

第6章 数字滤波器

基本内容:

数字滤波器基本概念

IIR数字滤波器设计

FIR数字滤波器设计

数字滤波器的实现

第6章 数字滤波器

数字滤波器按照不同的分类方法，有许多种类，但总起来可以分成两大类。一类称为经典滤波器，另一类是所谓的现代滤波器，例如维纳滤波器、卡尔曼滤波器、自适应滤波器等最佳滤波器。这些滤波器可按照随机信号内部的一些统计分布规律，从干扰中最佳地提取信号。

第6章 数字滤波器

从功能上分类，可以分成低通、高通、带通和带阻等滤波器；从实现的网络结构或者从单位抽样响应分类，可以分成无限冲激响应数字滤波器

（Infinite Impulse Response Digital Filter，以下简称IIR数字滤波器）和有限冲激响应数字滤波器

（Finite Impulse Response Digital Filter，以下简称FIR数字滤波器）。

6.1 数字滤波器的基本原理

数字滤波器是具有一定**传输选择特性**的数字信号处理装置。一离散时间系统的输出 $y(n)$ 是输入 $x(n)$ 的三点移动平均值，即为

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$$

对上式进行z变换，可得

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 + z + z^{-1})$$

则系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

画出幅频特性如图6.2所示。

6.1 数字滤波器的基本原理

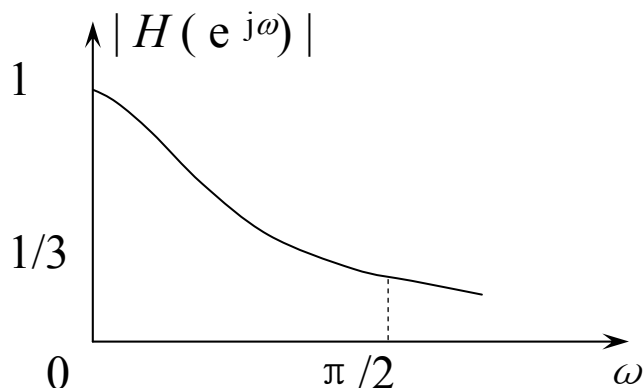


图6.2 式（6.2）的幅频特性

由图6.2，该系统频响具有低通滤波器特性。上述的简单数字滤波所处理的是离散信号（输入输出均为序列）。数字滤波器也可以对连续时间信号进行处理，但是连续信号要通过A/D进行离散化，经数字滤波后，可再经D/A转换得到所需要的连续信号。

6.1 数字滤波器的基本原理

数字滤波器是一离散时间系统，可以用差分方程，单位抽样响应 $h(n)$ 、系统函数 $H(z)$ 或频率响应 $H(e^{j\omega})$ 来描述。按照离散系统的时域特性，数字滤波器可分为无限冲激响应（IIR）有限冲激响应（FIR）数字滤波器两类，前者是指其单位抽样响应 $h(n)$ 为无限长序列，后者 $h(n)$ 则是有限长序列。由前述，一般离散系统可表示为N阶差分方程

$$y(n) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

6.1 数字滤波器的基本原理

其系统函数可表示为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N b^k z^{-k}}$$

当 b_k 全为0时， $H(z)$ 为多项式，即

$$H(z) = \sum_{r=0}^M a_r z^{-r} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}$$

所以，单位抽样响应 $h(n)$ 应为

$$h(n) = a_0 \delta(n) + a_1 \delta(n-1) + a_2 \delta(n-2) + \cdots + a_M \delta(n-M)$$

6.1 数字滤波器的基本原理

则 $h(n)$ 有 $M+1$ 项，为有限长，即**FIR**数字滤波器，上式也可写成一般情况下的差分方程形式，即

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2) + \cdots + a_M x(n-M)$$

上式表明：这种滤波器的输出只与现时刻的输入以及过去时刻的输入有关，而与过去的输出没有直接的关系，通常用**非递归的结构形式来实现**。而当式（6.3） b_k 不全为0，并且分母至少存在一个根不为分子所抵消时， $H(z)$ 是有理分式，则 $h(n)$ 为无限长，即**IIR**数字滤波器

6.1 数字滤波器的基本原理

例6.1 已知一数字滤波器用差分方程表示为

$$y(n) + b_1 y(n-1) = a_0 x(n)$$

若 $b_1 = -1$, $a_0 = 0.5$, 试求其单位抽样响应 $h(n)$ 。

解：对差分方程进行z变换，整理后得系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}} = \frac{0.5}{1 - z^{-1}} \\ &= a_0 (1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots) \\ &= 0.5(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots), \quad |z| > 1 \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} h(n) &= Z^{-1} [H(z)] \\ &= a_0 [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots] \\ &= a_0 \varepsilon(n) = 0.5 \varepsilon(n) \end{aligned}$$

6.1 数字滤波器的基本原理

例6.2 一数字滤波器的差分方程为

$$y(n) = x(n) + 0.5x(n-1)$$

试求其单位抽样响应 $h(n)$ 。

解：由差分方程可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 0.5z^{-1}$$

对上式反变换后可得单位抽样响应 $h(n)$ 为

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$$

显然， $h(n)$ 为一有限长序列，是FIR系统。

6.1 数字滤波器的基本原理

由前述举例，数字滤波器根据系统实现的结构不同，分为递归与非递归两种。两者结构上的主要区别是：**递归结构有反馈支路，非递归结构则没有。**数字滤波器与模拟滤波器相似，根据幅频响应的特性也可分为低通、高通、带通、带阻等类型，但与模拟滤波器不同，**数字滤波器是一离散系统，其幅频特性 $|H(e^{j\omega})|$ 是以 2π 为周期的周期函数**，因此，数字低通、高通、带通、带阻等幅频特性都是**指数字角频率在 $\omega = 0 - \pi$ 的频率范围而言的。**

6.1 数字滤波器的基本原理

数字滤波器设计一般包括三个基本步骤：

- (1) 给出技术指标；
- (2) 由技术指标确定数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ，并实现频率特性的要求；
- (3) 通过算法实现 $H(z)$ 。

图6.5为一低通滤波器的技术指标要求的示例，图中的虚线是一满足给定技术指标要求的系统幅频特性。在通带内。频响的幅度逼近1，允许误差为 δ_p ，阻带幅度逼近零，允许误差范围 δ_z ，在通带截止频率 ω_c 和阻带始点频率 ω_z 之间为过渡带。

6.1 数字滤波器的基本原理

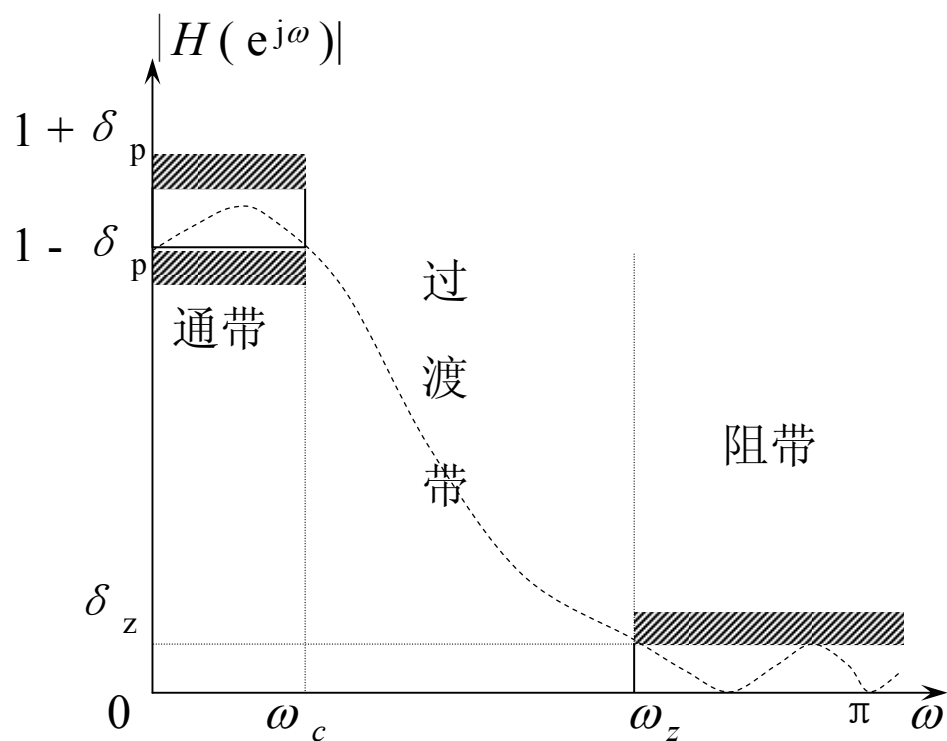


图6.5 数字低通滤波器的技术指标的给定

6.2 IIR数字滤波器设计

IIR数字滤波器的特点是 $h(n)$ 为无限长序列。

设计的基本思路：

模拟系统与离散系统存在着互相模仿的理论基础，所以可以让数字滤波器的特性去模仿一个模拟滤波器的特性，得到数字滤波器的 $H(z)$ 、 $H(e^{j\omega})$ 与模拟滤波器的 $H_a(s)$ 、 $H_a(j\Omega)$ 之间的变换关系。

- (1)先设计一个模拟滤波器的传递函数 $H_a(s)$ ，
- (2)通过 s 变量与 z 变量之间的变换关系求出数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

下面介绍两种常用模拟与数字滤波器设计互相模仿，设计数字滤波器的变换方法：**冲激响应不变法**与**双线性变换法**。

6.2.1 冲激响应不变法

1. 基本原理

冲激响应不变法，是使数字滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ ，与一个模拟滤波器单位冲激响应 $h_a(t)$ 的抽样值相等，即所谓“冲激响应不变”，表示为

$$h(n) = h_a(t) \big|_{t=nT} = h_a(nT)$$

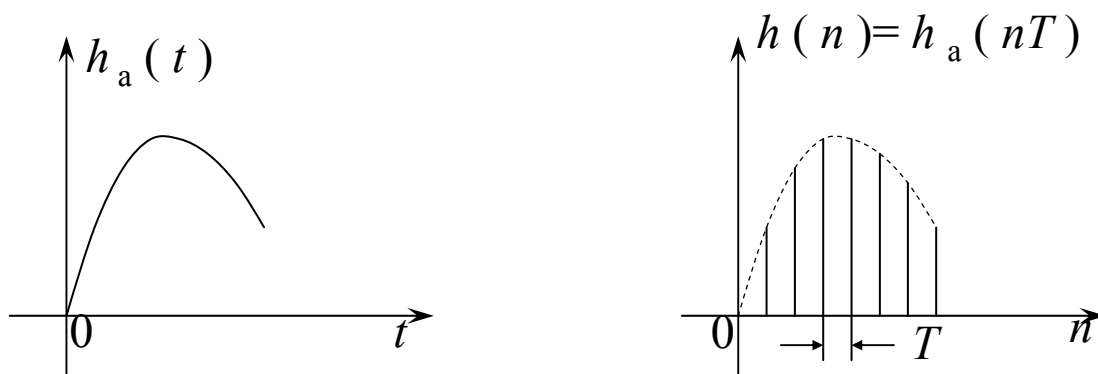


图6.6 冲激响应不变法原理

6.2.1 冲激响应不变法

抽样序列的 z 变换与模拟信号的拉氏变换之间的关系为：冲激抽样信号的拉氏变换是模拟信号拉氏变换的周期延拓，即：

$$H_s(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}m)$$

当 $z = e^{sT}$ 时，即为序列的 z 变换，为

$$H(z) = \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}m) \right] \Big|_{z=e^{sT}}$$

6.2.1 冲激响应不变法

将 $s = j\Omega$, $z = e^{sT} = e^{j\Omega T}$, $\omega = \Omega T$ 代入上式, 可得离散时间信号的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \left[\frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}m) \right]_{\omega=\Omega T}$$

上式说明: 数字滤波器的频率响应是模拟滤波器响应的周期延拓, 频率变量存在 $\omega = \Omega T$ 的线性映射关系。

根据抽样定理, 只有当模拟滤波器的频响是带限的并限于折叠频率内时, 即

$$H_a(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

6.2.1 冲激响应不变法

才有下式成立：

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} = \frac{1}{T} H_a(j\Omega), \quad |\Omega| \leq \frac{\pi}{T}$$

或

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}), \quad |\omega| \leq \pi$$

再来求系统函数 $H(z)$ 与 $H_a(s)$ 之间的变换关系。
由 $H_a(s)$ 求出 $H(z)$ ：

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$$

6.2.1 冲激响应不变法

2. 稳定性与逼近程度问题

如果模拟滤波器是稳定的，那么经变换后所得的数字滤波器也应是稳定的。因为当模拟滤波器稳定时，其 $H_a(s)$ 的所有极点 s_i 应在左半平面，即 $\text{Re}[s_i] < 0$ ，则有

$$z_i = e^{s_i T}$$

$$|z_i| = |e^{s_i T}| = e^{\text{Re}[s_i] T} < 1$$

说明 z_i 在单位圆内，从而数字滤波器必然也是稳定的。逼近程度是指数字滤波器的频响逼近模拟滤波器误差大小。

6.2.1 冲激响应不变法

3. 冲激响应不变法设计数字滤波器举例

IIR数字滤波器的设计，总的来说，是对模拟滤波器特性的模仿，具体设计过程为：

- (1) 指标转换。根据频率变换关系 $\omega = \Omega T$ ，将数字滤波器的特性指标，转换为模拟原型数字滤波器的指标；
- (2) 针对模拟原型滤波器的指标设计模拟原型滤波器的传递函数 $H_a(s)$ ；
- (3) 通过 s 与 z 变量的变换关系 $s = f(z)$ ，由 $H_a(s)$ 求出 $H(z)$ 。

以上步骤，可用下面图6.7来表示。

6.2.1 冲激响应不变法

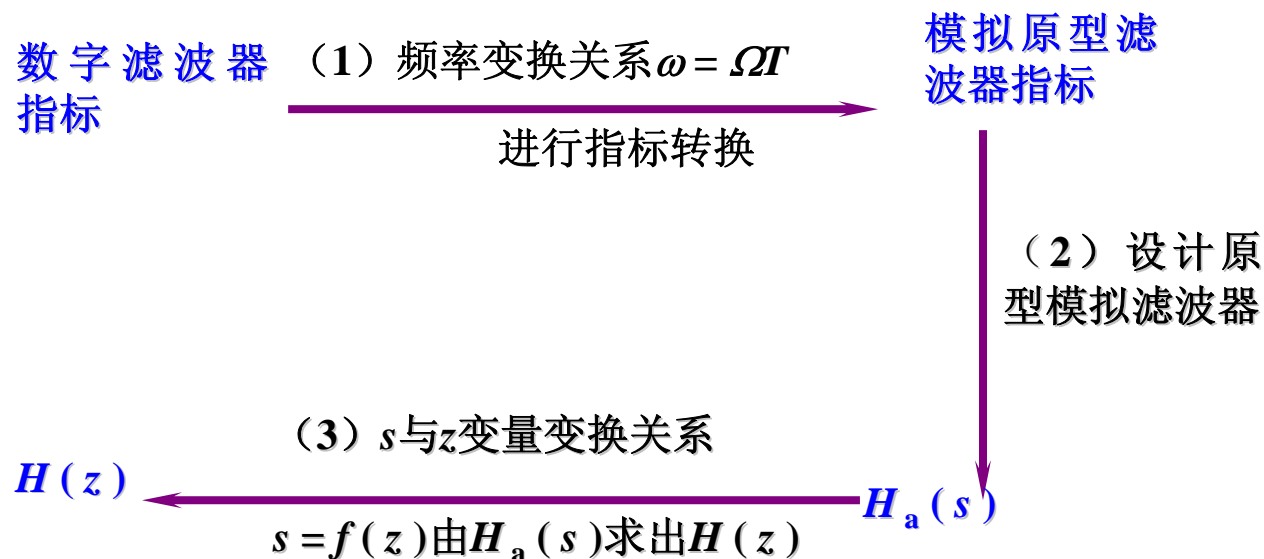


图6.7 IIR数字滤波器设计步骤

图中的步骤 (2) 已在模拟滤波器一节解决，下面简要介绍 (1) 和 (3) 的求法。

6.2.1 冲激响应不变法

例6.3 设一模拟滤波器的传递函数为

$$H_a(s) = \frac{s + a}{(s + a - jb)(s + a + jb)}$$

试用冲激响应不变法求相应数字滤波器的 $H(z)$ 。

将传递函数 $H_a(s)$ 变换为部分分式之和为

$$H_a(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s + a + jb} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + a - jb}$$

进行拉氏反变换可得

$$h_a(t) = \frac{1}{2} e^{-(a+jb)t} \varepsilon(t) + \frac{1}{2} e^{-(a-jb)t} \varepsilon(t)$$

按冲激响应不变法有

6.2.1 冲激响应不变法

$$h(n) = h_a(t) \big|_{t=nT} = \frac{1}{2} [e^{-(a+jb)nT} \varepsilon(n) + e^{-(a-jb)nT} \varepsilon(n)]$$

