

第二章

信号分析和处理基础

傅里叶级数， 傅里叶变换

→ 傅里叶分析



傅立叶变换是现行系统分析的一个有力工具，它是我们能够定量的分析诸如数字化系统，采样点，电子放大器，卷积滤波器，噪声，显示点等的作用（效应）。把傅立叶变换的理论同其物理解释相结合，将大大有助于解决大多数图像处理问题。而发展了这两种技能的人一般都是电子工程或是物理光学方面的学生，他们在学习过程中培养了这种技能。对任何想在工作中有效使用数字图像处理的人来说，把时间用在熟悉傅立叶变换上是很值得的。

—引自K.R.Castleman.数字图像处理

1807年：傅里叶提出“任何”周期信号均可用正弦级数表示

1829年：狄义赫利指出，分解要满足若干限制条件（三个）

本章概要

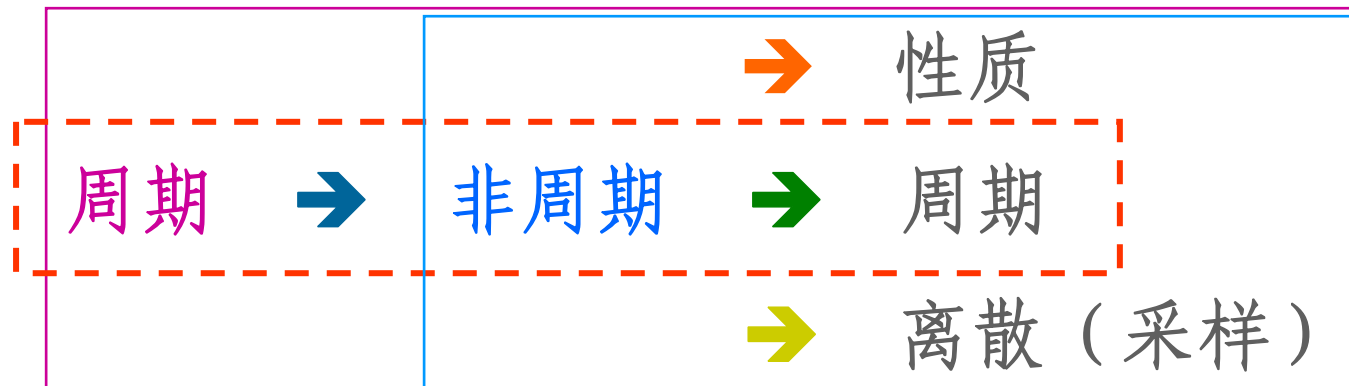
周期信号的正交函数分解→

周期信号的傅里叶级数（建立信号频谱的概念）→

非周期信号的傅里叶变换（连续频谱）→傅里叶变换的性质→

周期信号的傅里叶变换→

采样信号（离散信号）的傅里叶变换 → 采样定理



- **系统**：若干相互作用、相互关联事物组合而成具有特定功能的整体
 - 激励：系统的输入
 - 响应：系统的输出 $x(t) \rightarrow y(t)$
- **系统的性质**（属性）：
 - **线性性**： $L[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \Rightarrow c_1L[x_1(t)] + c_2L[x_2(t)]$
 - 可加性、齐次性
 - **时不变性**： $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$
 - **稳定性**：
 - BIBO原则：输入有界，则输出有界
 - **因果性**：
 - 某一时刻的响应只与该时刻以前的系统激励（输入）有关，而与该时刻以后的系统激励无关。

系统的描述分析方法

- 系统模型描述的两种方法：

输入/输出描述，状态变量描述

- ✦ 系统分析的两种方法：

时域分析：最常用的是把一个信号在时域上分解为具有不同延时的简单冲激信号分量的叠加，通过卷积的方法进行系统的时域分析。

方法直观，物理概念清晰；复杂信号分解困难。

频域分析：最基本的是把信号分解为一系列不同频率正弦分量的叠加，即傅里叶变换（级数）的方法来进行信号分析，这种方法也称之为“频谱分析”。

可把卷积积分转换为简单的代数方程求解，通过傅里叶变换把复杂的卷积计算转换为简单的乘积运算。

信号的卷积运算

信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积计算公式为：

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

三个性质

I 交换律 $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ 卷积积分的次序可以交换

(通过变换积分变量来证明)

II 分配律 $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$ 用于并联系统的分析

(利用积分运算的线性性来证明)

III 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ 用于串联系统的分析

III 结合律 $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

证明：

$$((f_1 * f_2) * f_3)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) d\lambda \right] f_3(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\lambda d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\tau \right] d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_3(\underline{t - \lambda - \tau}) d\tau \right] d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) [(f_2 * f_3)(t - \lambda)] d\lambda$$

$$= (f_1 * (f_2 * f_3))(t)$$

(卷积定义)

(二重积分)

(变换积分次序)

(变量替换)

(定义)

(定义)

卷积的微分

两个信号卷积的微分等于其中任一信号
的微分与另一信号卷积。

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \left[\frac{d}{dt} f_2(t) \right] = \left[\frac{df_1(t)}{dt} \right] * f_2(t)$$

证明:

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\frac{d}{dt} f_2(t - \tau) \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left(\frac{df_2}{dt} \right) (t - \tau) d\tau$$

$$= \left(f_1 * \frac{df_2}{dt} \right) (t)$$

(定义)

(交换微分、积分顺序)

(定义)

卷积的积分

两个信号卷积的积分等于其中任一信号的积分与另一信号的卷积。

$$\int_{-\infty}^t (f_1 * f_2)(\lambda) d\lambda = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda = \left(\int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right) * f_2(t)$$



$$f(t) * \varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$$

一个函数与单位阶跃函数的卷积等于该函数的积分。

证明：

$$\begin{aligned} f(t) * \varepsilon(t) &= f(t) * \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^t f(t) * \delta(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^t f(t) dt \end{aligned}$$

卷积的积分特性

冲激函数的搬移特性

应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律



$$(f_1 * f_2)^{(n)}(t) = f_1^{(m)}(t) * f_2^{(n-m)}(t)$$

上式中的 m 、 n 及 $n-m$ 取正整数时为导数的阶次，而取负整数时为重积分的次数。

卷积运算的图解步骤

先把两个信号的自变量变为 τ ，即两个信号变为 $f_1(\tau)$ 与 $f_2(\tau)$ 。
任意给定某个 t_0 ，卷积式可以如下解释：

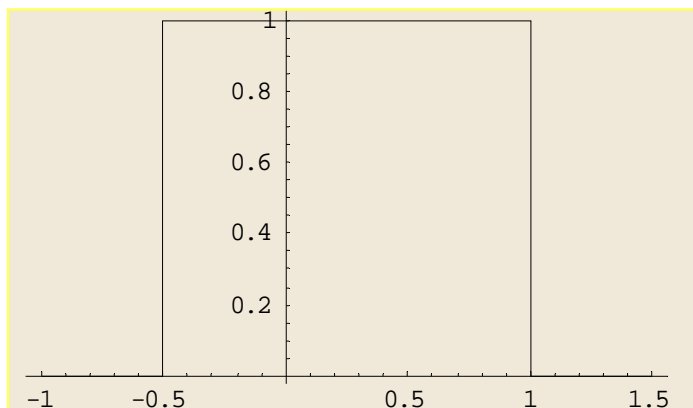
- (1) 将 $f_2(\tau)$ 关于 τ 进行反褶得到 $f_2(-\tau)$ ；
- (2) 再平移至 t_0 得到 $f_2(-(\tau - t_0)) = f_2(t_0 - \tau)$ ；
- (3) 与 $f_1(\tau)$ 相乘得到 $f_1(\tau) \cdot f_2(t_0 - \tau)$ ；

- (4) 对 τ 进行积分得到 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t_0 - \tau) d\tau$ ，这就是 $s(t_0)$ ；

不断变化 t_0 ，就可以得到 $s(t)$ 。

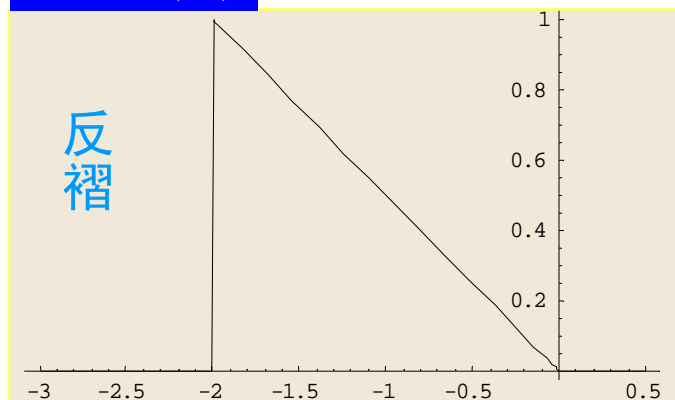
卷积的几何作图法

函数 $f(t)$

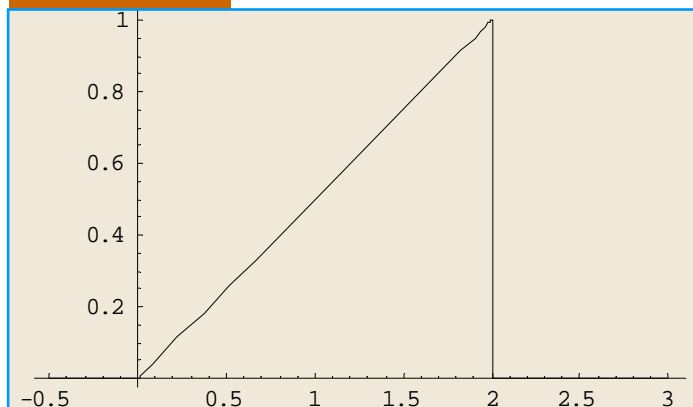


函数 $h(-\tau)$

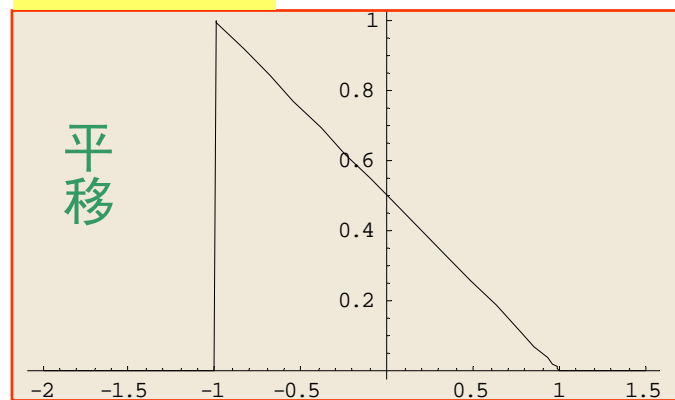
刚反褶时对应零平移



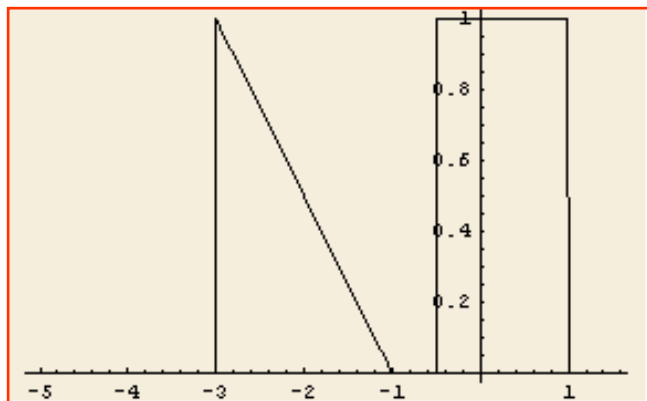
函数 $h(t)$



函数 $h(t-\tau)$

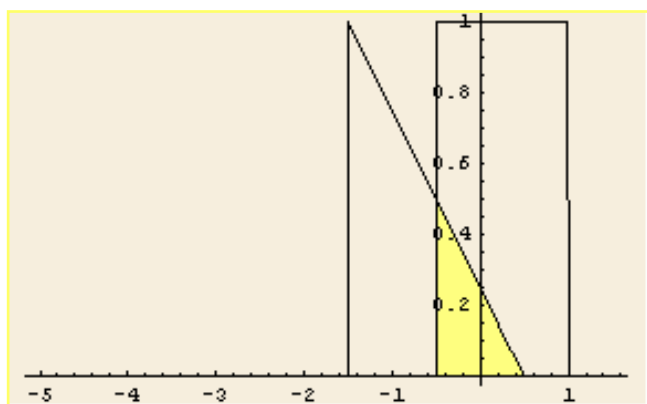


卷积的几何作图法



$-\infty < t \leq -\frac{1}{2}$ 从负无穷平移而来

→ $f(t) * h(t) = 0$

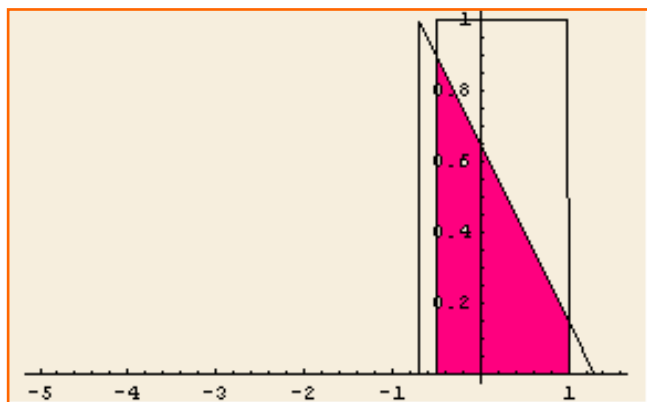


$-\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

→
$$f(t) * h(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^t 1 \times \frac{1}{2}(t - \tau) d\tau$$
$$= \frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}$$

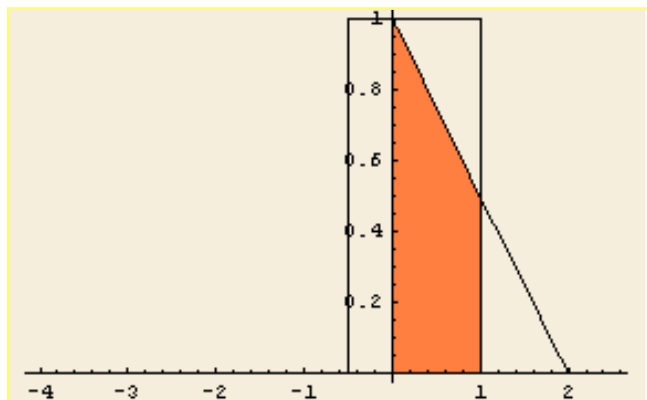
不是求图形相交部分的面积，而是求相交结果函数的面积

卷积的几何作图法



$$1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

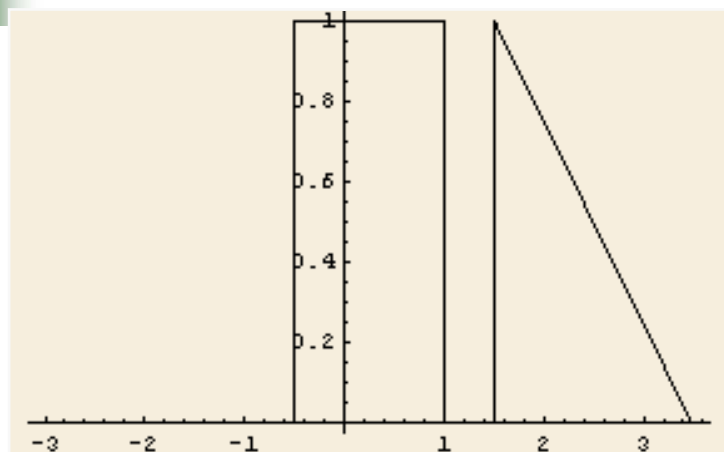
$$\begin{aligned} f(t) * h(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 1 \times \frac{1}{2} (t - \tau) d\tau \\ &= \frac{3t}{4} - \frac{3}{16} \end{aligned}$$



$$\frac{3}{2} \leq t \leq 3$$

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) &= \int_{t-2}^1 1 \times \frac{1}{2} (t - \tau) d\tau \\ &= -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

