上次课内容

扭转：载荷特征，变形特征

扭矩：扭矩图

动力传递与扭矩：已知传动构件的转速与所传递的功率，计算轴所承受的扭力矩。

切应力互等定理：在微体的互垂截面上，垂直于截面交线的切应力数值相等，方向均指向或离开交线。

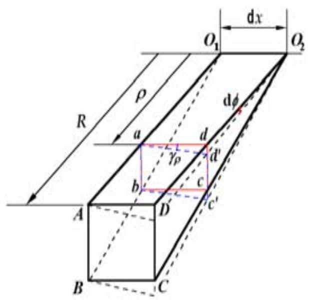
剪切胡克定律：当τ小于比例极限时，$\tau = G\gamma$

※圆轴扭转截面上的应力

扭转平面假设：各横截面如同刚性圆片，仅绕轴线作相对旋转。

圆轴扭转横截面应力小结

❶ 研究方法：从实验、假设入手，综合考虑几何、物理与静力学三方面



几何方面：$\gamma_\rho = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$

物理方面：$\tau_\rho = G\gamma_\rho$

静力学方面：$\int_A \rho\tau_\rho dA = T$

扭转变形基本公式：$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{T}{GI_\mathrm{p}}$

圆轴扭转横截面应力小结

❶ 研究方法：从实验、假设入手，综合考虑几何、物理与静力学三方面

❷ 扭转变形基本公式：$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{T}{GI_\mathrm{p}}$

❸ 扭转切应力公式：$\tau_\rho = \dfrac{T\rho}{I_\mathrm{p}}$

❹ 最大扭转切应力：$\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_\mathrm{p}}$

❺ 公式的适用范围：圆截面轴（包括空心圆轴）；　$\tau_{\max} \le \tau_p$

扭　转

外力 → 结构 → 内力 → 应力　强度

结构 → 变形 → 应变　刚度

材料性能　强度准则

力偶

※圆截面轴

矩形等非圆截面轴

第九章　扭转

§9-6　圆轴扭转破坏与强度条件

一、扭转失效与扭转极限应力

塑性材料
扭断

脆性材料
扭断

扭转极限应力 $\tau_u = \begin{cases} \tau_s & \text{—— 扭转屈服应力，塑性材料} \\ \tau_b & \text{—— 扭转强度极限，脆性材料} \end{cases}$

