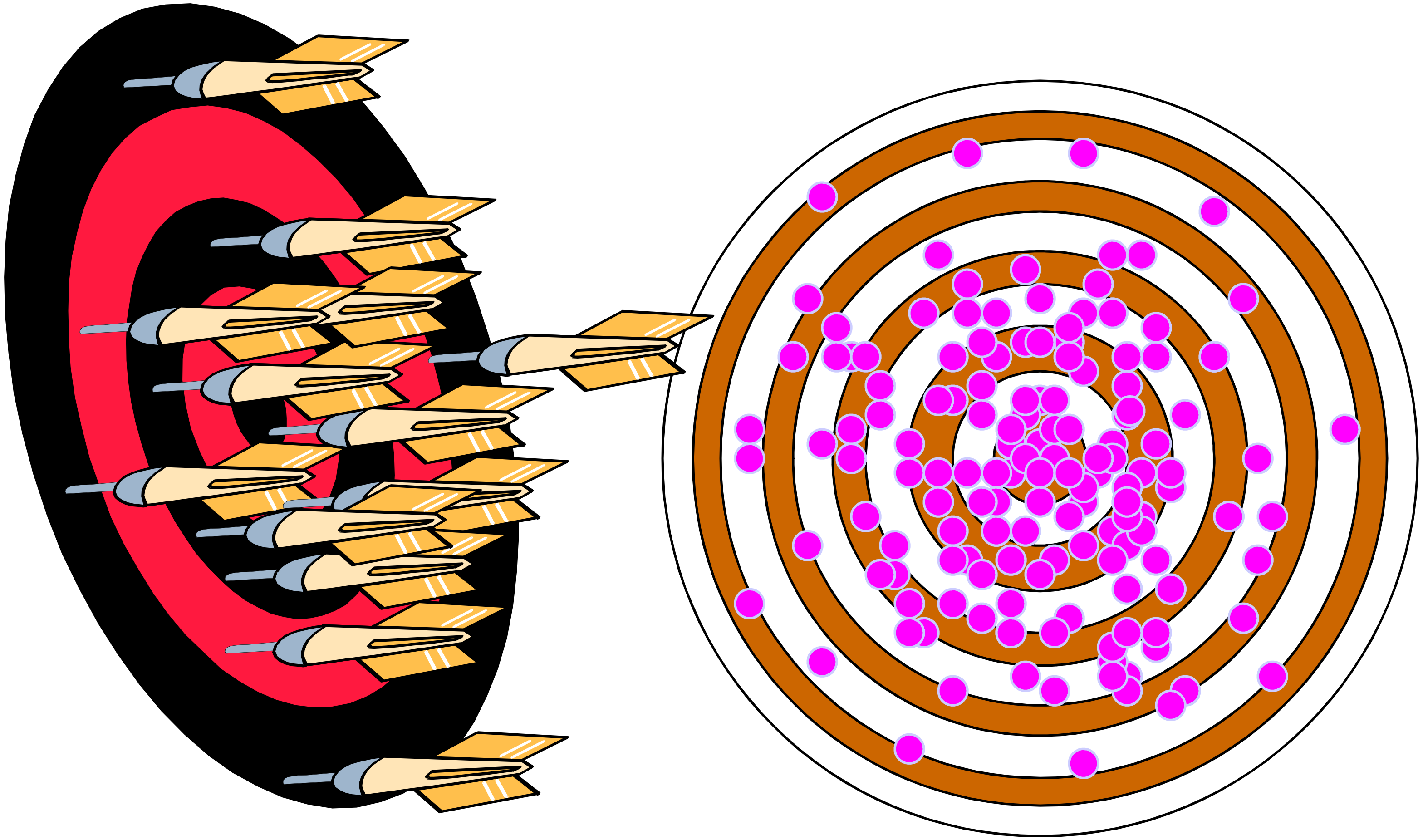
第二章：热平衡态的统计分布率

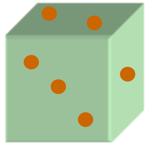
2.1、统计规律与分布函数概念



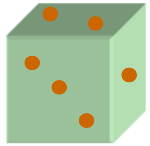
飞镖

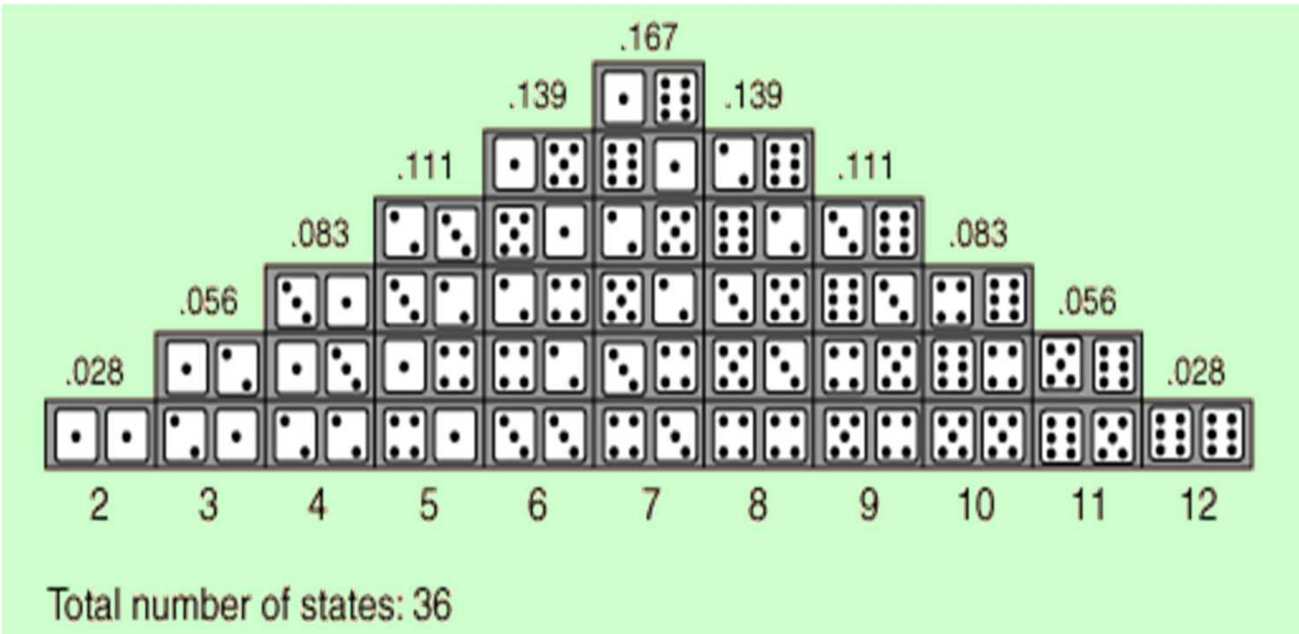
Statistics of Dice Throw

