



上一讲回顾

- Q1:** 为什么要研究弯曲变形 (§ 12-1)
Q2: 梁上任意一点的变形究竟用什么参量来描述 (§ 12-1)
Q3: 这个参量与什么有关系 (§ 12-2)
Q4: 如何求得这个描述变形的参量 (§ 12-3&4)
Q5: 如何应用 (§ 12-5&6)

弯曲变形

- 轴线由直线变为是一条连续、光滑曲线—挠曲轴
- 对称弯曲时，挠曲轴为位于纵向对称面的平面曲线
- 对于细长梁，剪力对弯曲变形影响一般可忽略不计因而横截面仍保持平面，并与挠曲轴正交



上一讲回顾

挠曲轴近似微分方程

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{w''(x)}{(1+[w'(x)]^2)^{3/2}}$$

$$\frac{w''(x)}{(1+[w'(x)]^2)^{3/2}} = \pm \frac{M(x)}{EI}$$

方程取正号

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

→应用条件:

- ① $\sigma_{\max} \leq \sigma_p$
- ② 小变形
- ③ 坐标轴 w 向上，弯矩下凹为正

计算梁位移的积分法

$$\frac{dw}{dx} = \theta = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C$$

$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx + Cx + D$$



上一讲回顾

计算梁位移的积分法

$$\frac{dw}{dx} = \theta = \int \frac{M(x)}{EI} dx + C$$

$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx + Cx + D$$

计算梁位移的叠加法

载荷叠加: 当梁上作用几个载荷时，任一横截面的总位移，等于各载荷单独作用时在该截面引起的位移的代数和或矢量和

连续变形效应叠加法: 静定梁或刚架的任一横截面的总位移，等于各梁段单独变形（其余梁段刚化）在该截面引起的位移的代数和或矢量和。



例: E 常数, $I_2 = 2I_1$, 求 w_C θ_C

1. BC段变形效应 (刚化AB段)

$$\theta_{C1} = \frac{Fa^2}{2EI_1} \quad w_{C1} = \frac{Fa^3}{3EI_1}$$

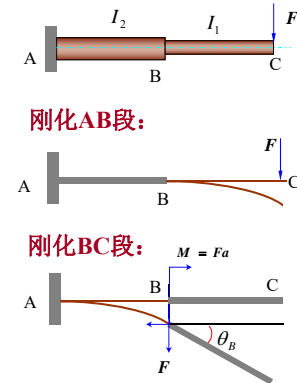
2. AB段变形效应 (刚化BC段)

$$\theta_{C2} = \theta_B = \theta_{B,F} + \theta_{B,M}$$

$$= \frac{Fa^2}{2EI_2} + \frac{Fa \cdot a}{2EI_1} = \frac{3Fa^2}{4EI_1}$$

$$w_{C2} = w_{B,F} + w_{B,M} + \theta_B \cdot a$$

$$= \frac{Fa^3}{3EI_2} + \frac{Fa^3}{2EI_2} + \frac{3Fa^3}{4EI_1} = \frac{7Fa^3}{6EI_1}$$



工程力学 一四课

例: E 常数, $I_2 = 2I_1$, 求 w_C , θ_C

$$\theta_{C1} = \frac{Fa^2}{2EI_1} \quad w_{C1} = \frac{Fa^3}{3EI_1}$$

$$\theta_{C2} = \frac{3Fa^2}{4EI_1} \quad w_{C2} = \frac{7Fa^3}{6EI_1}$$

3. 总转角和挠度

$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = \frac{5Fa^2}{4EI_1}$$

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = \frac{3Fa^3}{2EI_1}$$

工程力学 一四课

例: E 常数, $I_2 = 2I_1$, 求 w_C , θ_B

• 逐段变形效应叠加法

• 对称性的应用

$\therefore w_C = w_B$

工程力学 一四课

例: 组合梁的变形分析, 求: $\theta_{C左/右}$

解: 梁挠曲轴如图

AC悬臂梁

$$\theta_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

CB保持直线 $\theta_2 = \frac{w_C}{l} \quad w_C = \frac{ql^4}{8EI}$

$$\therefore \theta_{C左/右} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{7ql^3}{24EI}$$

