腹板上τ 的大小计算

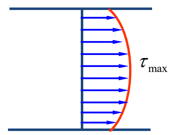
$$\tau(y)=\frac{F_S S_z(\omega)}{I_z b}$$



腹板 $S_z(\omega)=\frac{b}{8}(H^2-h^2)+\frac{t_2}{2}(\frac{h^2}{4}-y^2)$

$$\tau(y)=\frac{F_s}{8I_z t_2}[b(H^2-h^2)+t_2(h^2-4y^2)]$$

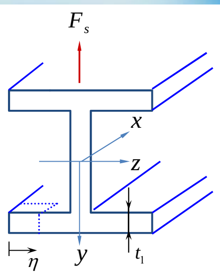
$$\tau_{\max}=\frac{F_s}{8I_z t_2}[bH^2-(b-t)h^2]$$



翼缘的切应力分析：

1 .建立局部坐标系

2. 取微体进行受力分析



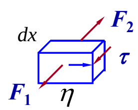
$$\tau(\eta)t_1 dx+F_1=F_2$$

$$F_2=\int_w \sigma dA=\int_w \frac{(M+dM)y}{I_z}dA=\frac{M+dM}{I_z}S_\eta(\omega)$$

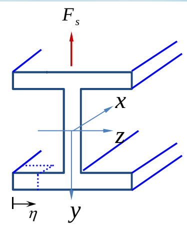
$$F_1=\int_w \sigma dA=\int_w \frac{My}{I_z}dA=\frac{M}{I_z}S_\eta(\omega)$$

$$\tau(\eta)t_1 dx=F_2-F_1=\frac{dM}{I_z}S_\eta(\omega)$$

$$\tau(\eta)=\frac{dM}{dx}\frac{S_\eta(\omega)}{t_1 I_z}=\frac{F_s S_\eta(\omega)}{t_1 I_z}$$



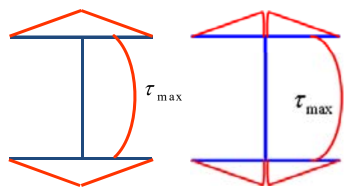
$$\tau(\eta)=\frac{dM}{dx}\frac{S_\eta(\omega)}{t_1 I_z}=\frac{F_s S_\eta(\omega)}{t_1 I_z}$$



翼缘 $S_z(\omega)=\frac{\eta}{8}(H^2-h^2)$

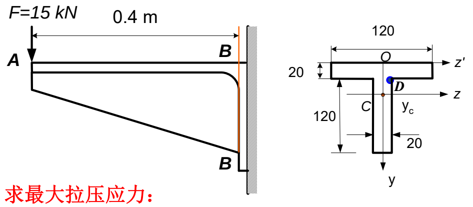
$$t_1=\frac{1}{2}(H-h)$$

$$\tau(\eta)=\frac{F_s(H+h)}{4I_z}\eta$$



完整的工字梁截面上的切应力分布图

例2 求截面 *B-B* 上的最大拉/压应力、最大弯曲切应力以及*D*点的切应力



第一部分：求最大拉压应力：

特点：非等截面，非恒定弯矩

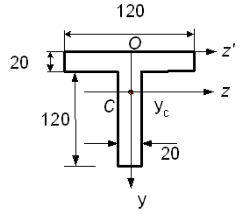
步骤1：求解 *B-B* 截面上的弯曲内力：

弯矩：$M_B = F\times L = 6000\ Nm$

~~剪力：$F_S = 15\ kN$~~

步骤2: 建立临时坐标系, 确定截面*B-B*的形心和中性轴 *z* 的位置 (Y_c)

$$Y_c = \frac{\int_A y\,dA}{A} = \frac{\int_{A_1} y\,dA_1 + \int_{A_2} y\,dA_2}{A_1 + A_2} = 0.045\ \text{m}$$



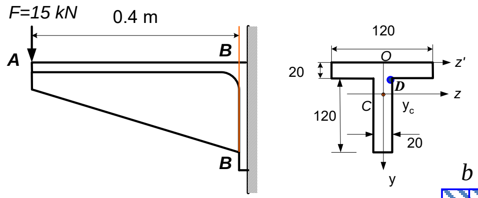
步骤3: 计算截面对中性轴 *z* 的惯性矩

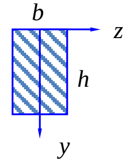
$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA_1 + \int_{A_2} y^2 dA_2 = 8.84\times 10^{-6}\ \text{m}^4$$