卷积的几何作图法

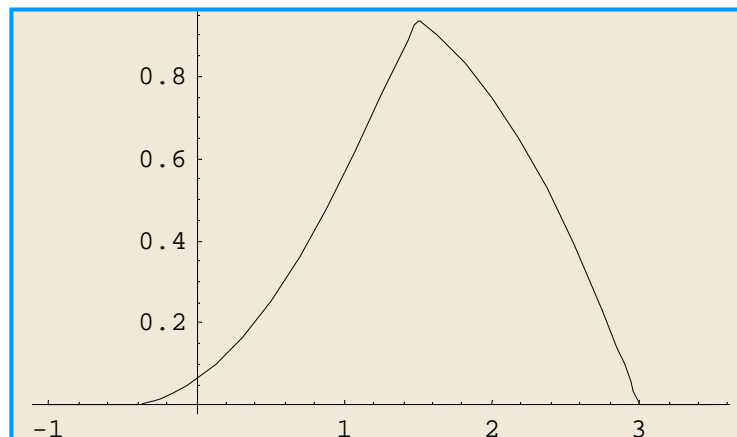


$$3 \leq t < \infty$$

$$f(t) * h(t) = 0$$



最终的卷积结果



卷积的几何作图法

在上述一个信号的反褶信号的滑动过程中，它与另外一个信号的重合面积随 t 的变化曲线就是所求的两个信号的卷积的波形。

可以根据上面的几何解释来估计
或求出两个信号卷积运算结果。

如何理解卷积运算？

- 说法一：简单！背公式嘛：
 - “知其然不知其所以然”
- 说法二：用几何解释！作图嘛：
 - 游离于表象，“浅尝则止”
- （正宗说法）由物理意义顺藤摸瓜
 - 对物理现象的描述，为研究方便而引入
 - I LTI系统的输入、输出的关系☆
 - II 时域、频域中与乘法相对应的运算☆

正交分解

研究（信号）的方法：

用熟悉的、已知的信号 \rightarrow （表示） 陌生、未知的信号

用简单的信号 \rightarrow （表示） 复杂的信号

对表示的要求：

能不能做到少失真？甚至不失真（即完全相等）？

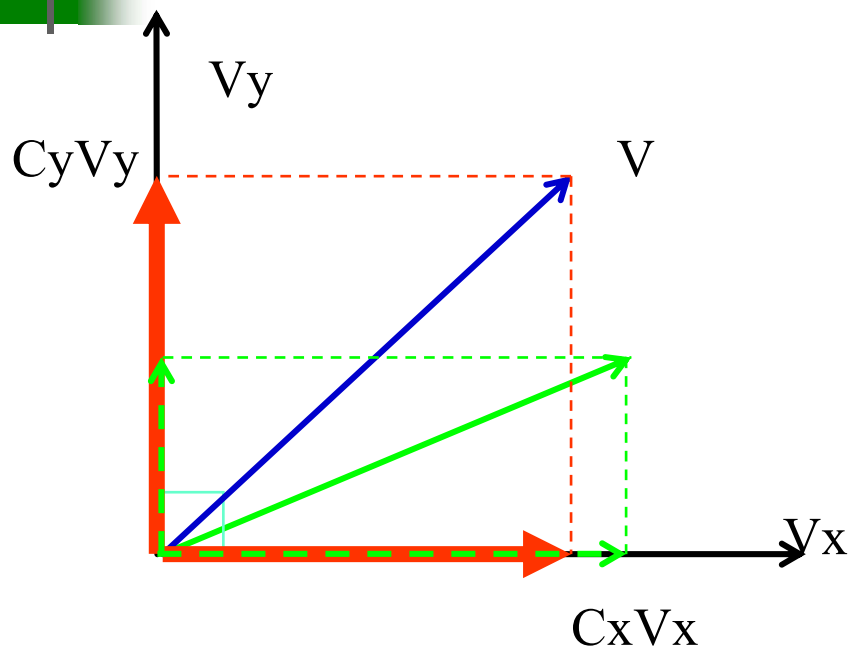
现有的分解方法：

有的太简单——交直流分量分解、奇偶分量分解、虚实部分量分解

有的太粗糙——脉冲分量分解

希望：简单、精确、直观、有效

正交分解



$$\vec{V} = C_x \vec{V}_x + C_y \vec{V}_y$$

简单、精确、直观、有效

对基本成分有要求。基本分量必须满足下面的条件：

- 1 数量上有要求。（对平面上的矢量： \vec{V}_x \vec{V}_y 两个）
- 2 质量上有要求。（对平面上的矢量： \vec{V}_x 和 \vec{V}_y 相互垂直）
- 3 能力上有要求。（对平面上的矢量：任意矢量都可唯一地合成出来）

信号正交分量分解

正交函数:

如果在区间 (t_1, t_2) 上, 函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 互不含有对方的分量, 则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上正交

函数正交的充要条件是它们的内积为0

$$\langle g_1, g_2 \rangle = 0$$

函数 $g_1(t)$ 和 $g_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上的内积:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g_1(t) g_2(t) dt$$

$\{g_n(t): 1 \leq n \leq N\}$ 是区间 (t_1, t_2) 上的正交函数集的条件:

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) dt = K_i \delta(i - j), \quad \forall i, K_i \neq 0$$

信号正交分量分解

任一函数 $f(t)$ 在 (t_1, t_2) 上可 (近似) 表示为正交函数集内函数的线性组合。

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)$$

正交分量的系数

$$c_r = \frac{\langle f(t), g_r(t) \rangle}{\langle g_r(t), g_r(t) \rangle} = \frac{\langle f(t), g_r(t) \rangle}{K_r} = \frac{1}{K_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) dt$$

$$K_r = \langle g_r(t), g_r(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} g_r(t) g_r(t) dt$$

如果一个函数可以用一组相互正交的函数的线性组合来表示，我们就称某个正交函数与相应的线性系数的乘积为该正交函数上的正交分量。

完备正交函数集

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^N c_n g_n(t) \quad \{g_n(t)\}$$

对此函数集提出疑问

疑问一：是否还有其他函数与函数集中的函数一一正交？

疑问二：是否存在某个函数集能精确地表示其他（任意）函数

→ 完备正交函数集

判断准则——均方误差表示：

$$\overline{\eta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)]^2 dt$$

完备正交函数集

$$\overline{\eta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t)]^2 dt$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\overline{\eta^2(t)} \rightarrow 0$$

则称这一正交集为完备正交集

显然, 如果 $\overline{\eta^2(t)} \rightarrow 0$, 则可以用一个无穷级数 (完备正交函数集的线性组合) 来恒等表示 $f(t)$

常用的完备正交函数集有

三角函数集

复指数函数集

$$e^{jn\Omega_1 t} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

沃尔什函数集 Wal(k,t)

正交分解: 当函数 $f(t)$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 内具有连续的一阶导数和逐段连续的二阶导数时, 可用完备的正交函数集来表示。

狄义赫利条件（三个有限）：在一个周期内

- (1) 间断点的个数有限
- (2) 极值点的个数有限
- (3) 绝对积分数值有限

满足上述条件的任何周期函数，都可以展成“正交函数线性组合”的无穷级数。

傅里叶级数展开

正交函数集

三角函数集

$$\{1, \cos n\omega_1 t, \sin n\omega_1 t : n \in N\}$$

复指数函数集

$$\{e^{jn\Omega_1 t} : n \in Z\}$$

如果正交函数集是三角函数集或指数函数集，则周期函数展成的级数就是“傅里叶级数”。

相应的级数通常被称为“三角形式傅里叶级数”和“指数形式的傅里叶级数”。

设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_1

展开成三角函数的无穷级数形式

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t)$$

根据正交函数的正交特性，可得：

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \cos(m\Omega_1 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2}, & (m = n) \\ 0, & (m \neq n) \end{cases}$$
$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \sin(m\Omega_1 t) \sin(n\Omega_1 t) dt = \begin{cases} \frac{T_1}{2}, & (m = n) \\ 0, & (m \neq n) \end{cases}$$

三角形形式FS系数的计算

$$c_n = \frac{\langle f(t), g_n(t) \rangle}{\langle g_n(t), g_n(t) \rangle} = \frac{\langle f(t), g_n(t) \rangle}{K_n} = \frac{1}{K_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_n(t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos n\Omega_1 t dt, \quad n \in N$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin n\Omega_1 t dt, \quad n \in N$$

系数 a_n 和 b_n 统称为三角形形式的傅里叶级数系数，
简称为傅里叶系数。

同频率合并

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_1 t + \phi_n)$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\Omega_1 t + \theta_n)$$

三角形式的FS

$$a_0 = c_0 = d_0$$

$$a_n = c_n \cos \phi_n = d_n \sin \theta_n$$

$$b_n = -c_n \sin \phi_n = d_n \cos \theta_n$$

c, d

a, b

$$c_0 = d_0 = a_0$$

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2$$

$$\phi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$$

$$\theta_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}$$

复指数形式的FS

设周期函数 $f(t)$ 的周期为 T_1

展开成复指数函数的无穷级数形式

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

系数计算方法

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt, \quad n \in Z$$

复指数形式的FS

三角函数FS与复指数FS的系数间的关系

$$F_n = \begin{cases} a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - jb_n), & n \neq 0 \end{cases}$$



F_n 的性质
共轭对称性

$$F_n = F_{-n}^*, \quad F_{-n} = F_n^*$$

$$F_n + F_{-n} = a_n$$

$$F_n - F_{-n} = b_n / j$$

$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}|c_n| = \frac{1}{2}|d_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (n \neq 0)$$

信号对称性对FS的影响

偶周期信号的FS

F_n 是偶对称的实数序列，FS系数只有直流分量和余弦项。

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \sin n\Omega_1 t dt = 0$$

积分项为奇函数

奇周期信号的FS

F_n 是奇对称的纯虚序列，FS系数只有正弦项。

$$a_0 = a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} f(t) \cos n\Omega_1 t dt = 0$$

积分项为奇函数



周期信号的傅里叶频谱特点:

- (1) 仅在一些离散频率点 (nf_1) 上有值。
- (2) 离散间隔为 $\Omega_1 = 2\pi / T_1$
- (3) F_n 是双边谱，正负频率的频谱幅度相加才是实际幅度。

- (4) 信号的功率为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|F_n\|^2$

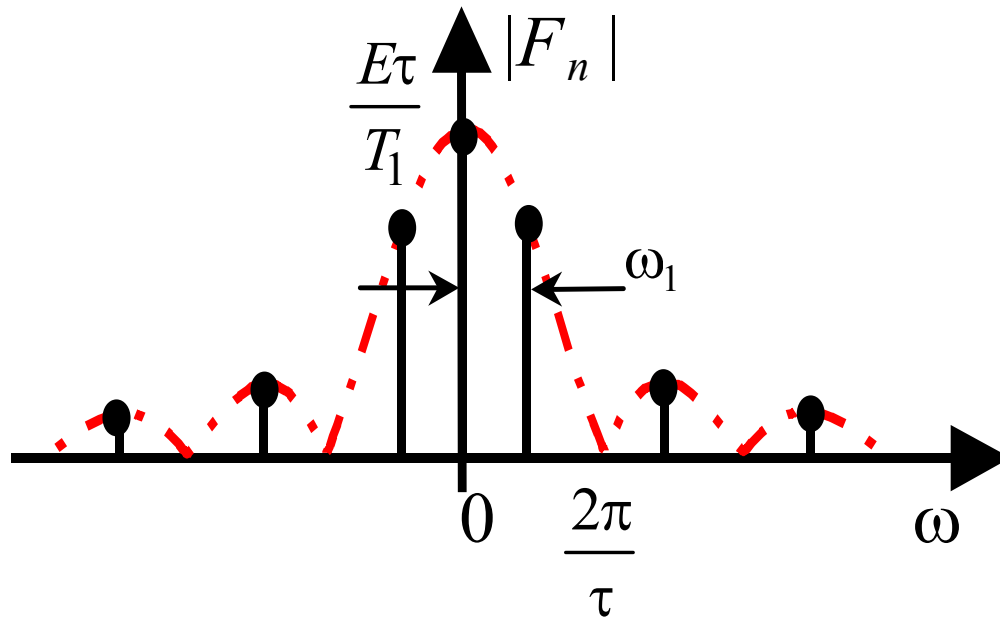
把傅里叶级数表示式的两边平方，并在一个周期内进行积分，再利用三角函数及复指数函数的正交性，可以得到周期信号 $f(t)$ 的平均功率 P 与傅里叶级数有下列关系：

$$\begin{aligned} P = \overline{f^2(t)} &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \end{aligned}$$

周期信号的平均功率等于傅里叶级数展开各谐波分量有效值的平方和，也即时域和频域的能量守恒。

上式被称为：帕斯瓦尔方程

周期矩形脉冲信号的FS



谱线包络线为Sa函数

频谱谱线的间隔为

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

谱线包络线过零点确定方法:

$$\omega = n\omega_1 = \frac{2k\pi}{\tau}, \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$$

周期信号的FS

在频域，能量主要集中在第一个零点以内 →

实际上，在允许一定失真的条件下，可以要求一个通信系统只把 $\Omega \leq 2\pi/\tau$ 频率范围内的各个频率分量传送过去，而舍弃 $\Omega > 2\pi/\tau$ 的分量。

这样，常把 $\omega=0 \sim 2\pi/\tau$ 这段频率范围称为矩形信号的频带宽度，简称带宽。

$$B: 0 \sim 2\pi/\tau$$

带宽只与脉冲脉宽有关，而与脉高和周期均无关。

傅里叶变换

周期信号的频谱谱线的间隔为

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

周期信号的频谱谱线的长度为

$$F_n = F(n\Omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

非周期信号可以看成是周期 T_1 趋于无限大的周期信号



非周期信号的谱线间隔趋于无限小，
变成了连续频谱；谱线长度趋于零。

解决方法

$$F(n\Omega_1)T_1 = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

$$F(\Omega) \triangleq \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F(n\Omega_1)T_1 = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt$$

FT变换

非周期信号的傅里叶变换

FT:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

IFT:

恢复时域信号的方法

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

变换核



FT/IFT的性质

唯一性:

如果两个函数的FT或IFT相等, 则这两个函数必然相等。

可逆性:

如果 $F[f(t)] = F(\Omega)$, 则必有

$$F^{-1}[F(\Omega)] = f(t), \text{ 反之亦然。}$$

FT存在的充分条件:

时域信号绝对可积。

FS与FT比较

	FS	FT
被分析对象	周期信号	非周期信号
频率定义域	离散频率，谐波频率处	连续频率，整个频率轴
函数值意义	频率分量的数值	频率分量的密度值

信号的傅里叶变换一般为复值函数，可写成

$$F(\Omega) = |F(\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

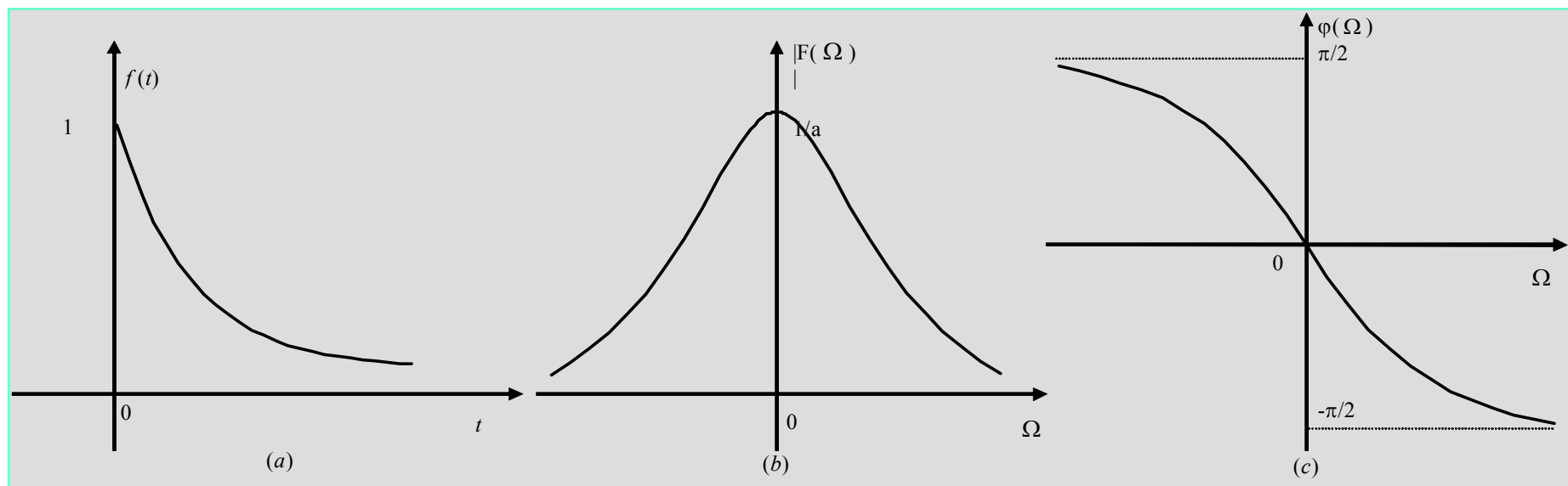
幅度频谱
密度函数

相位频谱
密度函数

典型非周期信号的FT

单边指数信号: $f(t) = e^{-at}u(t) (a > 0)$

$$F(\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega} \rightarrow \begin{aligned} |F(\Omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + \Omega^2}} \\ \varphi(\Omega) &= \text{Arg}(F(\Omega)) = \text{Arg}\left(\frac{a - j\Omega}{a^2 + \Omega^2}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{\Omega}{a}\right) \end{aligned}$$

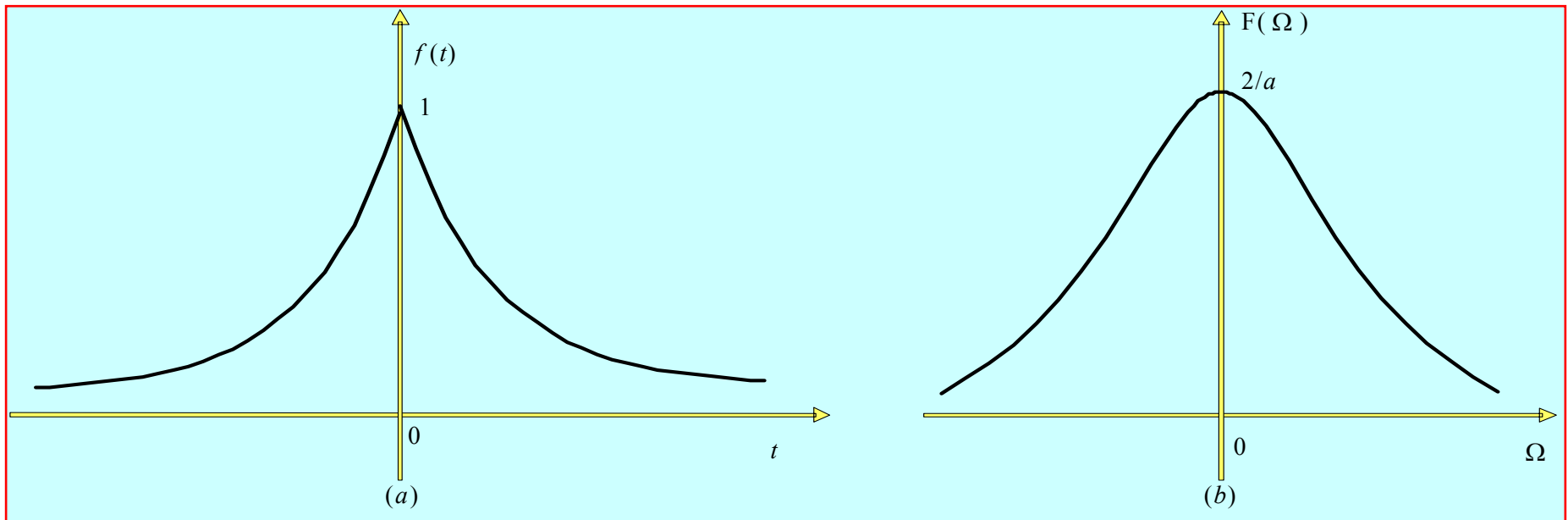


典型非周期信号的FT

偶双边指数信号: $f(t) = e^{-a|t|} (a > 0)$

$$F(\Omega) = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2} \rightarrow |F(\Omega)| = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2} \quad \varphi(\Omega) = 0$$

(实偶函数)



典型非周期信号的FT

矩形脉冲信号: $f(t) = EG_{\tau}(t)$

脉高为E, 脉宽为 τ

其频谱是实函数

$$F(\Omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}\Omega\right) \rightarrow$$

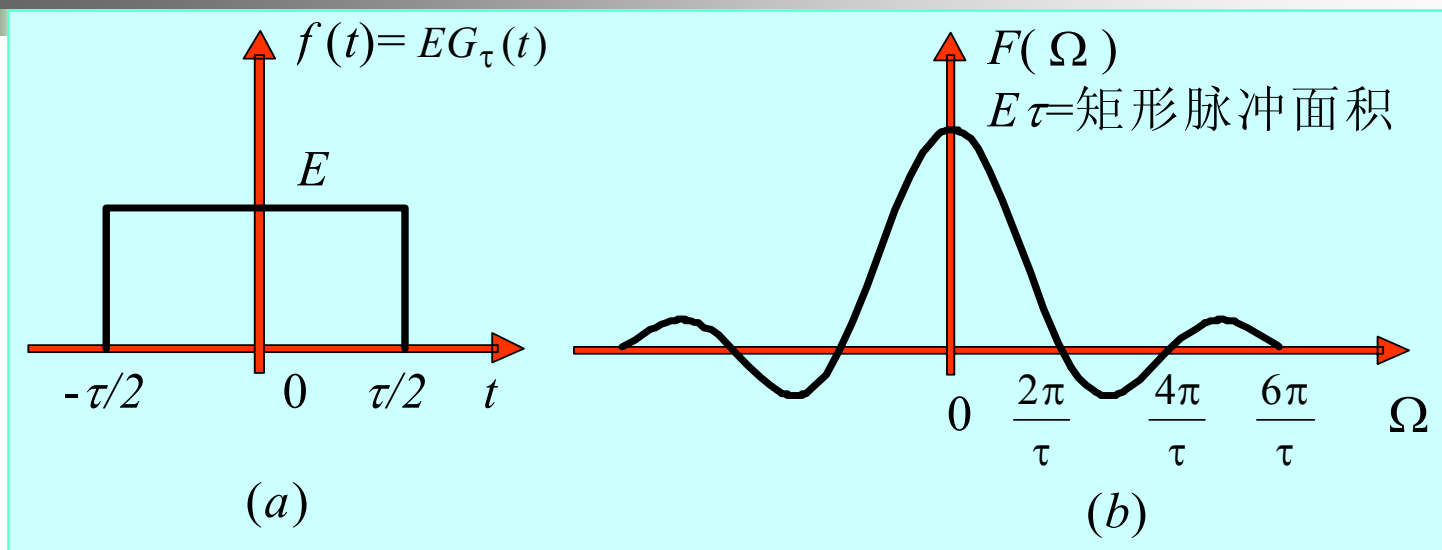
幅度谱

$$|F(\Omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right|$$

相位谱

$$\varphi(\Omega) = \begin{cases} 0, & \frac{4k\pi}{\tau} < |\Omega| < \frac{2(2k+1)\pi}{\tau} \quad (\text{对应 } F(\Omega) > 0) \\ \pi, & \frac{2(2k+1)\pi}{\tau} < |\Omega| < \frac{4(k+1)\pi}{\tau} \quad (\text{对应 } F(\Omega) < 0) \end{cases} \quad \overline{k \in \mathbb{Z}}$$

典型非周期信号的FT



矩形脉冲信号FT的特点:

FT为Sa函数，原点处函数值等于矩形脉冲的面积

FT的过零点位置为 $\Omega = 2k\pi / \tau \ (k \neq 0)$

频域的能量集中在第一个过零点区间 $\Omega \in [-2\pi / \tau, 2\pi / \tau]$

带宽只与脉宽有关，与脉高 E 无关。带宽为 $B_{\Omega} = 2\pi / \tau$

从频谱分量到频谱密度

问题：

非周期信号 == $\lim T \rightarrow \infty$ (周期信号)

$$T_1 \rightarrow \infty$$

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0 \quad \text{谱线间距变密直至为零}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \rightarrow 0$$

谱线高度变矮直至为零



考虑：

- (1) 物理意义着手：既是信号，必有能量。无论怎样，能量守恒。因此，频域必要以某种形式存在。

这是一种在“失望”中决不“绝望”的信念。

- (2) 数学角度思考：无限多无穷小量的和，在极限意义下，可能等于一个有限值。前面的问题只是说每个分量变成了无穷小量，但没有说总和(信号)为零！

这是一种在“失望”中发掘“希望”的智慧！

从频谱分量到频谱密度

办法：引入“频谱密度”的概念

$$F(\Omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{F_n}{\Omega_1 / 2\pi} = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} F_n T_1$$
$$= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{T_1} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \neq 0$$

$$\frac{F_n}{\Omega_1}$$

反映的是单位频带内的频谱分量值，故称为“频谱密度函数”

$\because T_1 \rightarrow \infty, \Omega_1 \rightarrow 0, \Delta(n\Omega_1) \rightarrow d\Omega, n\Omega_1 \rightarrow \Omega$ 连续变量

$$\therefore F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

从频谱分量到频谱密度

FS展开式的变化:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_n}{\Omega_1} e^{jn\Omega_1 t} \cdot \Delta(n\Omega_1)$$

$$T_1 \rightarrow \infty$$

$$n\Omega_1 \rightarrow \Omega$$

$$\Delta(n\Omega_1) \rightarrow d\Omega$$

$$\frac{F_n}{\Omega_1} \rightarrow \frac{F(\Omega)}{2\pi}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

处处都有谐波分量

大盈若冲，其用不穷

从频谱分量到频谱密度

实际物理信号是实信号，其频谱特点为：

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= R(\Omega) + jX(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt \end{aligned}$$

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt$$

$$X(\Omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt$$

$$R(\Omega) = R(-\Omega)$$

频谱实部是偶对称的

$$X(\Omega) = -X(-\Omega)$$

频谱虚部是奇对称的

$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{X(\Omega)}{R(\Omega)}$$

频谱相位是奇对称的

典型非周期信号的FT

符号函数：不满足绝对可积条件，但存在FT。可借助
双边指数衰减函数来求符号函数的FT。

与双边指数函数的乘积信号 f_1 的频谱 F_1

$$F_1(\Omega) = \int_{-\infty}^0 (-e^{at}) e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\Omega t} dt$$

积分并化简，可得

$$F(\Omega) = \frac{-2j\Omega}{a^2 + \Omega^2}$$



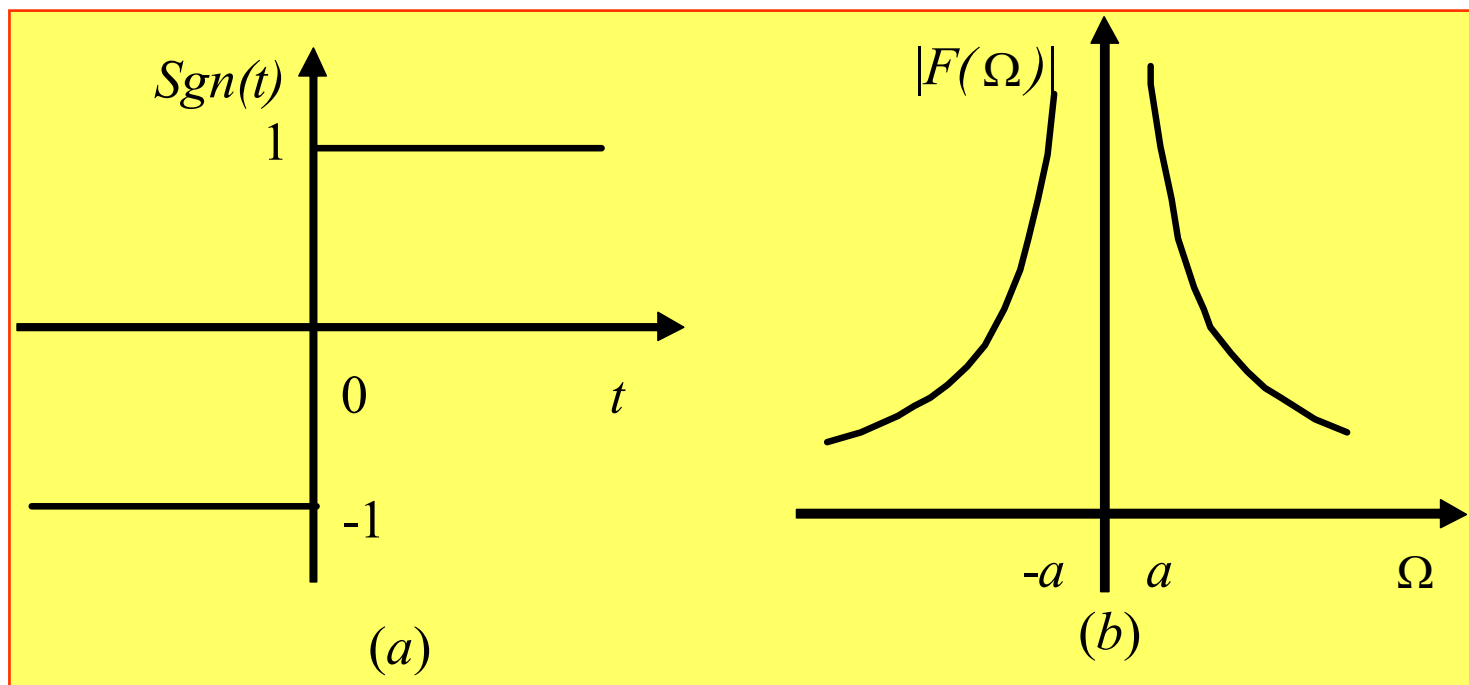
符号函数的频谱为

$$F(\Omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F_1(\Omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\Omega}{a^2 + \Omega^2} = \frac{2}{j\Omega}$$

典型非周期信号的FT

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{2}{j\Omega} \quad \rightarrow$$

幅度谱 $|F(\Omega)| = \frac{2}{|\Omega|}$ 相位谱 $\varphi(\Omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \Omega > 0 \\ \pi/2, & \Omega < 0 \end{cases}$



典型非周期信号的FT

冲激信号:

$$F[E\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} E\delta(t)e^{-j\Omega t} dt = Ee^{-j\Omega 0} = E$$

FT定义

冲激函数的抽样性质

上述结果也可由矩形脉冲取极限得到。

当脉宽 τ 逐渐变窄时，其频谱必然展宽。可以想象，若 $\tau \rightarrow 0$ ，而 $E\tau=1$ ，这时矩形脉冲就变成了 $\delta(t)$ ，其相应频谱 $F(\Omega)$ 必定等于常数1。