工程力学 一第十二章 弯曲变形

§ 12-5 简单静不定梁

• 静不定度与多余约束

5-3=2 度静不定

6-3=3 度静不定

静不定度 = 支反力(力偶)数 - 有效平衡方程数

多余约束 多于维持平衡所必须的约束

静不定度 = 多余约束数

多余反力 与多余约束相应的支反力或支反力偶矩

工程力学 一第十二章 弯曲变形

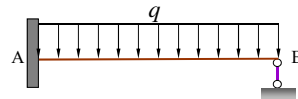


• 相当系统

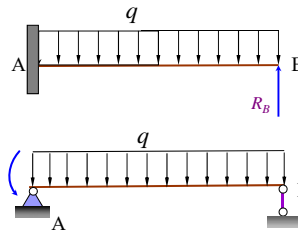
相当系统：受力与原静不定梁相同的静定梁

相当系统的选择不是唯一的

相当系统1



相当系统2



9

工程力学 一第十二章 弯曲变形



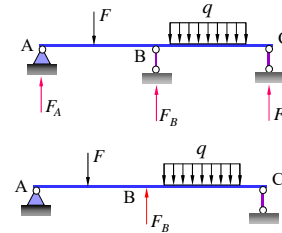
• 静不定问题分析例：

问题

- ☞ 平面问题有三个平衡方程；
- ☞ 水平方向不受力，两个有效平衡方程；
- ☞ 有三个未知力，一度静不定。

分析：

以支座A、B、C任意一个的铅垂约束作为多余约束。



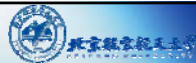
求解：

解除多余约束，代以约束反力，构造相当系统；利用相应变形协调条件求解。例如解除约束B，变形协调条件为

$$w_B = 0$$

10

工程力学 一第十二章 弯曲变形



小结：分析方法与分析步骤

方法：选取与解除多余约束，代之以支反力；
分析相当系统，使多余约束点处满足位移边界或连续条件

- 步骤：
1. 判断静不定度（确定多余约束数）；
 2. 选取与解除多余约束，建立相当系统；
 3. 列出多余约束处的变形协调条件；
 4. 结合平衡方程，求多余支反力。

相当系统选取不唯一，一般选择求解最简单的一种

11

工程力学 一第十二章 弯曲变形



例：求支反力

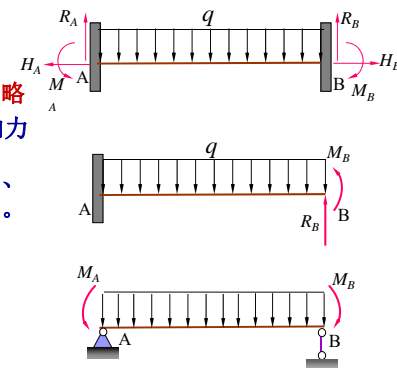
1. 静不定度：6-3=3

小变形，轴向变形可忽略
 $H_A = H_B = 0$ 。两多余未知力

2. 选取相当系统：右中、下图都合适。选右中图。

3. 建立变形协调条件

$$\begin{cases} w_B = 0 \\ \theta_B = 0 \end{cases}$$



12

工程力学 一第十二章 弯曲变形



$$w_B = 0, \theta_B = 0$$

4. 联立求解

$$w_B = w_B^R + w_B^M + w_B^q = \frac{R_B l^3}{3EI} + \frac{M_B l^2}{2EI} - \frac{ql^4}{8EI} = 0 \quad (1)$$

