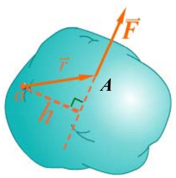
上次课回顾

- 汇交力系的合成
- 汇交力系的平衡条件

第三章 力偶系

- 力对点之矩矢
- 力对轴之矩矢
- 力偶矩矢
- 力偶的等效条件
- 力偶系的合成
- 力偶系的平衡条件

§3-1 力对点之矩矢



如何描述力F 对矩心O 的转动效应？

在（O、F）平面内描述，需要两个要素：

1.强度：力F与力臂h的乘积

$M_O = Fh$ —平面力矩 代数量，N·m

2.转动方向：顺时针？逆时针？（正）

在三维空间里描述，刚体实际上是在绕过O点与F平面垂直的轴在转；此时，考虑一力对O点的转动效应还应加上另外一个量

3.转动轴的方位（或者说力F与O所在的平面的法线方位）

F为作用于刚体上的一个力，O为位于F作用线外的一点－F有使刚体绕O转动的趋势（效应）

O称为矩心，O到力F的作用线的垂直距离h称为力臂

问题：能否找到一个合适的数学量能够包含上述三要素，从而完备地度量空间力对刚体上某点的转动效应?

1.力对点之矩矢的数学描述

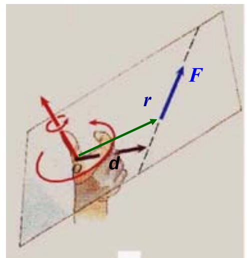
（1）力矩矢量表示式

$$M_O = r \times F$$

- 力矩矢量的模

$$|M_O(F)| = Fd$$

对应转动效应的强度。



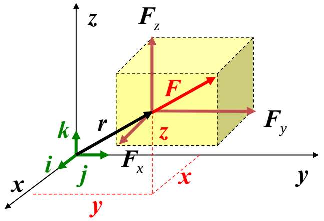
- 矢量方向由右手定则确定;－确定了转动方向
- 矢量作用在O点,垂直于r 和F 所在的平面 －对应转动轴的方位

（2）力矩矢量解析表示式

$r = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

$F = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$

$$M_O = r \times F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_{ox}\boldsymbol{i} + M_{oy}\boldsymbol{j} + M_{oz}\boldsymbol{k}$$



力对点之矩矢在轴上的投影：
$$\begin{cases} M_{Ox} = yF_z - zF_y \\ M_{Oy} = zF_x - xF_z \\ M_{Oz} = xF_y - yF_x \end{cases}$$

2. 合力矩定理一：

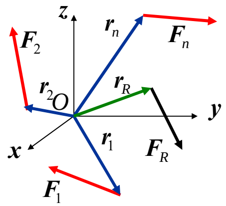
若刚体上作用有力系 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$

则有： $M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(F_i)$

若作用在刚体上的力系存在合力 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\} \Leftrightarrow \{F_R\}$

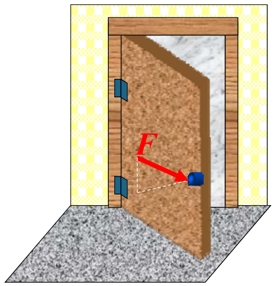
则有： $M_O(F_R) = \sum_{i=1}^{n} M_O(F_i)$

$r_R \times F_R = \sum_{i=1}^{n} r_i \times F_i$



§3-2 力对轴之矩

定义:力使物体绕某一轴转动效应的量度,称为力对该轴之矩。(代数量)

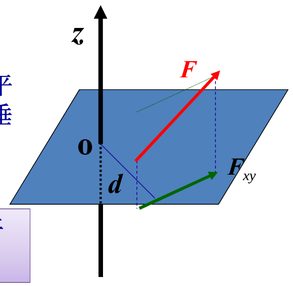


力对轴之矩实例

•力对轴之矩的计算

方法一 ： 将力向垂直于该轴的平面投影，力的投影与投影至轴的垂直距离的乘积。

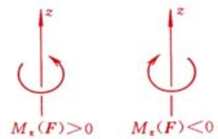
$M_z(F) = M_z(F_{xy}) = F_{xy} \times d$