典型非周期信号的FT

冲激函数的频谱等于常数，即在整个频率范围内频谱是均匀分布的。显然，在时域中变化异常剧烈的冲激函数中包含了幅度相等的所有频率分布。

因此，这种频谱常被称为均匀谱，或白色谱。

典型非周期信号的FT

冲激函数的频谱为常数，什么样的函数其频谱为冲激函数呢？

由FT对称性 $\rightarrow F^{-1} [E \delta(\Omega)] = \frac{E}{2\pi}$

直流信号的傅里叶频谱是位于零点的冲激函数

频谱零点处的冲激函数来自信号的直流分量



$$F\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(\Omega)$$

$$F[1] = 2\pi\delta(\Omega)$$

典型非周期信号的FT

阶跃信号:

$$u(t) = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

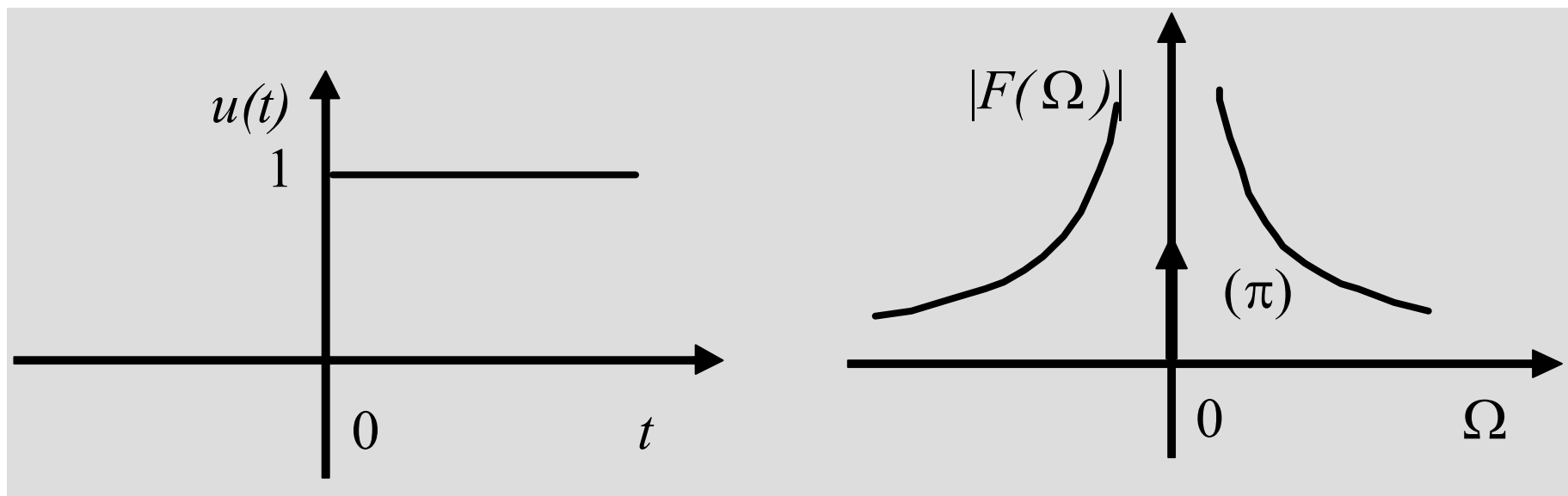
$$F(\operatorname{sgn}(t)) = \frac{2}{j\Omega}$$

FT的线性性

$$F(\Omega) = \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$$

原点处的冲激来自
 $u(t)$ 中的直流分量

典型非周期信号的FT



不满足绝对可积条件，但存在FT。

FT的性质


线性性

齐次性

$$F[af(t)] = aF[f(t)]$$

叠加性

$$F[f_1(t) + f_2(t)] = F[f_1(t)] + F[f_2(t)]$$


$$F\left[\sum_n a_n f_n(t)\right] = \sum_n a_n F[f_n(t)]$$

FT是线性运算

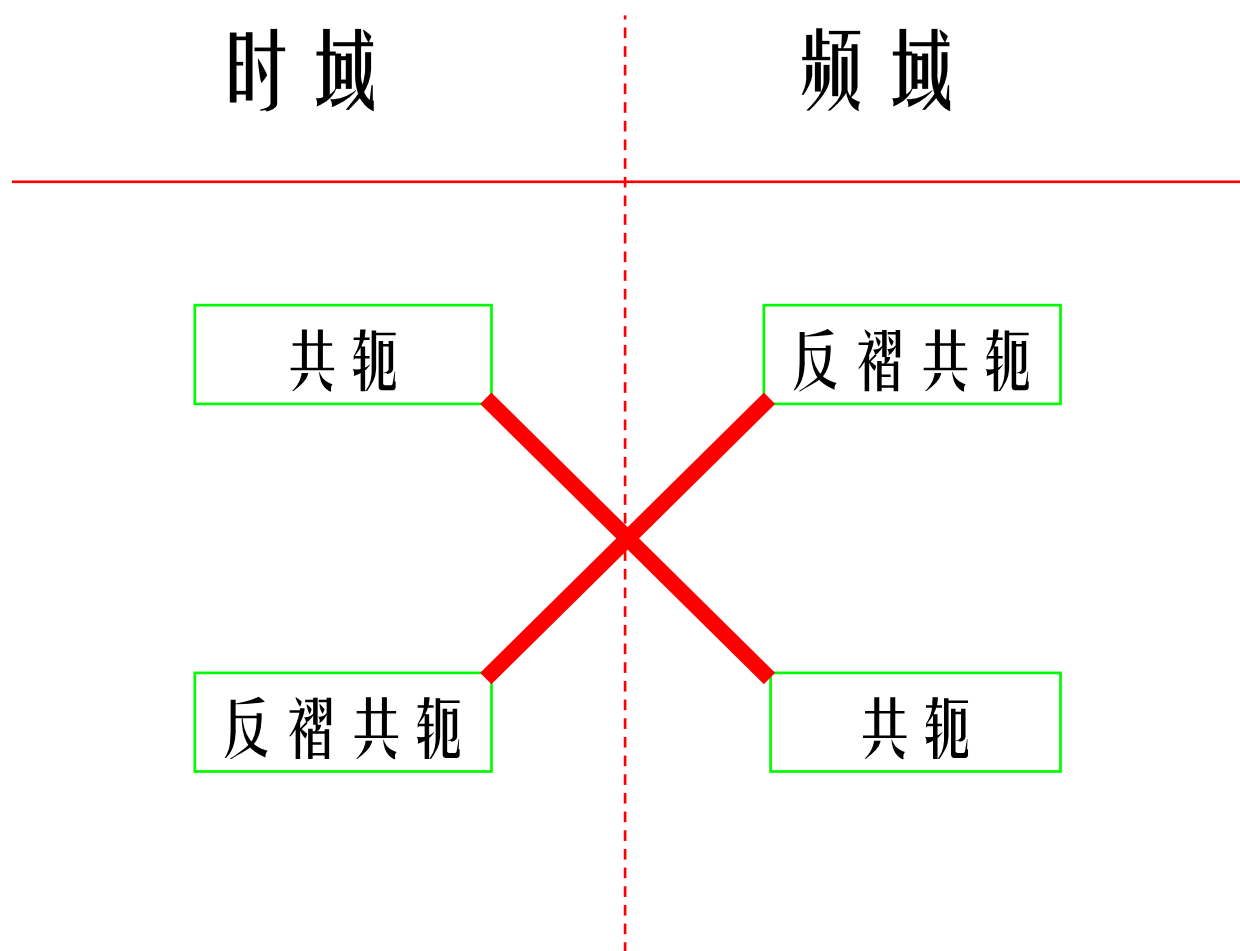
对一个信号求FT，等于对其分量求FT然后再组合

这就是“数学符号”的“物理意义”

反褶和共轭性

	时域	频域
原信号	$f(t)$	$F(\Omega)$
反褶	$f(-t)$	$F(-\Omega)$
共轭	$f^*(t)$	$F^*(-\Omega)$
反褶+共轭	$f^*(-t)$	$F^*(\Omega)$

FT的性质



奇偶虚实性

偶 \Leftrightarrow 偶

实偶 \Leftrightarrow 实偶

奇 \Leftrightarrow 奇

实奇 \Leftrightarrow 虚奇



实 (=实偶+实奇) \Leftrightarrow

实偶+虚奇=偶+j奇=实偶*EXP(实奇)



实函数的幅度谱和相位谱分别为偶、奇函数！

实信号的FT：偶共轭对称

→
$$F(-\Omega) = F^*(\Omega)$$

虚信号的FT：奇共轭对称

$$F(-\Omega) = -F^*(\Omega)$$

实信号和虚信号的FT幅度谱函数是偶函数，幅度谱偶对称。

FT的性质

牢记“三个要点”：

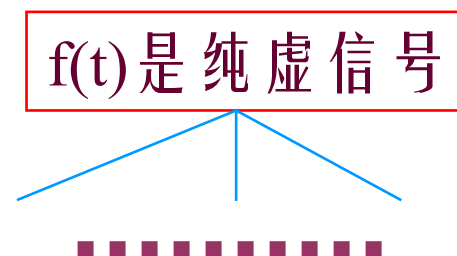
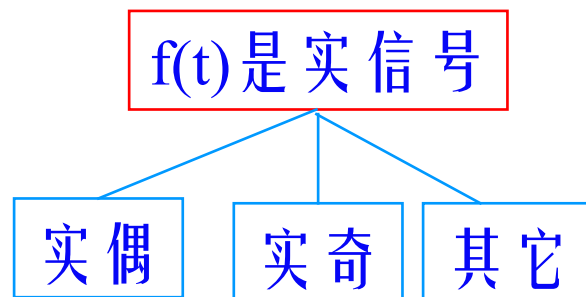
1 欧拉公式

$$F[\Omega] = R(\Omega) - jX(\Omega)$$

2 复数定义（实部虚部）

$$F[\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \Omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \Omega t dt$$

3 奇对称函数对称区间上积分为零



$$X(\Omega)=0, R(\Omega)=0 \Leftrightarrow 0$$

对偶性

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

极相似的公式背后隐藏着什么关系？

是不是意味着：求IFT与FT本质上是相通的？ →

FT的性质

I: FT与IFT的变换核函数是共轭对称的

$$\left(e^{-j\Omega t}\right)^* = e^{j\Omega t} \quad \left(e^{j\Omega t}\right)^* = e^{-j\Omega t} \quad \downarrow$$

$$F^{-1}[F(\Omega)] = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left\{ F_{\Omega}[F^*(\Omega)] \right\}^*$$

其中， $F_{\Omega}[F^*(\Omega)]$ 表示按自变量 Ω 进行FT，结果仍是t的函数。

在计算机程序设计实现上，
IFT可以通过FT来完成。

FT的性质

II: $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$

证明

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega$$

将变量 t 与 Ω 互换，可以得到

$$2\pi f(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\Omega t} dt \leftarrow$$

等号右边是对函数 $F(t)$ 的傅里叶变换！

$$\rightarrow \begin{cases} f(t) \text{ 是偶函数} & F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(\Omega) \\ f(t) \text{ 是奇函数} & F(t) \Leftrightarrow -2\pi f(\Omega) \end{cases}$$

FT的性质

已知 $EG_{\tau}(t) \Leftrightarrow E\tau Sa\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$ 求: $E\tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow ?$

解: 利用上述对偶性质得

$$E\tau Sa\left(\frac{t\tau}{2}\right) \Leftrightarrow 2\pi EG_{\tau}(\Omega)$$

$$F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\Omega)$$

如: 设 $\tau = 2, E = 1$ 则

$$2Sa(t) \Leftrightarrow 2\pi G_2(\Omega)$$

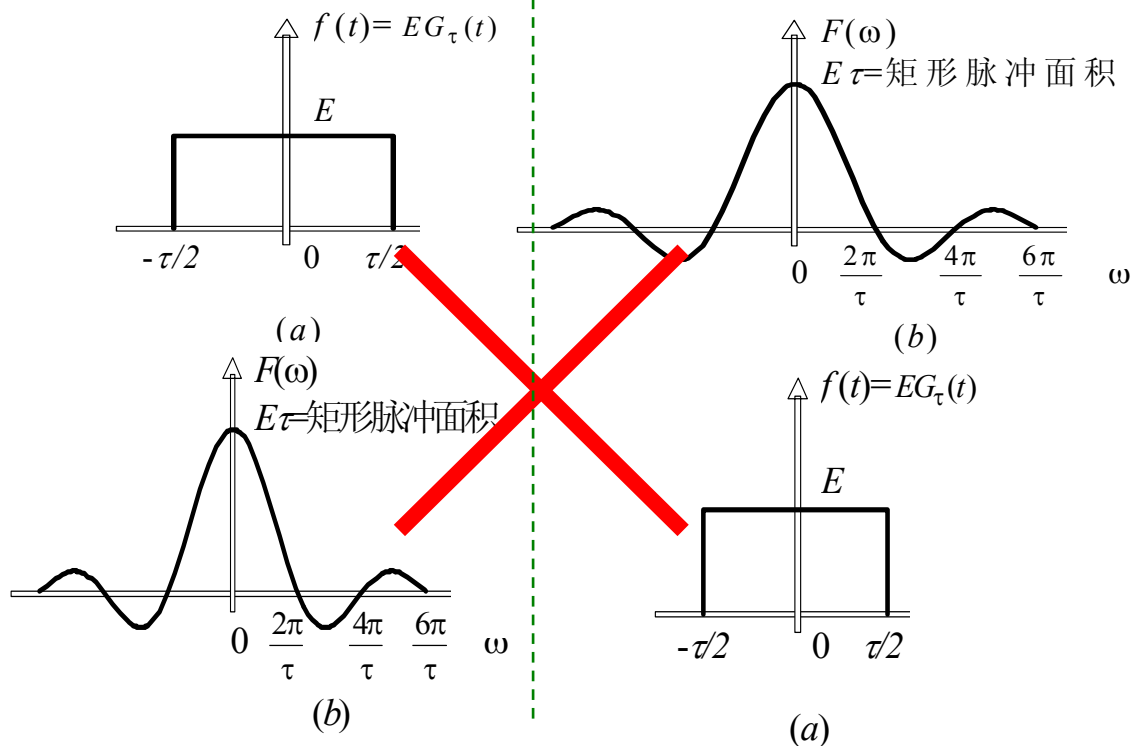
$$Sa(t) \Leftrightarrow \pi G_2(\Omega)$$

$$G_2(t) \Leftrightarrow 2Sa(\Omega)$$

FT的性质

时域

频域



尺度变换特性

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\Omega}{a}\right), \quad (a \neq 0)$$