则IIR滤波器的系统函数为

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \\ &= \frac{1 - (e^{-aT} \cos bT) z^{-1}}{(1 - e^{-aT} e^{-jbT} z^{-1})(1 - e^{-aT} e^{jbT} z^{-1})} \\ &= \frac{z(z - e^{-aT} \cos bT)}{(z - e^{-aT} e^{-jbT})(z - e^{-aT} e^{jbT})} \end{aligned}$$

6.2.1 冲激响应不变法

冲激响应不变法的特点是数字角频率与模拟角频率之间是线性变换，若模拟滤波器频响是带限的话，通过变换所得的数字滤波器的频响可以非常接近于模拟滤波器的频响，即

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} [H_a(\Omega)], & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$

但冲激响应不变法一般都会存在混叠效应而造成频响失真，在实际中应用较少，多采用双线性变换法。

6.2.2 双线性变换法

1. 基本原理

冲激响应不变法是使模拟滤波器与数字滤波器的冲激响应互相模仿，从而达到两者频响之间的互相模仿，**双线性变换法的基本思路是让两种滤波器的输入输出互相模仿，从而达到频响的互相模仿**，这种模仿关系如图6.9所示。

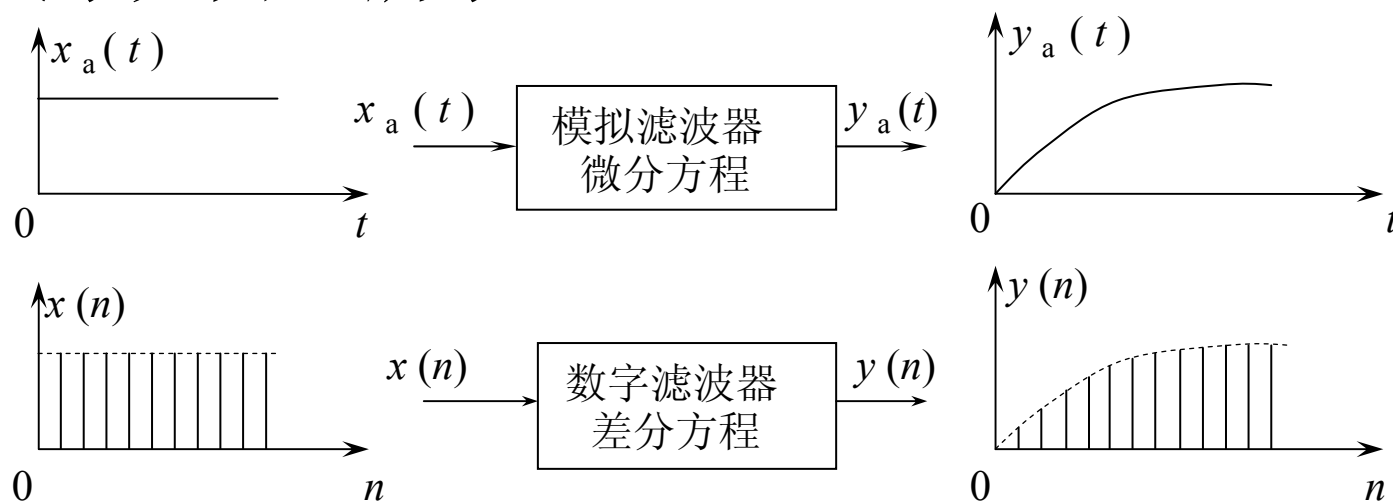


图6.9 双线性变换法基本原理

6.2.2 双线性变换法

关键: 使数字滤波器的差分方程是模拟滤波器的微分方程的近似解。

先从最简单的一阶微分方程开始, 设模拟滤波器的微分方程为

$$C_1 y_a'(t) + C_0 y_a(t) = D_0 x_a(t)$$

对上式进行拉氏变换后可得模拟滤波器的传递函数 $H_a(s)$

$$H_a(s) = \frac{D_0}{C_1 s + C_0}$$

6.2.2 双线性变换法

把 $y_a(t)$ 表示成 $y_a'(t)$ 的积分形式

$$y_a(t) = y_a(t_0) + \int_{t_0}^t y_a'(t) dt$$

设： $t_0 = (n-1)T$, $t = nT$, 则

$$y_a(nT) = y_a[(n-1)T] + \int_{(n-1)T}^{nT} y_a'(t) dt$$

对上式中的积分项应用梯形近似积分，可写成

$$y_a(nT) = y_a[(n-1)T] + \frac{T}{2} \{y_a'(nT) + y_a'[(n-1)T]\}$$

6.2.2 双线性变换法

由式 (6.17) ,有

$$y'_a(nT) = -\frac{C_0}{C_1} y_a(nT) + \frac{D_0}{C_1} x_a(nT)$$

$$y'_a[(n-1)T] = -\frac{C_0}{C_1} y_a[(n-1)T] + \frac{D_0}{C_1} x_a[(n-1)T]$$

将上述两式代入式 (6.19) , 并用 $y(n)$ 、 $y(n-1)$ 、 $x(n)$ 、 $x(n-1)$ 代替相应的抽样值, 可得

$$y(n) - y(n-1) = \frac{T}{2} \left\{ -\frac{C_0}{C_1} [y(n) + y(n-1)] + \frac{D_0}{C_1} [x(n) + x(n-1)] \right\}$$

6.2.2 双线性变换法

上式即为逼近模拟滤波器微分方程的差分方程，对差分方程进行 z 变换，整理后可得离散系统的系统函数 $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{D_0}{C_1 \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right) + C_0}$$

比较式（6.18）和（6.21）后，可以得出：将 $H_a(s)$ 中的变量 s 代以下述关系式，即可得到系统函数 $H(z)$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

6.2.2 双线性变换法

上式也可表示成

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

因而有

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

上述关系只是从一阶微分方程得出的，但 **N 阶模拟滤波器微分方程可分解为 **N 个一阶微分方程之和****，因而这种关系是带普遍性的。

6.2.2 双线性变换法

求 ω 与 Ω 之间的关系:

由式 (6.24), 以 $s = j\Omega$ 代入其中, 得

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} = \frac{\frac{2}{T} + j\Omega}{\frac{2}{T} - j\Omega}$$

若

$$z = |z| e^{j\omega}$$

由式 (6.26), 有

$$|z| = 1$$

$$\omega = 2 \arctan \frac{\Omega T}{2}$$

或

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$$

6.2.2 双线性变换法

显然，当 s 在 s 平面的虚轴上变化时，相应的 z 正好在 z 平面的单位圆上变，即模拟滤波器的频响 $H_a(j\Omega)$ 正好与数字滤波器的频响 $H(e^{j\omega})$ 相对应，但数字角频率 ω 与模拟角频率 Ω 之间的变换关系由式（6.28）或（6.29）可知是非线性的。

2. 稳定性与逼近程度

稳定性问题仍可归结为 s 平面的左半平面是否映射在 z 平面的单位圆内部，需要判别：当 $s = \sigma + j\Omega$ ， $\sigma < 0$ 时，即极点 s 位于 s 平面的左半平面， z 是否在单位圆内部？

6.2.2 双线性变换法

$$\text{由 } z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} = \frac{\frac{2}{T} + \sigma + j\Omega}{\frac{2}{T} - \sigma - j\Omega} \quad \text{有} \quad |z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \Omega^2}} < 1$$

当 $\sigma < 0$ 时，上式为 $|z| < 1$ ，滤波器是稳定的。

由此可见，对于双线性变换法，只要模拟滤波器 $H_a(s)$ 稳定，即其极点位于 s 平面的左半平面，则通过双线性变换得到的数字滤波器 $H(z)$ 的极点必在单位圆内，因此也是稳定的。

6.2.2 双线性变换法

双线性变换法克服了冲激响应不变法存在的频谱混叠问题，其幅度逼近程度好；

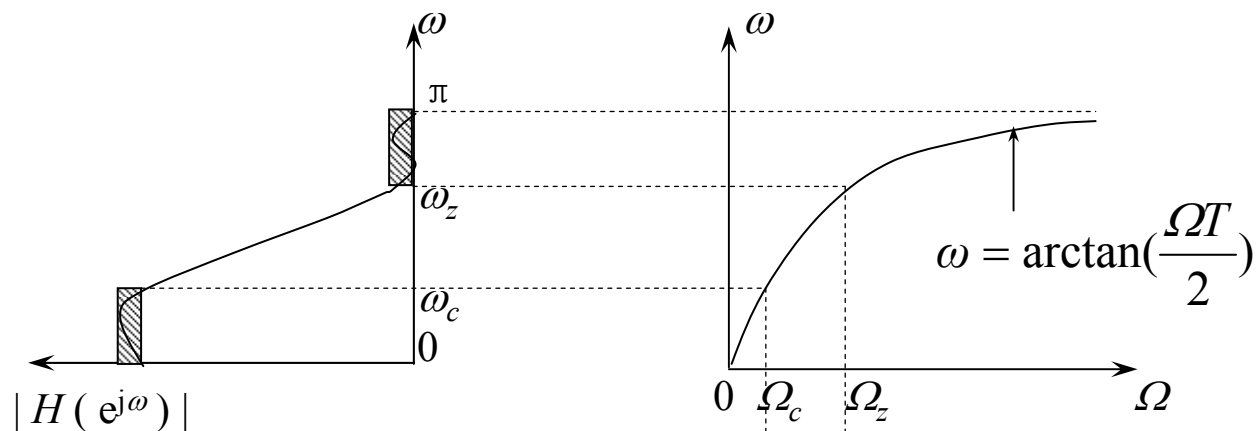
可应用于高通、带阻等各种滤波器的设计。

设计的运算由于 s 与 z 之间有比较简单的代数关系，运算比较简单。

存在频率轴的非线性畸变，可以通过预畸来解决。

因此在IIR数字滤波器设计中，采用双线性变换法居多，当强调滤波器的瞬态时域响应时，可以采用冲激响应不变法。

6.2.2 双线性变换法



在低频段, $\omega \rightarrow 0$,
 $\tan(\omega/2) \approx \omega/2$, 其频率
转换关系近似成直线。

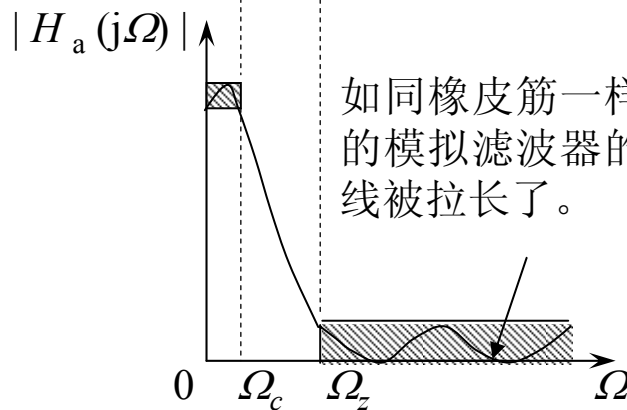


图6.10 双线性变换中数字与模拟滤波器频响关系

6.2.2 双线性变换法

应用MATLAB语言编程，也可以通过双线性变换法，实现模拟滤波器 $H_a(s)$ 至数字滤波器 $H(z)$ 的变换。对于采用零极点增益形式表示的模拟滤波器模型，实现双线性变换数字滤波器的函数调用格式为

$[z_d, P_d, K_d] = \text{bilinear}(z, p, k, F_s)$

$[z_d, P_d, K_d] = \text{bilinear}(z, p, k, F_s, F_p)$

式中， z_d, P_d, K_d 分别表示模拟滤波器零、极点和增益； F_s 为采样频率，Hz； F_p 为预畸变频率，Hz，函数选择项； z, p, k 为数字滤波器零、极点和增益。

6.2.2 双线性变换法

若模拟滤波器使用以下的传递函数形式表示，即

$$\frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} = \frac{\text{num}(1)s^{nn} + \dots + \text{num}(nn)s + \text{num}(nn+1)}{\text{den}(1)s^{nd} + \dots + \text{den}(nd)s + \text{den}(nd+1)}$$

num和den分别表示模拟滤波器传递函数分子、分母多项式系数向量，则实现数字滤波器的函数调用格式为

$$[\text{numd}, \text{dend}] = \text{bilinear}(\text{num}, \text{den}, F_s)$$

$$[\text{numd}, \text{dend}] = \text{bilinear}(\text{num}, \text{den}, F_s, F_p)$$

式中，numd, dend 分别表示数字滤波器传递函数分子、分母多项式系数向量， F_s , F_p 的意义同上。

6.2.2 双线性变换法

例6.9 用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器。其性能指标为：通带频率范围在 $0 \leq \omega \leq 0.2\pi$ 内，波纹小于3dB，在 $0.3\pi \leq \omega \leq \pi$ 的阻带内，幅度衰减 $\delta_z \leq 15\text{dB}$ ，并设抽样周期 $T = 0.001$ (s)。双线性变换法设计巴特沃思数字低通滤波器的MATLAB程序如下。

```
%给定滤波器指标
```

```
wp=0.2*pi;
```

```
ws=0.3*pi;
```

```
Rp=3;
```

```
Rs=15;
```

```
Ts=0.001;
```

```
Nn=128;
```

6.2.2 双线性变换法

```
%数字频率模拟频率非线性变换
Wp=(2/Ts)*tan(wp/2);
Ws=(2/Ts)*tan(ws/2);
%计算滤波器阶次和截止频率
[N,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');
%设计模拟原型
[z,p,k]=buttap(N);
[Bap,Aap]=zp2tf(z,p,k);
[b,a]=lp2lp(Bap,Aap,Wn);
%双线性变换法设计数字滤波器
[bz,az]=bilinear(b,a,1/Ts);
freqz(bz,az,Nn,1/Ts)
```

6.2.2 双线性变换法

设计的主要结果为

$$N = 4$$

$$W_n = 664.4163$$

$$b_z = 0.0052 \quad 0.0207 \quad 0.0311 \quad 0.0207 \quad 0.0052$$

$$a_z = 1.0000 \quad -2.3358 \quad 2.2608 \quad -1.0229 \quad 0.1807$$

所设计的数字滤波器频响为图6.11所示。

6.2.2 双线性变换法

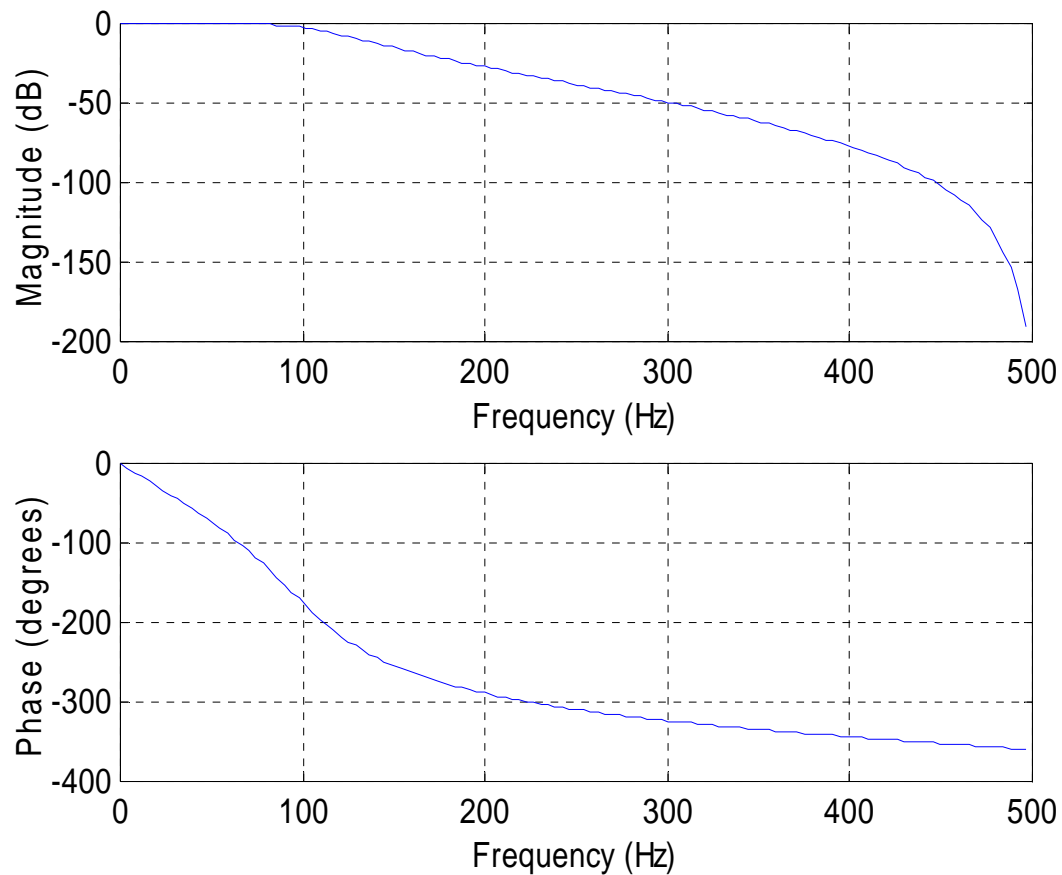


图6.11 例6.9中切比雪夫数字滤波器频响特性

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

1. 其它类型的IIR数字滤波器设计原理

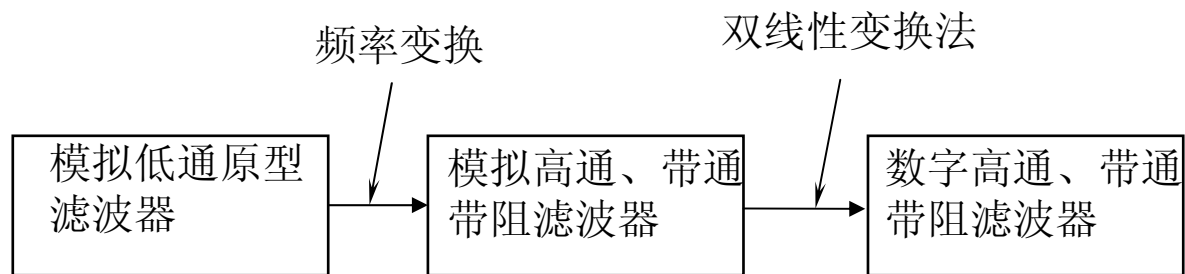
设计高通、带通、带阻等其它类型的IIR数字滤波器时，可以有两种方法来实现：

一种方法是先设计一个原型低通模拟滤波器，然后通过模拟滤波器的频率变换，转换成模拟高通、带通、带阻等模拟滤波器，再转换成相应类型的数字滤波器，这种方法频率变换在连续域内进行。