步骤4: 依据公式, 计算最大拉/压应力

$$\sigma_{T/C\max} = \frac{M_B y_{\pm\max}}{I_z} \Rightarrow \begin{aligned} \sigma_{T\max} &= 30.5MPa \\ \sigma_{C\max} &= 64.5MPa \end{aligned}$$

第二部分： 求截面 *B-B* 上的最大弯曲切应力以及*D*点的切应力

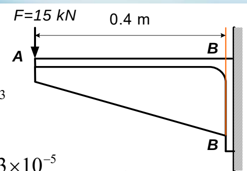


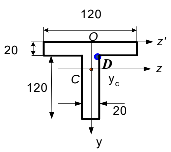


解：最大弯曲切应力发生在中性轴上

确定中性轴的位置，同前，略

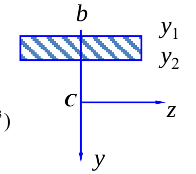
$$S_{z,\max} = \frac{bh^2}{2} = \frac{0.02\times(0.12-0.045)^2}{2} = 9.03\times10^{-5}m^3$$





$$S_{z,\max} = \frac{bh^2}{2} = 9.03\times10^{-5}m^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{z,\max}}{I_z\delta} = \frac{15000\times9.03\times10^{-5}}{8.84\times10^{-6}\times0.02} = 7.66(MPa)$$



*D*点切应力的求解

$$S_z = \frac{b(y_2^2-y_1^2)}{2} = \frac{0.12\times(0.045^2-0.025^2)}{2} = 8.4\times10^{-5}(m^3)$$

$$\tau_D = \frac{F_s S_z}{I_z\delta} = \frac{15000\times8.40\times10^{-5}}{8.84\times10^{-6}\times0.02} = 7.13(MPa)$$

上次课内容

- 截面几何性质

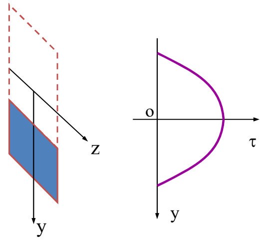
  静矩与形心，极惯性矩，惯性矩；平行轴定理。

- 弯曲切应力分析

$$\tau(y)=\frac{F_S\cdot S_z(\omega)}{I_z\cdot b}$$

$$\tau(y)=\frac{3F_S}{2bh}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right)$$

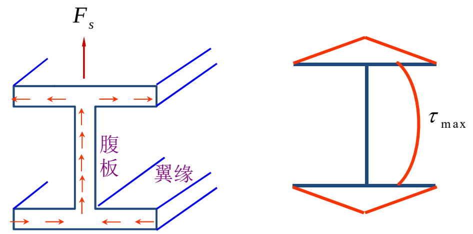
$$\tau_{\max}=\frac{3F_S}{2bh}$$



- 弯曲正应力与弯曲切应力比较

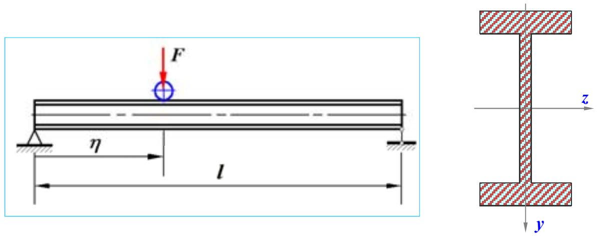
$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}}=\frac{6Fl}{bh^2}\frac{2bh}{3F}=4\left(\frac{l}{h}\right)$$ 当 $l>>h$ 时，$\sigma_{\max}>>\tau_{\max}$

- 工字梁的弯曲切应力



§11-5 梁的强度条件与合理强度设计

工字形钢梁，运动载荷，有几个可能的危险截面？几个可能的危险点？



梁应力公式回顾

1.弯曲正应力

$$\sigma=\frac{My}{I_z}\qquad \sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}$$

