班号______________学号______________姓名______________成绩______________

注意事项：本试卷共**九**大题, 卷面满分为100分. 请在各题题目后书写解答.

一、(10分)设$f(x) \in C(0,+\infty)$满足$f(x) = \ln x - \int_1^e f(x)dx$, 求$\int_1^e f(x)dx$.

$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e [\int_1^e f(x)dx]dx$

$\int_1^e f(x)dx = x\ln x|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} - (e-1)\int_1^e f(x)dx$

$e\int_1^e f(x)dx = e-(e-1)$, $\int_1^e f(x)dx = \frac{1}{e}$.

二、(10分)设广义积分$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$收敛, 证明: 广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛.

[法一] $\because \left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+f^2(x)\right)$ 而 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 敛, $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 敛 $\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$ 敛.

[法二] $\because \forall A>1$, $\left(\int_1^A \left|\frac{f(x)}{x}\right|dx\right)^2 \le \left(\int_1^A \frac{1}{x^2}dx\right)\left(\int_1^A f^2(x)dx\right)$, 而 $\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{1}{x^2}dx$ ∃.

$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f^2(x)dx$ ∃ $\therefore \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$ ∃ $\therefore \int_1^{+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx$ 敛.

三、(10分)证明: $f^2(x) \in R[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)| \in R[a,b]$.

"$\Leftarrow$" $|f(x)| \in R[a,b] \Rightarrow f^2(x) = |f(x)|\cdot|f(x)| \in R[a,b]$ — 4分

"$\Rightarrow$" [法一] $\because f^2(x) \in R[a,b]$, $\therefore |f(x)|$ 有界. 而 $g(u)=\sqrt{u} \in C[0,+\infty)$

$\therefore |f(x)| = g(f^2(x)) \in R[a,b]$ — 6分

[法二] $\because u,v\ge 0$ 时 $|u-v| \le \sqrt{|u^2-v^2|}$,

$\therefore \forall x', x'' \in [a,b]$, $\big||f(x')|-|f(x'')|\big| \le \sqrt{|f^2(x')-f^2(x'')|}$

$\therefore \forall \Delta, \forall i$, $\omega_i(|f|,\Delta) \le \sqrt{\omega_i(f^2,\Delta)}$.

$\therefore f^2(x) \in R[a,b] \Rightarrow |f(x)| \in R[a,b]$.

四、(10分)设$f(x) \in D[a,b]$, 证明:

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)| \le |\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx| + \int_a^b |f'(x)|dx.$$

记 $\beta = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ (平均值)

$\because f(x) \in C[a,b] \therefore \exists \eta \in [a,b]$ s.t. $f(\eta)=\beta$.

$\therefore f(x)-\beta = f(x)-f(\eta) = \int_x^\eta f'(t)dt$

$|f(x)|-|\beta| \le |f(x)-\beta| = |\int_x^\eta f'(t)dt| \le |\int_x^\eta |f'(t)|dt| \le \int_a^b |f'(t)|dt$

$\therefore |f(x)| \le |\beta| + \int_a^b |f'(t)|dt$. 得证.

五、(10分)求证 $\lim_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\,dx=1.$

$I_n=\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\,dx.$

$\because\ \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}\in C[n^2,n^2+n],\ \forall n\in N.\ \therefore\ I_n=\frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}\cdot n,\quad n^2\le\xi_n\le n^2+n.$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}\le I_n\le\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{\xi_n}}n=e^{-\frac{1}{\xi_n}},\quad\forall n\in N.$ —— 7分

而 $\lim_{n\to+\infty}\xi_n=+\infty.\ \lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{1}{\xi_n}}=1,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$ —— 3分.

$\therefore$ 据夹逼原理 $\lim_{n\to+\infty}I_n=1.$

或 $I_n=e^{-\frac{1}{\xi_n}}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{dx}{\sqrt{x}}=e^{-\frac{1}{\xi_n}}2\sqrt{x}\Big|_{n^2}^{n^2+n}=e^{-\frac{1}{\xi_n}}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+n}\to1\ (n\to\infty).$

或 $I_n\xlongequal[x=\frac{1}{t^2}]{\frac{1}{\sqrt{x}}=t}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}te^{-t^2}\left(-\frac{2dt}{t^3}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}^{\frac{1}{n}}2\,\frac{e^{-t^2}}{t^2}dt$

右面继续使用积分中值定理，再夹逼.

