基础物理学总结

《力学》与《电磁学》

庞丹阳

北京航空航天大学物理科学与核能工程学院

June 15, 2016

基础物理学内容：知识点

力学 约 60 个

电磁学 约 50 个

热学 约 30 个

光学 约 25 个

近代物理 约 30 个

共计约 200 个。

《力学》课程的内容

- 质点运动学
- 牛顿运动定律
- 功和能、冲量和动量
- 质点系（质心）运动定理
- 刚体的运动
- 机械振动和机械波
- 流体力学、~~分析力学~~

《电磁学》课程的内容

- 静电场、导体和电介质
- 稳恒磁场和磁介质
- 电磁感应
- 麦克斯韦电磁场理论（位移电流）

经典力学的理论体系

惯性系S $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$

非惯性系S' $\boxed{m\vec{a}' = \vec{F}'}$ $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{惯性力}$

$\vec{F}dt$

动量定理

动量守恒定律

$\vec{F} \cdot d\vec{r}$

动能定理

机械能守恒定律

能量守恒定律

$\vec{r} \times \vec{F}$

角动量定理

角动量守恒定律

质点运动学

知识点：位置、速度、加速度、速率、切向加速度、法向加速度、曲率半径、牵连速度、牵连加速度、角速度

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \\
v &= |\boldsymbol{v}| = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \\
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n}} \\
a_\tau &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_{\boldsymbol{n}} = \frac{v^2}{\rho} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}
\end{aligned}
$$

1-22 如图 1-16 所示，两船 A 和 B 相距 R，分别以速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 匀速直线行驶，它们会不会相碰？若不相碰，求两船相靠最近的距离. 图中 α 和 β 为已知.

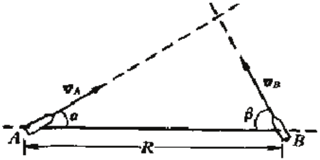


图 1-16

方法二：如图 1-18，在直角坐标系 Oxy 中，两船 A 和 B 在任一时刻 t 的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_A = (v_A t\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_A t\sin\alpha)\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{r}_B = (R - v_B t\cos\beta)\boldsymbol{i} + (v_B t\sin\beta)\boldsymbol{j}.$$

两位置矢量差为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A \\ &= [R - (v_B\cos\beta + v_A\cos\alpha)t]\boldsymbol{i} + [(v_B\sin\beta - v_A\sin\alpha)t]\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

任一时刻 t 两船间的距离为

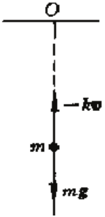
牛顿三定律

知识点：牛顿三定律、万有引力、重力、弹性力、摩擦力（静摩擦、滑动摩擦）、惯性力、惯性离心力、科里奥利力

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{F}_i &= -m\boldsymbol{a}_0 \quad \text{（惯性力）} \\
\boldsymbol{f}_c &= m\omega^2\boldsymbol{R} \quad \text{（惯性离心力）} \\
\boldsymbol{f}_C &= 2m\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \quad \text{（科里奥利力）}
\end{aligned}
$$

2-10 质点在空气中无初速自由下落时，在速度不太大的情况下，阻力 $\boldsymbol{F}$ 的大小与速度大小成正比，$\boldsymbol{F}$ 的方向与速度的方向相反，即 $\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{v}$，$k$ 为常数. 试求质点速度和加速度随时间的变化关系. 设质点质量为 m.

解 如图 2-9 所示，质点 m 下落过程中受重力 mg 和与速度方向相反的阻力 kv. 若以下落点为坐标原点 O，竖直向下为 y 轴正方向，则牛顿运动方程为



$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv.$$

方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v=g,$$

2-11 如图 2-11，半径为 R 的光滑球面顶点处，物体 m 自静止开始下滑，求物体脱离球面的临界角，即物体脱离球面处的半径与竖直方向的夹角.

解 如图 2-11，若物体尚在球面上运动，则受重力 mg 和球面支持力 N. 在自然坐标系中，其牛顿方程为

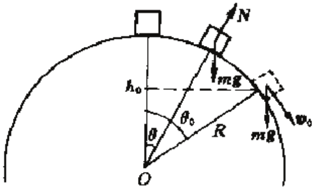


图 2-11

$$\text{法向：} mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}, \quad ①$$

$$\text{切向：} mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}. \quad ②$$

注意到

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt},$$

式中

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad ds = Rd\theta.$$

代入到切向方程②中，则有

$$gR\sin\theta\, d\theta = v dv. \quad ③$$

动量变化定理、动量守恒

知识点：冲量、动量、质点（组）动量变化定理、动量守恒定律、变质量问题

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{I} &= \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \\
\boldsymbol{I} &= \int \mathrm{d}I = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t \\
\boldsymbol{P} &= m\boldsymbol{v}\ \text{（质点）} = \sum m_i\boldsymbol{v}_i\ \text{（质点组）} \\
\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\mathrm{d}t\ \text{（质点）} \\
\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} (\sum \boldsymbol{F}_i)\mathrm{d}t\ \text{（质点组）}
\end{aligned}
$$

3-6 质量为 M 的木块静止于光滑水平面上，一质量为 m，速率为 v 的子弹水平射入木块后陷在木块内，并与木块一起运动(图 3-5). 求此过程中子弹施于木块的力的冲量及木块施于子弹的力的冲量.

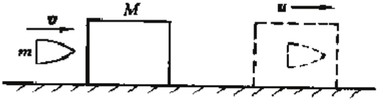


图 3-5

3-6 质量为 M 的木块静止于光滑水平面上，一质量为 m，速率为 v 的子弹水平射入木块后陷在木块内，并与木块一起运动(图 3-5). 求此过程中子弹施于木块的力的冲量及木块施于子弹的力的冲量.