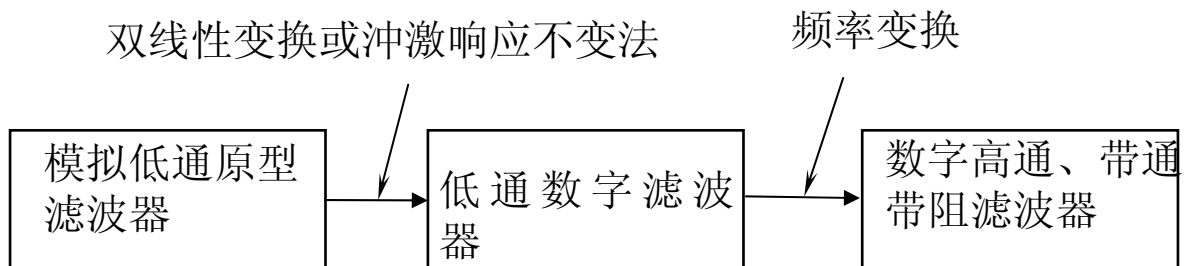
另外一种方法是先设计一个低通模拟原型，然后得到低通数字滤波器，再经过频率变换，转换成其它类型的数字滤波器，这种方法的频率变换在离散域进行。

两种方法的示意图如图6.12（a）、（b）所示。

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计



(a)



(b)

图6.12 数字高通、带通、带阻滤波器的设计方法

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

(1) 高通数字滤波器

首先由模拟低通原型的 $H_L(p)$ ，经过 $p = \Omega_p / s$ 的频率变换， Ω_p 为模拟高通滤波器的通带始点频率，转换成模拟高通 $H_H(s)$ ，然后再用双线性变换关系转换成 $H(z)$ ，这一过程可表示成

$$H_L(p) \xrightarrow[p=\frac{\Omega_p}{s}]{} H_H(s) \xrightarrow[s=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}]{} H(z)$$

上述转换过程也可合并，直接由 $H_L(p)$ 求得高通数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = H_H(s) \Big|_{s=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}} = H_L(p) \Big|_{p=\Omega_p \frac{z+1}{z-1}}$$

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

只要保证模拟低通原型滤波器是稳定的，上述变换结果也是稳定的，则最后所得的数字滤波器也是稳定的。

当 $z = e^{j\omega}$ （ z 平面单位圆）时，有

$$s = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = -j \cot \frac{\omega}{2} = j\Omega$$

由上式，可以看出 $\Omega = -\cot \frac{\omega}{2}$

由式（6.31）可见低通原型模拟滤波器与高通数字滤波器之间有下列对应关系：

$$\Omega = 0, \quad \omega = \pm\pi$$

$$\Omega = \pm\infty, \quad \omega = 0$$

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

(2) 带通数字滤波器

由模拟低通原型 $H_a(s)$ 求解数字带通滤波器的变换关系为

$$s = \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}{z^2 - 1}$$

当 $z = e^{j\omega}$ (z 平面单位圆) 时, 有

$$\begin{aligned} s &= \frac{e^{j2\omega} - 2e^{j\omega} \cos \omega_0 + 1}{e^{j2\omega} - 1} = \frac{e^{j\omega} [e^{j\omega} - 2 \cos \omega_0 + e^{-j\omega}]}{e^{j\omega} [e^{j\omega} - e^{-j\omega}]} \\ &= \frac{(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) - 2 \cos \omega_0}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}} = \frac{(2 \cos \omega) - 2 \cos \omega_0}{\frac{1}{j} 2 \sin \omega} \\ &= j \frac{\cos \omega - \cos \omega_0}{\sin \omega} = j\Omega \end{aligned}$$

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

$$\Omega = \frac{\cos \omega - \cos \omega_0}{\sin \omega}$$

由上式可见 $\Omega = 0$, $\omega = \omega_0$

$$\Omega = \pm\infty, \quad \omega = \pi, \quad 0$$

显然，模拟带通的频响正好映射为数字带通频响。但在设计带通滤波器时，其指标一般只给出通带上、下边带的边界频率 ω_1 、 ω_2 作为设计要求，这就需要由 ω_1 、 ω_2 换算成设计变换需要的中心频率 ω_0 以及模拟低通的截止频率 Ω_c ，为此，由式（6.34），有

$$\Omega_1 = \frac{\cos \omega_1 - \cos \omega_0}{\sin \omega_1}$$

$$\Omega_2 = \frac{\cos \omega_2 - \cos \omega_0}{\sin \omega_2}$$

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

上两式中， Ω_1 、 Ω_2 为模拟低通原型的截止频率（响应特性用正负频率双边表示），则

$$\Omega_c = \Omega_1 = -\Omega_2$$

由以上各式最后可求得中心频率 ω_0 、模拟低通的截止频率 Ω_c 分别为

$$\cos \omega_0 = \frac{\sin(\omega_1 + \omega_2)}{\sin \omega_1 + \sin \omega_2}$$

$$\Omega_c = \frac{\cos \omega_0 - \cos \omega_1}{\sin \omega_1}$$

(3) 带阻数字滤波器

带阻数字滤波器的变换关系。只需将带通滤波器的频率变换关系加以倒置即可，即

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

$$s = \frac{z^2 - 1}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$$

$$\Omega = \frac{\sin \omega}{\cos \omega - \cos \omega_0}$$

例6.12 设计一高通数字滤波器，通带边界频率为2kHz，阻带边界频率1.5kHz，通带波纹小于1dB，阻带衰减大于20dB，抽样频率为5kHz。

设计这一滤波器的MATLAB程序是

%例6.12中设计巴特沃思高通数字滤波器MATLAB程序

6.2.3 其它类型IIR数字滤波器设计

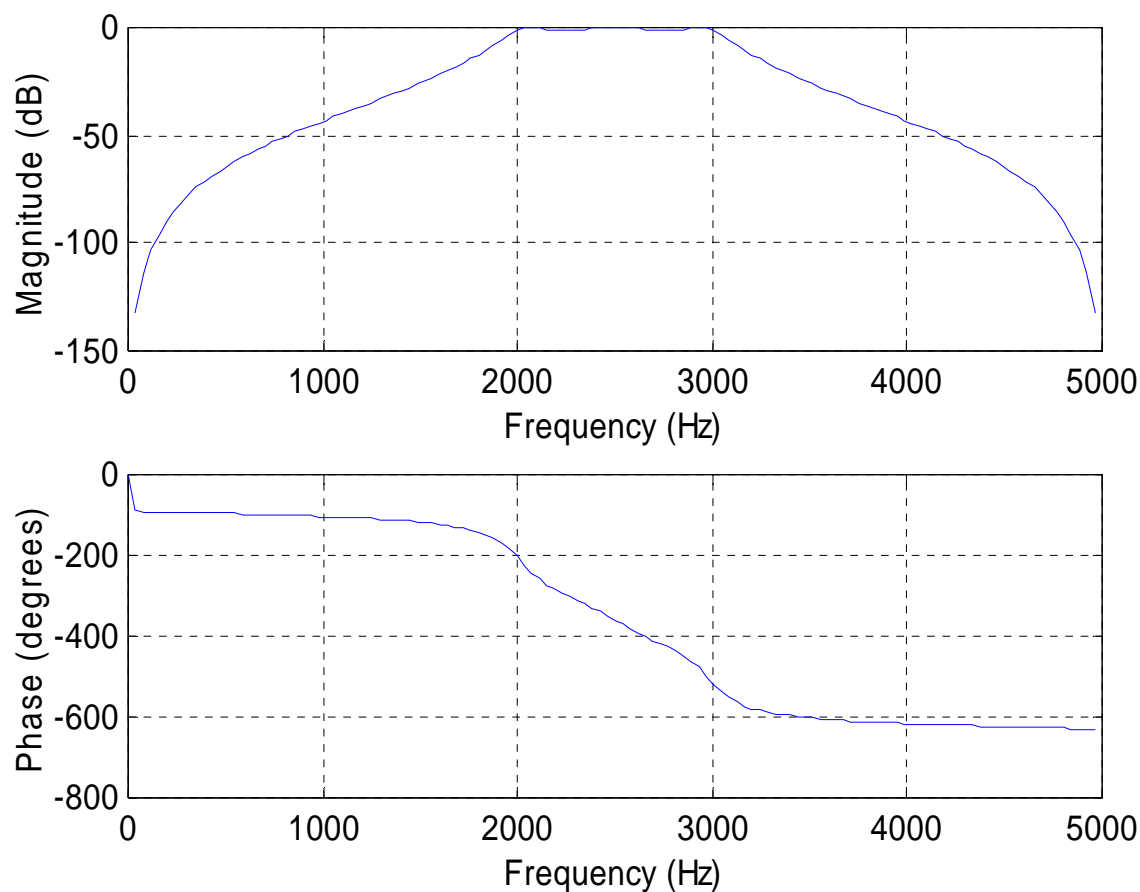


图6.13 例6.11切比雪夫数字滤波器频响特性

6.3 FIR数字滤波器设计

IIR滤波器采用间接设计的方法，先设计模拟原型滤波器，然后再变换为数字滤波器。

FIR滤波器是直接设计，突出的优点是具有**线性相位特性，可以无相位失真**，由于其单位抽样序列是有限长的，不存在不稳定的问题，应用广泛，但要获得好的特性，FIR滤波器的长度较长，运算时间长，算法较复杂。

本节主要讨论FIR数字滤波器的系统特点，两种常用的设计方法：**窗口法及频率抽样法**。

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

1. 特点

在6.1节中曾经指出：FIR数字滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ 是有限长的，若设其长度为 N 点且为因果的，即

$$h(n) \neq 0, \quad n = 0 \sim N-1$$

$$h(n) = 0, \quad \text{其它} n$$

其系统函数为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

上式是 z^{-1} 的 $N-1$ 阶多项式，可见系统函数 $H(z)$ 有 $N-1$ 个零点，同时在原点上有 $N-1$ 个重极点，并且在除 $z=0$ 以外的整个 z 平面上收敛，显然包括单位圆，极点在单位圆内，因此这种系统永远是稳定的。

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

由式（5.31），可以写出FIR系统的差分方程为

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1)$$

上式又可表示为

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n)$$

由系统函数可直接得到FIR数字滤波器的频响为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

2. 线性相位特性

对一个数字系统（数字滤波器）：

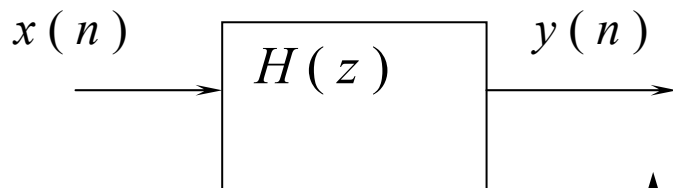


图6.16 数字滤波器框图

与模拟滤波器类似，在理想情况下，对所传输的信号，若不失真，如图6.17所示。

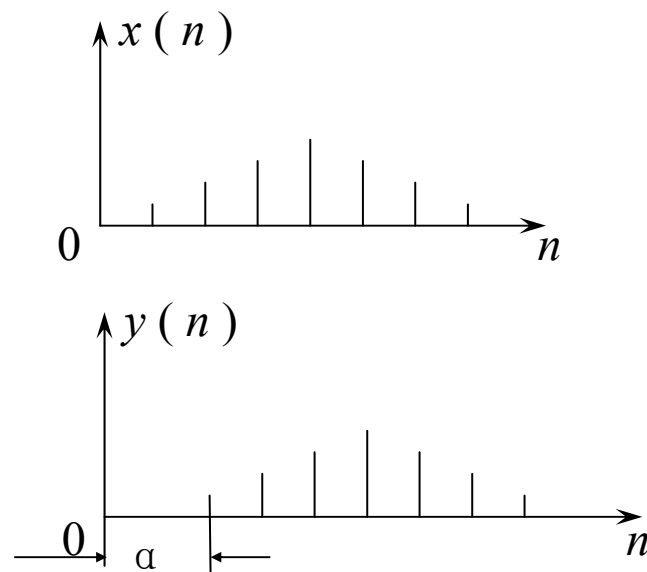


图6.17 离散信号的无失真传输

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

这就意味着，输入输出之间应满足：

(a) $y(n)$ 对 $x(n)$ 作比例放大 (k 倍)；

(b) 时间上有一定延迟 α 。

这称为离散系统（数字滤波器）无失真传输的时域条件，用表达式可表示为

$$y(n) = kx(n - \alpha)$$

作 z 变换，可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = kz^{-\alpha}$$

其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} = ke^{-j\alpha\omega}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

由上式可得数字滤波器无失真传输条件为

$$\begin{cases} |H(e^{j\omega})| = k & (6.46) \\ \phi(\omega) = -\alpha\omega & (6.47) \end{cases}$$

上述两式表明，信号通过数字滤波器无失真传输的频域条件是：数字滤波器在有用信号的频带内，具有恒定的幅频响应和线性相位特性。

3. 获得线性相位条件

FIR数字滤波器具有严格线性相位的充要条件是

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

上式也称为偶对称条件，这要求 $h(n)$ 必须是以 $n = (N-1)/2$ 为偶对称中心，则FIR滤波器具有线性相位。

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

序列“偶对称”的概念参看图6.18所示。

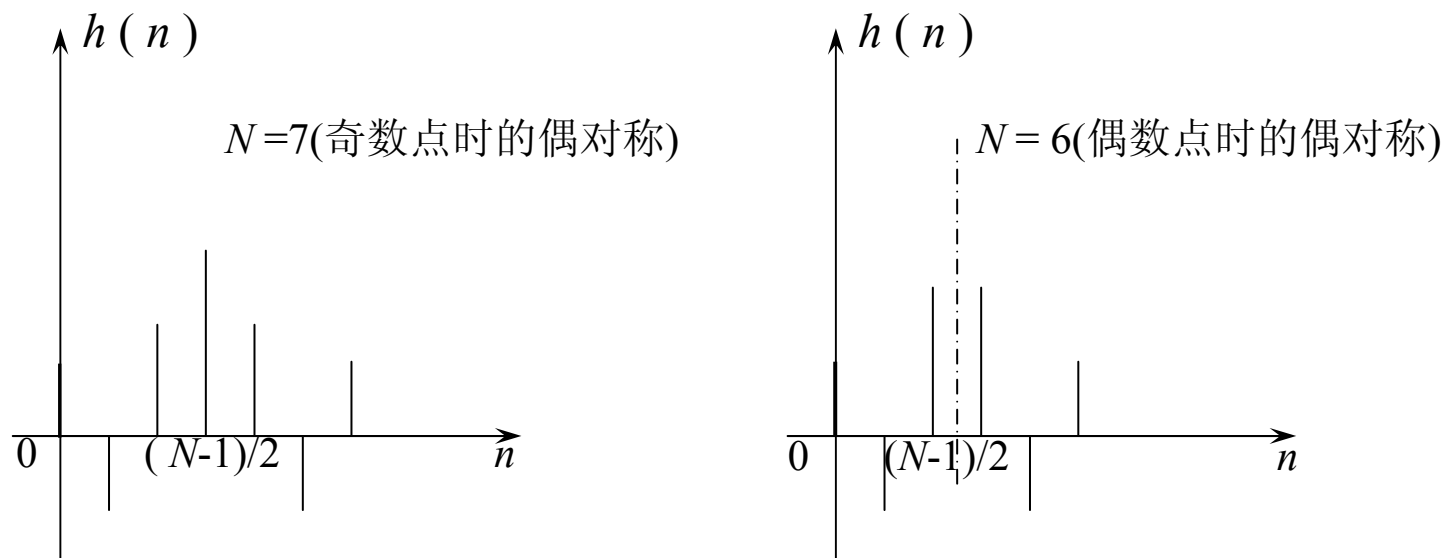


图6.18 以 $n = (N-1)/2$ 为偶对称为中心的偶对称

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

对于偶对称条件，因为 N 可取偶数和奇数，可分两种情况加以讨论。

(1) 当 N 为奇数时

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)} \end{aligned}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