六、(10分)讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x\ \sin x}{x^p}dx$ $(p\in\mathbb{R})$的绝对收敛性和条件收敛性.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x\sin x}{x^p}dx=\underbrace{\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}\sin x\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}dx}_{I_2}$$ ——1分

对I_1：$\because x\to0+0$时 $\sin x\sim x$，$\arctan x\sim x$

$\therefore I_1$与$\int_0^1\frac{dx}{x^{p-2}}$同敛散. $\therefore p-2<1$，即$p<3$时I_1收敛. ——3分

并且，$x\in[0,1]$时，$\sin x\geq0$，$\arctan x\geq0$，非负. $\therefore I_1$于$p<3$时绝收敛 ——1分

对I_2：$p\leq0$时，据Cauchy准则，I_2发散. (无此不扣分)

$p>0$时，$\because \frac{1}{x^p}\downarrow 0\ (x\to+\infty)$，$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|\leq2$，$\forall A>1$.

$\therefore$据Dirichlet，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$收敛.

又$\arctan x$于$(1,+\infty)$单升有界 $\therefore$据Abel，I_2于$p>0$时收敛. ——2分

其中，$p>1$时，$\left|\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\right|\leq\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^p}$，$x\in[1,+\infty)$. 而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(p>1)$收敛

$\therefore p>1$时，I_2绝收敛. ——1分

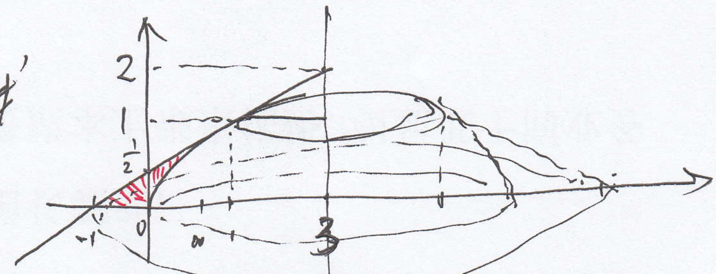
$0<p\leq1$时，$\because\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$与$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$同敛散，

$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$发散. 从而$I_2$不绝收敛 ——2分

综上所述，$0<p\leq1$时，I条收敛；$1<p<3$时，I绝收敛.

七、(15分)设平面区域D是由曲线$y=\sqrt{x}$与其经过点$(-1,0)$的切线以及x轴所围成的.

(1)求D的面积；　　　　(2)求D绕直线$x=3$旋转一周所成旋转体Ω的体积.



① 设切线切点为$(x_0,\sqrt{x_0})$，则切线方程为 $y=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0)$

代入$(-1,0)$得：$0=\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(-1-x_0)$

$\Rightarrow 2x_0=1+x_0,\ x_0=1$. ∴切线方程为 $y=1+\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=\frac{x+1}{2}$. —— 3分

$|D|=S_\triangle+S'=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}+\int_0^1\left(\frac{x+1}{2}-\sqrt{x}\right)dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. —— 4分

或 $|D|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1-\int_0^1\sqrt{x}\,dx=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

或 $|D|=\int_0^1[y^2-(2y-1)]dy=\frac{1}{3}-1+1=\frac{1}{3}$.

② $V=V_{台}-V_{抛}$.

$V_{台}=\frac{1}{3}\pi\cdot(4^2\cdot2)-\frac{1}{3}\pi\cdot2^2\cdot1=9\pi+\frac{\pi}{3}$. —— 3分

$V_{抛}=\int_0^1\pi(x-3)^2dy=\cancel{\pi\int_0^1(x^2-6x+9)dx=\pi(\frac{1}{3}}$

$=\int_0^1\pi(y^2-3)^2dy=\pi\int_0^1(y^4-6y^2+9)dy=\pi(\frac{1}{5}-2+9)=7\pi+\frac{\pi}{5}$. —— 5分

$V=(9\pi+\frac{\pi}{3})-(7\pi+\frac{\pi}{5})=2\pi+\frac{2\pi}{15}=\frac{32}{15}\pi$.