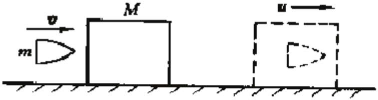


图 3-5

3-7 见图 3-6，质量为 m 的人站在质量为 M 的车上，开始时一起以速率 v_0 沿光滑水平面向右运动，现在人以相对于车为 u 的速率向左跑，试求车的速率.

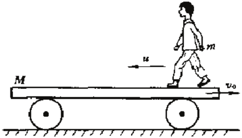


图 3-6

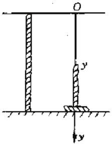


图 3-9

3-10 如图 3-9 所示，将一根柔软均匀，质量线密度为 η 的绳子悬吊起来，下端刚好触及地面．求证：绳子自静止释放后自由下落长度为 y 时，地面受到绳子的压力 $f=3\eta yg$．

方法二：变质量运动方程为

$$m\frac{dv}{dt}=F+(v'-v)\frac{dm}{dt}.$$

取已落地的绳子为主体，其质量为

$$m(t)=\eta y,$$

这段绳子的速度 $\qquad v(t)=0,$

故加速度 $\qquad \dfrac{dv}{dt}=0.$

主体所受外力为重力 ηyg 和地面支持力 f'，即

$$F=\eta yg-f'.$$

在 dt 时间内有质量为 dm 的绳子作为添加物加入主体，添加物 dm 的速度 v' 为

机械能变化定理、机械能守恒

知识点：功、质点（组）动能、质点动能变化定理、质点组动能变化定理（外力、内力）、非保守力、保守力、势能、机械能变化定理、机械能守恒

$$
\begin{aligned}
A &= \int \mathrm{d}A = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
p &= \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} \\
E_k &= \frac{1}{2}mv^2\ \text{（质点）} = \sum\frac{1}{2}m_iv_i^2\ \text{（质点组）} \\
E_k - E_{k0} &= A_{\text{外}} + A_{\text{内}} \\
\oint \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= 0\ \text{（保守力）} \\
E &= E_k + E_p \\
E - E_0 &= A_{\text{外}} + A_{\text{内非保}}
\end{aligned}
$$

4-10 如图 4-6，质量为 M 的木块静止于光滑水平面上，一质量为 m，速率为 v 的子弹水平射入木块后嵌在木块内，并与木块一起运动. 求：(1) 木块施于子弹的力所做的功；(2) 子弹施于木块的力所做的功；(3) 系统（M 和 m）耗散的机械能.

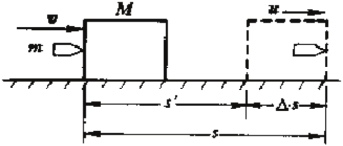


图 4-6

4-12 如图 4-8 所示，在相距为 x_0 的两平行弹性壁板之间，有一质量为 m 的弹性小球往返弹跳. 设壁板的质量远远大于小球的质量，碰撞是完全弹性的，忽略重力和空气阻力.

(1) 试求壁板受到的平均作用力.

(2) 若施外力使左壁板以速度 u($u \ll v_0$)缓慢右移，求证：外力的功等于小球动能的增量.

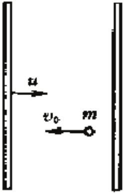


图 4-8

解 (1) 弹性小球一次碰撞壁板的动量改变为 $2mv_0$，它在数值上等于施于壁板的冲量. 连续两次碰撞之间小球往返的距离为 $2x_0$，所用时间为 $2x_0/v_0$，则单位时间内小球碰撞壁板的次数为 $v_0/2x_0$. 这样，单位时间内小球施于壁板的冲量，即壁板受到的平均作用力为

$$\overline{F} = 2mv_0 \cdot \frac{v_0}{2x_0} = \frac{mv_0^2}{x_0}.$$

(2) 施外力 F 推动左壁板，使两板间的距离从 x_0 变为 x；相应地，小球的速度从 v_0 变为 v. 根据题目要求，则要求证：

$$A = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

左壁板缓慢推进，可视为准静态过程，外力 $F(x)$ 与板受到的小球的平均作用力 $\overline{F}(x)$ 等值而反向. 这样，求外力做的功就转化为求平均作用力做的功，即要求证：

$$A = \int_{x_0}^{x} - F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

与静态下 $\overline{F} = \dfrac{mv_0^2}{x_0}$ 类似，动态下 $\overline{F}(x) = \dfrac{mv^2}{x}$，它表明，求 $\overline{F}(x)$ 又转化为求 $v(x)$.

如前所设，壁板间距为 x 时，小球的速度为 v. 分析小球与左壁板的碰撞过程时，若以左壁板为参考系，小球以大小为 $(v+u)$ 的相对速度入射，以大小为 $(v+u)$ 的相对速度反弹；若以地面为参考系，小球则以大小为 v 的绝对速度入射，以大小为 $(v+u)+u=v+2u$ 的绝对速度反弹. 因此，小球绝对速度大小的增量为

$$\Delta v = (v + 2u) - v = 2u.$$

4-16 有一装置如图 4-12(a)，在劲度系数为 k 的弹簧下端挂一质量为 M 的盘，一质量为 m 的物体由距盘底高 h 处自由落下，与盘

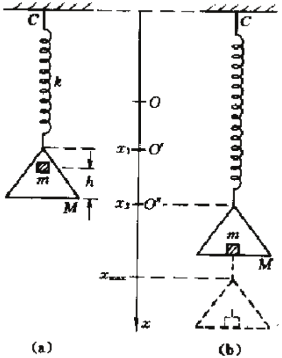


图 4-12

作完全非弹性碰撞. 求弹簧的最大伸长量.

解 本题包括三个物理过程：(1) 质点 m 作自由落体运动；(2) 质点 m 与盘 M 作完全非弹性碰撞；(3) 质点 m 和盘 M 一起到达最低点，弹簧具有最大伸长量.