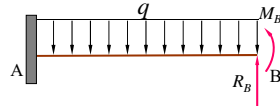
$$\theta_B = \theta_B^R + \theta_B^M + \theta_B^q = \frac{R_B l^2}{2EI} + \frac{M_B l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI} = 0 \quad (2)$$

$$R_B = \frac{ql}{2}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{24}$$

对称性的应用

利用对称性直接求出 $R_A = R_B = ql/2$, 它可取代方程 (1)、(2) 之一。



13

工程力学 一第十二章 弯曲变形



三人扛木问题

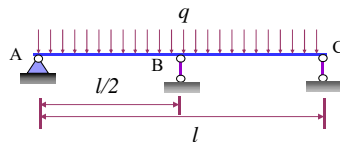


等截面原木长 $l=5m$, 直径 $d=30cm$, 密度 $=0.7g/cm^3$, 弹性模量 $E=4GPa$. 三个工人着力点分别为原木的两端及中点. 试求每人分担的原木重量.

解: 首先将问题抽象成材料力学模型, 然后依据相关理论求解.

14

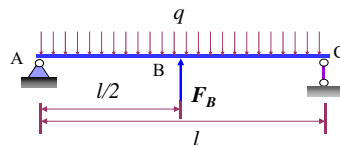
工程力学 一第十二章 弯曲变形



三支座梁, $q = \rho A = 495g/cm = 484 N/m$

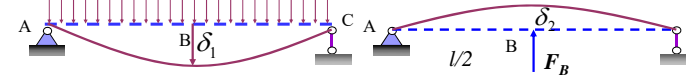
问题转化为求解上述静不定梁三个支座的支反力!

移去支座B, 代之以支反力 F_B , 解静定梁, 求支反力 F_B , 变形协调条件 $\delta_B = 0$



15

工程力学 一第十二章 弯曲变形



查附录D-8: 均布力 q 引起的B点挠度:

$$\delta_1 = -\frac{5ql^4}{384EI} = -\frac{5 \times 484 \times 5^4 \times 64}{384 \times 2 \times 10^9 \times 3.14 \times 0.3^4} = -0.00496(m) = -4.96(mm)$$

查附录D-6: 集中力 F_B 引起的B点挠度: $\delta_2 = \frac{F_B l^3}{48EI}$

$$\text{令 } \delta_B = \delta_1 + \delta_2 = 0 \Rightarrow F_B = 0.625G = 1512N$$

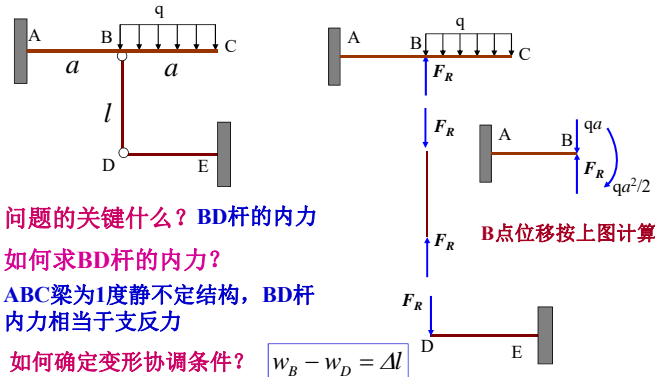
$$\text{由平衡方程: } F_A = F_C = \frac{G - F_B}{2} = 454N$$

16

工程力学 一第十二章 弯曲变形



思考：各杆、梁的EI及EA均已知，求下列结构的支反力



17

工程力学 一第十二章 弯曲变形



§ 12-6 梁的刚度条件与合理刚度设计

一、梁的刚度条件

$$|w|_{\max} \leq [\delta]$$

$$|\theta|_{\max} \leq [\theta]$$

$[\delta]$ ——许用挠度， $[\theta]$ ——许用转角

一般用途轴： $[\delta] = (5/10000 \sim 3/10000)l$

重要轴： $[\delta] = (2/10000 \sim 1/10000)l$

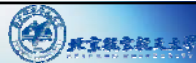
起重机大梁： $[\delta] = (1/700 \sim 1/1000)l$

