复合函数的极限及一致连续问题

摘要：

首先，我们在日常生活中会有很多需要用到复合函数的地方，复合函数在实际应用中有很重要的地位，再考虑到复合函数的美学价值，及其在数学领域的学术意义，本文对复合函数的重要性进行了讨论，说明了研究复合函数的价值。

其次，通过对课本中结论的思考，本文对复合函数极限的求法进行了拓展，降低了课本中定理的要求，使得对复合函数的应用更加方便。

考虑到一致连续在函数应用中的重要意义，以及一致连续这一重要特点对研究其他结论的作用和价值，开始对复合函数一致连续问题进行探究。本文首先通过几道例题，引出了对复合函数一致连续问题的思考，并进行了相关探究，得出了一些一致连续及不一致连续的判定定理，并给出了证明。之后，通过对之前引例的证明，突出了所得结论在例题中的应用价值。

接下来，通过几道其他例题，对复合函数一致连续问题中的没能用本文定理解决的问题进行了进一步的思考与探究，提出了研究的思想方法，给出了探究的思维模式。

以上探究引出了我们对继续探究复合函数相关结论的兴趣，进行总结。

关键字：复合函数，一致连续，重要性，极限

Abstract:

First of all, we will use composite function a lot in many conditions in everyday life. Also, composite function is put on a very important position in the actual application. Considering that the composite function is of high value, and its academic significance in mathematics, our paper refers to the importance of the composite function , and the research we did in the value of the composite function.

Second, via thinking over of the conclusion in the textbook , this paper expands the way to find the composite function's limit, and reduces the demands of the theorem in the textbook, which makes the application of composite function more convenient.

Considering the significance of uniform continuity function in applications, as w ell as what this important characteristic do to the continuous research to other concl usions,we began to explor the uniform continuity function of the composite function .We first use a few examples to lead to the idea of the uniform continuity of the com pound function uniform continuity.And then we made further exploration in the sam e aspect,which give us some new ideas in the uniformly continuous function of the c omposite function. we look foward to some new theorem to estimate whether a function is uniformly continuous or not.

Then, in order to explore the problems which cannot solve by this theorem, we list out several other examples of composite uniformly continuous function for further thinking and learning. After that we put forward the thinking method of this kind of problems, and find the major way of thinking when come across these problems.

These explorations make us more interested in exploring the new conclusions in compound function, and our thoughts were summarized in this paper.

Key word: composite function, a uniformly, importance, and limit

0 写在最前

对于解决很多数学问题来说，复合函数其实是一个很美好的东西。因为有了复合函数，我们可以在研究好简单的函数性质的基础上探索更加复杂的函数的性质。而当复杂函数被一层一层化简，拆分成为简单函数的时候，再多复杂的问题都变得简单易解，然后我们就只是把简单的问题简单的相合，就得到了我们想要的结果。其实这个世界上的所有问题应该都可以化简成简单问题的和，比如你在想如何能建造一个飞行器的时候，你会把它拆分成各种小零件，然后只需要对每个小零件进行设计、制造，再把他们组合到一起。每个小零件各司其职，共同为这样一个大飞行器服务。而数学中的复合函数，正体现出了实际生活解决复杂问题的方法的思想本质。复合函数确实是我们研究复杂数学问题的重要工具，下面我们就对它的极限求法和一致连续问题进行讨论和研究。

我们在学习函数一致连续问题的时候，总会被那些严格的证明搞的头晕脑胀，尤其是碰到复合函数一致连续的问题的时候，更是觉得复杂困难，那么，我们能不能就只痛苦一次，一次性的探索出复合函数一致连续的几个常用结论，这样，我们在应用时，便可直接使用这些结论，从而达到节约时间、方便理解记忆的目的。

下面，我们就要开始喽~

1 复合函数的极限求法扩展

首先我们来看一下复合函数的极限定理的内容：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0$，且在$U_{\delta}^{o}(t_0)$内$g(t)\neq x_0$，则

$\lim\limits_{t\to t_0} f\left[g(t)\right]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

由此，我们可以通过下面这条推论来求解复合函数极限问题

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{t\to t_0} g(t)=x_0,$

且$\exists A\in D_g, \forall t\in\left[t_0-A, t_0+A\right]$时

有有限个t满足$g(t)=x_0$，那么：$\lim\limits_{t\to t_0} f\left[g(t)\right]=A$。

下面给出证明：

当$t\in\left[\, A-t_0,\ A+t_0 \,\right]$时有有限个$t$满足$g(t)=x_0$，

那么不妨设$t_1, \ldots, t_n \in\left[\, A-t_0,\ A+t_0 \,\right]$（$n$为有限数），

满足$g(t_i)=x_0(i=1, \ldots, n)$，

取δ=min{$\left|t_1-t_0\right|$，.....，$\left|t_n-t_0\right|$}，

则在$U_{\delta}^{o}(t_0)$中有$g(t)\neq x_0$成立，故$\lim\limits_{t\to t_0} f\left[\, g(t) \,\right]=A$。