考虑偶对称条件可推得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)\left(e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}\right) \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[e^{j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \right] \right\} \\ &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h(n) \cos\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega \right] \end{aligned}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

$$\text{令 } m = \frac{N-1}{2} - n$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos m\omega \right]$$

再把上式右端求和部分的变量 m 换为 n , 则

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \cos n\omega \right]$$

$$a(n) = \begin{cases} h\left(\frac{N-1}{2}\right), & n=0 \\ 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), & n=1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \end{cases}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

可写成简洁的形式

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos n\omega$$

若把 $H(e^{j\omega})$ 表示为

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

则幅度特性 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n) \cos n\omega$$

相频特性 $\phi(\omega)$ 为

$$\phi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

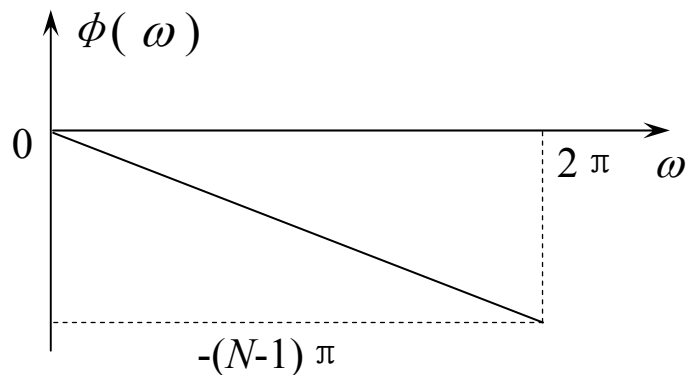


图6.19 FIR滤波器的线性相位特性

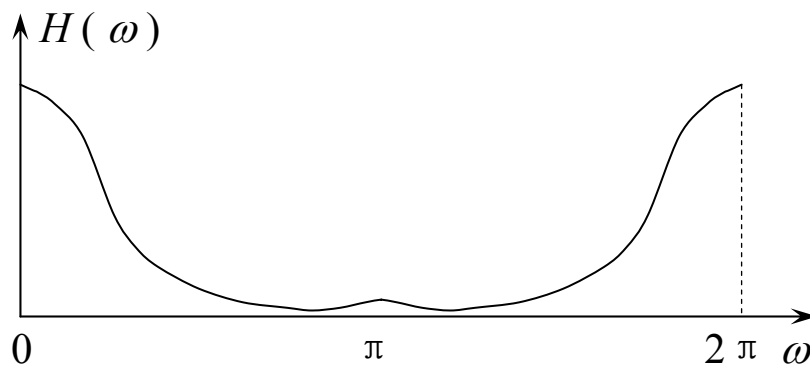


图6.20 $h(n)$ 为偶对称, N 为奇数时FIR幅度特性示例

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

(2) 当 N 为偶数时, 有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n)e^{-j\omega(N-1-n)} \end{aligned}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

考虑偶对称条件，有

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)}] \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[e^{j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} + e^{-j\omega(\frac{N-1}{2}-n)} \right] \\ &= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega \end{aligned}$$

令 $m = \frac{N}{2} - n$ 再将变量 m 仍换成 n ，可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - n\right) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

令
$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

则
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b(n) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$$

若
$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

则有
$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$$

$$\phi(\omega) = -\omega \frac{N-1}{2}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

这种情况仍然保持严格的线性相位特性，但由于 N 为奇数，相位常数 $\frac{N-1}{2}$ 已经不是整数。而幅频特性在 $\omega = \pi$ 时， $H(\omega) = 0$ ，并且 $H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称，如图6.21所示。这表明，这种特性的FIR滤波器不能实现在 $\omega = \pi$ 处不为零的高通、带阻等类型的数字滤波器。

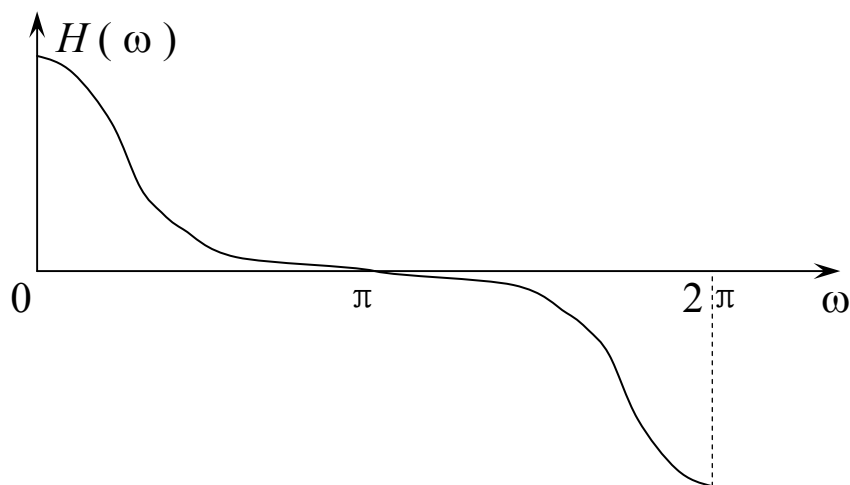


图6.21 $h(n)$ 为偶对称 N 为偶数时FIR幅度特性

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

以上讨论了 $h(n)$ 偶对称的两种情况，下面来讨论奇对称的两种情况，即

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$h(n)$ 奇对称， N 为奇、偶数的示例如图6.22所示。

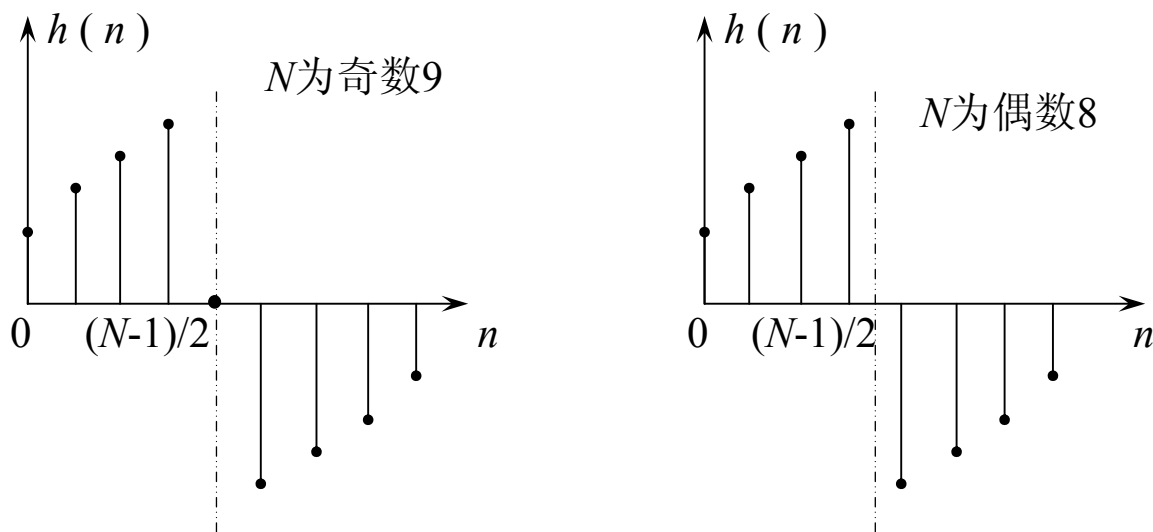


图6.22 N 为奇、偶数时的奇对称 $h(n)$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

对于 $h(n)$ 为奇对称, 若

(1) N 为奇数时, 其频率特性与偶对称时相类似, 对应 $h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$ 仅 $h(n)$ 相差一个正负号, 用上述相同的方法

可以推得

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(n\omega)$$

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

从而可得幅频特性

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin n\omega$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

这表明，这种FIR滤波器具有 $\pi/2$ 的初始相移，输入信号所有频率分量通过该滤波器都将产生 $\pi/2$ 相移，然后再作滤波。严格来说，它并不具有线性相位特性，但满足群时延（所有的信号分量）为常数，即

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\frac{N-1}{2}$$

仍可认为是线性相位，称为第二类线性相位滤波器。其幅、相频特性如图6.23所示。

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

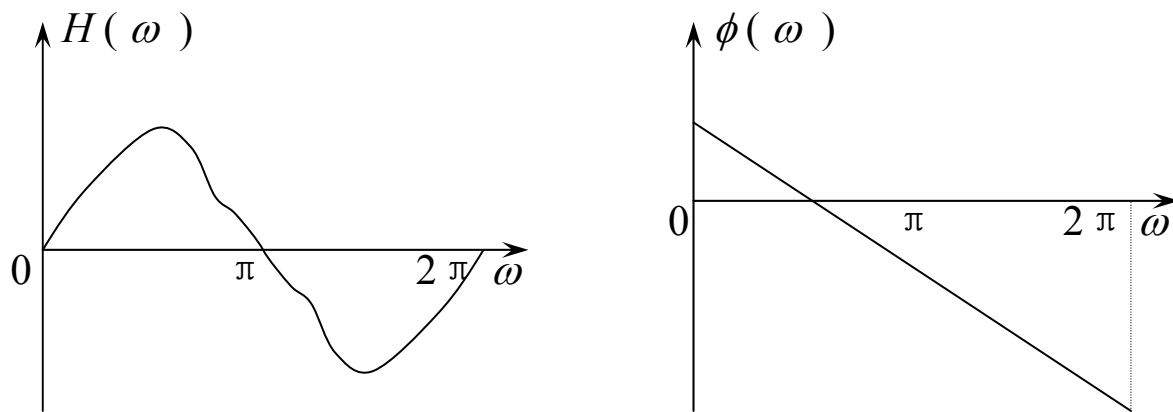


图6.23 $h(n)$ 为奇对称 N 为奇数时的幅、相频特性

根据上述分析结果和图6.23 所示的幅频特性，可以看出：这种FIR滤波器不可能实现低通、高通与带阻滤波特性。

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

(2) N 为偶数时, 可得

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega\right)} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$$

$$d(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$$

从而这种滤波器的幅频特性为

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega$$

相频特性与 N 为偶数时相同, 为

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega + \frac{\pi}{2}$$

6.3.1 FIR数字滤波器的基本特征

其幅频特性如图6.24所示。

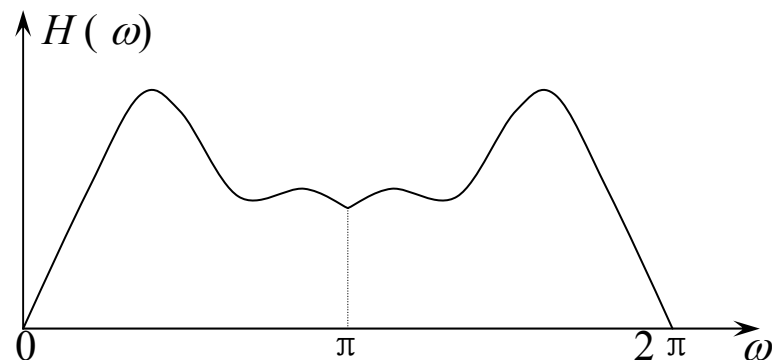


图6.24 奇对称、 N 为偶数的FIR滤波器幅频特性

由上述对奇对称、 N 为偶数的FIR滤波器幅频特性的分析和图6.24的表示，可以看出，这种滤波器无法实现低通和带阻滤波。

综上所述，当设计一般应用的FIR数字滤波器时，取偶对称、 N 为奇数的单位抽样响应序列 $h(n)$ 较好。

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

常用的FIR数字滤波器设计方法有窗口法、频率抽样法、最佳等波动滤波器等，下面对窗口法作简要介绍。设计FIR滤波器就是根据要求的频率响应，找到一离散时间系统，其单位抽样响应 $h(n)$ 为有限长的序列，使该系统的频率响应尽量逼近要求的频率响应，使两个频率响应的均方误差 ε^2 在允许的范围，表示为：

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega \leq \varepsilon_0^2$$

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

从而，由 $h_d(n)$ 可求出系统的系统函数 $H_d(z)$

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)z^{-n}$$

似乎FIR滤波器的设计问题已经解决，但是，一般情况下，求得的 $h_d(n)$ 是一无限长的序列，而且是非因果的，因而，这样的 $H_d(z)$ 物理上不能实现。例如一个截止频率为 ω_c 的FIR理想低通滤波器，低通的延时为 α ，则

$$H_d(e^{j\omega}) = |H_d(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq \pi \end{cases}$$

相应的 $h_d(n)$ 是

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\alpha\omega} e^{jn\omega} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

参见图6.25，需要注意的是离散时间系统的频率响应特性是周期的，图中只画出 $[-\pi, \pi]$ 频率范围内的特性。

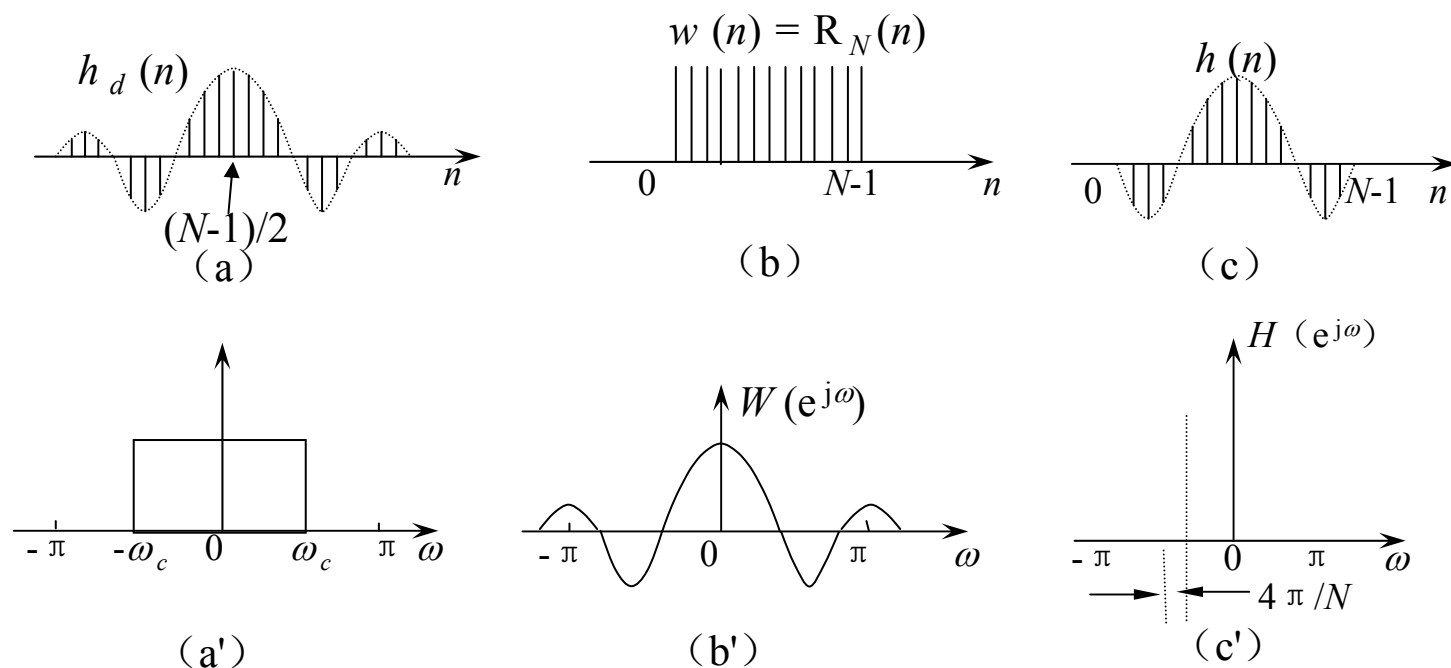


图6.25 窗口法对FIR理想低通滤波器的逼近

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

为了使系统是因果，并且实际频率响应特性尽可能逼近理想频响特性，可以采用窗口法，窗口法的基本思想是把无限长的冲激响应序列 $h_d(n)$ 截短为 $[0, N-1]$ 范围内的有限长序列 $h(n)$ ，这可以通过矩形窗（ $w(n) = R_N(n)$ ）来截断，表示为

$$h(n) = h_d(n)w(n) = h_d(n)R_N(n)$$

$$w(n) = R_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n < 0, n > N-1 \end{cases}$$

根据线性相位的特性要求，取偶对称、 N 为奇数的单位抽样序列 $h(n)$ ，取时延 α

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

由前述，要求的理想低通滤波器频率特性，如图6.25

(a')所示，则由矩形窗函数逼近后的FIR低通滤波器频率响应，由式(6.71)可知，是窗函数 $w(n)$ 的傅里叶变换 $W(e^{j\omega})$ 与 $H_d(e^{j\omega})$ 的卷积积分，即

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} H_d(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\lambda}) W[e^{j(\omega-\lambda)}] d\lambda$$

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} R_N(n) e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