2.矩形截面梁的弯曲切应力

$$\tau(y)=\frac{F_S S_z(\omega)}{I_z b}\qquad \tau_{\max}=\frac{3F_s}{2A}$$

3.对称薄壁截面梁的弯曲切应力

$$\tau(s)=\frac{F_s S_z(\omega)}{I_z t}$$

- 弯曲正应力强度条件： $\sigma_{max}=\left(\frac{M}{W_z}\right)_{max}\le[\sigma]$

σ_{max}：最大弯曲正应力

$[\sigma]$：材料单向应力许用应力

- 弯曲切应力强度条件： $\tau_{max}=\left(\frac{F_S S_{z,max}}{I_z\delta}\right)_{max}\le[\tau]$

τ_{max}：最大弯曲切应力

$[\tau]$：材料纯剪切许用应力

讨论题：1.强度条件通常解决哪几类问题？

强度校核、截面形状尺寸设计、确定许用载荷

2.如何确定梁的危险截面与危险点？

- 梁强度条件的选用

☞ 细长非薄壁梁： $\because\ \sigma_{max}>>\tau_{max}$

$$\sigma_{max}\le[\sigma]\quad\begin{cases}\sigma_{c,max}\le[\sigma_c]\\ \sigma_{t,max}\le[\sigma_t]\end{cases}$$

☞ 短粗梁、薄壁梁、M 小 F_S大的梁：

$$\sigma_{max}\le[\sigma]$$
$$\tau_{max}\le[\tau]$$

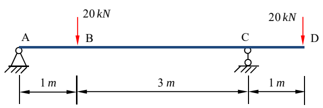
梁强度问题的分析步骤：

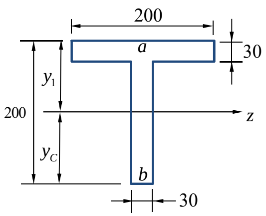
1. 内力分析——确定危险截面
2. 应力分析——确定危险点
3. 根据强度条件进行强度校核。

已知 $[\sigma_+]=40MPa$

$[\sigma_-]=100MPa$

校核梁的强度

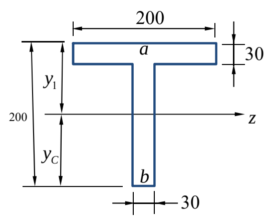


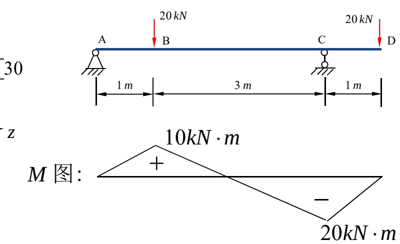


讨论：危险截面是否一定是弯矩最大的截面？

回答：拉压强度不一时，危险截面不一定是弯矩最大的截面

解：画弯矩图





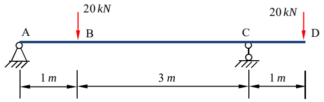
可能危险截面分析：

C 截面：弯矩绝对值最大。a点拉应力，b点压应力可能达危险值。

B 截面：正弯矩最大，b点拉应力可能达危险值。

截面形心：$y_C = 139mm$

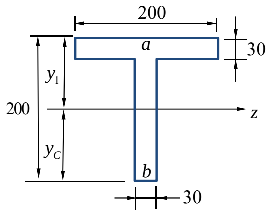
$I_z = 40.3\times10^6 mm^4$



*C*截面：

$$\sigma_a = \frac{M_C y_1}{I_z} = \frac{20\times10^6\times61}{40.3\times10^6} = 30.2MP_a < [\sigma_+] = 40MP_a$$

$$\sigma_b = \frac{M_C y_C}{I_z} = \frac{20\times10^6\times139}{40.3\times10^6} = 69MP_a < [\sigma_-] = 100MP_a$$



*B*截面：$\sigma_b = \frac{M_B y_C}{I_z} = \frac{10\times10^6\times139}{40.3\times10^6} = 34.5MP_a < [\sigma_+]$

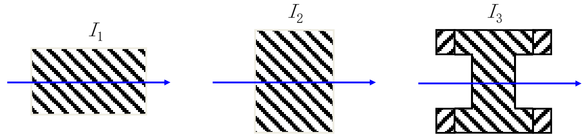
· 强度足够

- 梁的合理强度设计

1. 梁的合理截面形状

依据 $\sigma = \frac{M}{W}$, $\sigma = \frac{My}{I_z}$ $\tau = \frac{F_S S_z(\omega)}{I_z \delta}$

增大I_z，减小σ_{Max}-- 让材料远离中性轴

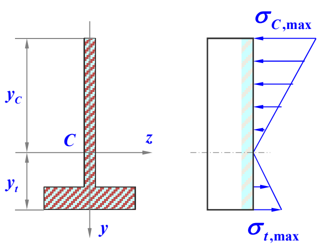


三个面积相等的梁截面，它们的对中性轴的惯性矩大小关系如何?