力对轴之矩等于力在垂直于该轴平面上的投影对轴与平面交点之矩。

代数量正负的判断：

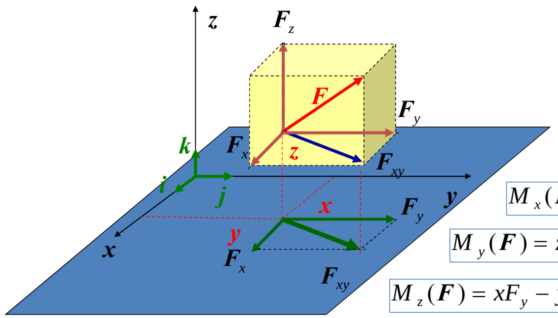
右手定则



两种特殊情况：

力的作用线通过某轴或与它平行

方法二：将力向三个坐标轴方向分解，分别求三个分力对轴之矩，然后将三个分力对轴之矩的代数值相加。



$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y$

$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z$

$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x$

问题：力对轴之矩与力对点之矩有什么关系？

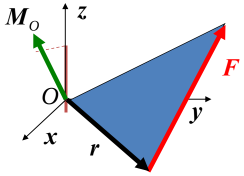
力对轴之矩

$$\left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$

力对点之矩

$$\mathrm{M_O(F)} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$= (F_zy-F_yz)\,\boldsymbol{i} + (F_xz-F_zx)\,\boldsymbol{j} + (F_yx-F_xy)\,\boldsymbol{k}$



$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= M_{Ox} \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= M_{Oy} \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= M_{Oz} \end{aligned}\right\}$$

结论：力对轴之矩等于力对轴上任意一点之矩矢在该轴上的投影

特殊情形:当轴垂直于$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$所在的平面时，力对点之矩与力对轴之矩在数值上相等。

• 合力之矩定理二

$$M_O(\boldsymbol{F}_R) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\boldsymbol{F}_i)$$ （合力之矩定理一）

将上式向x轴投影,可以得到

$$M_x(\boldsymbol{F}_R) = \sum_{i=1}^{n} M_x(\boldsymbol{F}_i)$$

若作用在刚体上的力系存在合力 $\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n\} \Leftrightarrow \{\boldsymbol{F}_R\}$

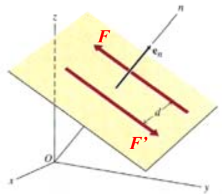
则合力对某一轴的矩等于各分力对该轴矩的代数和。

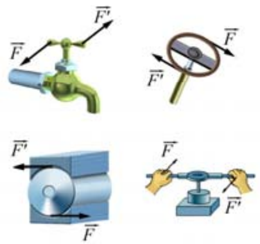
§3-3 力偶矩矢

基本概念

力偶与力偶系

由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为力偶，记作 $(\vec{F}, \vec{F}')$





二力所在平面–力偶作用面 。

二力作用线之间的垂直距离–力（偶）臂。

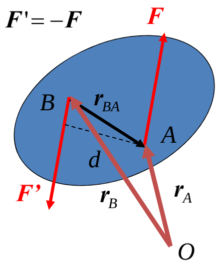
作用于刚体上的一群力偶 — 力偶系。

力偶只对刚体产生转动效应。

• 力偶矩矢 —

力偶对刚体转动效应的度量

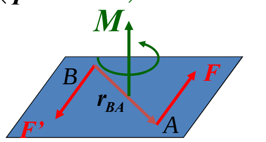
由两个等值、反向、不共线的（平行）力组成的力系称为力偶



$$\begin{aligned} M_O &= M_O(F)+M_O(F') \\ &= r_A\times F + r_B\times F' \\ &= r_A\times F + r_B\times(-F) \\ &= (r_A - r_B)\times F \\ &= r_{BA}\times F \end{aligned}$$

$$\boxed{M = Fd}$$

力偶矩矢

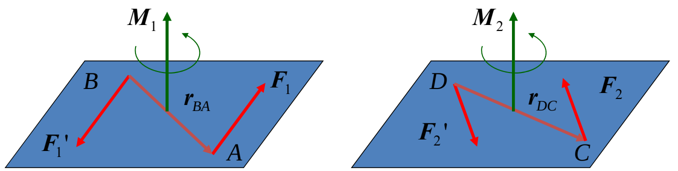


注：力偶矩矢量垂直于力偶所在的平面,其大小和方向与取矩点无关。

§3-4 力偶的等效条件和性质

1. 力偶的等效条件(定理)

• 两个力偶等效的条件是它们的力偶矩矢相等



$M_1 = r_{BA}\times F_1$ $M_2 = r_{DC}\times F_2$

$r_{BA}\times F_1 = M_1 = M_2 = r_{DC}\times F_2$ $\{F_1, F_1'\} \Leftrightarrow \{F_2, F_2'\}$