这条推论的好处就是我们省去了找δ的过程，即便是在$g(t)$的定义域内有$g(t)=x_0$成立，只要满足这个条件的t是有限个，那么我们就可以直接求出复合后$t\to t_0$时函数的的极限与$\lim\limits_{x\to x0} f(x)$相等。

2 复合函数的一致连续性问题探究

定理 1

设$f:\mathrm{D}_f\to R, g:\mathrm{D}_g\to R$且$\forall x\in \mathrm{D}_g$，$g(x)\in \mathrm{D}_f$，如果$f$在$\mathrm{D}_f$上一致连续，$g$在$\mathrm{D}_g$上一致连续，则$f\circ g(x)$在$\mathrm{D}_g$上一致连续。

证明：由于f在D_f上一致连续，因此有

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_1>0,\ \forall x_1, x_2 \in D_f,\ \left|x_1-x_2\right|<\delta_1 : \left|f(x_1)-f(x_2)\right|$$

又由于g在D_g上一致连续，对于上式δ_1，有

$\exists \delta>0,\ \forall x_1,\ x_2\in D_g,\ \left|x_1-x_2\right|<\delta:\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<\delta_1$，

因此当$\left|x_1-x_2\right|<\delta$，又

$$\left|f(g(x_1))-f(g(x_2))\right|<\varepsilon$$

结论得证明。

推论 1

设 $f_i : \mathrm{D}_i \to D_{i-1}$, i=1, 2, … , n，且 f_i 在 D_i 上一致连续，则 $f_1 \circ f_2 \circ \cdots\ f_n$ 在 D_0 上一致连续。

定义 1（函数的振荡区）

设 $f : \mathrm{D}_f \to R$, 如果 f 在 D_f 上连续而不一致连续，则

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta_1 > 0,\ \exists x_1,\ x_2 \in D_f,\ \left| x_1 - x_2 \right| < \delta_1 : \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \geq \varepsilon_0 ,$$

定义集合

$$E_f = \left\{ x_1,\ x_2 \ \middle| \forall \delta_1 > 0,\ x_1,\ x_2 \in D_f,\ \text{且}\ \left| x_1 - x_2 \right| < \delta_1 : \left| f(x_1) - f(x_2) \right| \geq \varepsilon_0 \right\}$$

集合 E_f 为函数的振荡区。

分析一：

首先我们可以通过下面的几个例子来探究复合后所得函数的一致连续性。

1. $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$

则此时 $f \circ g(x) = x$，它是一致连续的。

分析可知，这种情况下虽然 g(x)的值落入了 f(x)的振荡区，但是由于 g(x)的 随 x 的变化率小于 x 的变化率，那么当 g(x)代替 x 充当 f(x)的自变量时，对 f(x)值的变化有抑制作用，使其变化速度减慢，造成 f(g(x))变为了一致连续函数。

2. $f(x) = x^2,\ g(x) = ax.(a \in R)$

则此时 $f \circ g(x) = (ax)^2$，它是不一致连续的。

分析可知，g(x)的值落入了 f(x)的振荡区，并且 g(x)的变化率与 x 的变化率相同（或比 x 大或者略小于 x，同属于这种情况），那么当 g(x)代替 x 充当 f(x)的自变量时，对 f(x)值的变化没有过分抑制作用，故 f(g(x))仍为不一致连续函数。

3. $f(x) = x^2,\ g(x) = ax(0 \leq x \leq \beta).(a,\ \beta \in R)$

则此时 $f\circ g(x)=(ax)^2(0\le x\le\beta)$，它是一致连续的。

分析可知，这种情况下 g(x)的值没有落入 f(x)的振荡区，而是只在 f(x)比较图像相对振荡区图像比较平稳的位置取值，即相当于 $f(x)=x^2(0\le x\le\beta^2),\ g(x)=ax(0\le x\le\beta).(a,\ \beta\in R)$ 的复合，即两个一致连续函数的复合，那么又回到了定理一中所说的情况，此时 f(g(x))是一致连续函数。

通过上述三个例子我们可以归纳出一个一般结论：对于外层不连续内层连续的两个函数的复合，如果内层函数的值域和外层函数振荡区交集不为空集，并且 g(x)的变化率大于或等于 x 的变化率，那么复合后的函数不一致连续；如果内层函数的值域和外层函数振荡区交集为空集，那么复合后的函数一致连续。