•截面上下不对称的脆性材料梁

$[\sigma_c] > [\sigma_t]$

使受拉端尽量靠近中性轴

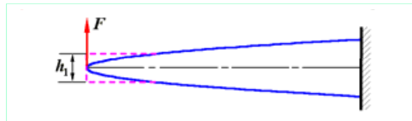


•截面等强设计

$$\frac{y_c}{y_t} = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_t]}$$

脆性材料梁

2. 变截面梁与等强度梁



$\frac{M(x)}{W(x)} = [\sigma]$—弯曲等强条件 $\frac{3F_S(x)}{2bh(x)} = [\tau]$—剪切等强条件

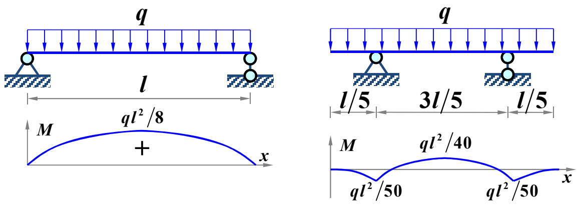
$M(x) = Fx$ $W(x) = \frac{bh^2(x)}{6}$ $F_S(x) = F$

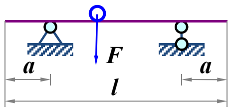
$h(x) = \sqrt{\frac{6Fx}{b[\sigma]}}$ $h(x) = \frac{3F}{2b[\tau]} = h_1$

等强度梁—各截面具有同样强度的梁

3. 梁的合理受力

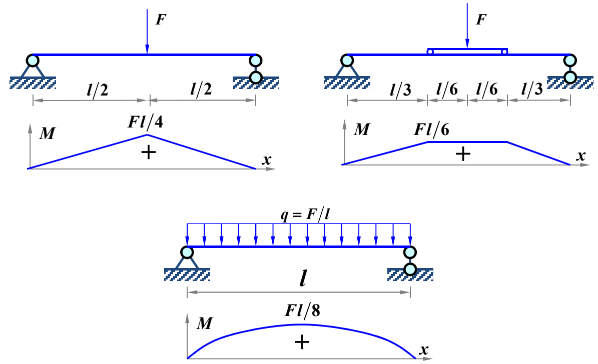
- 合理安排约束



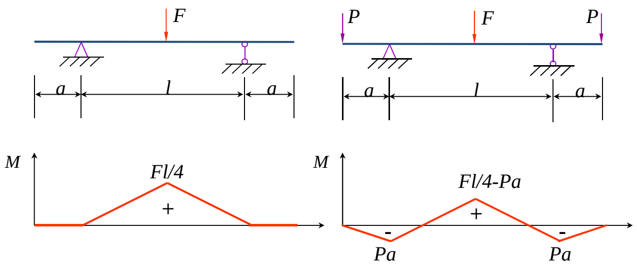


a = ？ [*F*] 最大.