4-17 如图 4-13，质量为 m_1 和 m_2 的两木块用劲度系数为 k 的弹簧相连，静止地放在光滑水平面上. 一质量为 m，速率为 v_0 的子弹水平射入木块 m_1 后嵌在 m_1 内. 试求：(1) 弹簧的最大压缩长度. (2) 木块 m_2 的最大速度和最小速度.

图 4-13

解 (1) 以子弹 m 和木块 m_1 为系统，由于入射过程时间极其短暂，弹簧未及压缩，所以系统水平方向动量守恒. 设 v_{10}为碰后即 m 嵌入 m_1 后两者的共同速度，根据水平方向动量守恒定律，则有

$$mv_0 = (m + m_1)v_{10}. \tag{1}$$

根据以上分析，取 $(m+m_1)$、m_2 和弹簧 k 为系统，系统水平方向动量守恒，机械能守恒. 设弹簧的最大压缩长度为 x，$(m+m_1)$和 m_2 的共同速度为 v，则有

$$\begin{cases} (m + m_1)v_{10} = (m + m_1 + m_2)v, \\ \dfrac{1}{2}(m + m_1)v_{10}^2 = \dfrac{1}{2}(m + m_1 + m_2)v^2 + \dfrac{1}{2}kx^2. \end{cases} \tag{2}$$

根据以上分析，当弹簧为原长时，弹性势能为零. 若设 $(m+m_1)$ 的速度为 v_1，m_2 的速度为 v_2，则有

$$(m+m_1)v_{10}=(m+m_1)v_1+m_2v_2, \qquad ④$$

$$\frac{1}{2}(m+m_1)v_{10}^2=\frac{1}{2}(m+m_1)v_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2. \qquad ⑤$$

将方程④和⑤与①联立求解，可得

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{mv_0}{m+m_1}, & \text{最大速度.} \\ v_2=0, & \text{最小速度;} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1=\dfrac{m+m_1-m_2}{m+m_1+m_2}\cdot\dfrac{mv_0}{m+m_1}, & \text{最小速度,} \\ v_2=\dfrac{2mv_0}{m+m_1+m_2}, & \text{最大速度.} \end{cases}$$

角动量变化定理、角动量守恒

知识点：角动量、力矩、角动量变化定理、质点（组）的角动量守恒、开普勒三定律

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M} \\
\Delta \boldsymbol{L} &= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}\mathrm{d}t \\
\boldsymbol{L} &= \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \quad \text{（质点组角动量）} \\
\boldsymbol{M} &= \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i\text{外}} \quad \text{（合外力矩）}
\end{aligned} \tag{1}
$$

5-9 图 5-5 中 O 为有心力场的力心，排斥力与距离的二次方成反比：$f=k/r^2$，k 为常量.

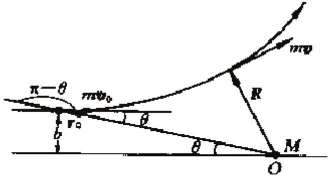


图 5-5

(1) 求此力场的势能；

(2) 一质量为 m 的粒子以速度 v_0，瞄准距离 b 从远处入射，求它能达到的最近距离和此刻的速度.

解 (1) 斥力 $f=k/r^2$ 为保守力，根据势能定义，并规定无穷远为势能零点，则力场的势能为

$$E_p(r)=\int_r^{\infty}\frac{k}{r^2}\mathrm{d}r=-k\int_r^{\infty}\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)=-k\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^{\infty}=\frac{k}{r}.$$

$$L = Rmv,$$

故有

$$bmv_0 = Rmv. \quad ①$$

斥力 $f=k/r^2$ 为保守力，在保守力场中粒子的机械能守恒，则有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{R}. \quad ②$$

由方程①得 $v=\frac{b}{R}v_0$ 代入方程②，即可得到

$$R^2 - \frac{2k}{mv_0^2}R - b^2 = 0.$$

解 R 的一元二次方程，舍去负根后，最后得到粒子达到的最近距离为

$$R = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\frac{k^2}{m^2v_0^4} + b^2},$$

此刻的速度为

$$v = \frac{b}{R}v_0.$$

质心力学定理

知识点：质点组（动量、动能、角动量）、质心、质心系、质心运动定理、科尼希定理、质心角动量变化定理

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_C &= \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{M} = \frac{\int r\mathrm{d}m}{M} \\
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} &= m\boldsymbol{a}_C = \sum \boldsymbol{F}_i \quad \text{（质心运动定理）} \\
\sum m_i \boldsymbol{v}_i &\equiv 0 \quad \text{（质心系）} \\
\boldsymbol{p}_C &= m\boldsymbol{v}_C = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{p} \quad \text{（质心动量）} \\
E_k &= E_C + E_{rC} = \frac{1}{2}mv_C^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_{iC}^2 \quad \text{（科尼希定理）} \\
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{L}_{rC} = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C + \sum (\boldsymbol{r}_{iC} \times m_i \boldsymbol{v}_{iC}) \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_C}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{r}_C \times \sum \boldsymbol{F}_i \quad \text{（质心角动量变化定理）} \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_{rC}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}_{rC} = \sum \boldsymbol{r}_{iC} \times \boldsymbol{F}_i \quad \text{（质心系角动量变化定理）}
\end{aligned}
$$

6-10 如图 6-6，质量为 m_1 和 m_2 的两木块用劲度系数为 k 的弹簧相连，静止地放在光滑水平面上. 一质量为 m，速率为 v_0 的子弹水平射入木块 m_1 后嵌在 m_1 内. 试求：(1) 弹簧的最大压缩长度. (2) 木块 m_2 的最大速度和最小速度.