从图6.24 (a') 与 (c') 可以看出：时域的加窗处理对滤波器的频率特性产生了影响，表现为

- (1) 理想的通带与阻带边界变成了一个过渡带，过渡带肩峰之间的宽度为 $4\pi/N$;
- (2) 零增益的理想滤波器阻带变成了呈衰减振荡的“旁瓣”，这是所谓的“吉伯斯现象”，增加窗函数的宽度 N 可以减少过渡带的宽度，但无论 N 值多大，阻带的过冲幅度总是理想通带幅度的9%左右，相当于阻带衰减维持在约-21dB，如果要改善这一性能，可以改变窗函数。

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

参见表6.1（表中的 A 是一个与窗函数有关的常数）。

窗函数	常数 A	主瓣宽度	第一旁瓣 相对主瓣 衰减/dB	所构成低 通滤波器 阻带最小 衰减/dB
矩形窗	0.9	$4\pi/N$	-13	21
汉宁窗	3.1	$8\pi/N$	-31	44
哈明窗	3.3	$48\pi/N$	-41	53
布莱克曼窗	5.5	$16\pi/N$	-57	74
三角窗	2.1	$48\pi/N$	-25	25
凯塞窗	可调整	可调整	可调整	可调整
切比雪夫窗	可调整	可调整	可调整	可调整

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

窗口法设计FIR数字滤波器过程有以下几个基本步骤：

(a) 计算 $h_d(n)$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

若 $H_d(e^{j\omega})$ 函数表达式比较复杂，不便于直接求解积分，可以对 $H_d(e^{j\omega})$ 进行M点频域抽样，求出上述积分的数值近似解 $h_{dp}(n)$ ，它正好是M点的离散傅里叶反变换，即

$$\begin{aligned} h_{dp}(n) &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k}) e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \\ &= \text{IDFT}[H_d(k)] \end{aligned}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

(b) 选窗函数及窗口长度 N

根据给定的阻带衰减要求，确定窗口类型。然后根据相应的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 确定 N 。即

$$\Delta\omega = A \frac{2\pi}{N}$$

从而有

$$N = \frac{2\pi A}{\Delta\omega}$$

式中 A 是一个与窗函数形状有关的常数，参见表6.1。

(c) 截短 $h_{dp}(n)$ 得 $h(n)$

$$h(n) = h_{dp}(n)w(n)$$

(d) 由 $h(n)$ 求滤波器的 $H(z)$ ，再求得 $H(e^{j\omega})$ ， 或直接求得 $H(e^{j\omega})$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

例6.14 试设计一近似理想矩形频率特性的线性相位FIR滤波器。其频率特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| \leq \omega_c = 0.5\pi \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

要求在阻带内衰减不小于20dB，过渡带带宽 $\Delta\omega = 0.0353\pi$ 。

(a) 计算 $h_d(n)$

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)} \end{aligned}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

表明 $h_d(n)$ 是以 α 为中心的偶对称无限长序列，为得到要求的线性相位，取

$$\alpha = \frac{N-1}{2} \quad h_d(n) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

(b) 根据阻带衰减要求选窗函数及窗口长度 N
选矩形窗，由表6.1，查得

$$\Delta\omega = 0.9 \frac{2\pi}{N}$$

从而可求得窗口长度为

$$N = \frac{0.9 \times 2\pi}{0.0353\pi} = 51$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

(c) 截短求 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)R_N(n) = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n - \frac{N-1}{2}\right)}$$

(d) 由 $h(n)$ 求得 $H(e^{j\omega})$

由已知数据 $N = 51$, $\omega_c = 0.5\pi$, 可得

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{2 \sin\left[\omega_c\left(m - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\pi\left(m - \frac{N-1}{2}\right)} \times \cos\left[\omega\left(m - \frac{N-1}{2}\right)\right] + \frac{\omega_c}{\pi} \right\} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{m=0}^{24} \frac{2 \sin[0.5\pi(n-25)] \cos[\omega(n-25)]}{\pi(n-25)} + 0.5 \right\} e^{-j25} \end{aligned}$$

6.3.2 窗口法设计FIR数字滤波器

根据上式，可以画出其频率响应特性，我们用MATLAB画出了其幅、相频曲线，如图6.26所示。

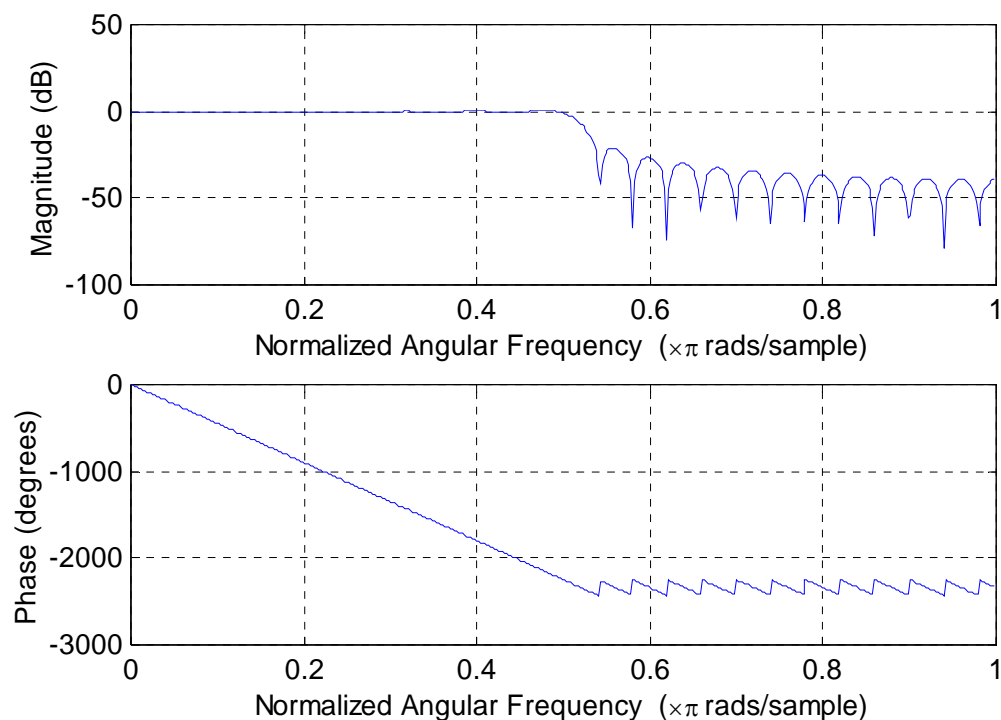


图6.26 例6.14中FIR滤波器的频率特性

6.3.3 频率抽样法

6.3.3.1 频率抽样理论

1. 有限长序列频谱的抽样

我们已经知道： N 点有限长序列 $x(n)$ 的DFT即 $X(k)$ 就是其频谱（单位圆上的 z 变换）的 N 个等间隔抽样值。 $X(k)$ 经IDFT可以恢复 $x(n)$ 。既然 $x(n)$ 可以用 $X(k)$ 表示出来，而 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 、频谱 $X(e^{j\omega})$ 是由 $x(n)$ 确定的，显然 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 也能用这 N 个频谱抽样值 $X(k)$ 来表示，可得到所谓的 $X(z)$ 、 $X(e^{j\omega})$ 的内插表达式。

6.3.3 频率抽样法

由
$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

有
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \end{aligned}$$

6.3.3 频率抽样法

或

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) C_k(z)$$

$$C_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

上式即为 $X(z)$ 用其单位圆上 N 个抽样值 $X(k)$ 来表示的内插公式。 $C_k(z)$ 称为内插函数。令式(6.81)的分子等于零, 有

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}r}, \quad r = 0, 1, \dots, N-1$$

表明有 N 个零点。

6.3.3 频率抽样法

再令其分母为零，则有

$$z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

表示内插函数只有一个极点，并和第 k 个零点抵消。因此内插函数 $C_k(z)$ 仅在本身的抽样点处不为零，其它 $N-1$ 个抽样点 i ($i \neq k$) 都是零点，即有 $N-1$ 个零点，同时在原点 $z=0$ 处有 $N-1$ 阶极点。

6.3.3 频率抽样法

2. $X(e^{j\omega})$ 的内插表达式

$X(e^{j\omega})$ 是单位圆上的z变换，则由式 (6.80)、(6.81) 可得 $X(e^{j\omega})$ 的内插表达式为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) C_k(e^{j\omega})$$

$$C_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{jN\omega}}{1 - e^{-j(\omega - k\frac{2\pi}{N})}}$$

上式还可以写为

$$C_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)\right]} e^{-j\left[\left(\frac{N-1}{2}\omega - \frac{k\pi}{N}\right)\right]}$$

6.3.3 频率抽样法

当 $k = 0$ 时

$$C_0(e^{j\omega}) = C(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{N}{2} \omega}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

$$C_k(e^{j\omega}) = C_k(\omega) = C\left(\omega - k \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) C\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$

$C(\omega)$ 称为频谱的内插函数，由式（6.84）可以看出：内插函数在 $\omega = 0$ （称为本抽样点）处函数值为1，并有

$$C\left(k \frac{2\pi}{N}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

把 $C_k(\omega) = 0$ 的点称之为抽样点。

6.3.3 频率抽样法

式 (6.87) 表明：整个频谱 $X(e^{j\omega})$ 是由 N 个 $C_k(\omega)$ 并乘上相应加权值之和。显然，每个抽样点上，有

$$X(e^{j\omega}) = X(k)$$

这是因为除本抽样点外，其余抽样点的内插函数都为零值。而在各抽样点之间的 $X(e^{j\omega})$ 的值，由各抽样值的内插函数叠加而成。

上述分析表明：对于一个 N 点有限长序列 $x(n)$ ，其 z 变换 $X(z)$ 、频谱 $X(e^{j\omega})$ 既可以用 N 个时域序列值给出，也可以在频域上，通过 $X(k)$ 来确定。

6.3.3 频率抽样法

重新列出以下各式

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} \quad (6.90)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)C_k(z) \quad (6.91)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega} \quad (6.92)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)C\left(\omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \quad (6.93)$$

6.3.3 频率抽样法

6.3.3.2 频率抽样法

对于一个理想频响 $H_d(e^{j\omega})$ ，其对应的单位抽样响应是 $h_d(n)$ ，如果对 $H_d(e^{j\omega})$ 在单位圆作 N 等分间隔抽样得到 N 个频率抽样值 $H(k)$ ，由 $H(k)$ 经IDFT得到 N 点的有限长序列 $h(n)$ ，则

$$h(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rN) \right] R_N(n)$$

式（6.94）中 $R_N(n)$ 是 N 点矩形序列。 $h(n)$ 是 $h_d(n)$ 的主值序列，因此，由 $h(n)$ 求得的频响 $H(e^{j\omega})$ 逼近 $H_d(e^{j\omega})$ ，这就是频率抽样法的基本过程。

6.3.3 频率抽样法

对 $H_d(e^{j\omega})$ 抽样所得 $H(k)$ 表示为

$$H(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

由 $H(k)$ 至 $h(n)$ 再至 $H(z)$ 的过程可用 $H(k)$ 直接求 $H(z)$ 的内插公式求出, 即

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

当需要设计线性相位滤波器时, 频率抽样值 $H(k)$ 的幅度、相位必须满足在6.3.1节所讨论过的条件。当 $h(n)$ 为实数且偶对称时, $H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ 必须满足下列条件

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

6.3.3 频率抽样法

根据前面窗口法获得线性相位条件一节的讨论结果可知：对于 N 为奇数， $H(\omega)$ 具有偶对称，有

$$H(\omega) = H(2\pi - \omega)$$

对于 N 为偶数， $H(\omega)$ 应具有奇对称，有

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$$

我们对 $H(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$ 进行抽样，并设

$$H(k) = H_k e^{j\phi_k}$$

注意：上式中的 $H(k)$ 是 $H_d(e^{j\omega})$ 的抽样值。

6.3.3 频率抽样法

有

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \varphi(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = -\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k \\ &= -k\pi \left(1 - \frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

而当 N 为奇数时，有

$$\begin{aligned}H_k &= H(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H(2\pi - \omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \\ &= H(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}(N-k)} = H_{N-k}\end{aligned}$$

当 N 为偶数时，有

$$H_k = -H_{N-k}$$

6.3.3 频率抽样法

根据频率抽样理论中的频响内插公式, $H(e^{j\omega})$ 还可表示为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) C(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$
$$C(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega \frac{N-1}{2}}$$

由式 (6.96), 用 $z = e^{j\omega}$, 可得实际频响为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k}} e^{-j\omega}$$