- 合理安排加载方式—尽量分散载荷

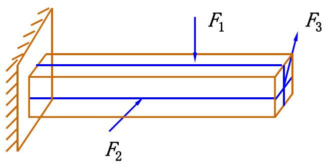


- 加配重



§11-7 双对称截面梁的非对称弯曲

回顾：对称弯曲：具有一个纵向对称面的梁，受到作用于其纵向对称面内的载荷而产生的弯曲变形

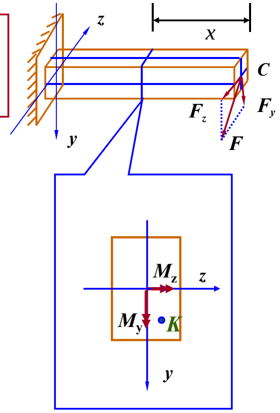


问题：如果载荷不在纵向对称面，如何分析弯曲应力？

只考虑截面双对称（即梁有两个互垂的纵向对称面），且载荷（或载荷分量）处于两个纵向对称面内的情况。

问题转化为两个对称弯曲的组合：

线弹性范围内，截面上某点的应力分别按两个对称弯曲计算，然后线性叠加。



在载荷F_z和F_y的作用下，截面x的弯矩

$$M_y=F_z x,\ M_z=F_y x$$

若截面对y与z轴的惯性矩分别为I_y与I_z

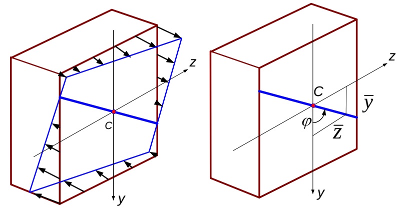
则截面上任一点$K(y,z)$的弯曲正应力：

$$\sigma=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}$$

$$\sigma=\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}$$

应力在截面上线性分布

截面上应力矢量的末端在一平面上



中性轴的在截面上的方位？

该应力平面与截面的交线即中性轴，其方程为：

$$\sigma=\frac{M_y\bar{z}}{I_y}-\frac{M_z\bar{y}}{I_z}=0$$

通过形心的直线，其斜率为：

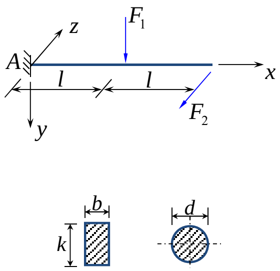
$$\tan\varphi=\frac{\bar{z}}{\bar{y}}=\frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y}$$

截面上距中性轴最远的点应力最大！

例：已知 $[\sigma]$，校核图示悬臂梁的强度。

（1）矩形截面

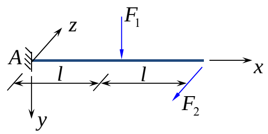
（2）圆形截面



例：已知$[\sigma]$，校核图示悬臂梁的强度。

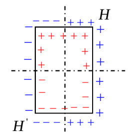
解：（1）矩形截面

危截面为A



危险点分析：

在H点，两外力引起的最大正力叠加，在H'点，两外力引起的绝对值最大的负应力叠加，故为危险点。

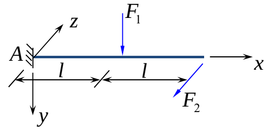


$$\sigma_{\max}=\frac{M_{zA}}{W_z}+\frac{M_{yA}}{W_y}=\frac{6\times F_1 l}{bh^2}+\frac{6\times 2F_2 l}{b^2 h}\le[\sigma]\ ?$$

例：已知 $[\sigma]$，校核图示悬臂梁的强度。

解：（2）圆形截面

危截面为A

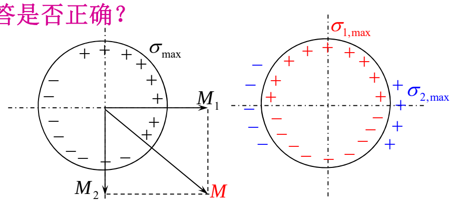


$$\sigma_{\max}=\frac{M_{zA}}{W_z}+\frac{M_{yA}}{W_y}=\frac{32\times F_1 l}{\pi d^3}+\frac{32\times 2F_2 l}{\pi d^3}=\frac{32\times(F_1+2F_2)l}{\pi d^3}\le[\sigma]$$

思考：上述解答是否正确？

正确解答：

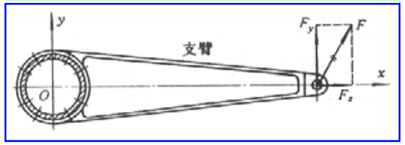
$$\sigma_{\max}=\frac{\sqrt{M_{zA}^{\ 2}+M_{yA}^{\ 2}}}{W}$$