或 $V=V_{直线转}-V_{抛物线转}$.

$V_{直线转}=\int_{-1}^1 2\pi(3-x)y_1\,dx=\int_{-1}^1 2\pi(3-x)\frac{x+1}{2}dx=6\pi-\frac{2}{3}\pi$, —— 4分

$V_{抛物线转}=\int_0^1 2\pi(3-x)y_2\,dx=\int_0^1 2\pi(3-x)\sqrt{x}\,dx=4\pi-\frac{4}{5}\pi$ —— 4分

$V=2\pi+(\frac{4}{5}-\frac{2}{3})\pi=2\pi+\frac{2\pi}{15}=\frac{32}{15}\pi$.

八、(20分) 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos 2x}dx$;　　(2) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}dx+\int_e^{e^4}\sqrt{\ln x}\,dx$;

(3) 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$ 及 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

① $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\cos 2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{3+\cos 2x}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{2+2\cos^2 x}$ —— 4分

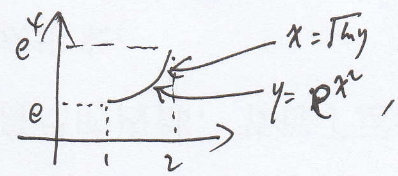
$\displaystyle=\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi}\frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}=\frac{\pi}{4}\left(-\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{8}$ —— 1分

② $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}dx=xe^{x^2}\Big|_1^2-\int_1^2 x\,2xe^{x^2}dx=(2e^4-e)-2\int_1^2 x^2e^{x^2}dx$, —— 2分

$\displaystyle\int_e^{e^4}\sqrt{\ln x}\,dx \xlongequal[x=e^{t^2}]{\sqrt{\ln x}=t}\int_1^2 t\,2te^{t^2}dt=2\int_1^2 t^2e^{t^2}dt$ —— 3分

$\displaystyle\therefore I=\int_1^2 e^{x^2}dx+\int_e^{e^4}\sqrt{\ln x}\,dx=2e^4-e$

或者



, $\displaystyle I=\int_1^2 y\,dx+\int_e^{e^4}x\,dy=2e^4-e.$ —— 5分

③ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\frac{d2x}{2}=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$ —— 5分

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$ —— 5分

九、(5分) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \cos^n \frac{1}{x}\, dx = 0.$

$$I_n = \int_0^1 \cos^n \frac{1}{x}\, dx \xrightarrow[dx=-\frac{dt}{t^2}]{\frac{1}{x}=t} \int_1^{+\infty} \frac{\cos^n t}{t^2}\, dt = \int_1^{\pi} \frac{\cos^n t}{t^2}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos^n t}{t^2}\, dt \quad — 1分$$

$$\begin{aligned}
|I_n| &\le \int_1^{\pi} \frac{|\cos t|^n}{t^2}\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos t|^n}{t^2}\, dt \\
&\le \int_1^{\pi} |\cos t|^n\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos t|^n\, dt \\
&\le \int_0^{\pi} |\cos t|^n\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \int_0^{\pi} |\cos t|^n\, dt \quad (\text{周期性}) \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt \\
&= \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2\pi^2}\right) \int_0^{\pi/2} \cos^n t\, dt. \quad — 2分
\end{aligned}$$

$\because \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 存在 $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ \exists\right)$ $\therefore$ 只需证明

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt \to 0 \quad (n\to+\infty).$$

$\forall \varepsilon>0$, $\because$ $0 \le J_n = \int_0^{\varepsilon} \cos^n t\, dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt \le \varepsilon + \cos^n \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$, $\forall n\in N$.

$\therefore$ $0 \le \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} J_n \le \varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$.

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$ — 2分

如果记得 J_n 的公式亦可.