二、圆轴扭转强度条件

许用切应力：$[\tau]=\dfrac{\tau_u}{n}$　　n ——安全因数

工作应力：$\tau_{\max}=\left(\dfrac{T}{W_p}\right)_{\max}$

强度条件：$\tau_{\max}=\left(\dfrac{T}{W_p}\right)_{\max}\le[\tau]$

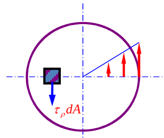
等截面圆轴：$\dfrac{T_{\max}}{W_p}\le[\tau]$

$[\tau]$与$[\sigma]$关系

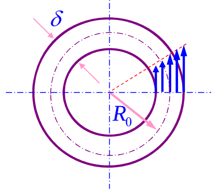
塑性材料：$[\tau]=(0.5—0.6)[\sigma]$

脆性材料：$[\tau]=(0.8—1.0)[\sigma_t]$

三、圆轴合理截面与减缓应力集中



实心轴

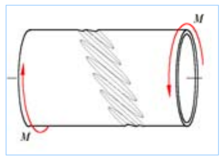


空心轴

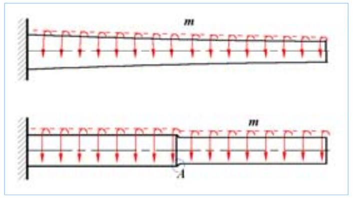
1. 用料一定的情况下，使承载最大化

$\tau_{\max}=\left(\dfrac{T}{W_p}\right)_{\max}$　　增大 W_p

思考：R_0/δ 是否是愈大愈好？

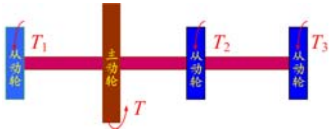


2. 承载一定的情况下使用料最省



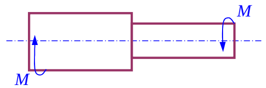
3. 在承载和用料都一定的情况下，使结构有最大安全系数

A 合理分配载荷

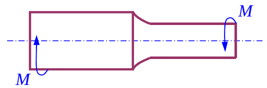


B 减小应力集中

在截面尺寸突变或急剧改变处，会产生应力集中，因此在阶梯轴交界处，宜配置适当尺寸过度圆角以减小应力集中。



截面尺寸突变



配置过渡圆角

§9-7　圆轴扭转变形与刚度计算

一、圆轴扭转变形公式

$\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{T}{GI_p}$ ⇨ 微段dx的扭转变形 $d\varphi=\dfrac{T}{GI_p}dx$

相距l的两横截面的扭转角 $\varphi=\int_l d\varphi=\int_l \dfrac{T}{GI_p}dx$

GI_p —— 圆轴截面扭转刚度

长l常扭矩等截面圆轴 $\varphi=\dfrac{Tl}{GI_p}$

二、圆轴扭转刚度条件

$$\theta=\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GI_p}$$

$\dfrac{d\varphi}{dx}$:扭转角沿轴线的变化率　　单位 rad/m

单位长度许用扭转角：$[\theta]$　工程常用单位 $(^\circ)/\mathrm{m}$

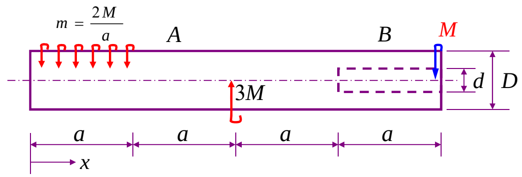
刚度条件：$\boxed{\left(\dfrac{T}{GI_p}\right)_{\max}\le[\theta]}$　等截面圆轴：$\dfrac{T_{\max}}{GI_p}\le[\theta]$

注意

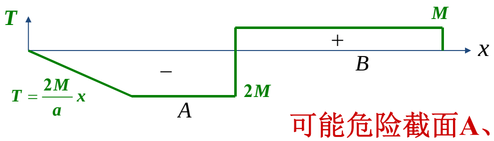
一般传动轴，$[\theta]=0.5^\circ\sim1^\circ/\mathrm{m}$

注意单位换算：$1\,\mathrm{rad/m}=\dfrac{180}{\pi}\,{}^\circ/\mathrm{m}$

例1：已知轴的尺寸，$[\tau]$，$[\theta]$，计算总扭转角，校核强度与刚度。

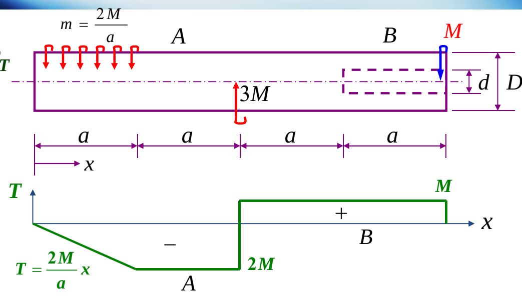


解：1、画扭矩图（与轴位置对齐），确定危险截面。



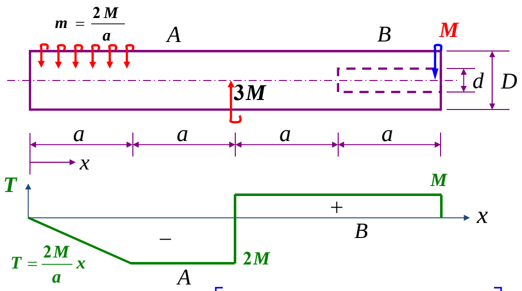
可能危险截面A、B

2、总扭转角 φ_T



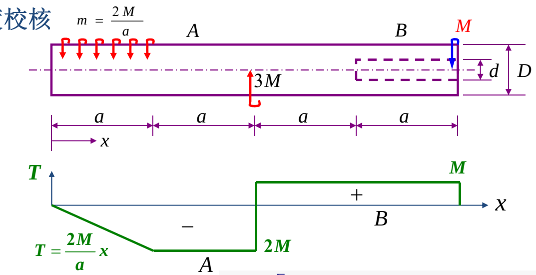
（分4段计算） $$\varphi_T=-\int_0^a \frac{\frac{2M}{a}x}{G\frac{\pi D^4}{32}}dx-\frac{2Ma}{G\frac{\pi D^4}{32}}+\frac{Ma}{G\frac{\pi D^4}{32}}+\frac{Ma}{G\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{32}}$$