上次课回顾

力对点之矩矢

- 力对点之矩矢的数学描述
- 合力矩定理一

力对轴之矩

- 力对轴之矩的计算
- 合力矩定理二

力偶矩矢

- 力偶与力偶系
- 力偶矩矢

力偶的等效条件和性质

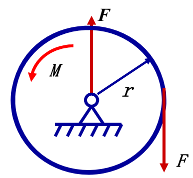
- 力偶等效条件

2. 力偶的性质

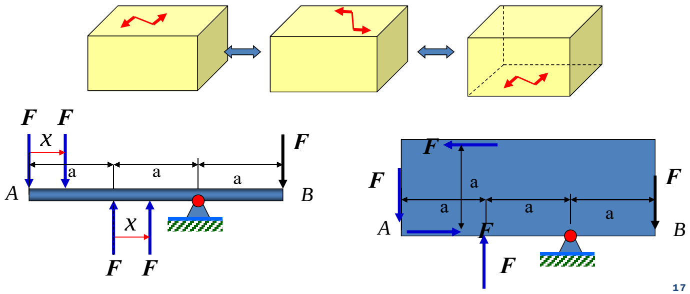
性质一　力偶不能与一个力等效 $\{F, F'\}\neq\{F_R\}$

思考：

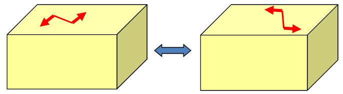
主动力偶 M 和主动力 F 作用在可绕中心轴转动的轮上，如图所示。 若力偶矩 $M=Fr$ 轮平衡。这不正说明力偶可以与一个力等效吗？



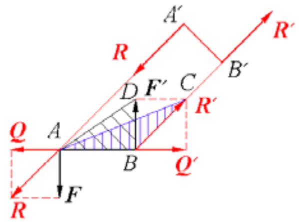
性质二 力偶可在<u>其作用面</u>内任意移动（或移到另一<u>平行平面</u>)，而不改变对刚体的作用效应



思考：如何证明

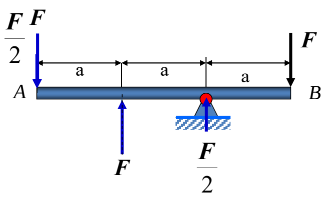


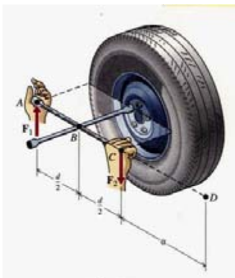
[证] 设物体的某一平面上作用一力偶(F, F')
现沿力偶臂AB方向加一对平衡力(Q,Q')，
再将Q,F合成R，
Q',F'合成R'，
得到新力偶(R,R')，



将R,R'移到A',B'点，则(R,R')，取代了原力偶$(F，F')$
并与原力偶等效。

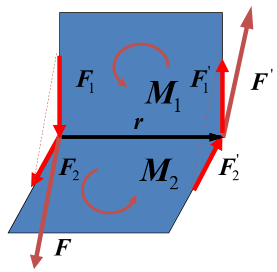
性质三 只要力偶矩矢量的方向和大小不变（F，d 可变），则力偶对刚体的作用效应就不变。





§3-5 力偶系的合成

设作用于刚体上的两个力偶 M_1, M_2



$$M_1 = \{F_1, F_1'\} = F_1' \times r$$

$$M_2 = \{F_2, F_2'\} = F_2' \times r$$

$$\because \quad F = F_1 + F_2$$

$$F' = F_1' + F_2'$$

$$\therefore \quad M_R = \{F, F'\}$$

$$M_R = r \times F' = r \times (F_1' + F_2') = r \times F_1' + r \times F_2' = M_1 + M_2$$

结论：两个力偶的合成仍然为力偶，且 $M_R = M_1 + M_2$

作用于刚体上的力偶系合成为一力偶 $\{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots, \boldsymbol{M}_n\} = \{\boldsymbol{M}_R\}$

$$\boldsymbol{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}\boldsymbol{i} + \sum_{i=1}^{n} M_{iy}\boldsymbol{j} + \sum_{i=1}^{n} M_{iz}\boldsymbol{k}$$

$$M_R = \sqrt{(\sum M_x)^2 + (\sum M_y)^2 + (\sum M_z)^2}$$

§3-6 力偶系的平衡条件

平衡的充分必要条件：$\{\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots, \boldsymbol{M}_n\} = \{\boldsymbol{M}_R\} = \{0\}$

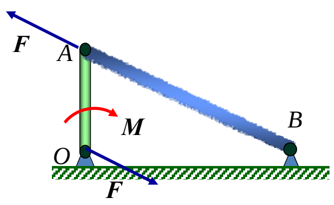
空间力偶系的平衡条件：
$$\left.\begin{array}{l}\sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0\end{array}\right\}$$
可解三个未知量