下面我们以数学语言给出定理形式：

定理 2

设 $f:\mathrm{D}_f\to R, g:\mathrm{D}_g\to R$ 且 $\forall x\in\mathrm{D}_g$，$g(x)\in\mathrm{D}_f$，如果 f 在 D_f 上连续而不一致连续，g 在 D_g 上一致连续，

1）如果 $g(x)$ 的值域与 E_f 的交集不为空集，并且 $\left|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right|\ge 1$，则 $f\circ g(x)$ 在 D_g 上不一致连续。

2）如果 $g(x)$ 的值域与 E_f 的交集为空集，则 $f\circ g(x)$ 在 D_g 上一致连续。

分析二：

如果 $f(x)$ 在 D_f 上一致连续，$g(x)$ 在 D_g 上不一致连续。这种情况与分析一中的各种情况类似，只是抑制者换位而已，即要看 f(x)的对 g(x)的抑制作用的大小确定复合后的一致连续性。同样也是抑制作用大则一致连续，小则不一致连续。

下面我们以数学语言给出定理形式：

定理 3

如果 f 在 D_f 上一致连续，g 在 D_g 上不一致连续，$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$, 则 $f\circ g(x)$ 在 D_g 上不一致连续。

下面给出证明：

定理 2：证明：

1）

若 $f(x)$ 在 D_f 连续而上不一致连续，且记其振荡区为 E_f，

若 $g(x)$ 在 D_g 上一致连续，且有 $\left|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$，