§11-8 弯拉(压)组合

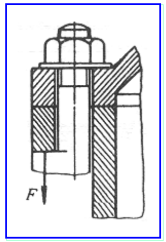
一、弯拉(压)组合的应力

工程实例：



弯拉组合

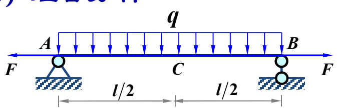
（横向载荷＋轴向载荷）



偏心拉压

（外力平行且偏离轴线）

弯拉（压）组合分析



内力—F_N，M

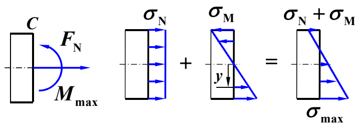
$$\sigma_N=\frac{F}{A}\qquad \sigma_M=\frac{M_{\max}y}{I_z}$$

$$\sigma=\sigma_N+\sigma_M=\frac{F}{A}+\frac{M_{\max}y}{I_z}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}+\frac{M_{\max}}{W_z}$$

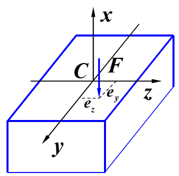
危险点处—单向应力

$$\sigma_{max}\le[\sigma]?$$



二、偏心压缩应力——弯压组合应力

外力向形心简化 ⇨ 弯压组合



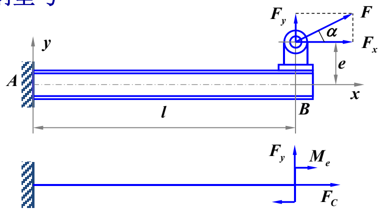
$$M_y=Fe_z\qquad M_z=Fe_y$$

$$\sigma_N=-\frac{F}{A}$$

$$\sigma_M=-\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z y}{I_z}\qquad \sigma=-\frac{F}{A}-\frac{Fe_z z}{I_y}-\frac{Fe_y y}{I_z}$$

例：

$F = 10$ kN，$l = 2$ m，$e = l/10$，$\alpha = 30^\circ$，$[\sigma] = 160$ MPa，选择工字钢型号

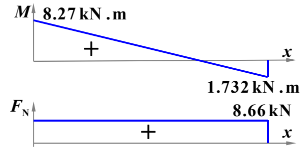


解：1. 计算简图

$F_C = F_x = F\cos30^\circ$　　$F_y = F\sin30^\circ$　　$M_e = eF\cos30^\circ$

2. 内力分析

3. 截面型号初选



$$\frac{F_{NA}}{A}+\frac{M_A}{W_z}\le[\sigma]$$

按弯曲强度初步设计

$$\frac{M_A}{W_z}\le[\sigma] \qquad W_z \ge \frac{M_A}{[\sigma]} = 5.17\times10^{-5}\ \mathrm{m}^3$$

选 №12.6，$W_z=7.75\times10^{-5}\ \mathrm{m}^3$，$A=1.81\times10^{-3}\ \mathrm{m}^2$

4. 校核与修改设计

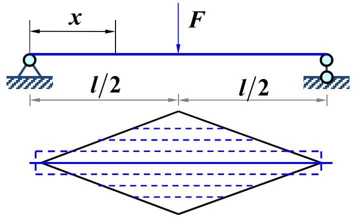
$$\sigma_{\max} = \frac{F_{NA}}{A}+\frac{M_A}{W_z} = 111.5\ \mathrm{MPa} \le [\sigma]$$

№12.6 满足强度要求，否则修改设计

作业

11-10、16、20、22、25

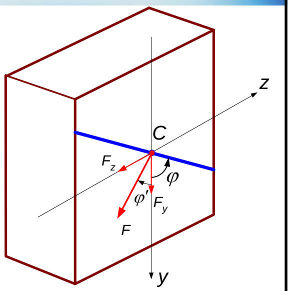
• 等强度梁工程实例



思考:

上述斜弯曲矩形截面梁的中性轴是否一定垂直于载荷?

圆形截面梁呢?



$$\tan\varphi = \frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{I_y}{I_z}\frac{M_z}{M_y} = \frac{I_y}{I_z}\frac{F_y x}{F_z x} = \frac{I_y}{I_z}\frac{F_y}{F_z}$$

设力$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{y}$轴的夹角为φ'

$$\tan\varphi' = \frac{F_z}{F_y}$$

$$\tan\varphi \bullet \tan\varphi' = \frac{I_y}{I_z}$$

对于一般矩形截面，斜弯曲条件下力与中性轴不垂直!

对于方形或圆形截面，垂直!