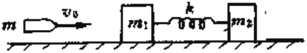


图 6-6

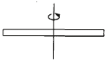
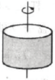
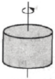
说明 本题曾在第四章4-17题解过，目前将系统的运动分解为质心运动和系统在质心系中的运动，使我们对运动的描述更为明了清晰. 具体来说，质心在地面参考系中作惯性运动. 在质心系中，就动量来说，由于系统总动量恒为零，所以质点 $(m+m_1)$ 与质点 m_2 的动量时刻等值而反号；就机械能来说，系统机械能守恒，动能和弹性势能相互转化，但总量不变. 当弹簧处于最大压缩或最大伸长时，全部能量为弹性势能，动能为零；当弹簧处于原长时，弹性势能为零，全部能量为动能. 速度合成公式 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_C$ 建立了两种运动的关系.

刚体力学

知识点：刚体、转动惯量（平行轴定理、垂直轴定理、量纲分析）、角速度、角加速度、刚体平面平行运动、纯滚动、定轴转动、转动动能

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \quad ,v=R\omega \quad \text{角速度、线速度} \\
a_\tau &= R\beta, \quad a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2 \\
I &= \sum m_i r_i^2=\int r^2\mathrm{d}m \\
I &= I_C+md^2 \quad \text{（平行轴定理）} \\
I_z &= I_x+I_y \quad \text{（垂直轴定理）} \\
M &= I\beta \quad \text{（定轴转动定理）} \\
E_k &= \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{（定轴转动动能）} \\
\Delta E_k &= \frac{1}{2}I\omega^2-\frac{1}{2}I\omega_1^2=\int_{\phi_1}^{\phi_2}M\mathrm{d}\phi
\end{aligned}
$$

表 7.1 常用的转动惯量

物体	转轴位置	转动惯量	附图
细棒（质量 m，长 l）	通过中点与棒垂直	$\frac{1}{12}ml^2$	
	通过一端与棒垂直	$\frac{1}{3}ml^2$	
薄壁中空圆筒（或圆环）（质量 m，半径 R）	通过中心轴	mR^2	
圆柱体（或圆盘）（质量 m，半径 R）	通过中心轴	$\frac{1}{2}mR^2$	
中空圆柱体（质量 m，内半径 R_1，外半径 R_2）	通过中心轴	$\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$	
球体（质量 m，半径 R）	通过球心	$\frac{2}{5}mR^2$	

7-6 求质量为 m，内半径为 R_1，外半径为 R_2 的中空圆柱体对中心轴 OO' 的转动惯量. 见图 7-3.

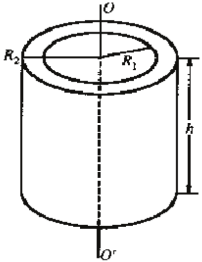


图 7-3

解 由转动惯量定义可知，转动惯量具有可加性，柱体绕中心轴的转动惯量是

$$I = \frac{1}{2}(m + M)R_2^2 - \frac{1}{2}MR_1^2.$$

设圆柱体的体密度为 ρ，高为 h，则挖去部分的质量 M 及剩余部分的质量 m 分别为

$$M = \pi R_1^2 \rho h, \qquad m = \pi(R_2^2 - R_1^2)\rho h,$$

利用这两个关系式，即可求得

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2).$$

说明 以上两题是巩固转动惯量概念，并具体说明如何根据定义计算转动惯量. 第 7-6 题还提供了一种计算转动惯量的简便方法：设想将挖去部分 M 填入而构成一实心柱体，然后再将 M 挖去就是实际的中空柱体，这样可直接应用实心柱体的结果，简化运算.

7-21 如图 7-19(a)，在光滑水平面上，静止放置着质量为 M，长为 l 的均匀细杆，质量为 m 的小球以垂直于杆的水平速度 v_0 与杆的一端作完全非弹性碰撞. 试求碰后系统的运动.

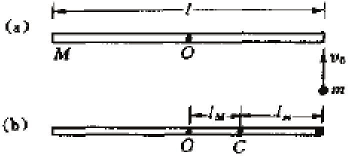


图 7-19

解 方法一：以细杆 M 和小球 m 为物体系，系统水平方向不受力，故水平方向动量守恒且等于质心动量，即

$$mv_0 = (M + m)v_C.$$

由此得到

$$v_C = \frac{mv_0}{M + m}.$$

容易判断，在质心系中碰撞前后系统对质心 C 角动量守恒．规定垂直纸面向外为正，碰撞前小球在质心系中的速度为

$$v' = v_0 - v_C = \frac{Mv_0}{M+m},$$

对质心 C 的角动量为

$$L_m = mv'l_m = \frac{M^2}{M+m} \cdot \frac{mv_0}{M+m} \cdot \frac{l}{2},$$

细杆在质心系中的速度为

$$V' = 0 - v_C = -\frac{mv_0}{M+m},$$

对质心 C 的角动量为

$$L_M = MV'l_M = \frac{Mm}{M+m} \cdot \frac{mv_0}{M+m} \frac{l}{2},$$

故碰撞前系统对质心 C 的总角动量为

$$L_{rC0} = mv'l_m + MV'l_M = \frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} mv_0.$$

碰撞后系统对质心 C 的总角动量为

$$L_{rC} = I_C \omega,$$

式中 ω 是碰后系统的角速度. 对过质心并垂直于纸面的轴的转动惯量 I_C,可根据转动惯量定义和平行轴定理求得

$$I_C = ml_m^2 + \frac{1}{12}Ml^2 + Ml_M^2 = \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)},$$

故有

$$L_{rC} = \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega.$$

根据角动量守恒,$L_{rC0}=L_{rC}$,则有

$$\frac{M}{M+m} \cdot \frac{l}{2} mv_0 = \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega,$$

解得

$$\omega = \frac{6mv_0}{l(M+4m)}.$$

结果表明,系统逆时针方向匀角速转动.