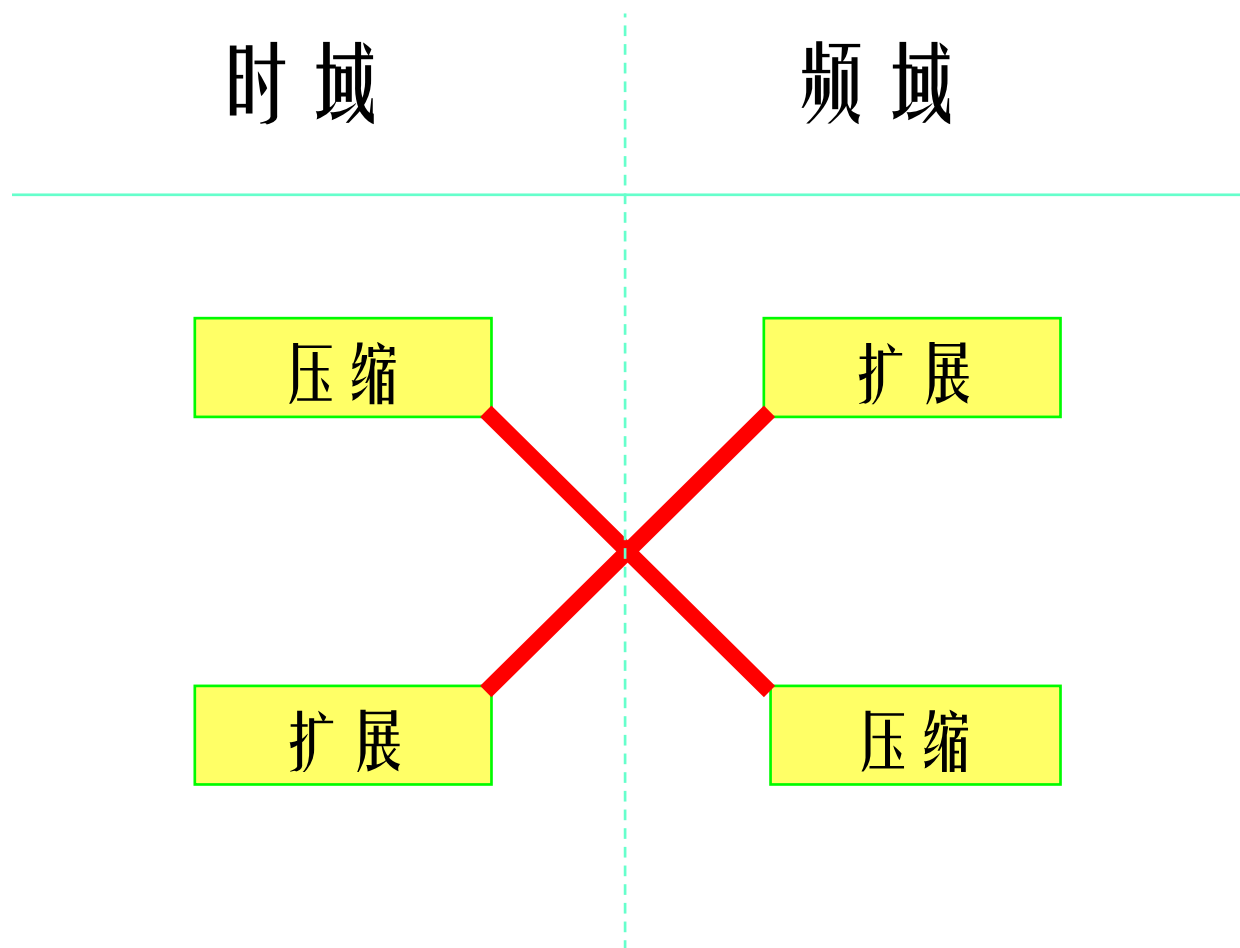
$f(at) \sim F\left(\frac{\Omega}{a}\right)$ ：它们的变化是相反的：压缩 \rightarrow 扩展；扩展 \rightarrow 压缩

$\frac{1}{|a|} F\left(\frac{\Omega}{a}\right)$ ：幅度也发生变化，是原先的 $1/a$ (或 $-1/a$)倍。

信号在时域中压缩 ($a > 1$) 等效于在频域中扩张；反之，信号在时域中扩展 ($a < 1$) 则等效于在频域中压缩。对于 $a = -1$ ，则说明信号在时域中沿纵轴反褶等效于在频域中也沿纵轴反褶。

信号波形压缩 a 倍，则信号随时间的变化会加快 a 倍，所以它所包含的频率分量也要增加 a 倍，即频谱被展宽 a 倍。同时，根据能量守恒原理，各频率分量的大小必然要减小 a 倍。

FT的性质



FT的性质

对任意形状的 $f(t)$ 和 $F(\Omega)$

[假设 $t \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$ 时, $f(t) \rightarrow 0$, $F(\Omega) \rightarrow 0$]



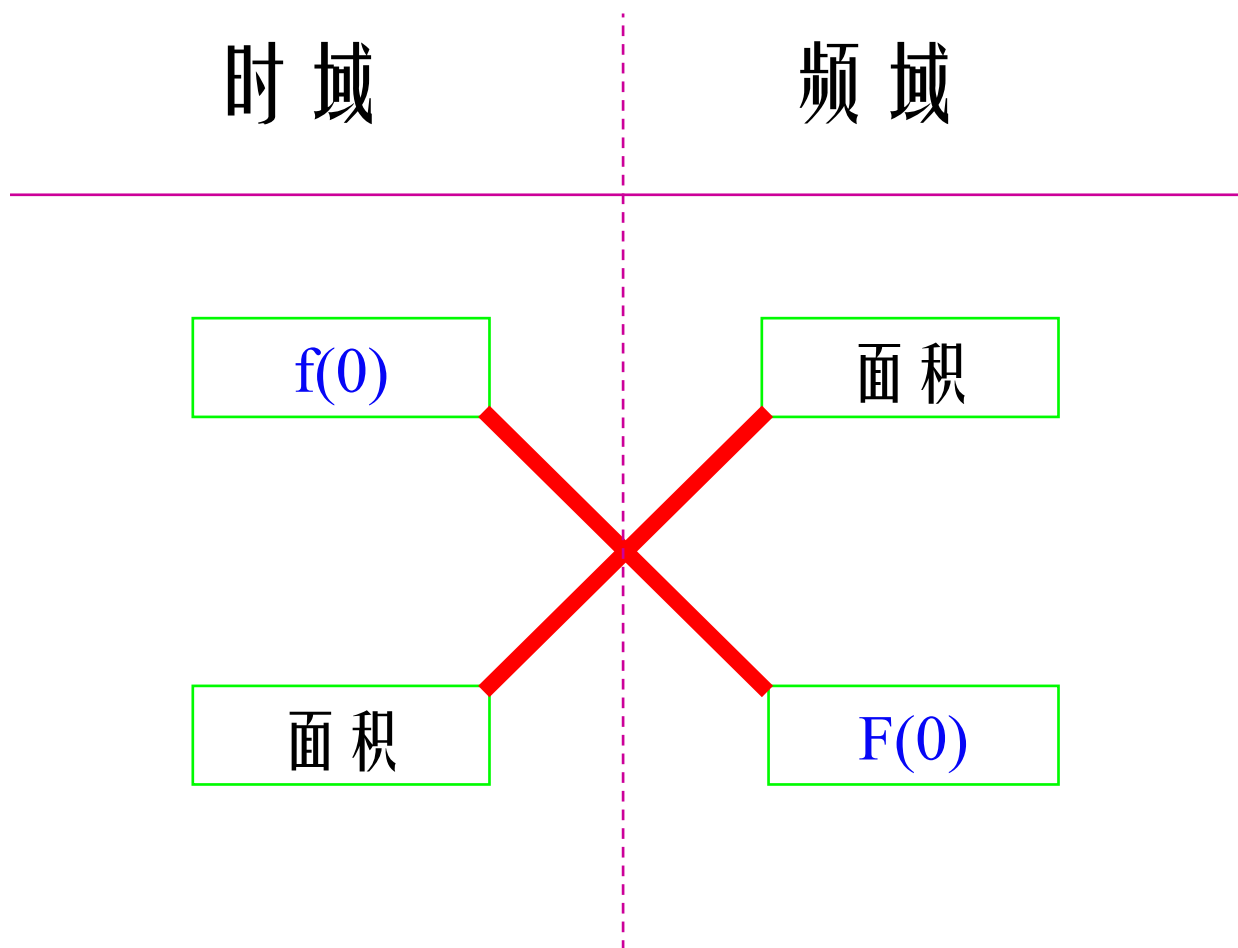
$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) d\Omega$$

$f(t)$ 与 $F(\Omega)$ 所覆盖的面积等于 $F(\Omega)$ 与 $2\pi f(t)$ 在零点的数值 $F(0)$ 与 $2\pi f(0)$ 。



FT的性质



FT的性质

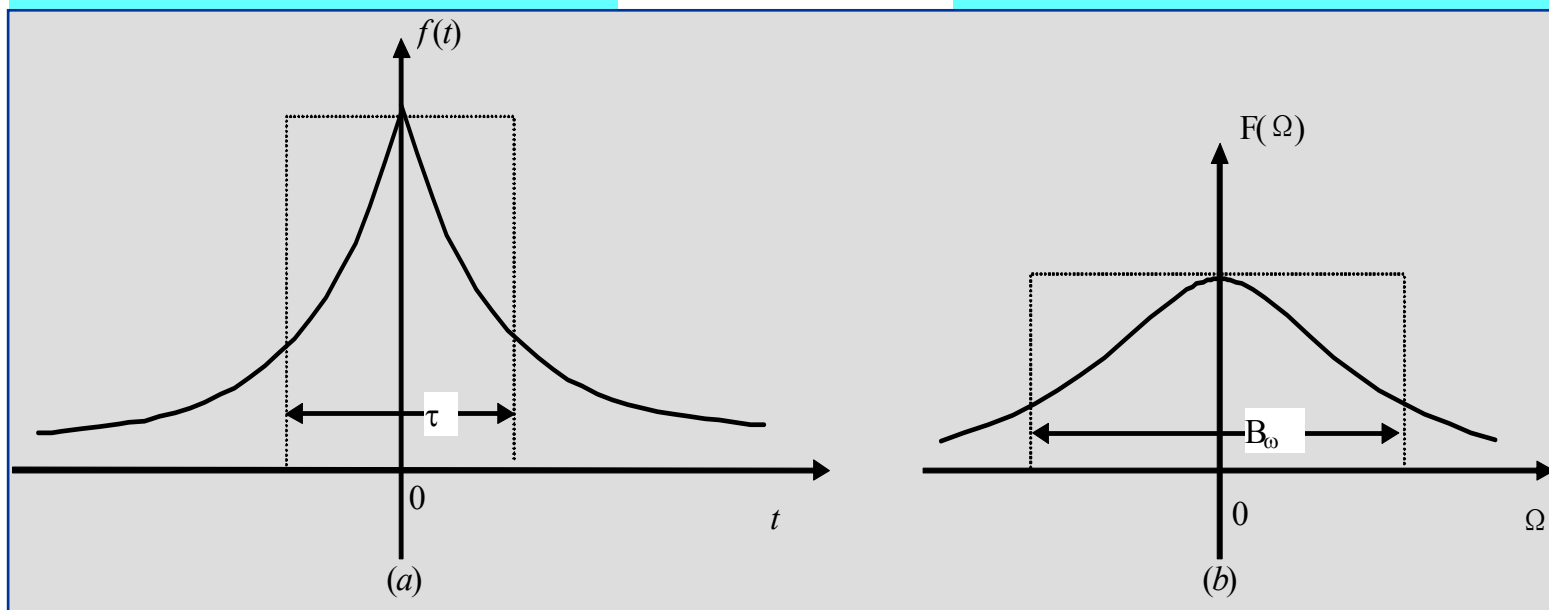
设 $f(0)$ 与 $F(0)$ 分别等于各自对应曲线的最大值，则定义信号的

等效脉宽

$$\tau = F(0) / f(0)$$

等效带宽

$$B_f = f(0) / F(0)$$



时移特性

$$F[f(t - t_0)] = F(\Omega)e^{-j\Omega t_0} = F[f(t)]e^{-j\Omega t_0}$$

时域延时，频域则是相位变化

人耳通过相位信息差异，可以判定声音的远近变化。但声音信号的相位变化不影响理解。

不影响幅度谱，只在相位谱上叠加一个线性相位

与尺度变换结合

$$F[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\Omega}{a}\right) e^{-j\Omega t_0 / a}, \quad (a \neq 0)$$

FT的性质

频移特性 $F [f(t) e^{j\Omega_0 t}] = F(\Omega - \Omega_0)$

相位增加，频谱右移

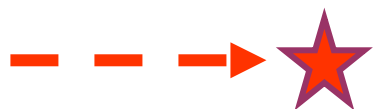


与尺度变换结合 $F \left[\frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{j\Omega_0 t/a} \right] = F(a\Omega - \Omega_0), (a \neq 0)$

频谱搬移

时域信号乘上一个复指数信号后，频谱被搬移到复指数信号的频率处。

利用欧拉公式，通过乘以正弦或余弦信号，可以达到频谱搬移的目的。



$$F[e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$$

微分特性

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{时域微分} \quad \frac{d}{dt} f(t) \Leftrightarrow j\Omega F(\Omega) \\ \text{频域微分} \quad \frac{dF(\Omega)}{d\Omega} \Leftrightarrow -jtf(t) \end{array} \right.$$

积分特性

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{时域积分} \\ \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow (j\Omega)^{-1} F(\Omega) + \pi F(0) \delta(\Omega) \\ \text{频域积分} \\ \int_{-\infty}^{\Omega} F(\lambda) d\lambda \Leftrightarrow \pi f(0) \delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \end{array} \right.$$

卷积定理

时域卷积定理

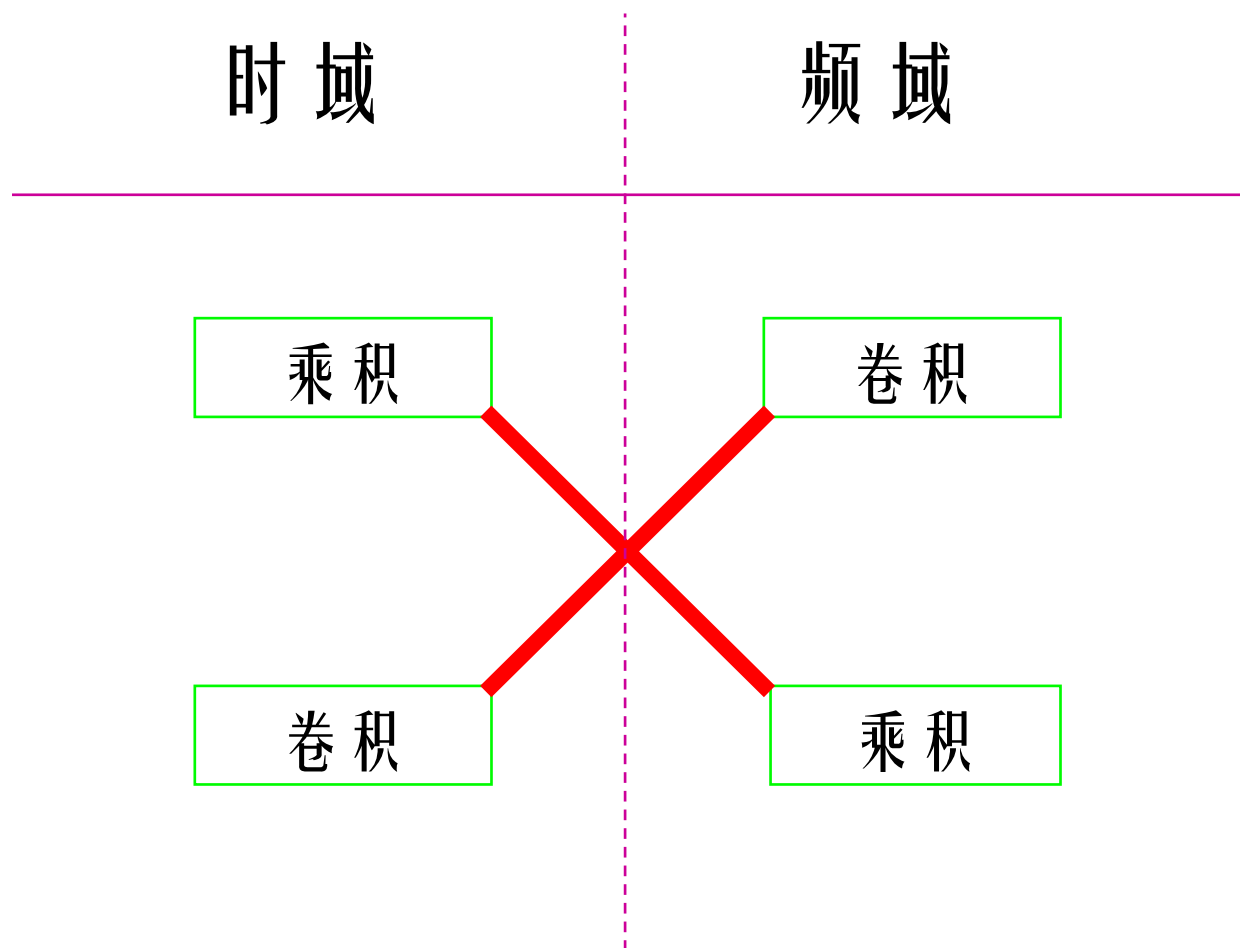
$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F[f_1(t)] \cdot F[f_2(t)]$$