6.3.4 最优等波纹滤波器设计

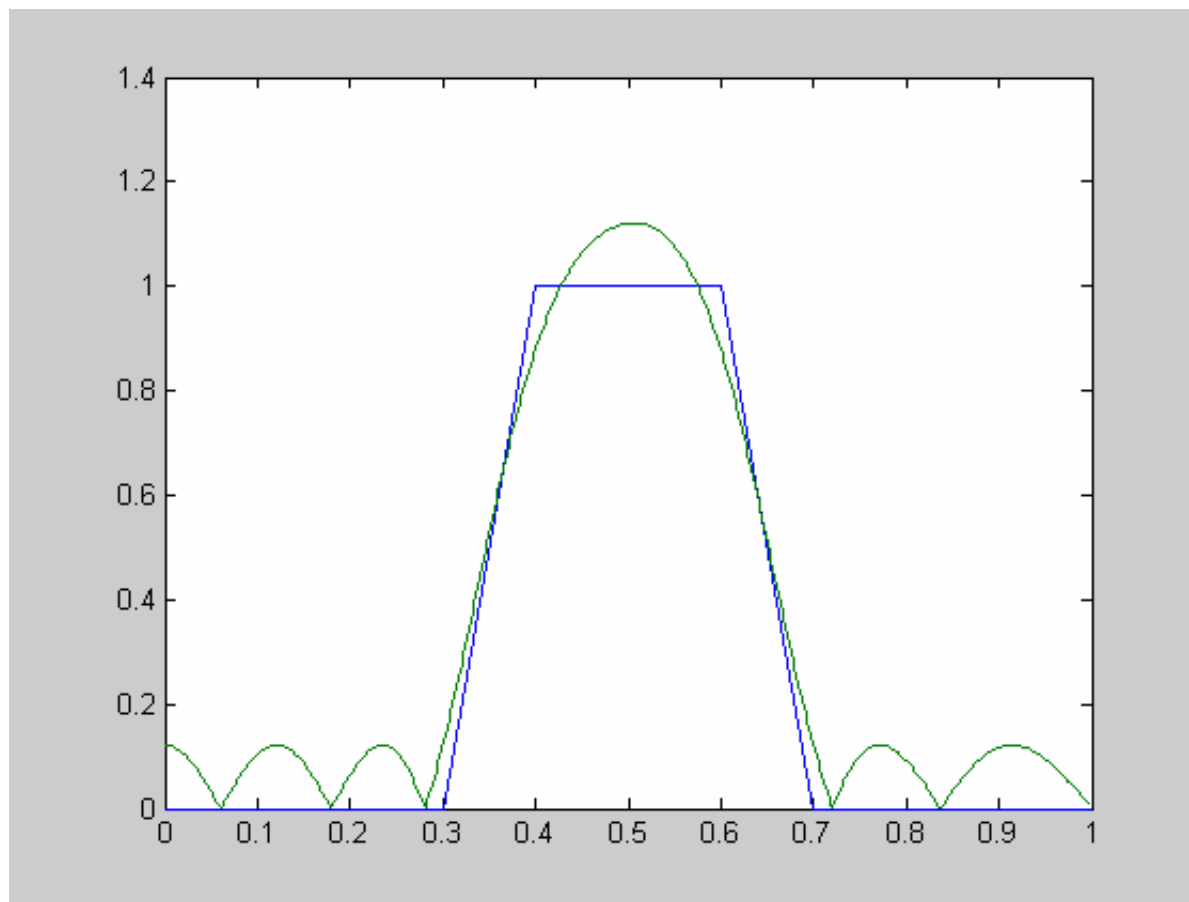


图6.33 Parks-McClellan算法函数设计的滤波器幅频曲线图

6.3.4 最优等波纹滤波器设计

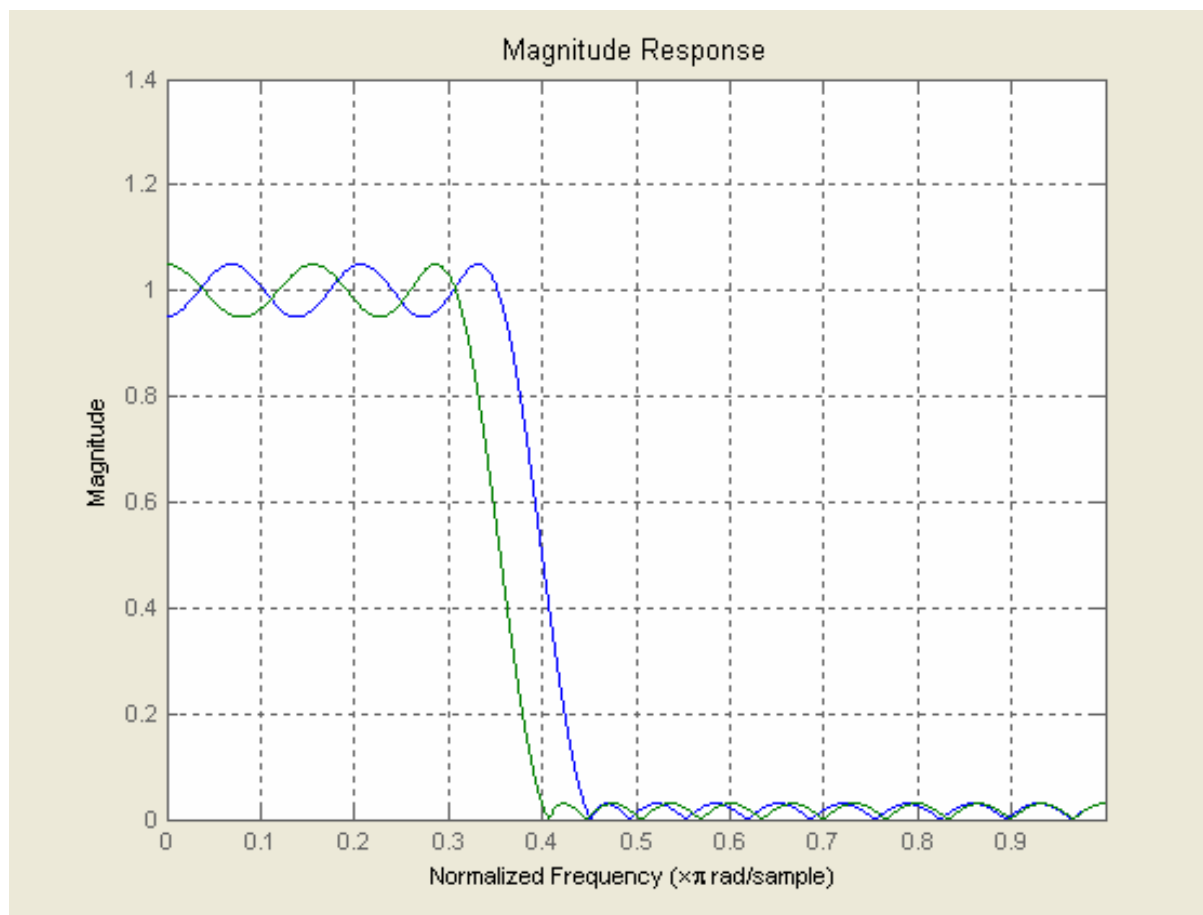


图6.34 例6.19 中两种低通滤波器的幅频特性

6.3.4 最优等波纹滤波器设计

例6.20 设计一高通滤波器。要求滤波器长度 $N = 80$ ，通带的截止频率 $F_0 = 0.7$ ，通带和阻带的允许偏差为 e^{-3} 。

%利用函数firceqrip设计高通滤波器的例子

```
b=firceqrip(80,0.7,[1e-3 1e-3],'passedge','high');
```

```
h=dfilt.dffir(b);
```

```
fvtool(h)
```

所设计的高通滤波器幅频特性如图6.35 所示。

6.3.4 最优等波纹滤波器设计

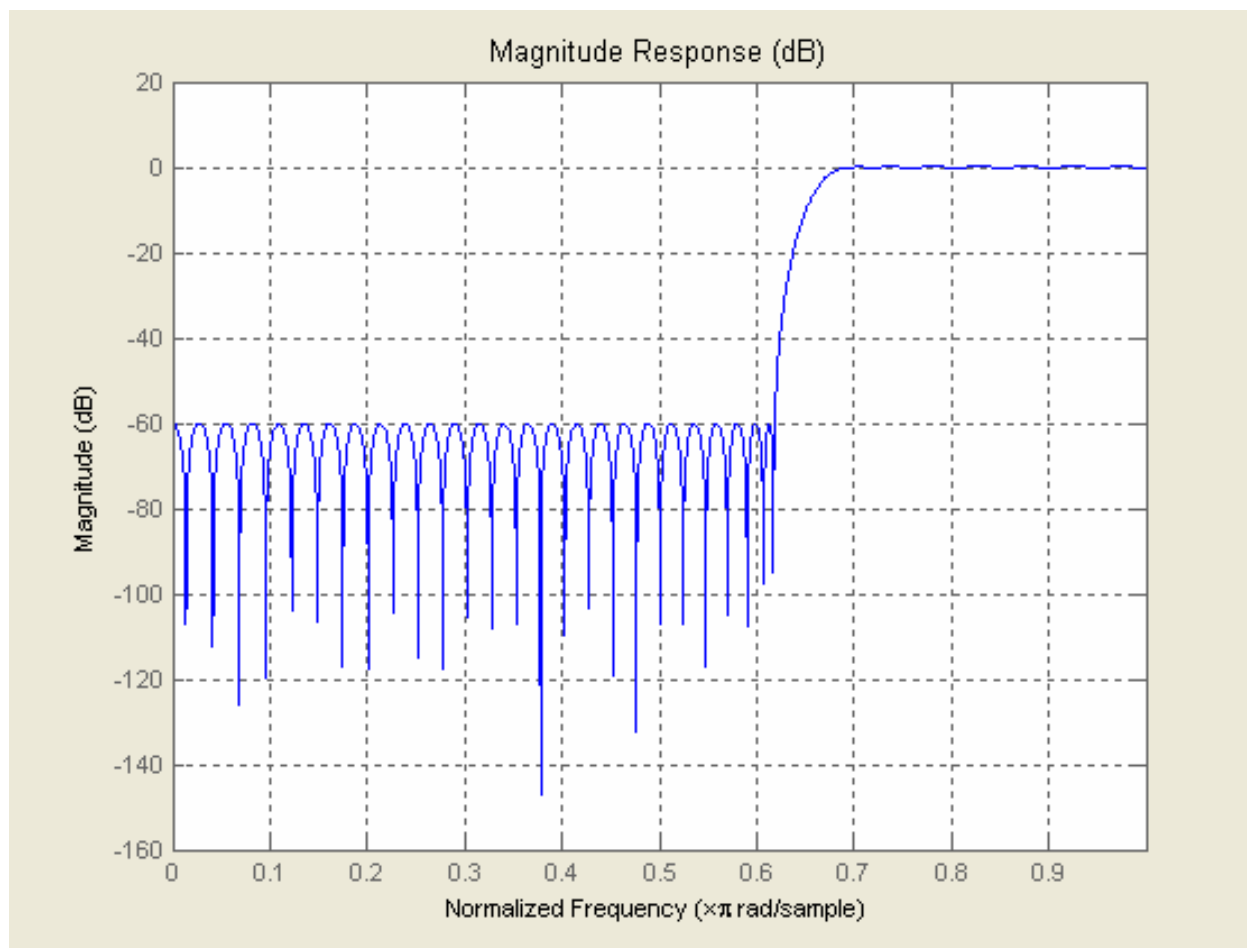


图6.35 例6.20高通滤波器的幅频特性

6.5 数字滤波器的实现

根据给定的技术指标，设计出数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 后，接着就要解决所谓的“数字滤波器的实现”问题。这些方面主要有：

软件实现与硬件实现的概念；

数字滤波器的结构形式；

有限字长的影响等。

6.5.1 软件实现与硬件实现

1. 软件实现

软件实现的过程，首先是建立数学模型，其次是选择适当的算法，然后进行软件的编制，**关键是算法的选择**。以一个二阶IIR数字滤波器为例来介绍软件实现的过程。设其系统函数为

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

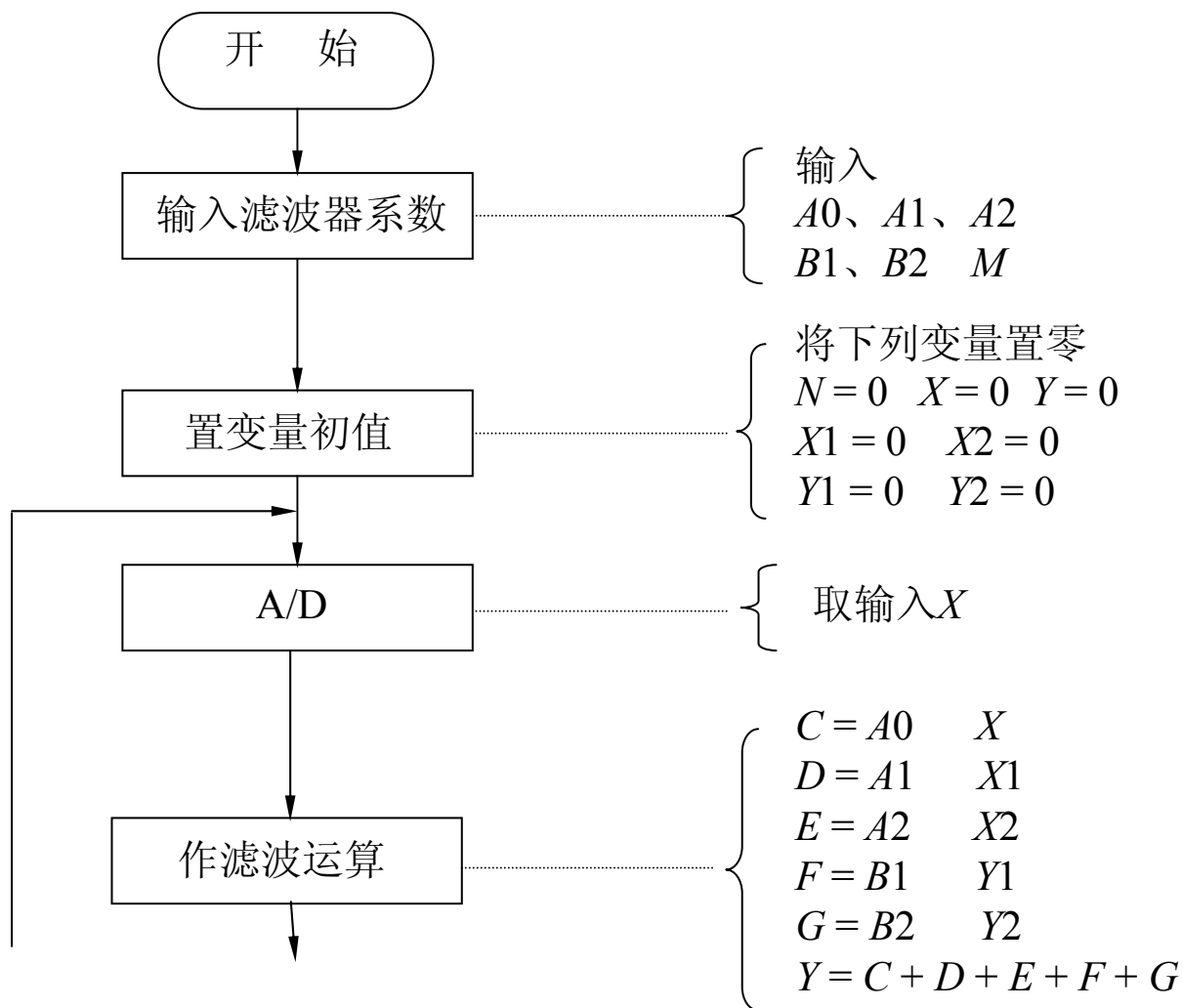
6.5.1 软件实现与硬件实现

相应的差分方程为

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) \\ + b_1y(n-1) + b_2y(n-2)$$

根据这一差分方程可以画出程序框图如图6.47。软件实现的主要特点是设计简单，灵活性好，只需改变程序，即可完成不同的信号处理任务。主要缺点有些运算，特别是滤波中常用的乘法运算，一般通用机都采用移位相加的方法编制程序模块实现，耗费时间长，成了高速信号实时处理的主要障碍，同时通用机的资源配置以适用性广为其主要目的，这与大多数信号处理要求的有限运算功能不大协调，往往会造成资源的浪费。

6.5.1 软件实现与硬件实现



6.5.1 软件实现与硬件实现

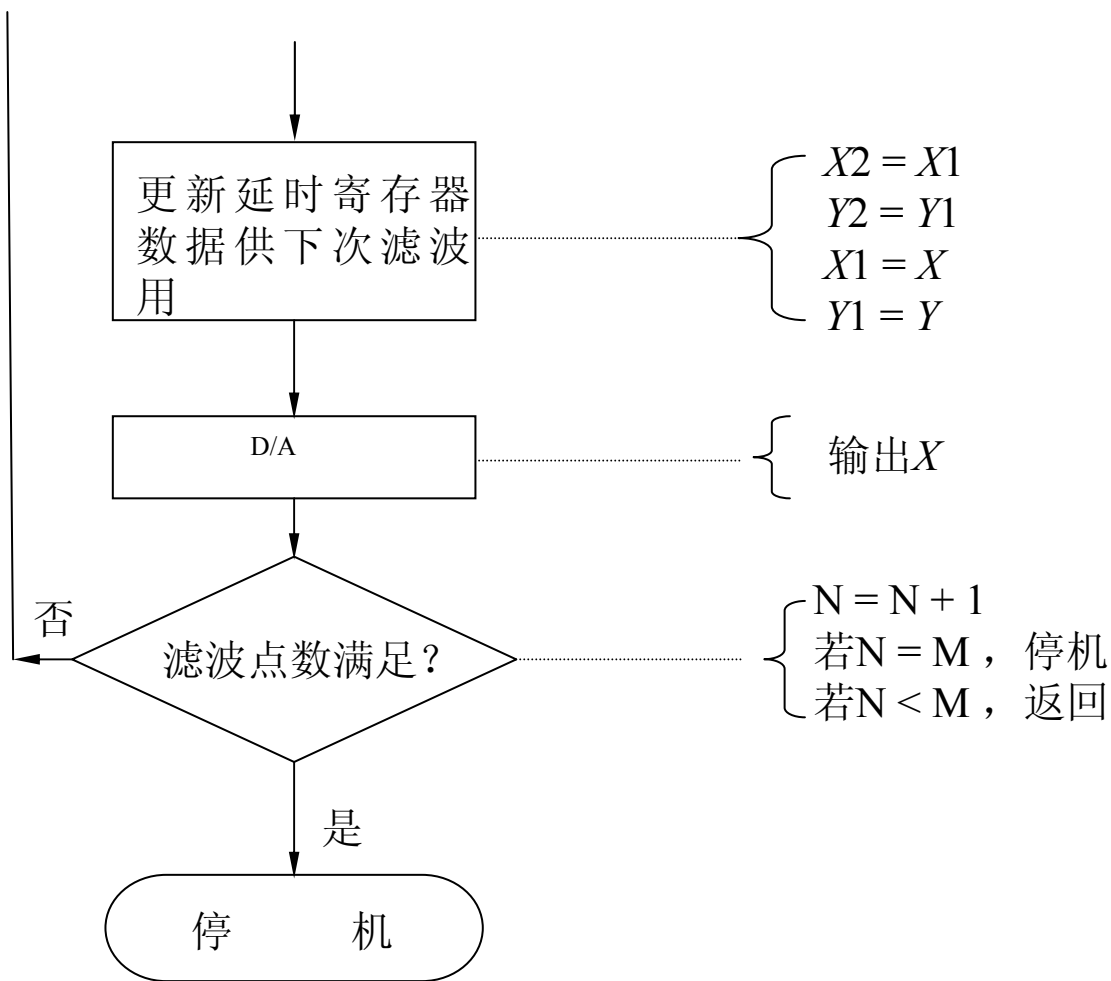


图6.47 数字滤波器软件实现程序框图

6.5.1 软件实现与硬件实现

2. 硬件实现

实现实时数字信号技术所应用的硬件包括数字信号处理器（**DSP**）、通用微处理器（**MPU**）、微控制器（**MCU**）三种，这三者中，MPU大量用于计算机；MCU适用于以控制为主的数字信号处理过程；DSP用于高性能、重复性、数值运算密集型的实时处理。最成功、在世界上最有影响、最大的DSP芯片供应商是美国德州仪器公司（Texas Instruments），还有日本的Hitachi公司和Fujitsu公司，美国的AT&T公司、Motolola公司、美国模拟器件公司（Analog Devices，AD）都拥有自己特色的DSP芯片。

6.5.1 软件实现与硬件实现

由于数字信号处理特别强调运算处理的**实时性**，因此DSP除了具备普通微处理器的高速运算和控制功能外，针对实时数字信号处理，在**处理器结构、指令系统、指令流程**等方面有自己的结构特点，主要包括：

1. DSP普遍采用了数据总线和程序总线分离的**哈佛结构及改进的哈佛结构**，属于**并行结构**，其主要特点是将程序和数据存储在不同的存储空间中，即程序存储器和数据存储器是两个相互独立的存储器，每个存储器独立编址、独立访问，与两个存储器相对应，芯片中设置了**程序总线**和**数据总线**两条总线，使数据吞吐量提高了一倍。

6.5.1 软件实现与硬件实现

而传统处理器的冯·诺依曼结构则是将指令、数据、地址存储在同一个存储器中，统一编址，依靠指令计数器提供的地址来区分是指令、数据还是地址，取指令和取数据访问的是同一个存储器，数据吞吐率低。

2. **与哈佛结构相协调，DSP大多采用流水线技术**，即每条指令都由片内多个功能单元分别独立地完成取值、译码、取数、执行等多个步骤，从而在不提高时钟频率的条件下减少了每条指令执行的时间，增强了信号处理的能力。