方法二：如图 7-20，取惯性参考系中与球杆相碰的杆端相重合的 A 为固定参考点，对 A 点系统角动量守恒. 显然，碰撞前系统对 A

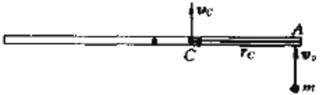


图 7-20

点的角动量为零，即 $L_{A0}=0$. 碰撞后，系统对 A 点的角动量等于质心对 A 点的角动量与质心系中系统对质心 C 的角动量的矢量和. 规定垂直纸面向外为正，则碰撞后系统的角动量为

$$
\begin{aligned}
L_A &= -r_C(M+m)v_C + I_C\omega \\
&= -\left(\frac{M}{M+m}\frac{l}{2}\right)(M+m)\frac{mv_0}{M+m} + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega \\
&= -\frac{M}{M+m}\frac{l}{2}mv_0 + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+m)}\omega,
\end{aligned}
$$

根据角动量守恒，则有

$$
0 = -\frac{M}{M+m}\cdot\frac{l}{2}mv_0 + \frac{M(M+4m)l^2}{12(M+4m)}\omega,
$$

解得

$$
\omega = \frac{6mv_0}{l(M+4m)}.
$$

振动

知识点：线性回复力、简谐振动（方程、振幅、周期、角频率、相位、初条件）、振动的合成、拍、阻尼振动、受迫振动（共振）

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2} &= -\omega_0^2 x, \quad x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi_0) \\
A &= \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}, \quad \phi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \\
E &= \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \\
A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_{20} - \phi_{10})} \\
\phi_0 &= \arctan\frac{A_1\sin\phi_{10} + A_2\sin\phi_{20}}{A_1\cos\phi_{10} + A_2\cos\phi_{20}} \\
x &= A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\frac{|\omega_1 - \omega_2|t}{2}\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\
x(t) &= Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \gamma/2m \\
x(t) &= \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t + \phi_0)
\end{aligned}
$$

8-12 有一装置如图 8-10 所示，在劲度系数为 k 的弹簧下端挂一质量为 M 的盘，一质量为 m 的物体由距盘底高 h 处自由落下，与盘作完全非弹性碰撞. 设两物体碰撞后瞬间为 $t=0$ 时刻，试确定振动系统的运动学方程.

解 简谐振动的运动学方程为

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0).$$

所谓确定运动学方程就是确定方程中的特征量 A,ω_0,φ_0.

物体 m 与盘 M 作完全非弹性碰撞，碰后 m 与 M 联为一体，对于由 M、m 和弹簧组的振动系统，其角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

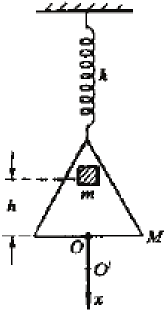


图 8-10

规定竖直向下为坐标 x 的正方向，碰后系统的平衡位置为坐标原点 O'. 设碰撞的短暂过程中弹簧未及伸长，即碰后两物体的位置为 O，这就是初位置. 从受力分析可求得初位移为

$$x_0=-\frac{mg}{k}.$$

以 m 和地球为系统，该系统满足机械能守恒的条件，取盘底为重力势能零点，根据机械能守恒定律，有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

式中的 v 为 m 与 M 碰前的速度.

M 和 m 系统在碰撞过程中动量守恒，设碰后 M 和 m 的共同速度为 v_0，则

$$mv = (M+m)v_0,$$

解方程得到振动系统的初速度为

$$v_0 = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}.$$

根据振幅与初相位的计算公式，振幅为

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}}.$$

初相位为

$$\varphi_0 = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) = \arctan\sqrt{\frac{2kh}{(M+m)g}}.$$

初相位 φ_0 可能在第一象限，也可能在第三象限，根据 $t=0$ 时刻 $x_0<0$ 而 $v_0>0$，则可确定是第三象限角.

波动

知识点： 简谐波（波函数，方程）、波长、波数、波速、波的能量密度、波的叠加、驻波、半波损失、多普勒效应

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A\cos(\omega t - kx + \phi_0) \\
v &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\omega(x,t) &= \rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad \bar{\omega} = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(x,t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \\
u(x,t) &= A_0\cos(\omega t - kx) + A_0\cos(\omega t + kx) = 2A_0\cos(\omega t)\cos(kx) \quad \text{（驻波）} \\
f' &= \frac{v - u'\cos\beta}{v - u\cos\alpha} f, \quad \text{（多普勒效应）}
\end{aligned}
$$

9-10 图 9-3 中 $x=0$ 处有一振动方程为 $u=A\cos\frac{2\pi}{T}t$ 的平面波波源，产生的波沿 x 轴正、负方向传播. MN 为波密介质的反射面，距波源 $\frac{3}{4}\lambda$，λ 为波长. 试求合成波，并作出 $t=\frac{3}{4}T$ 时的波形图.

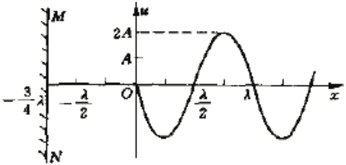


图 9-3

解 在波源与反射面区域，即 O—MN 区域，由波源 O 发出的沿 x 轴负方向传播的波 u_1 为

$$u_1(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

这一入射波在反射面 $x = -\frac{3}{4}\lambda$ 处引起的振动为

$$u_1\left(-\frac{3\lambda}{4},t\right) = A\cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)\right]$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3\pi}{2}\right).$$

由于反射面为波密介质，反射波存在 π 的相位突变，则反射波为

$$u_2(x,t) = A\cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{3\pi}{2}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x + \frac{3}{4}\lambda\right) + \pi\right]$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right),$$

合成波为入射波与反射波的叠加，因而

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$$

$$= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\frac{2\pi}{T}t.$$

9-11 飞机在空中以速度 $u=200\ \mathrm{m/s}$ 作水平飞行，发出频率 $f_0=2000\ \mathrm{Hz}$ 的声波. 当飞机飞越静止在地面的观测者时，在 $t=4\ \mathrm{s}$ 内观测者测得的声波频率从 $f_1=2400\ \mathrm{Hz}$ 降为 $f_2=1600\ \mathrm{Hz}$. 已知声速 $v=330\ \mathrm{m/s}$. 试求飞机飞行的高度.