且 $g(x)$ 的值域与 E_f 的交集不为空集，

又 $\because$ $f(x)$，$g(x)$ 连续

那么，对于 $\forall\delta>0$，一定存在 $g(x_1)$，$g(x_2)$ 是满足 $|g(x_1)-g(x_2)|<\delta$，

且有 $g(x_1)\in E_f$，$g(x_2)\in E_f$，

则对于上述 $g(x_1)$，$g(x_2)$，

$\because \left|\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$，

$\therefore |x_1-x_2|\leq|g(x_1)-g(x_2)|<\delta$，

$\because$ $g(x_1)\in E_f$，$g(x_2)\in E_f$，

即 $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x_1,x_2\in D_g$，

$|x_1-x_2|\leq|g(x_1)-g(x_2)|<\delta$，

而 $|f(g(x_1))-f(g(x_2))|\geq\varepsilon_0$，

即 $|f\circ g(x_1)-f\circ g(x_2)|\geq\varepsilon_0$，

$\therefore f \circ g(x)$ 在 D_g 上不一致连续。

2）

若 $f(x)$ 在 D_f 上连续而不一致连续，其振荡区为 E_f，

$g(x)$ 在 E_f 上一致连续，

且 $g(x)$ 的值域与 E_f 的交集为空集，

那么，取 $f_1(x) = f(x)$，其定义域为 D_{1f} 满足 $\mathrm{D}_{1f} \cup E_f = \mathrm{D}_f$

则 $f \circ g(x) = f_1 \circ g(x)$，

由定理 1 知

$f_1 \circ g(x)$ 在 D_g 上一致连续，

即有 $f \circ g(x)$ 在 D_g 上一致连续。

定理 3

证明：

若 $f(x)$ 在 D_f 上一致连续，$g(x)$ 在 D_g 上不一致连续，

且有 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| \geq 1$，

$\because g(x)$ 在 D_g 上不一致连续，

$\therefore \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in D_g$，

$|x_1 - x_2| < \delta : |g(x_1) - g(x_2)| \geq \varepsilon_0$，

对于上述 $g(x_1), g(x_2)$，

$\because \left|\dfrac{f(g(x_1))-f(g(x_2))}{g(x_1)-g(x_2)}\right| \geq 1$，

$\therefore |f(g(x_1)) - f(g(x_2))| \geq |g(x_1) - g(x_2)| \geq \varepsilon_0$，

即 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in D_g$，

$|x_1-x_2|<\delta$，而$|f(g(x_1))-f(g(x_2))|\geq\varepsilon_0$，

即$|f\circ g(x_1)-f\circ g(x_2)|\geq\varepsilon_0$，

$\therefore f\circ g(x)$在D_g上不一致连续。

例 1. $f(x)=x^2,\ g(x)=ax.(a\in R)$

则此时$f\circ g(x)=(ax)^2$，它是不一致连续的。

解：$\because g(x)$的值落入了$f(x)$的振荡区

又$\because \left|\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$，

由**定理 2**：

$\therefore f(g(x))$仍为不一致连续函数。

例 2. $f(x)=x^2,\ g(x)=ax(0\leq x\leq\beta).(a,\ \beta\in R)$

解：$f\circ g(x)=(ax)^2(0\leq x\leq\beta)$，

$\because g(x)$的值域与$f(x)$ 的振荡区E_f的交集为空集，

由**定理 2**：

$\therefore$ $f(g(x))$是一致连续函数。

例 3. $f(x)=ax,\ g(x)=x^2$

解：$f\circ g(x)=ax^2$，

$\because f(x)$一致连续，$g(x)$不一致连续，

又$\because \left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$，

由**定理 3**

$f\circ g(x)$不一致连续。

例 4. $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=x^2$

则此时 $f\circ g(x)=|x|$，它是一致连续的

因为不满足**定理 3** 中的$\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1$条件，应具体问题具体分析。

从上面的这些简单的例子，都是我们在前面分析过的，现在通过我们给出的定理，可以很快速方便的得到结论。当然，通过代入分析法也可以很快得到结论，但是代入法只限于一些形式非常简单的函数的复合，如果要进行对复杂函数的再复合的判断，我们给出的定理的优势就一下子显现出来了。

如此分析，对于上述那些要进行复合的复杂函数，我们可以把他们化简为简单函数的复合，然后通过复合的一致连续规律探索这个复杂函数是否一致连续的问题，进而探索这些复杂函数的复合问题。而实际的很多与函数有关的问题，都不会是简单的。

定理 4

设 $f:\mathrm{D}_f\to R, g:\mathrm{D}_g\to R$ 且 $\forall x\in \mathrm{D}_g$，$g(x)\in \mathrm{D}_f$，如果 f 在 D_f 上连续而不一致连续，g 在 D_g 上连续而不一致连续，其振荡区分别为 E_f，E_g

1） 当 $x\in Z_g$ 时，如果 $g(x)$ 的值域与 E_f 的交集为空集，且有

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1,$$

则 $x\in E_g$ 时 $f\circ g(x)$ 不一致连续（证明同上面的证明（3））;

2） 当 $x\notin E_g$ 时，如果 $g(x)$ 对应的值域与 E_f 的交集不为空集，

并且$\left|\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leq 1$，则 $x\notin E_g$ 时 $f\circ g(x)$ 一致连续（证明同上面的证明（2））。

例 6. $f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}$

解：$\because$ $f\circ g(x)=x$，

满足**定理 4** 的条件，

故它是一致连续的。

例 7. $f(x)=x^2$，$g(x)=x^2$

解：$\because$ $f\circ g(x)=x^4$，

满足**定理 4** 的条件，

故它是不一致连续的。

2 思考

我们可以得出初步结论：$f(g(x))$ 的一直连续性不定，下面就不同情况进行分析。

首先看 x 落在 $g(x)$ 的振荡区的时候，$g(x)$ 的值是否落入了 $f(x)$ 的振荡区。如果没有，那么就可以将 $f(g(x))$ 分为两个部分，而这两个部分刚好分别复合 2.和 3.中条件，就可以通过相应的方法研究。如上述例 6 中所说可以研究 $f(g(x))$ 可以分到 x 分别在(0,1]和[1,+∞)两个区间上时的情况的研究。如果 x 落在 $g(x)$ 的振荡区的时候，$g(x)$ 的值也落入了 $f(x)$ 的振荡区，即上述例 7 中的情况，则 $f(g(x))$ 一定不一致连续，因为 x 的微小变化可以引起 $g(x)$ 的很大变化，进而引起 $f(x)$ 的更大变化,因此复合后的函数不一致连续。这是我们分析复合函数一致连续问题的一般思路，通过这一思路我们可以解决很多复合函数一致连续的问题。

3 写在最后

在对复合函数的一致连续问题进行探究之后，我们深深感觉到了复合函数的魅力，虽然在考虑复合问题时会比只考虑简单单层函数多一点点困难，但是，复合函数在应用和复杂问的研究上所能起到的作用的巨大是我们无法否认的。同时，在思考的过程中，我们锻炼了自己的思维能力。有时候，一场头脑风暴真的是一种很美好的享受，尤其是当我们一直在想的问题终于有了一个结果的时候。思考是一个很美好的过程，因此，我们不会放弃对复合函数问题的继续探究和思考，虽然有些想法还只是点滴的灵感，还不能成文，但这些想法对于我们继续学习工科数学分析及其他一些学科都有不小的帮助。

我们知道前辈们已经对复合函数等各种问题进行了很详细的研究，有很多知识是我们还没有学习到的，所以好多专业的论文也不能看得太懂，但是我们会继续努力学习，希望有一天可以了解与复合函数有关的更多的知识。