平面力偶系的平衡条件： $\sum M = 0$ 可解一个未知量

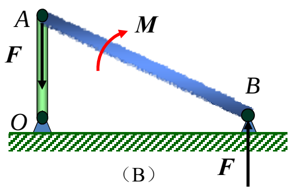
例1：结构如图所示，已知主动力偶 $\boldsymbol{M}$，哪种情况铰链的约束力较小，并确定约束力的方向（不计构件自重）

1. 研究OA杆

2. 研究AB杆

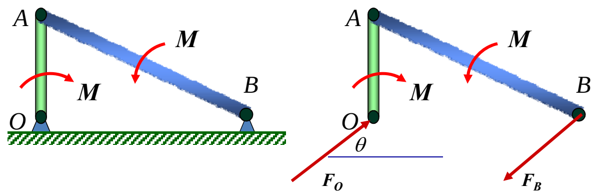


（A）



（B）

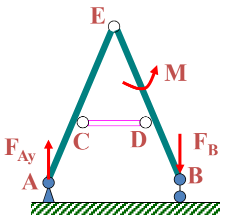
例2：结构如图所示，已知各杆均作用一个主动力偶 $\boldsymbol{M}$，确定各个铰链约束力的方向（不计构件自重）



令 $M' = \{F_O, F_B\}$ $\quad \sum M = 0 \Rightarrow M - M + M' = 0 \Rightarrow M' = 0$

$\Rightarrow \cancel{F_O = F_B = 0}$ 或 $\theta = 0$

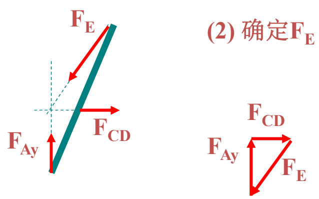
例3：主动力偶 *M*，确定支座A和铰链E处的约束力（不计构件自重）。



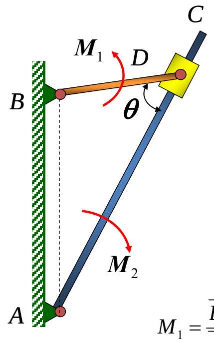
(1) 确定F_{Ay}

$$\sum M=0,\quad M-F_{Ay}l=0 \Rightarrow F_{Ay}=M/l$$

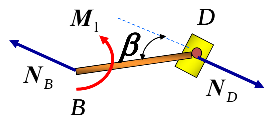
(2) 确定F_E



例4:求当系统平衡时,力偶M_1,M_2应满足的关系。



研究*BD*

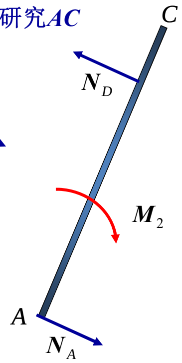


$$M_1=\overline{BD}N_D\sin\beta$$

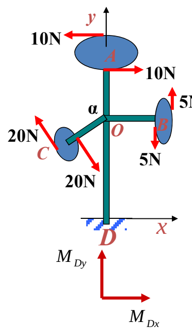
$$M_2=\overline{AD}N_D$$

$$M_1=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}M_2\sin\beta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}M_2\cos\theta$$

研究*AC*



例5：轴线处于同一平面内的四根直杆*OA,OB,OC,OD*彼此刚性连接，圆盘的直径分别为d_A=60cm, d_B=40cm, d_C= 20cm, $\alpha=120^0$, 求直杆*D*端受到的约束反力偶的大小和方向。



解：$M_x=5\times0.4-20\times0.2\cdot\cos30^0=-1.464N\cdot m$

$M_y=10\times0.6-20\times0.2\cdot\sin30^0=4N\cdot m$

平衡条件 $\sum M_x=0,\quad M_x+M_{Dx}=0$

$\sum M_y=0,\quad M_y+M_{Dy}=0$

$\Rightarrow$ $M_{Dx}=1.464N\cdot m$

$M_{Dy}=-4N\cdot m$

$M_D=\sqrt{M_{Dx}^2+M_{Dy}^2}=4.15N\cdot m$

$\Rightarrow$ $\tan\theta=\dfrac{M_{Dy}}{M_{Dx}},\quad \theta=-69.9^0$

思考题：力对点之矩与力偶矩有何异同？

相同之处：都是转动效应的度量。

不同之处：力对点之矩与矩心有关，力偶矩与矩心无关。

填空：

空间力偶系平衡的几何条件是：

力偶矩矢量多边形自行封闭。

作用在刚体上的两个力偶使刚体平衡，这两个力偶必然：

力偶矩矢量等值反向。

作业：3－2，3－5，3－6