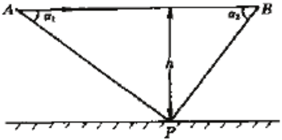


图 9-4

解 如图 9-4，设飞机在观测时间内从位置 A 飞到位置 B. 普遍的多普勒效应公式为

$$f' = \frac{v - u'\cos\beta}{v - u\cos\alpha} f.$$

观测者 P 静止，$u'=0$. 测得从 A 点发出的声波频率为 f_1，此时飞机趋向观测者飞行，u 取正值，故有

$$f_1 = \frac{v}{v - u\cos\alpha_1} f_0,$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{v(f_1 - f_0)}{u f_1} = 0.275.$$

测得从 B 点发出的声波频率为 f_2，此时飞机远离观测者飞行，u 取负值，故有

$$f_2 = \frac{v}{v + u\cos\alpha_2} f_0,$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{v(f_0 - f_2)}{uf_2} = 0.4125.$$

由图 9-4 所示几何关系

$$\overline{AB} = ut = h(\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2),$$

可得飞行高度 h 为

$$h = \frac{ut}{\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2} = \frac{ut}{\dfrac{\cos\alpha_1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_1}} + \dfrac{\cos\alpha_2}{\sqrt{1-\cos^2\alpha_2}}}$$

$$= 1.08 \times 10^3\ \mathrm{m}.$$

说明 普遍的多普勒频移公式的运用，是在纵向多普勒频移公式基础上提出的进一步的教学要求. 应用统一表达的多普勒频移公式求解具体问题时，一定要处理好波源速度 u（以及接收器速度 u'）的正负号. 无疑，它是由波源的运动情况决定的；波源趋近接收器时，有效波长 λ' 变小，而声速 $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{\mu}}$ 是由空气性质和热力学状态决定的，是不变的，与波源运动与否无关，所以接收器接收到的频率 f' 增大，u 取正值；同理，波源远离接收器，λ' 变大，f' 变小，u 取负值.

流体

知识点： 定常流动、连续性方程、伯努力方程、泊肃叶公式、斯托克斯公式、雷诺数

- 粘度系数：$f = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} \Delta S$
- 连续性方程：$v_1 \mathrm{d}s_1 = v_2 \mathrm{d}s_2$
- 伯努力方程：$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{Constant}$
- 泊肃叶公式：$v(r) = (R^2 - r^2)(p_1 - p_2)/4\eta\ell$
- 斯托克斯公式：半径为 r 的小球缓慢运动时所受阻力：$f = 6\pi\eta r v$
- 雷诺数：$Re = \frac{\rho v \ell}{\eta}$

静电场

知识点：库仑定律、电场强度、叠加原理、高斯定理、环路定理、电势

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \\
\boldsymbol{E} &= \frac{\boldsymbol{F}}{q_0} \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= 0 \\
U_p - U_Q &= \int_P^Q \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
\boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{\nabla} U
\end{aligned}
$$

1-15 实验发现在地球大气层的一个广大区域中存在着电场，其方向是竖直向下的. 在 2.0×10^2 m 高度，场强为 1.0×10^2 V/m，而在 3.0×10^2 m 高度，场强为 0.60×10^2 V/m. 试求从离地 200～300 m 之间大气中电荷的平均体密度 $\bar{\rho}$.

解 方法一：设 200 m 处场强为 E_a，300 m 处场强为 E_b，那么，ab 之间的高度差 $h=100$ m. 对于这两个高度来说，地面可看作平面，因而可作如图 1-8 的圆柱状高斯面. 且只计算两底面 S 上的电通量，将侧面的通量忽略. 根据高斯定理，有

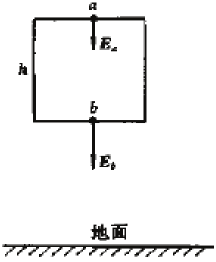


图 1-8

$$E_aS - E_bS = \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\rho}Sh,$$

因为 $E_a=100$ V/m，$E_b=60$ V/m，且真空介电常数 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ F/m，$h=100$ m，所以

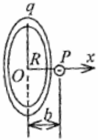
$$\bar{\rho}=\frac{\varepsilon_0(E_a-E_b)}{h}=3.5\times10^{-12}\ \mathrm{C/m^3}.$$

3. 半径为 R 的均匀带电细圆环，带电荷 q ($q>0$)，在圆环轴线 Ox 上的 P 点处有一质量为 m，电荷为 $-e$ 的电子，如图所示．环心 O 与 P 点距离 $OP=b$，且 $b \ll R$，电子由静止开始运动．

(1) 试说明电子作什么运动;

(2) 写出电子运动的表达式;

(3) 求电子由 P 点运动到 O 点所需的时间．



导体和电介质

知识点： 导体静电平衡条件、电容、电介质、极化强度矢量、极化电荷、电极化率、电位移矢量、高斯定理、环路定理、介电常数、边界条件、静电场能量密度

$$
\begin{aligned}
C &= Q/U \\
\sigma' &= \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P_n = P\cos\theta \\
\oint \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\sum q' \\
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \\
\boldsymbol{P} &= \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0\varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \sum q_0, \quad \oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0 \\
w_e &= \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

2-17 在半径为 R_1 的金属球之外有一层半径为 R_2 的均匀介质层(图 2-10)，设介质的相对介电常数为 ε_r，金属球带电量为 Q_0，求：

(1) 介质层内外的 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}$ 分布；

(2) 介质层内外表面极化电荷面密度.

解 (1) 由于球对称性，Q_0 在导体表面均匀分布，相应地介质表面的极化电荷分布也是均匀的，因此可以用 $\boldsymbol{D}$ 的高斯定理先求 $\boldsymbol{D}$ 的分布.