3、强度校核（危险截面A和B）



$\tau_{\max}\le[\tau]$ $$\tau_{\max}=\left[A:\frac{2M}{\frac{\pi}{16}D^3},\quad B:\frac{M}{\frac{\pi}{16}D^3\left(1-\alpha^4\right)}\right]_{\max}$$

4、刚度校核



$\theta_{\max}\le[\theta]$ $$\theta_{\max}=\left[A:\frac{2M}{G\frac{\pi}{32}D^4},\quad B:\frac{M}{G\frac{\pi}{32}D^4\left(1-\alpha^4\right)}\right]_{\max}$$

注意

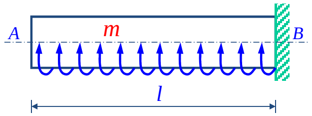
- 单位换算
- 设计轴，可按$[\tau]$, $[\theta]$ 分别设计，取较大者

例2：$l=2m$ ，均布力偶矩 $m=60\,\mathrm{N\cdot m/m}, G=80\,\mathrm{GPa}$, $[\tau]=30\,\mathrm{MPa}, [\theta]=1°/\mathrm{m}$

（1）设计实心轴直径 d ，

（2）设计内外径之比 $\alpha=0.9$ 的空心轴外径 D ，

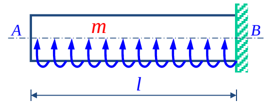
（3）比较所设计的空心轴和实心轴重量。



解：最大扭矩发生在B端（危险截面）

$$T_{\max}=ml=60\times2=120\,\mathrm{N\cdot m}$$

$T_{\max}=120\,\mathrm{N\cdot m}$



（1）设计实心圆轴直径d。

a、根据强度条件

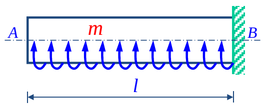
$$d_1\ge\sqrt[3]{\frac{16T_{\max}}{\pi[\tau]}}\quad\Longrightarrow\quad d_1\ge27.311\,\mathrm{mm}$$

b、根据刚度条件

$$d_2\ge\sqrt[4]{\frac{32T_{\max}}{\pi G[\theta]}}\quad\Longrightarrow\quad d_1\ge30.588\,\mathrm{mm}$$

取 $d=31\,\mathrm{mm}$

$T_{\max}=120\,\mathrm{N\cdot m}$

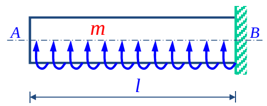


（2）设计空心轴外径D

a、根据强度条件 $D_1\ge\sqrt[3]{\dfrac{16T_{\max}}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}}=38.982\,\mathrm{mm}$

b、根据刚度条件 $D_2\ge\sqrt[4]{\dfrac{32T_{\max}}{\pi G[\theta](1-\alpha^4)}}=39.943\,\mathrm{mm}$

取 $D=40mm$

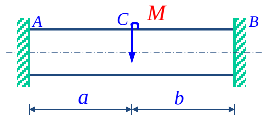


（3）所设计的空心与实心轴重量比 $(d=31,\quad D=40)$

$$\beta=\frac{\frac{1}{4}\pi D^2(1-\alpha^2)l}{\frac{1}{4}\pi d^2 l}=\frac{D^2(1-\alpha^2)}{d^2}=0.316$$