6.5.1 软件实现与硬件实现

3. 片内有多条总线可以同时进行取指令和多个数据存取操作，并有辅助寄存器用于寻址，它们可以在寻址访问前或访问后自动修改内容，以指向下一个要访问的地址。
4. 针对滤波、相关、矩阵运算等需要大量的乘法累加运算的需要，**DSP**大都设有独立的乘法器和加法器，使得在同一时钟周期内可以完成相乘、累加运算，甚至可以同时完成乘、加、减运算，大大加快了FFT的蝶形运算过程。

6.5.1 软件实现与硬件实现

5. 许多DSP带有DMA通道控制器以及串行通信口等，配合片内多总线结构，数据块传送速度大大提高。
6. 配有中断处理器和定时控制器，便于构成一个小型系统。
7. 具有软、硬件等待功能，能够与各种存储器接口。

由于DSP芯片的上述特点再加上电路集成的优化设计，使芯片指令周期大大缩短，从而使DSP芯片在实时信号处理的硬件实现中得到了广泛应用。

6.5.2 数字滤波器的结构

数字滤波器无论采取软件实现或硬件实现的方案，都应先确定出数字滤波器的运算结构图。在结构图中，应表明它应有那些基本运算单元：存储单元、延时单元、加法器、乘法器的组成情况，如何把这些单元联接起来，完成输入信号的运算。

运算结构可以用方块图或者信号流图来表示，后者更简捷些，图6.48是信号流图中的三种基本运算单元的代表：加法器、乘法器和延时器符号。

6.5.2 数字滤波器的结构

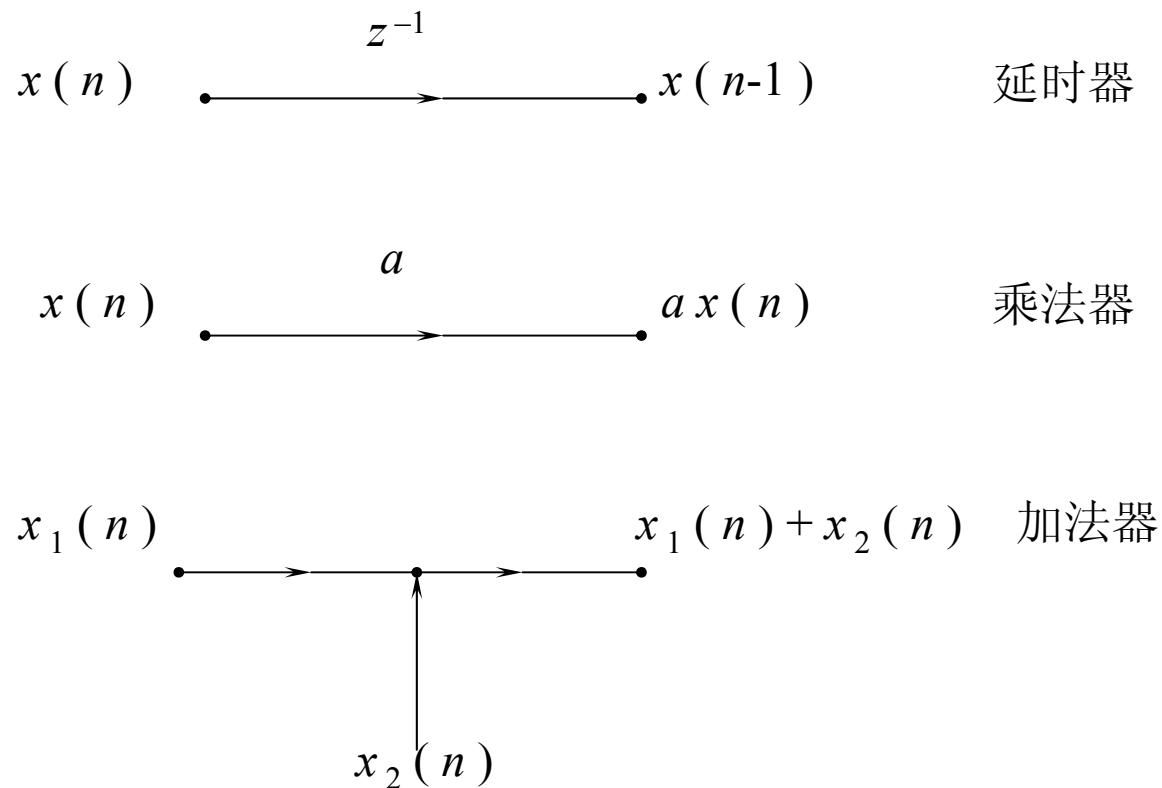


图6.48 信号流图中的基本运算单元符号表示

6.5.2 数字滤波器的结构

图6.49表示了一个一阶数字滤波器的信号流图。

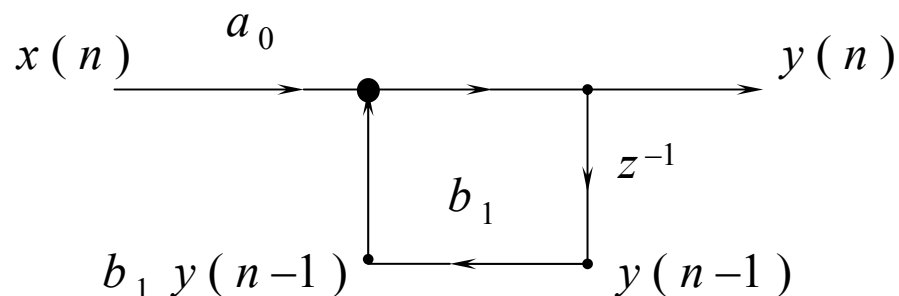


图6.49 一阶数字滤波器信号流图

图6.49所表示的系统函数以及差分方程分别为

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1}}$$

$$y(n) = a_0 x(n) + b_1 y(n-1)$$

6.5.2 数字滤波器的结构

1. IIR数字滤波器的结构

由上述可知IIR滤波器的单位抽样响应 $b(n)$ 为无限长序列，通常采用递归结构。即结构上存在反馈回路。实现IIR滤波器有三种结构：直接型，级联型，并联型。

(1) 直接型结构

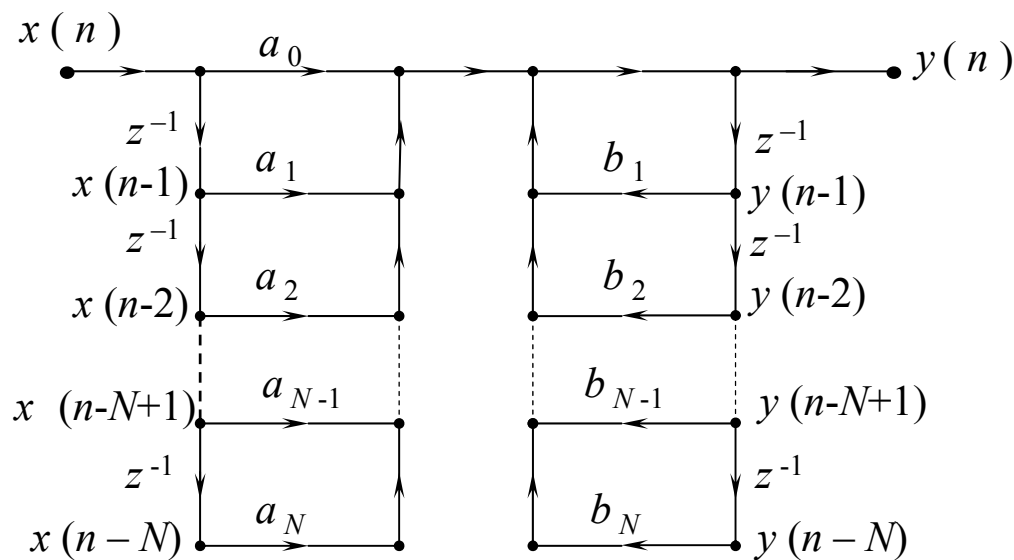


图6.50 直接 I 型滤波器结构

6.5.2 数字滤波器的结构

图6.50称为直接 I 型结构，其信号流图是根据滤波器的差分方程直接画出的。由IIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M a_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}$$

$$\text{差分方程为 } y(n) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r) + \sum_{k=1}^N b_k y(n-k)$$

系统函数 $H(z)$ 可以看成是由两个子系统级联而成，即

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \cdot \sum_{r=0}^M a_r z^{-r}$$

6.5.2 数字滤波器的结构

从而有 $Y(z) = H_2(z)H_1(z)X(z)$

令
$$W(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{r=0}^M a_r z^{-r} \right) X(z)$$

则
$$Y(z) = H_2(z)W(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}} \right) W(z)$$

由上述两式，进行反变换可求得对应两个子系统的差分方程为

$$w(n) = \sum_{r=0}^M a_r x(n-r)$$

$$y(n) = w(n) + \sum_{k=1}^N b_k w(n-k)$$

6.5.2 数字滤波器的结构

由上述差分方程可见：图6.50的左半部分流图正好对应子系统的 $H_1(z)$ ，而右半部分流图正好对应子系统的 $H_2(z)$ ，由于线性系统输出输入与子系统的级联次序无关，不妨将系统的级联次序颠倒一下，即

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{r=0}^M a_r z^{-r} \right) W(z)$$

6.5.2 数字滤波器的结构

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^N b_k z^{-k}} \right) X(z)$$

对应的差分方程为

$$y(n) = \sum_{r=0}^M a_r w(n-r)$$

$$w(n) = x(n) + \sum_{k=1}^N b_k w(n-k)$$

由上述差分方程可画出结构信号流图如图6.51所示。

6.5.2 数字滤波器的结构

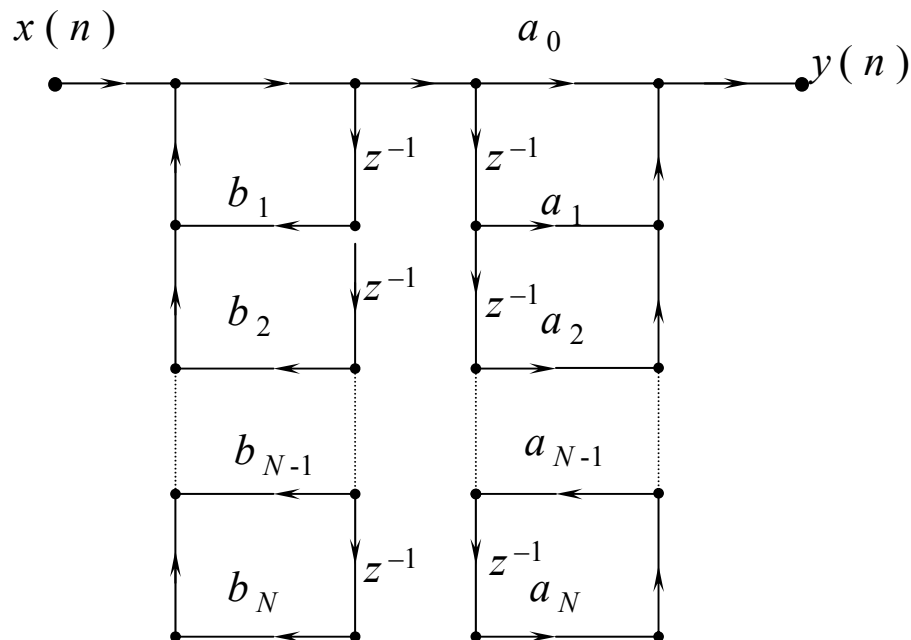


图6.51 级联次序颠倒后直接型滤波器结构

由上图可见，两行传输比为 z^{-1} 的延时链有同样的输入 $w(n]$ ，可以并作一行，可以改画成图6.52，这种结构称作直接II型。

6.5.2 数字滤波器的结构

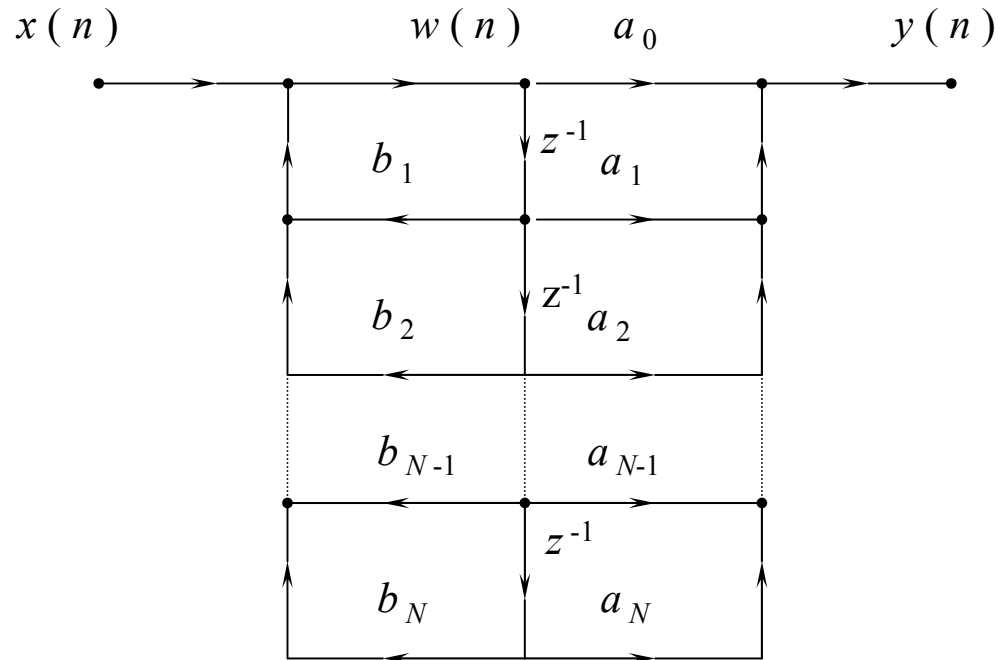


图6.52 直接 II 型结构的信号流图

6.5.2 数字滤波器的结构

(2) 级联型结构

将滤波器的系统函数 $H(z)$ 进行因式分解，由于 $H(z)$ 的系数都是实数，分解整理后可用实系数二阶因子形式表示 $H(z)$

$$H(z) = A \prod_{i=1}^k \frac{1 + \alpha_{1i}z^{-1} + \alpha_{2i}z^{-2}}{1 - \beta_{1i}z^{-1} - \beta_{2i}z^{-2}}$$

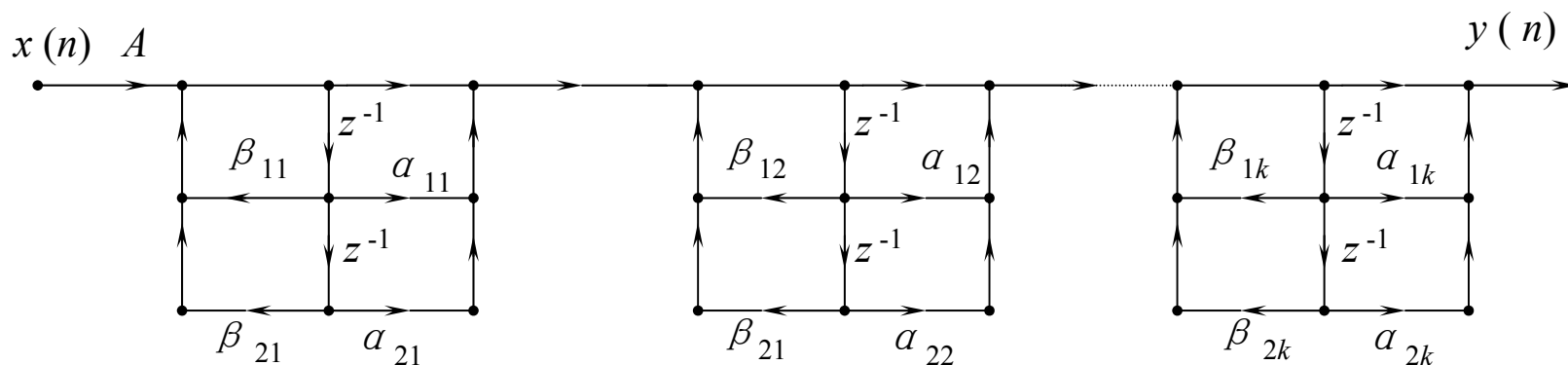


图6.53 数字滤波器级联型结构信号流图

6.5.2 数字滤波器的结构

(3) 并联型结构

若将滤波器的系统函数 $H(z)$ 展成部分分式形式，一般情况下，可以得到一阶和二阶系统的并联组合，即

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M-N} f_i z^{-i} + \sum_{i=1}^L \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i} z^{-1}}{1 - \beta_{1i} z^{-1} - \beta_{2i} z^{-2}}$$