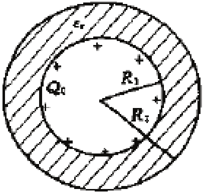


图 2-10

在介质内作一半径为 r 的球形高斯面，可得

$$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \boldsymbol{D}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_0,$$

即
$$4\pi r^2 D_1 = Q_0,$$

所以
$$D_1 = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \quad (R_1 < r < R_2).$$

同样在介质外应用高斯定理，可得

$$D_2 = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \quad (r > R_2).$$

可见 $D_1 = D_2$，$\boldsymbol{D}$ 的方向沿径矢.

根据关系式 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$ 可求得

$$E_1=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\quad (R_1<r<R_2),$$

$$E_2=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (r>R_2).$$

再根据关系式 $\boldsymbol{P}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\boldsymbol{E}$,可求得

$$P_1=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q_0}{4\pi r^2}\quad (R_1<r<R_2),$$

$$P_2=0\quad (r>R_2).$$

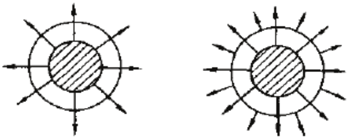
(2) 根据关系式 $\sigma'=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$,可求得介质内外表面极化面电荷的分布为

$$\sigma_1'=\boldsymbol{P}_1(R_1)\cdot\boldsymbol{n}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q_0}{4\pi R_1^2}=\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right)\frac{Q_0}{4\pi R_1^2},$$

$$\sigma_2'=\boldsymbol{P}_1(R_2)\cdot\boldsymbol{n}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q_0}{4\pi R_2^2},$$

其中 $\sigma_1'<0$, $\sigma_2'>0$.

$\boldsymbol{D}$ 线和 $\boldsymbol{E}$ 线分布如图 2-11 所示.



(a) $\boldsymbol{D}$ 线　　(b) $\boldsymbol{E}$ 线

图 2-11

恒定磁场

知识点： 磁感应强度、毕奥 -萨伐尔定律、高斯定理、环路定理、安培定律、磁矩、洛伦兹力

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \\
\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \\
\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0 \\
\oint\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \mu_0\sum I \\
\mathrm{d}\boldsymbol{F} &= I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{p}_m &= IS\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned} \tag{2}
$$

4-20 一半径为 R 的半圆形闭合线圈载有电流 I. 线圈放在均匀外磁场 $\boldsymbol{B}$ 中，$\boldsymbol{B}$ 的方向与线圈平面平行，如图 4-17 所示.

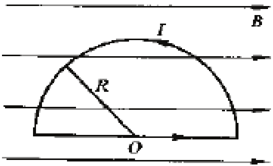


图 4-17

(1) 求此时线圈所受力矩的大小和方向；

(2) 如果线圈在力矩作用下转 90°(转到线圈平面与 $\boldsymbol{B}$ 垂直)，求磁力矩做的功.

解 (1) 该线圈的磁矩 $\boldsymbol{p}_m$ 的方向垂直纸面向外，大小为

$$p_m = \frac{1}{2}\pi R^2 I,$$

所以该线圈所受的力矩大小为

$$M = p_m B = \frac{1}{2}\pi R^2 IB.$$

力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向由 $\boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B}$ 确定出为垂直 $\boldsymbol{B}$ 向上，即从上往下看时，线圈是逆时针旋转的.

(2) 线圈旋转时力矩的功为

$$A = \int_0^{\pi/2} M d\theta = \int_0^{\pi/2} mB \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\pi R^2 IB.$$

磁介质

知识点： 分子磁矩、磁化电流、顺磁质、抗磁质、磁化强度矢量、磁场强度、磁化率、相对磁导率、磁导率、高斯定理、环路定理、边界条件

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= n\boldsymbol{p}_m, \quad \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} \\
\oint \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \sum I' \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{B}/\mu_0 - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}/\mu_0\mu_r = \boldsymbol{B}/\mu \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \sum I_0 \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0
\end{aligned}
$$

5-7 一无穷长圆柱形直导线，外面包有一层相对磁导率为 μ_r 的圆筒形磁介质．导线的半径为 R_1，磁介质的外半径为 R_2，如图 5-2 所示．当导线内有电流 I 通过时，求介质内、外的磁场强度和磁感应强度分布．

解 由于电流分布有轴对称性，因而磁场分布也有轴对称性，这就可以用安培环路定理 $\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}=\sum I_0$ 求解．

当 $r<R_1$ 时，根据安培环路定理，

$$2\pi r H_1=\frac{I}{\pi R_1^2}\cdot\pi r^2,$$

所以
$$H_1=\frac{I}{2\pi R_1^2}r.$$

当 $R_1<r<R_2$ 时，

$$2\pi r H_2=I,$$

所以
$$H_2=\frac{I}{2\pi r}.$$

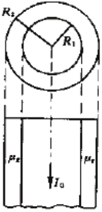


图 5-2

当 $r>R_2$ 时同样得

$$H_3=\frac{I}{2\pi r}.$$

再根据关系式 $B=\mu_0\mu_r H$，可求得各区域的磁感应强度分布为

$$r<R_1,\quad B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r;$$

$$R_1<r<R_2,\quad B_2=\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r};$$

$$r>R_2,\quad B_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

注意，在磁介质外，$\mu_r=1$．$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方向均与电流方向成右手螺旋．

电磁感应

知识点： 磁通量、法拉第定律、楞次定律、电动势（感生、感应、动生）、涡旋电场、自感系数、互感系数、磁能、磁能密度

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\
\varepsilon &= \int (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
\varepsilon &= \int \boldsymbol{E}_{\text{旋}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= -\oint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{B} \\
L &= \Psi/I, \quad M = \Psi_{12}/I_1 = \Psi_{21}/I2 \\
\varepsilon &= -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\
\varepsilon_1 &= -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \quad \varepsilon_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \\
W_{\text{自}} &= \frac{1}{2}LI^2 \\
w_m &= \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2
\end{aligned}
$$

6-7 如图 6-4 所示，长度为 L 的金属棒在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中沿逆时针方向绕 O 轴匀速转动，角速度为 ω，求：

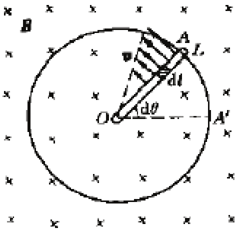


图 6-4

(1) 棒中感应电动势的大小和方向；

(2) AO 两点的电势差 U_{AO}.