频域卷积定理

$$F[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F[f_1(t)] * F[f_2(t)]$$

频谱卷积困难，所以要额外支持

FT的性质



时域相关性定理

$$F[R_{f_1 f_2}(t)] = F[f_1(t)] F^*[f_2(t)]$$

若函数 $f_2(t)$ 是实偶函数，则

$$F[R_{f_1 f_2}(t)] = F_1(\Omega) F_2(\Omega)$$

自相关的傅里叶变换

$$F[R_f(t)] = F[f(t)] F^*[f(t)] = \|F[f(t)]\|^2$$

信号自相关函数与其幅度谱平方是一对傅里叶变换对

帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|F(\Omega)\|^2 d\Omega$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \|F(2\pi f)\|^2 df$$

使用赫兹域上定义的傅里叶变换公式

时域和频域的能量守恒

例2.10 一升余弦脉冲，波形如图2.41所示。升余弦脉冲表示为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[1 + \cos t] & , \quad -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & , \quad |t| \geq \pi \end{cases}$$

试求 $f(t)$ 的傅里叶变换。

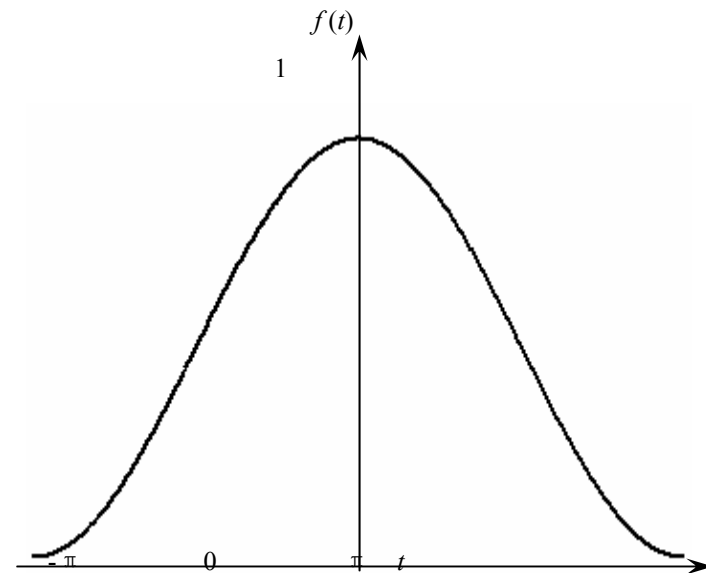


图2.41 升余弦脉冲时域波形

- 解法1： 直接利用傅里叶变换定义式。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos t) e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\Omega t} dt + \\ &\quad \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jt} e^{-j\Omega t} dt + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jt} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \pi \text{Sa}(\Omega\pi) + \frac{\pi}{2} \text{Sa}[(\Omega-1)\pi] + \frac{\pi}{2} \text{Sa}[(\Omega+1)\pi] \\ &= \frac{\sin \Omega\pi}{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(\Omega-1)\pi]}{\Omega-1} + \frac{1}{2} \frac{\sin[(\Omega+1)\pi]}{\Omega+1} \\ &= \frac{-\sin \Omega\pi}{\Omega(\Omega^2-1)} \end{aligned}$$

解法2：利用频移性质进行求解。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}(1 + \cos t) \cdot G_{2\pi}(t) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{jt} + e^{-jt}) \right] \cdot G_{2\pi}(t) \end{aligned}$$

$G_{2\pi}(t)$ 的傅里叶变换为 $G_{2\pi}(\Omega) = \frac{2 \sin \Omega \pi}{\Omega}$

由平移性质可得

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \frac{\sin \Omega \pi}{\Omega} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin(\Omega - 1)\pi}{\Omega - 1} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \sin(\Omega + 1)\pi}{\Omega + 1} \\ &= - \frac{\sin \Omega \pi}{\Omega(\Omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

解法3：利用频域卷积定理求。

由解法2，根据频域卷积定理，有

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} F\left[\frac{1}{2}(1 + \cos t)\right] * F[G_{2\pi}(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} [\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{2}\pi\delta(\Omega - 1) + \frac{1}{2}\pi\delta(\Omega + 1)] * \frac{2\sin \Omega\pi}{\Omega} \\ &= -\frac{\sin \Omega\pi}{\Omega(\Omega^2 - 1)} \end{aligned}$$

解法4：利用微分特性求解。

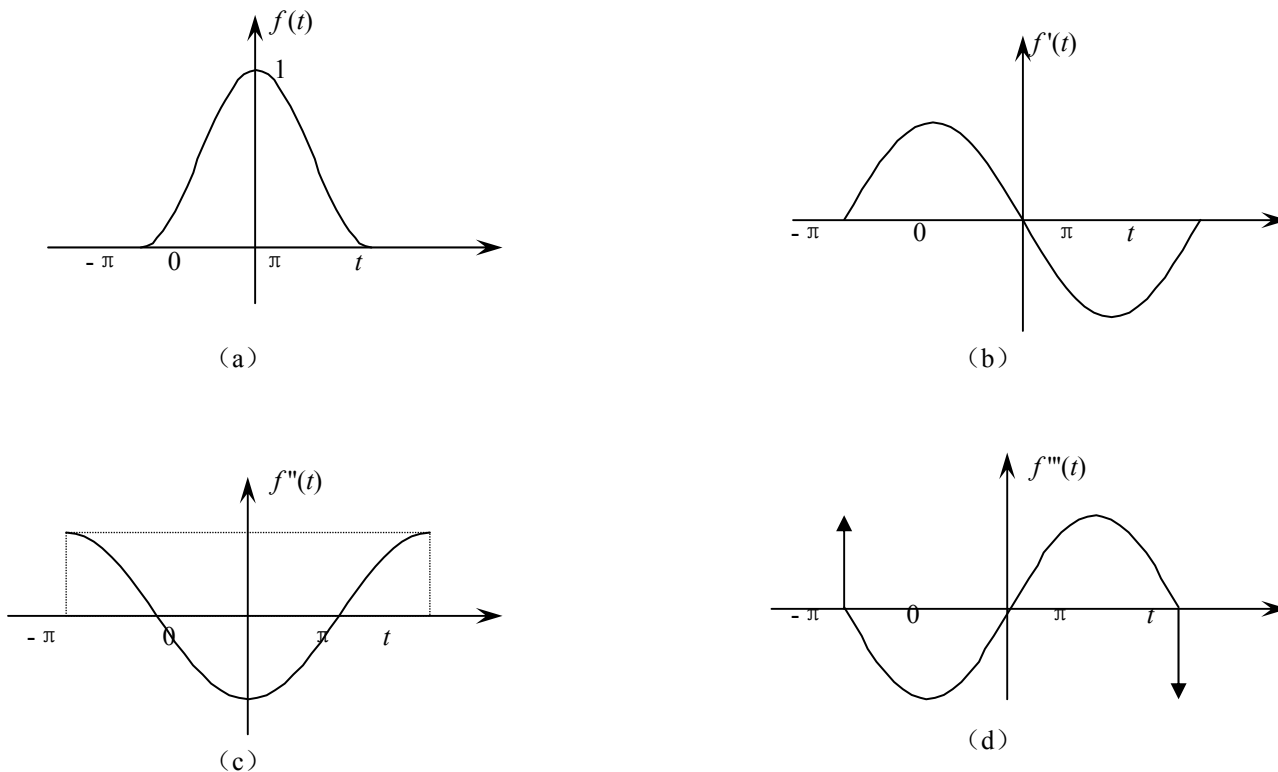


图2.42 $f(t)$ 、 $f'(t)$ 、 $f''(t)$ 和 $f'''(t)$ 的波形

求升余弦的FT

$$f'(t) = -\frac{1}{2}\sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$f''(t) = -\frac{1}{2}\cos t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

$$\begin{aligned} f'''(t) &= \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}[\delta(t + \pi) - \delta(t - \pi)] \\ &= -f'(t) + \frac{1}{2}[\delta(t + \pi) - \delta(t - \pi)] \end{aligned}$$

$$(j\Omega)^3 F(\Omega) = -(j\Omega)F(\Omega) + \frac{1}{2}(e^{j\Omega\pi} - e^{-j\Omega\pi})$$

$$F(\Omega) = -\frac{\sin \Omega\pi}{\Omega(\Omega^2 - 1)}$$

到哪里了？

一段区间上进行正交函数分量分解 →
周期信号的正交函数分量分解 FS →
非周期信号的“分解” → 傅里叶变换 FT →

周期信号的傅里叶变换FT

先感性认识，看看周期信号是否可能求傅里叶变换 →

▲ $F[e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

余弦信号的FT

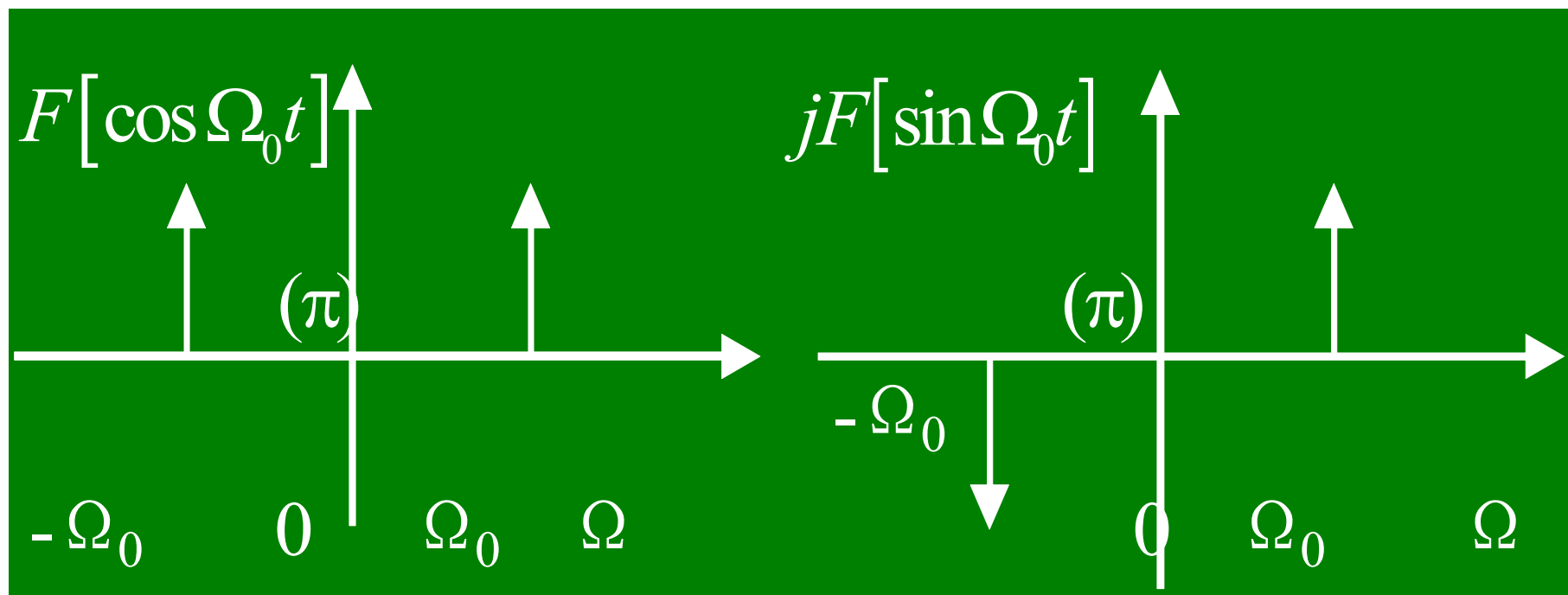
$$F[\cos \Omega_0 t] = F\left[\frac{e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}}{2}\right] = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

正弦信号的FT

$$F[\sin \Omega_0 t] = j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

周期信号的FT

正弦和余弦信号FT的频谱图



我们有什么？

看起来，周期信号是可以求傅里叶变换的。

我们的基础：

- 1 单周期（非周期）信号的傅里叶变换FT
- 2 周期信号的傅里叶级数FS

我们的问题：

如何从（1）求周期信号的FT？

如何从（2）求周期信号的FT？

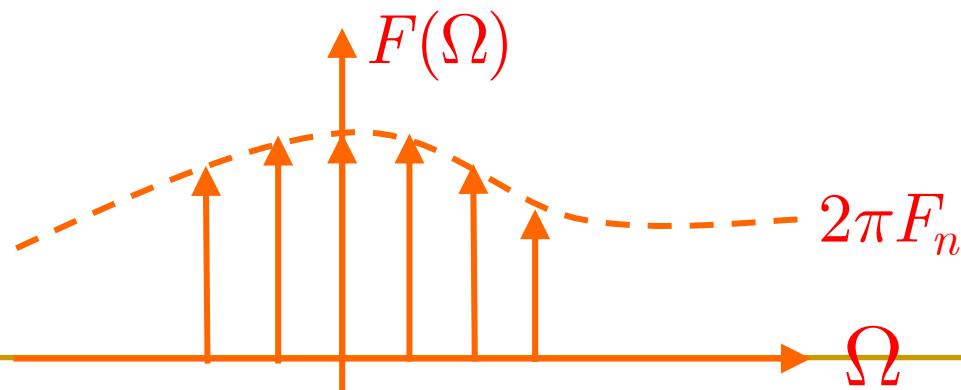
周期信号的FT

物理意义：

周期信号的频谱是由冲激串组成的，
串的间隔为 $\Omega_1 = 2\pi / T_1$ 即是信号的基频。
强度为FS系数 F_n 乘以 2π ，即 $2\pi F_n$

注意：

冲激信号位置在谐波频率 $n\Omega_1$ 处，
 F_n 是周期信号FS谐波分量的系数。



周期信号的FT

由非周期信号的FT，求周期信号的FT

什么是周期信号？ → 周期重复的信号！

谁在重复？ 如何重复？ 怎么表示重复？

$$f_0(t) \rightarrow f_0(t) + f_0(t - T_1) + f_0(t - 2T_1) + \cdots \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT_1)$$

$$\because f_0(t - nT_1) = f_0(t) * \delta(t - nT_1)$$

$$\therefore f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t) * \delta(t - nT_1) \quad \textcircled{1}$$

$$= f_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \quad \textcircled{2}$$

周期信号的FT

$$\textcircled{2} \rightarrow \therefore F(\Omega) = F_0(\Omega) \cdot \underline{F \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right]}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \therefore F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\Omega) \cdot F[\delta(t - nT_1)]$$

$$= F_0(\Omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 \cdot e^{-j\Omega nT_1})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\Omega_1 t} \quad (\text{FS}) \quad a_n = \cdots = \frac{1}{T_1}$$

周期信号

$$\underline{F \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} \cdot 2\pi \cdot \delta(\Omega - n\Omega_1) = \Omega_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

周期信号的FT

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= F_0(\Omega) \cdot \textcolor{red}{F} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right] \\ &= F_0(\Omega) \cdot \left[\Omega_1 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(\Omega) \cdot \Omega_1 \cdot \delta(\Omega - n\Omega_1) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_1 F_0(n\Omega) \delta(\Omega - n\Omega_1) \end{aligned}$$

对频谱进行抽样

周期信号的FT

物理意义：周期信号谱是冲激串，位置在 $n\Omega_1$ 处，间隔 Ω_1 ，
强度为主周期FT在冲激处的取值、乘以 Ω_1

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$$F_n = F_0(n\Omega_1) / T_1$$

前面已导出此关系

$$F(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \left(\frac{F_0(n\Omega_1)}{T_1} \right) \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_1 F_0(n\Omega_1) \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$$= F_0(\Omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_1 \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

“单”周期信号的
频谱被抽样了！

2.5 能量谱

在周期信号的功率谱中提到：对于时域上衰减的非周期信号或持续时间有限的信号为能量信号，其信号能量有限，因此与功率谱相对应，把信号能量随频率分布的关系，称为“能量谱”。