若 $M=N$ ， $L=2$ ，则其并联结构的信号流图如图6.54所示

6.5.2 数字滤波器的结构

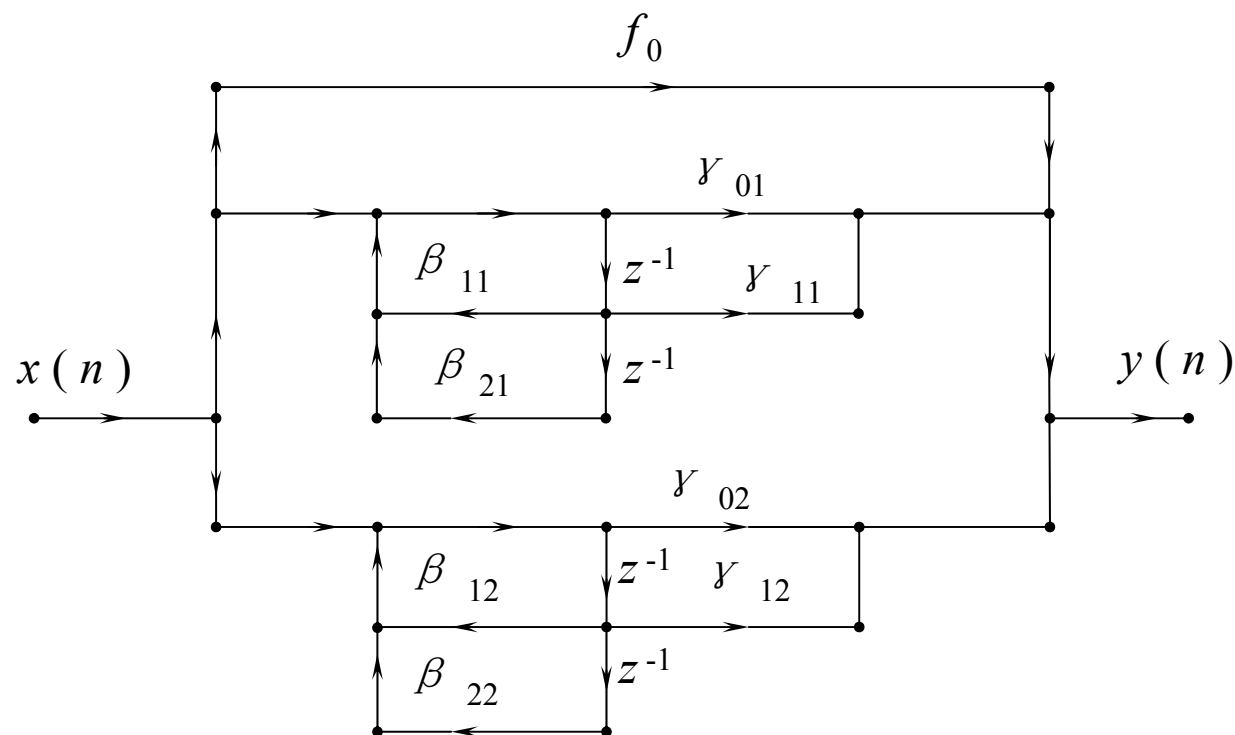


图6.54 滤波器并联型结构信号流图

6.5.2 数字滤波器的结构

2. FIR滤波器的结构

(1) 直接型

FIR滤波器的 $h(n)$ 是一有限长序列，其系统函数一般为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

其差分方程为 $y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i)$

由上式直接画出滤波器结构的信号流图如图6.55，称之为直接型。上式也是卷积的表示式，所以FIR直接型又称卷积型结构，由于它具有横向延时链，也可称为横向型结构。

6.5.2 数字滤波器的结构

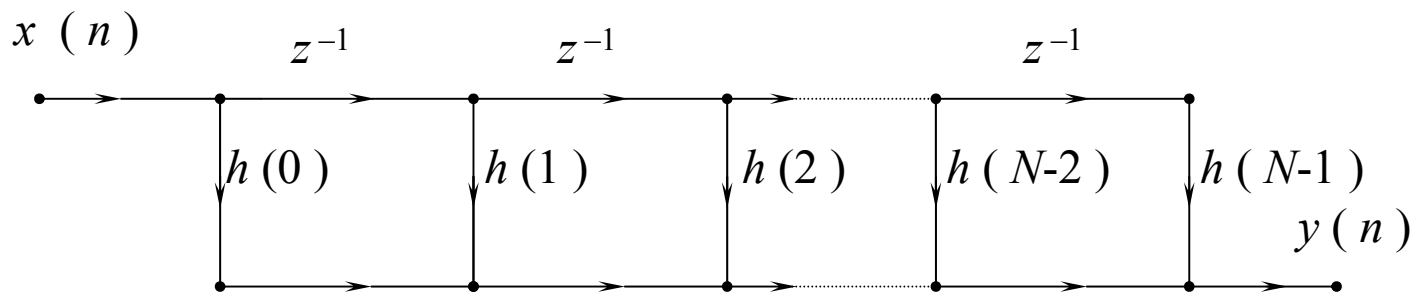


图6.55 FIR滤波器直接型结构的信号流图

(2) 级联型

若将 $H(z)$ 分解为二阶实系数因子形式

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{i=1}^M (\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2})$$

从而可得二阶级联型结构的信号流图如图6.56。

6.5.2 数字滤波器的结构

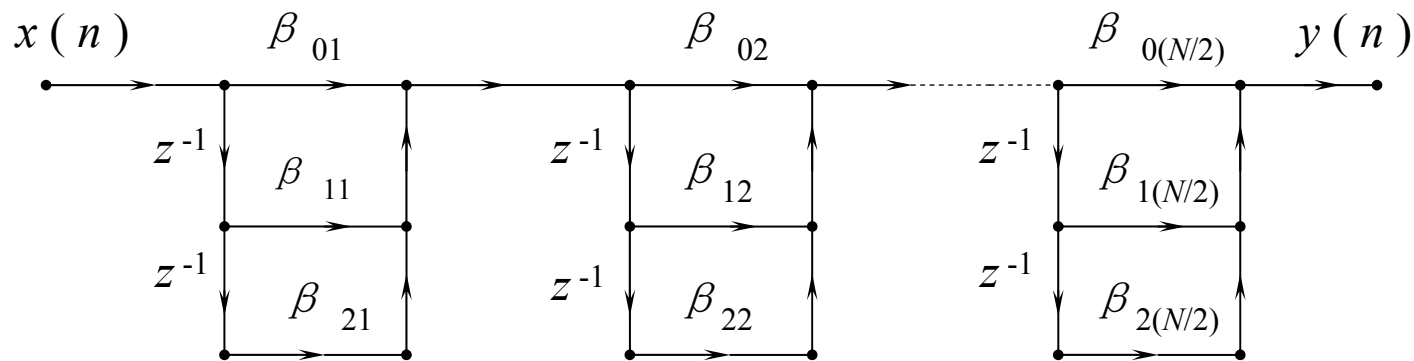


图6.56 FIR级联型结构信号流图

(3) 线性相位型

由前述，线性相位FIR滤波器结构满足下列偶对称条件

$$h(n) = h(N-1-n)$$

6.5.2 数字滤波器的结构

当 N 为偶数时

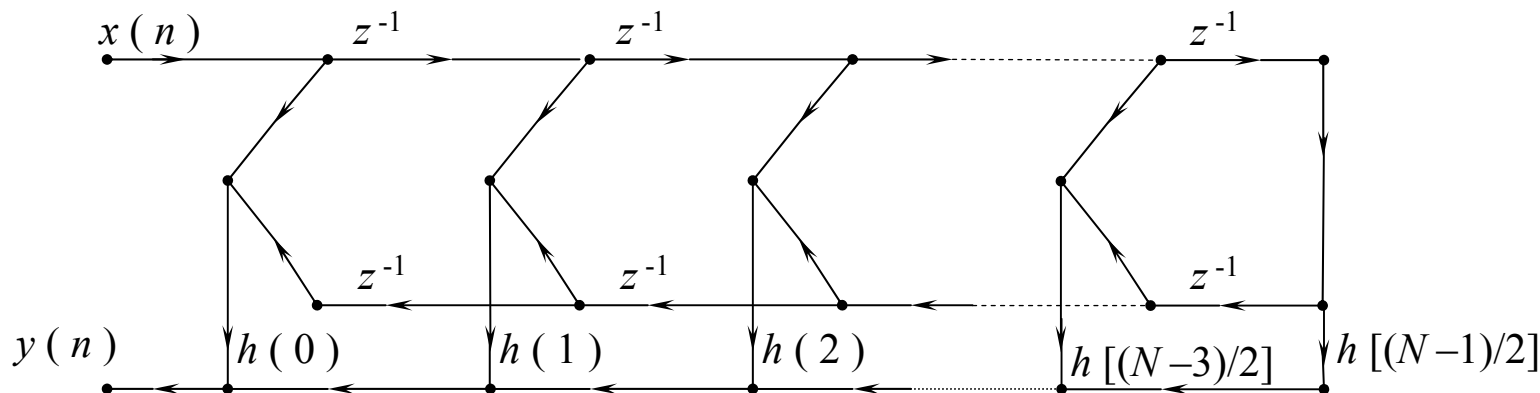
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}]$$

当 N 为奇数时

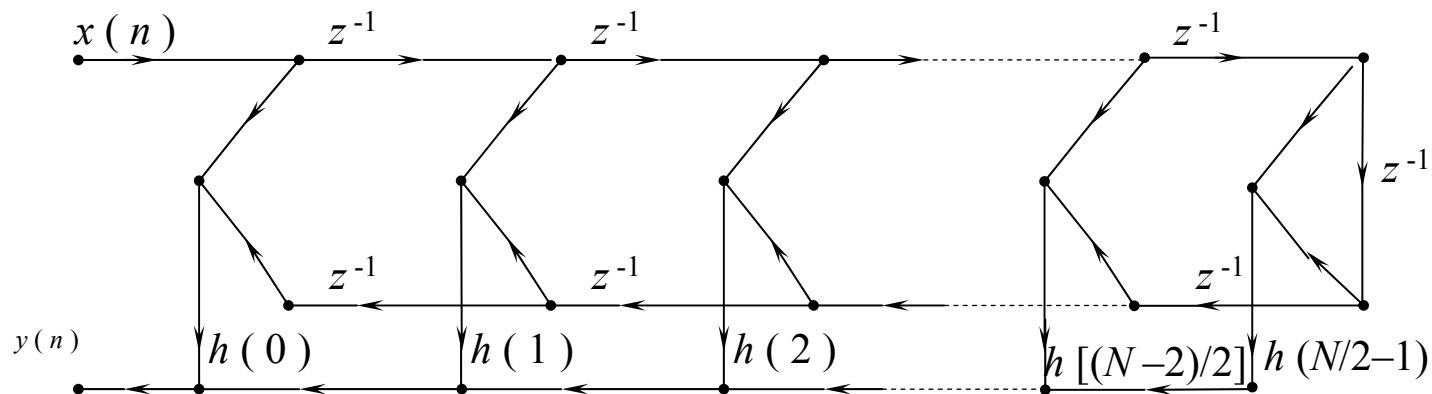
$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}$$

由上述，这种结构形式的结构信号流图如图6.57所示，其乘法次数比直接型节省了一半左右。

6.5.2 数字滤波器的结构



(a) N 为奇数



(b) N 为偶数

图6.57 线性相位FIR滤波器结构信号流图

6.5.2 数字滤波器的结构

(4) 频率抽样型

系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

可以看出，系统由两个子系统级联构成，一个子系统是 $1 - z^{-N}$ ，为一有限单位抽样响应系统。另一个

子系统是

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

由 N 个一阶系统并联而成，这些一阶系统的单位抽样响应是无限长序列。整个系统结构的信号流图如图6.58所示，图中设

$$W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

6.5.2 数字滤波器的结构

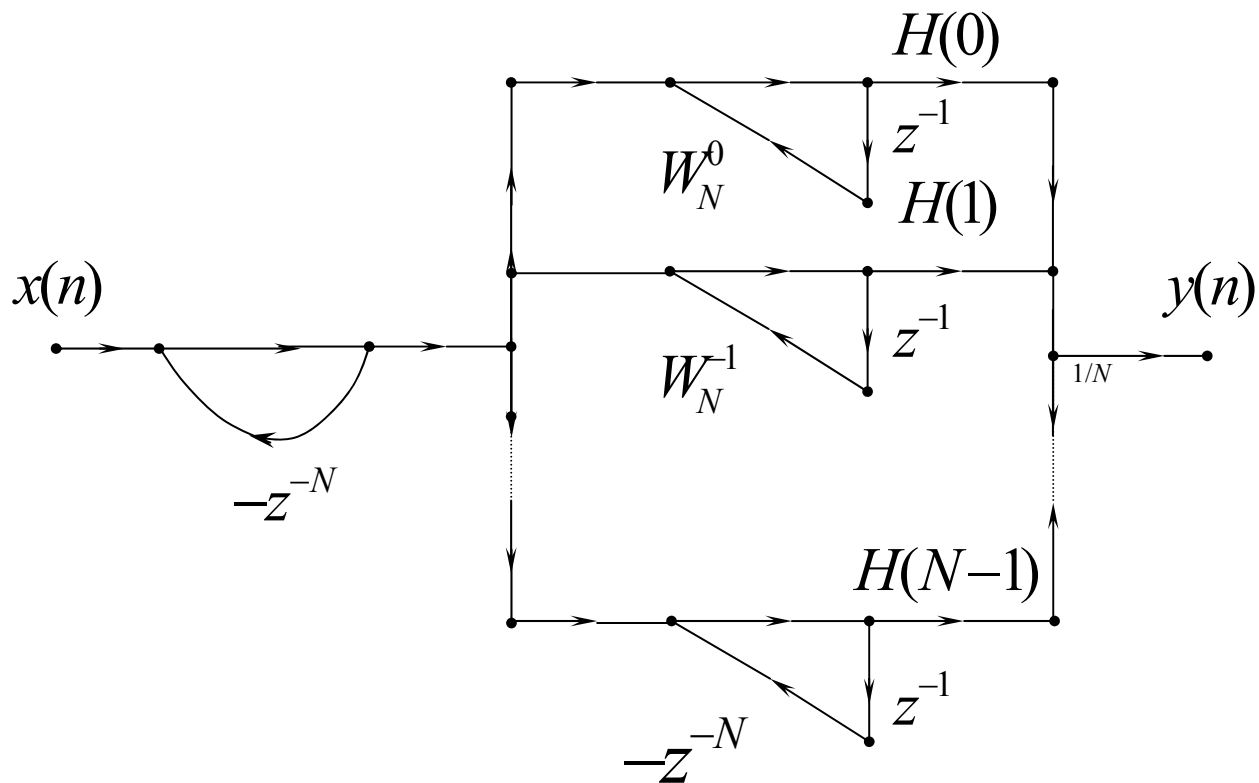


图6.58 FIR滤波器频率抽样结构信号流图

6.5.3 有限字长对数字滤波器实现的影响

数字滤波器作为一个数字系统，其中，输入、输出序列值，滤波器差分方程的系数（滤波系数）以及运算过程中的结果，都是用有限字长的二进制数码来表示的，根据所用的器件和软、硬件情况的不同，常用的字长有8位、12位、16位、32位等，选择字长越短，则实现的滤波器特性偏离预期的特性误差越大，甚至会引起滤波器不稳定不能工作。有限字长对滤波器实现的影响主要来自三个方面：

- (1) A/D变换的量化误差；
- (2) 滤波系数量化误差；
- (3) 数字运算过程中的计算误差。

6.5.3 有限字长对数字滤波器实现的影响

其中，以运算过程中引起的误差对特性的影响较大，特别在以前，由于软、硬件技术性能的影响，有限字长的影响在滤波器实现时必须很好地加以考虑，但随着超大规模集成电路技术的发展，高速、高精度的器件迅速地不断地更新换代，有限字长的影响已经并将会越来越小。

6.5.4 数字滤波器类型选择原则

前面讨论了IIR和FIR数字滤波器的设计和实现的基本问题，下面对这两类滤波器的主要特点进行比较，作为选用的考虑依据。

首先从频响特性看。IIR数字滤波器的设计方法，充分利用了模拟滤波器的经验和成果，模仿其频响特性，设计简单，但其一般限于频段为常值的频响特性，如低通、高通、带通、带阻等滤波器，其相位特性在设计时并不考虑，通常是非线性的。而FIR数字滤波器则在保证幅频特性满足技术要求的同时，还能获得严格的线性相位特性，同时应用窗函数法及其它算法都能够逼近更加任意的频响特性，性能优越，适应范围广。

6.5.4 数字滤波器类型选择原则

稳定性问题。IIR滤波器设计时，极点必须在单位圆之内。而FIR滤波器的系统函数是 z^{-1} 的多项式，从而系统函数的所有极点总在单位圆内，始终是稳定的。

结构的影响。IIR滤波器一般采用递归结构，存在输出对输入的反馈，前面所说的有限字长对滤波器性能的影响较大。

在满足相同技术指标的要求下，若不考虑相位的非线性问题，IIR数字滤波器所需的阶次低，则运算次数少，存储单元少。需要的硬件设备少，运算速度快，经济性好。FIR滤波器正好相反。

6.5.4 数字滤波器类型选择原则

设计工作量。IIR滤波器设计方便，有现成的计算公式和数据表格可查，在滤波器的技术指标与设计参数之间有计算公式可循。而FIR滤波器则没有现成公式可循，为了满足预定的技术要求，大多数设计方法都要用迭代法，计算量大。