土建工程中的梁： $[\delta] = (2/10000 \sim 1/10000)l$

安装齿轮或滑动轴承处： $[\theta] = 0.001 \text{ rad}$

18

工程力学 一第十二章 弯曲变形



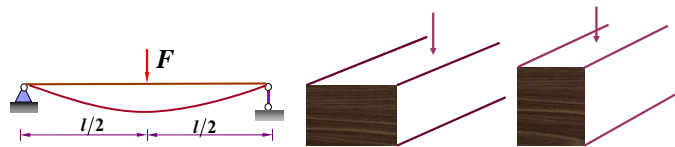
二、梁的合理刚度设计

依据 $w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx$ 对比强度问题 $\sigma = \frac{My}{I}$ 或 $\sigma = \frac{M}{W}$

1. 与梁的合理强度设计相似点

同样依赖于 M 与 I

让材料远离截面中性轴，例如采用工字形与盒形薄壁截面

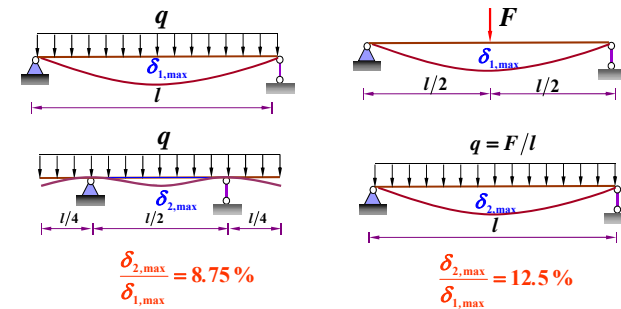


19

工程力学 一第十二章 弯曲变形



合理安排约束和加载方式(调整、减少 $M(x)$)



增加约束，制作成静不定梁

20

工程力学 一第十二章 弯曲变形



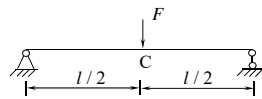
合理选取材料—选择E大的材料

$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx \quad E \text{大的材料, 强度未必高}$$

适当减小梁的跨度

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Fl, \quad M_{\max} \propto l$$

$$w_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad w_{\max} \propto l^3$$



更有利于刚度的合理设计

21

工程力学 一第十二章 弯曲变形

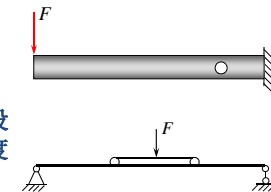


2. 梁的合理刚度设计与梁的合理强度设计的不同点

(1) 强度是局部量, 刚度是整体量 (积分)

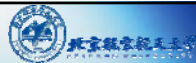
$$w = \iint \frac{M(x)}{EI} dx \quad \sigma = \frac{My}{I} \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

- 小孔显著影响强度, 但对刚度影响甚微
- 辅梁、等强度梁是合理强度设计的有效手段, 提高梁的刚度须整体加强



22

工程力学 一第十二章 弯曲变形



(2) 强度与材料 σ_s 和 σ_b 相关, 刚度与 E 相关

高强度钢一般不提高 E

钢与合金钢: $E = 200 \sim 220 \text{ GPa}$

铝合金: $E = 70 \sim 72 \text{ GPa}$

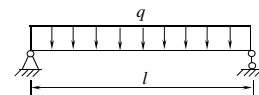
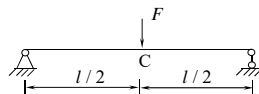
(3) 刚度对梁的跨度更敏感

$$M_{\max} = \frac{1}{4}Fl, \quad M_{\max} \propto l$$

$$W_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}, \quad W_{\max} \propto l^3$$

$$M_{\max} = \frac{1}{8}Fl, \quad M_{\max} \propto l^2$$

$$W_{\max} = \frac{5Fl^3}{384EI}, \quad W_{\max} \propto l^4$$



23

工程力学 一第十二章 弯曲变形



作业:

12-12(b)、16、19

24