1. 非周期信号的帕斯瓦尔定理

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \end{aligned}$$

定理表明：对能量有限的信号，在时域上积分得到的信号能量与频域上积分得到的相等，即信号经过傅里叶变换，总能量保持不变，符合能量守恒定律。

2. 能量密度

令 $G(f) = |F(f)|^2$ 或 $G(\Omega) = |F(\Omega)|^2$

则

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\Omega) d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\Omega) d\Omega \\ &= 2 \int_0^{\infty} G(f) df \end{aligned}$$

$G(\Omega)$ 及 $G(f)$ 表示了单位带宽的能量，同时反映了信号能量在频域上的分布情况，因此把 $G(\Omega)-\Omega$ （或 $G(f)-f$ ）这种谱称之为能量密度谱（简称能谱）。

3. 能量带宽

利用能量定义式，可以确定一些虽然衰减但持续时间很长的非周期脉冲信号的有效脉宽和带宽。

有效脉宽 τ_0 定义为：集中了脉冲中绝大部分能量的时间段。即

$$\int_{-\frac{\tau_0}{2}}^{\frac{\tau_0}{2}} f^2(t) dt = \eta W = \eta \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

η 是指时间间隔 τ_0 内的能量与信号总能量的比值，一般取0.9以上

带宽 Ω_b 定义为:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_b} |F(\Omega)|^2 d\Omega = \eta W = \eta \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\Omega)|^2 d\Omega$$



η 是指 Ω_b 频段内的能量与信号总能量的比值，一般也取0.9以上。

能量谱

例2.13 求矩形脉冲频谱的第一个零点内所含的能量。矩形脉冲如图2.47所示。

解：由前述可知，矩形脉冲信号的频谱为

$$F(\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

它的第一个零点的位置在 $\Omega = 2\pi/\tau$ 处，则 $[0, 2\pi/\tau]$ 内的能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\tau}} |F(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\tau}} E^2 \tau^2 \left[\text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)\right]^2 d\Omega \end{aligned}$$

从而有

$$W = \frac{2E^2\tau}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

对上式进行数值积分可得：

$$W=0.903 E^2 \tau$$

而矩形脉冲的总能量 $(0, \infty)$ 频段，应为 $E^2 \tau$ （由于 $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = 1$ ：），即第一个零点内的能量约占总能量的90.3%，所以把第一个零点以内的频段称为矩形脉冲的带宽。

抽样信号的FT及抽样定理

为什么要抽样？

实际信号是时间连续的，但数字处理设备却有局限：

1. 处理需要时间，不能马上完成，但信号不会等待
2. 存储需要空间，不能无限容纳，但信号不会逗留
3. 单元需要粒度，不能任意连续，但信号不会间断
4. 表示需要精度，不能随意取值，但信号不会迁就

连续时间信号必须在送给计算机前处理成数字形式

抽样信号的FT及抽样定理

信息会不会丢失？

光从时域来看此问题，无法解决。（如同多路语音传输，时域不可分解。分片传输的时分复用例外）

“跳出三界外，不在五行中’，才能了断生死！”

不是看破红尘

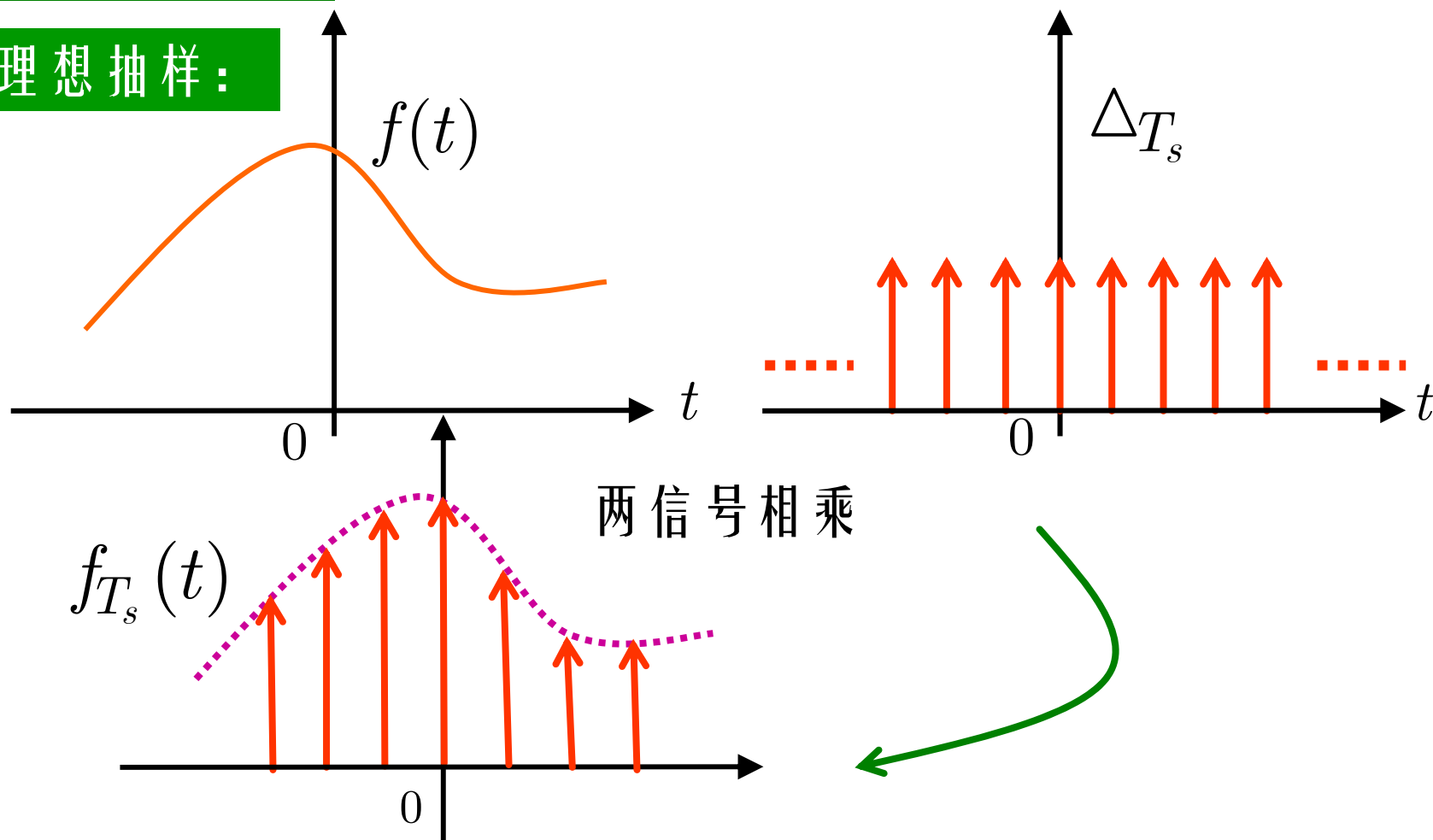
频域分析法，可以顺利地解决这个疑问。

所以我们先来看看抽样信号的傅里叶变换，再进行分析。

抽样信号的FT及抽样定理

如何进行抽样？

1. 理想抽样：



抽样信号的FT及抽样定理

频谱变化

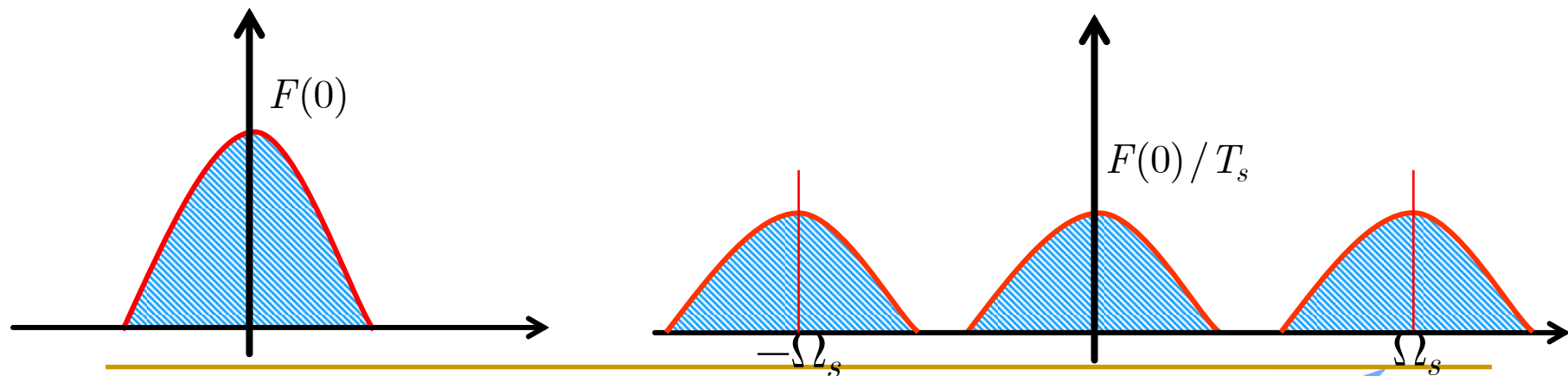
$$f_s(t) = f(t) \cdot \Delta T_s$$

$$F_s(\Omega) = \frac{1}{2\pi} F(\Omega) * \left(\Omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s) \right)$$

$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega) * \delta(\Omega - n\Omega_s)$$

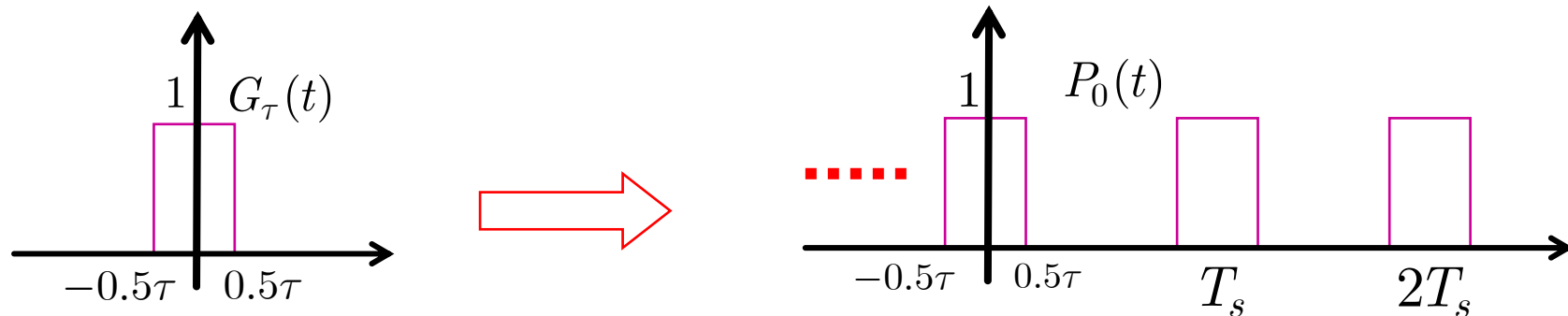
$$= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega - n\Omega_s)$$

原频谱周期重复

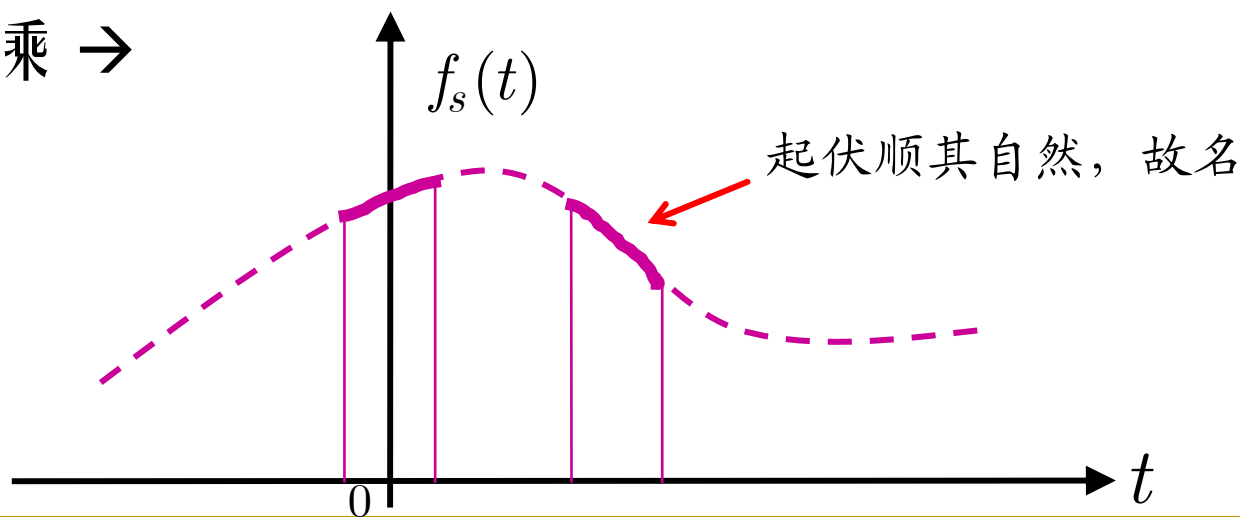


抽样信号的FT及抽样定理

2. 自然抽样:



与原信号相乘 \rightarrow



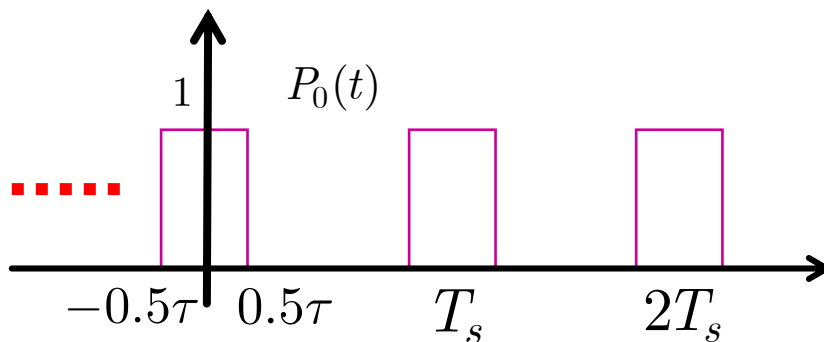
抽样信号的FT及抽样定理

$$\begin{aligned} F_s(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\Omega) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_s F_G(\Omega) \cdot \delta(\Omega - n\Omega_s) \right) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_G(n\Omega_s) \cdot [F(\Omega) * \delta(\Omega - n\Omega_s)] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_G(n\Omega_s) \cdot F(\Omega - n\Omega_s) \end{aligned}$$

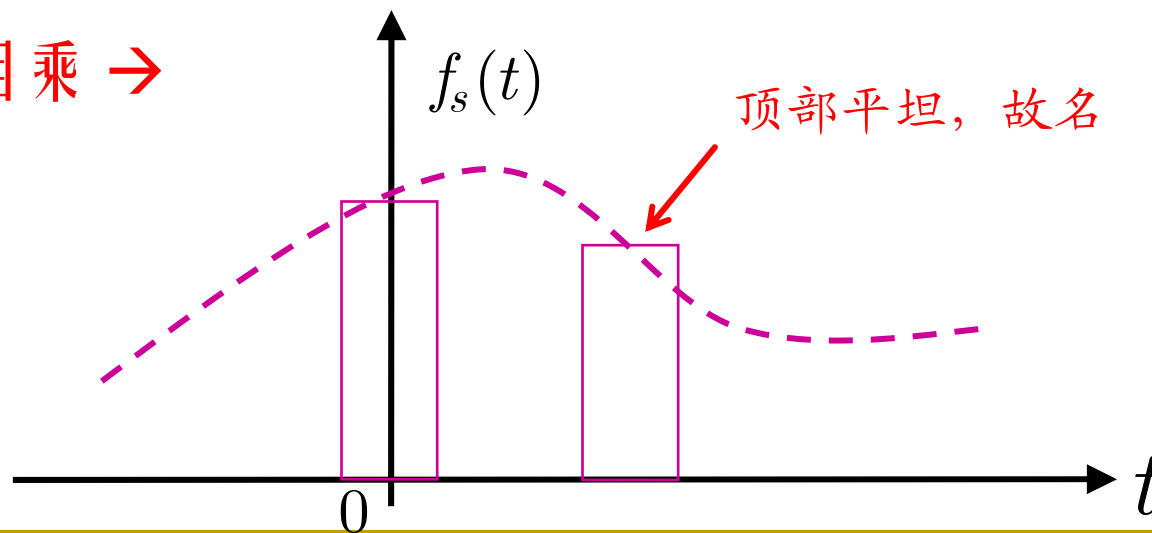
周期信号的频谱

抽样信号的FT及抽样定理

3. 平顶抽样:



与信号相乘 \rightarrow



抽样信号的FT及抽样定理

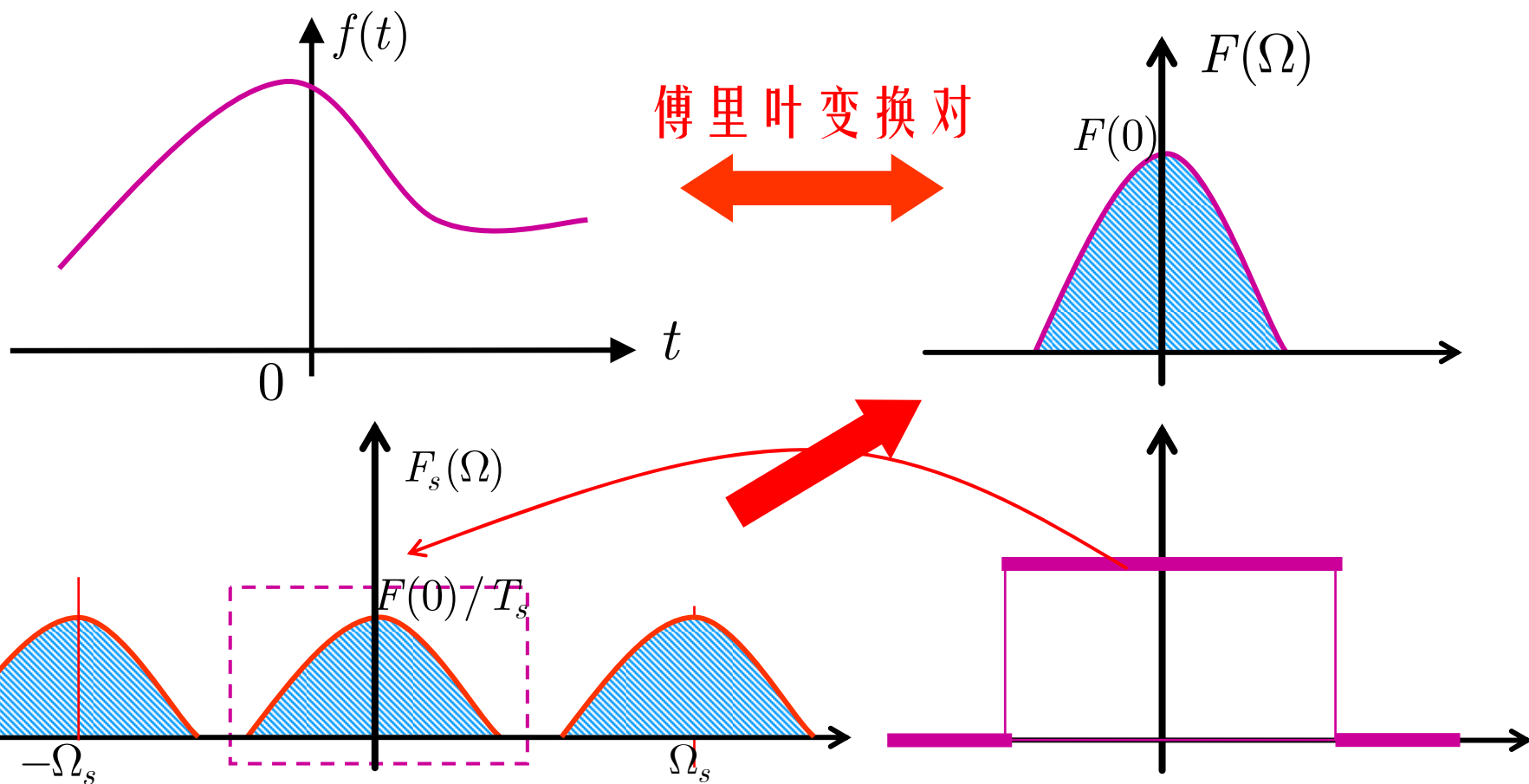
$$\begin{aligned} f_s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) p_0(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) p_0(t) * \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_0(t) * (f(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)) \\ &= p_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT_s) \\ &= p_0(t) * \left[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] \end{aligned}$$

抽样信号的FT及抽样定理

$$\begin{aligned} f_s(t) &= p_0(t) * \left[f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right] \Leftrightarrow \\ &P_0(\Omega) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} F(\Omega) * \left(\Omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s) \right) \right] \\ &= P_0(\Omega) \cdot \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega - n\Omega_s) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega - n\Omega_s) \end{aligned}$$

抽样信号的FT及抽样定理

如何将抽样信号还原——恢复原始信号？

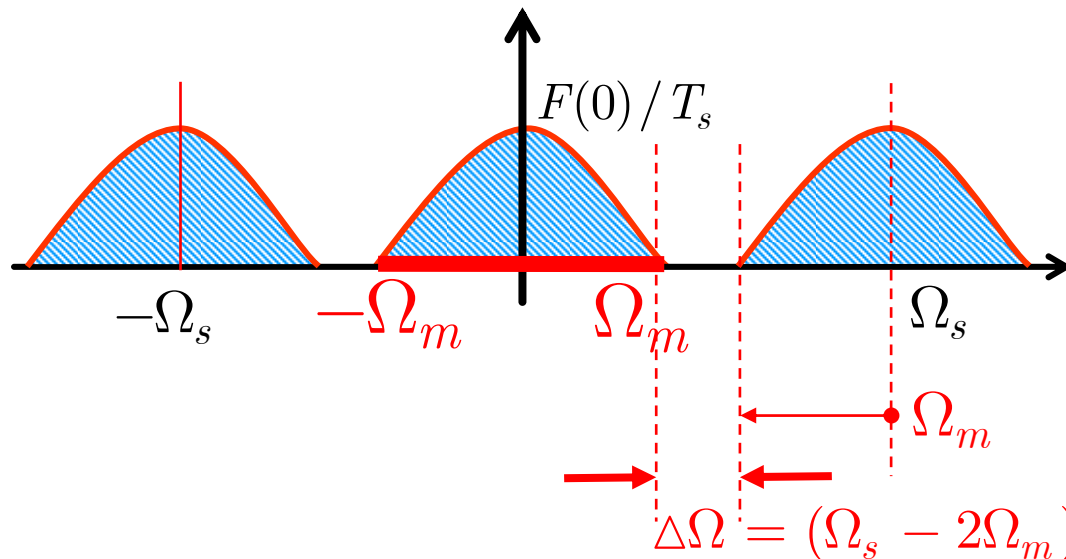


抽样信号的FT及抽样定理

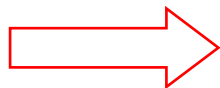
如何保证恢复还原不会失真？

设信号的频带宽度为 $-\Omega_m \sim \Omega_m$

则抽样后的离散时间信号的频谱为：



要不混叠，必须 $\Delta\Omega = (\Omega_s - 2\Omega_m) \geq 0$



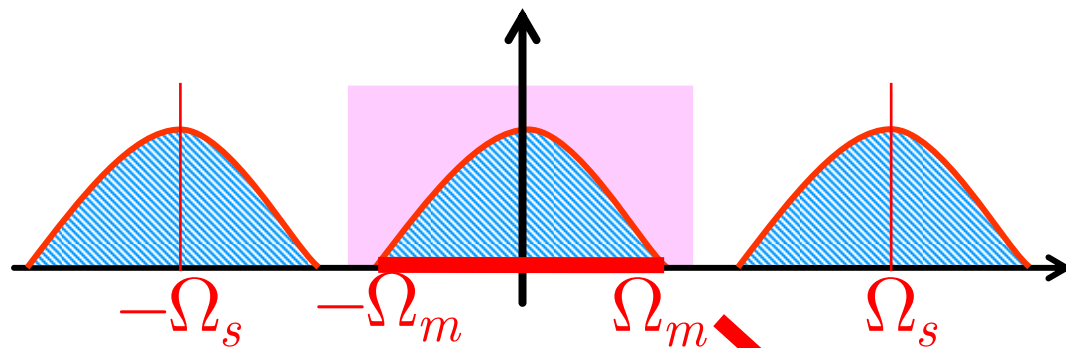
$$\Omega_s \geq 2\Omega_m$$

抽样信号的FT及抽样定理

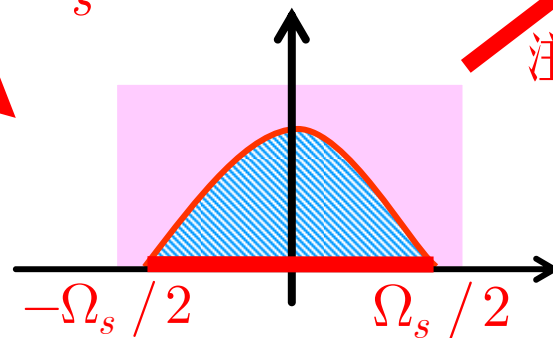
抽样定理

要保证从信号抽样后的离散时间信号无失真地恢复原始时间连续信号，必须满足：

- (1) 信号是频带受限的；
- (2) 采样率至少是信号最高频率的两倍。



时间信号的恢复



时间信号
注意倍数关系

抽样信号的FT及抽样定理

从抽样信号恢复原始信号的方法

理论上

$$f(t) = f_s(t) * \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} \text{Sa}(\Omega_c t)$$

$$= \frac{2\Omega_c}{\Omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(nT_s) \text{Sa}(\Omega_c (t - nT_s)) \right]$$

工程上

将抽样信号通过截止频率为 Ω_c 、放大倍数为 T_s 的低通滤波器。

抽样信号的FT及抽样定理

几个概念

抽样周期	进行理想抽样的冲激串的周期 T_s
抽样频率	$f_s = 1 / T_s$
抽样角频率	$\Omega_s = 2\pi / T_s$
奈奎斯特率	无失真恢复原信号条件允许的最小抽样率 $f_s^{(\min)} = 2f_c$
奈奎斯特间隔	允许的最大抽样周期 $T_s^{(\max)} = \frac{1}{2f_c}$

奈奎斯特频率是信号上限频率的2倍

抽样信号的FT及抽样定理

频域抽样

$$f(t) \Leftrightarrow F(\Omega)$$

$$F_1(\Omega) = F(\Omega) \cdot \Delta\Omega_1(\Omega) = F(\Omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$$\therefore \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \Leftrightarrow \Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1), \Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\therefore F^{-1} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1) \right] = \frac{1}{\Omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \frac{1}{\Omega_1} \Delta_{T_1}(t)$$

抽样信号的FT及抽样定理

$$\begin{aligned}\therefore F^{-1} [F_1(\Omega)] &= f(t) * \left[\frac{1}{\Omega_1} \Delta_{T_1}(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Omega_1} \left(f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \right) \\ &= \frac{1}{\Omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_1)\end{aligned}$$

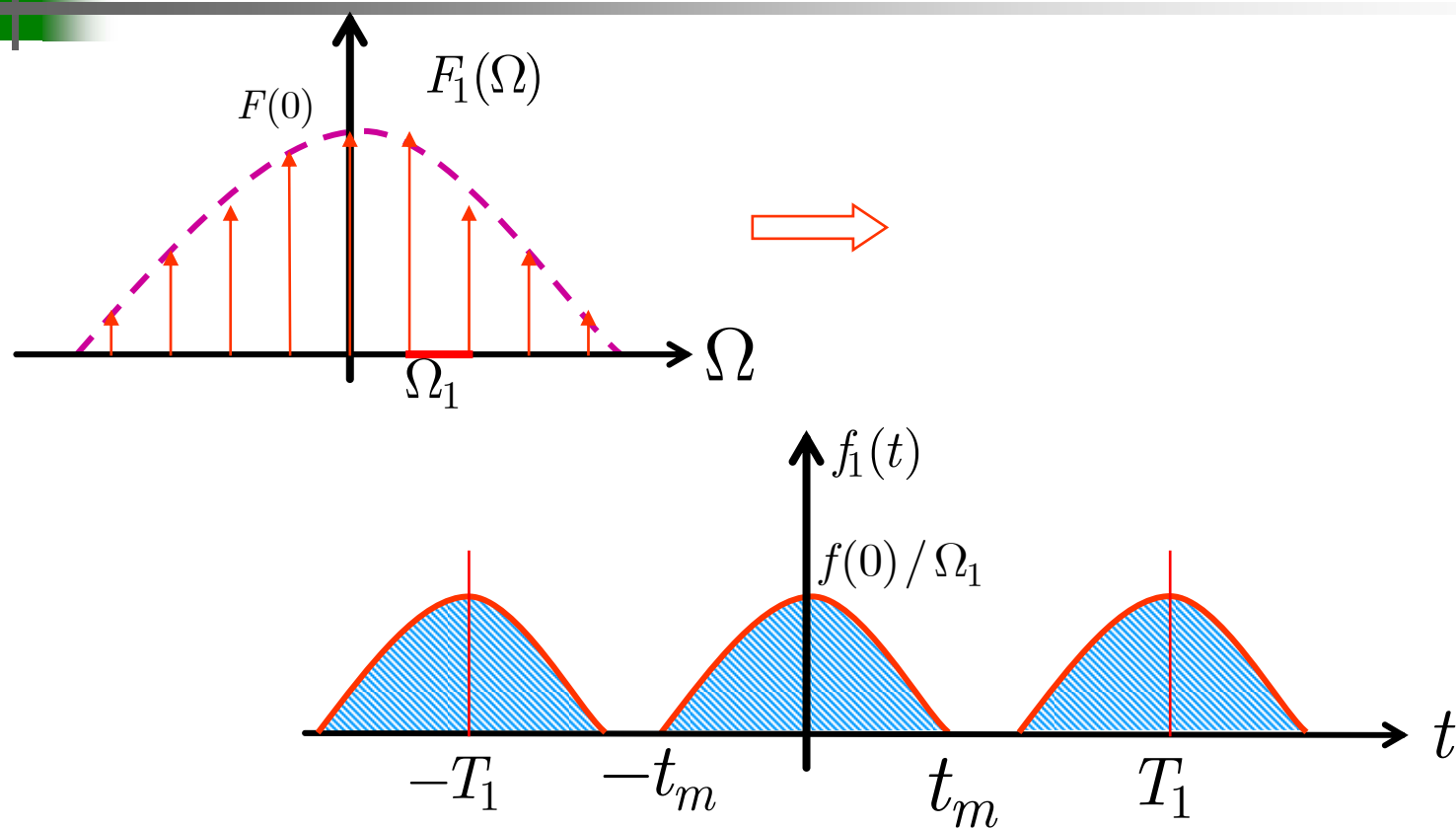
物理意义：

对信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\Omega)$ ，以间隔 Ω_1 采样，得离散谱 $F_1(\Omega)$

它对应的时域信号是 $f(t)$ 周期重复（除以 Ω_1 ），

周期为 $T_1 = 2\pi / \Omega_1$

抽样信号的FT及抽样定理



$$(T_1 - t_m) - t_m \geq 0$$

$$\therefore T_1 \geq 2t_m$$

频域抽样定理

时域和频域的对应关系