简单静不定轴

例3：圆轴两端固定在刚性墙面上，中部作用一集中扭力偶，其矩为M，抗扭刚度GI_p，求两端的扭矩。

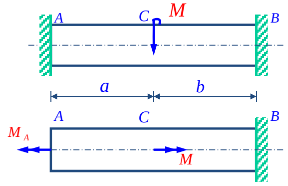


两个未知数：　M_A与M_B

一个方程：$M_A+M_B=M$

如何解扭转静不定问题？

扭转静不定问题的解法

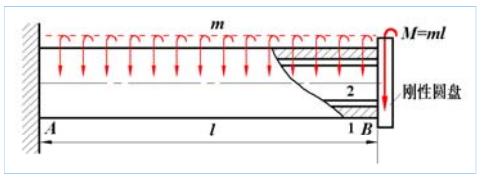


解：　$\varphi_B=0$

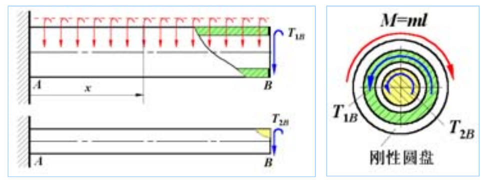
$$\frac{M_A(a+b)}{GI_P}-\frac{Mb}{GI_P}=0 \longleftarrow \boxed{\text{叠加原理}}$$

$$M_A=\frac{Mb}{a+b} \qquad M_A+M_B=M \qquad M_B=\frac{Ma}{a+b}$$

例 4　图示组合轴，承受集度为 m 的均布扭力偶，与矩为 $M=ml$ 的集中扭力偶。已知：$G_1=G_2=G$，$I_{p1}=2I_{p2}$。试求：套管和实心轴的最大扭矩及圆盘的转角。



解：1. 建立平衡方程　　沿截面 B 切开，画受力图



$$\sum M_x=0,\ T_{1B}+T_{2B}=ml \qquad \text{(a)}$$

未知力偶矩—2，平衡方程—1，一度静不定

2. 建立补充方程　$\phi_{1B}=\phi_{2B}$ —变形协调条件

$$\phi_{1B}=\int_0^l \frac{T_1(x)}{GI_{p1}}\mathrm{d}x \qquad T_1(x)=T_{1B}+m(l-x)$$

$\phi_{1B}=\phi_{2B}$ —变形协调条件

$$\sum M_x=0,\quad T_{1B}+T_{2B}=ml \qquad \text{(a)}$$

$$T_{1B}+\frac{ml}{2}=2T_{2B} \qquad \text{(b)}$$

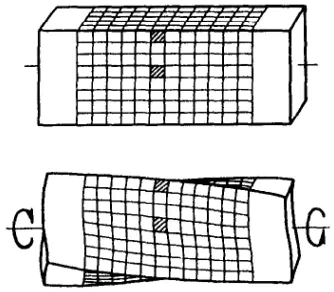
3. 扭矩与圆盘转角 联立求解平衡（a）与补充方程(b)，

得 $T_{1B}=T_{2B}=\dfrac{ml}{2}$

圆盘转角为

$$\phi_B=\phi_{2B}=\frac{T_{2B}l}{GI_{p2}}=\frac{ml^2}{2GI_{p2}}$$

§9—8 非圆截面轴的扭转



历史回顾

Navier (France)

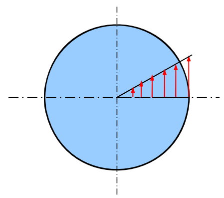
- Navier（法）研究了扭转与梁变形问题，提出了静不定问题位移解法，1826，第一本材料力学。
- 1784，Coulomb，圆杆扭转应力公式，Navier错误用于非圆截面杆达半个世纪。

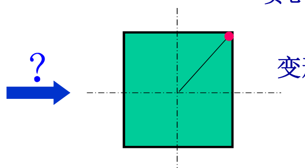
St.Venant (France)

- St.Venant 研究了扭转，梁弯曲问题，提出了 St.Venant原理。
- 1855年，提出非圆截面问题的正确解法。

圆轴扭转切应力公式对非圆截面杆是否正确？

$$\tau=\frac{T\rho}{I_p}$$





变形后，截面仍为方形

边角处应力最大