解 方法一：(1) 用动生电动势公式求解. 金属棒旋转时切割磁感应线，所以棒内有动生电动势产生. 由于 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，可知棒上各点速度大小不同，但方向一致（见图 6-4）. 由 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 可以确定 AO 段上洛伦兹力（非静电力）是从 A 指向 O 的，所以电动势的方向也是从 A 到 O 的. 取线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向也沿 A 到 O（即与 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 同方向），则这一小段上的电动势为

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\mathrm{d}l.$$

因 $\boldsymbol{r}$ 是从 O 到各线元的径矢，与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向相反，所以 $\mathrm{d}l=-\mathrm{d}r$，

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=-Bv\mathrm{d}r.$$

整个棒上的感应电动势是上式从 A 到 O 的积分，

$$\mathscr{E}=\int\mathrm{d}\mathscr{E}=\int_A^0(-Bv\mathrm{d}r)=-\int_L^0B\omega r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}B\omega L^2.$$

6-8 如图 6-5，有一长直导线载有 I_0 的电流，旁边有一与它共面的方线圈 $ABCD$，方线圈边长为 $2a$，其几何中心到长直导线的垂直距离为 b，若它正以速度 v 离开直导线，求线圈中感应电动势的大小和方向.

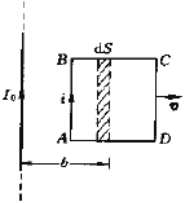


图 6-5

解 方法一：应用法拉第定律求解.

先判断感应电动势的方向. 长直导线在方线圈所在区域激发一个垂直于纸面向里的非均匀场，磁感应强度的大小为

$$B=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi x},$$

式中 x 为场点到直导线的距离. 方线圈远离长直导线运动，回路中的磁通量减少. 根据楞次定律，感应电流 i 的磁通量应补偿回路中磁通量的减少，所以感应电流的方向如图所示，感应电动势的方向是从 $A\to B\to C\to D$.

下面求感应电动势的大小. 设在任意时刻 t，线圈中心线离长直导线的距离为 x，则 AB 和 CD 两边离直导线的距离分别为 $(x-a)$ 及 $(x+a)$. 线圈内的磁通量为

$$\Phi=\iint_{(S)}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

方法二：用动生电动势公式求解.

因 AB 和 CD 两边切割磁感应线，所以只有这两边内有动生电动势产生，

$$\mathscr{E} = \int_A^B (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_C^D (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi} I_0 a v \left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{b+a} \right).$$

电动势的方向可根据$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$即洛伦兹力的方向判断. 在 AB 和 CD 两边中，$(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$的方向相同. 但由于 AB 边处的磁场大于 CD 边处的磁场，所以 AB 边中的电动势大于 CD 边中的电动势，总的电动势就是沿 AB 方向的，与方法一的结论相同.

说明 本题重点是说明，在用法拉第定律求导体回路在非均匀磁场中运动时的电动势时，关键是正确计算导体回路中的磁通量. 本

麦克斯韦电磁场理论

知识点： 位移电流、传导电流、麦克斯韦方程组（微分、积分）、介质方程、电磁波

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_D &= \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \quad I_D = \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= I_0 + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= q_0, \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= -\iint \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0, \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= I_0 + \iint \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}, \quad , \boldsymbol{j}_0 = \sigma \boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

8-1 圆形平行板电容器半径为 R，沿平板轴线的长直导线中通有交变电流，如图 8-1 所示. 设电荷在极板上均匀分布，且以 $\sigma=\sigma_0\sin\omega t$ 的规律变化，其中 ω 是稳定的角频率. 忽略边缘效应，求极板间的位移电流密度及电容器外 a 点、电容器内 b 点的磁场强度大小. 已知 a，b 两点离轴线的距离均为 r.

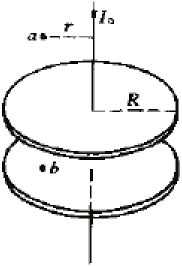


图 8-1

解 极板上的自由电荷面密度随时间改变，说明导线中的传导电流及电容器中的电位移都是随时间改变的. 于是两板间就有位移电流. a，b 两点的磁场由全电流产生.

导线中的传导电流为

$$I_0=\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\sigma S)}{\mathrm{d}t}=\pi R^2\sigma_0\omega\cos\omega t.$$

电容器中的电位移 D 可根据高斯定理求出，

$$D = \sigma_0 \sin \omega t,$$

于是位移电流密度为

$$j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma_0 \omega \cos \omega t,$$

$\boldsymbol{D}$ 和 j_D 的分布都是均匀的.

因为 I_0 及 j_D 的分布都有轴对称性,所以磁场强度的分布也有轴对称性. 这就可以从推广后的安培环路定理求 a,b 两点的磁场.

过 a 点作一半径为 r 的圆形环路包围导线,因电容器外 $I_D=0$,所以

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_0,$$

即
$$H_a = \frac{I_0}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi r} \cdot \pi R^2 \sigma_0 \omega \cos \omega t$$
$$= \frac{R^2}{2r} \sigma_0 \omega \cos \omega t.$$

过 b 点作一同样的环路,因电容器内 $I_0=0$,所以

$$H_b = \frac{1}{2\pi r} \cdot j_D \cdot \pi r^2 = \frac{r}{2} \sigma_0 \omega \cos \omega t.$$