- 掷一个，1-6出现几率相等；

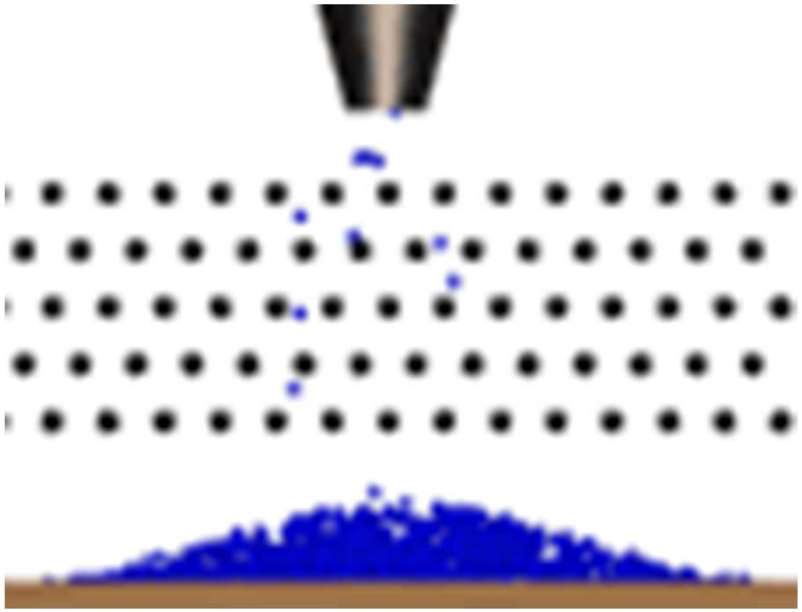


- 掷两个，和为2-12，出现几率不相等。

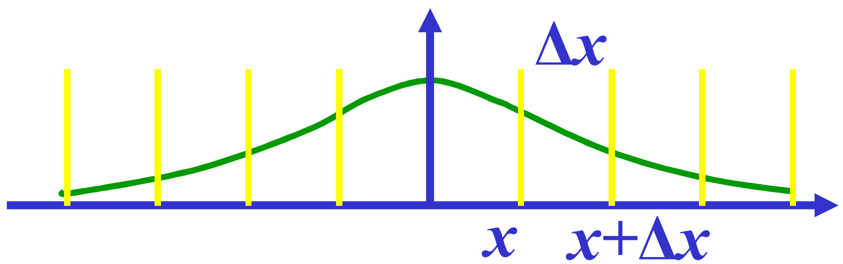




- 统计规律性



Galton board 伽尔顿板



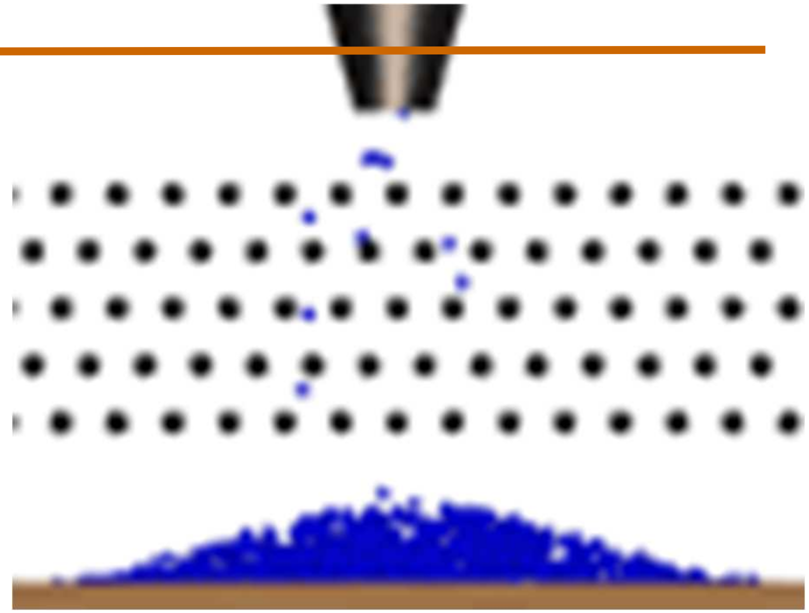
• 统计规律性

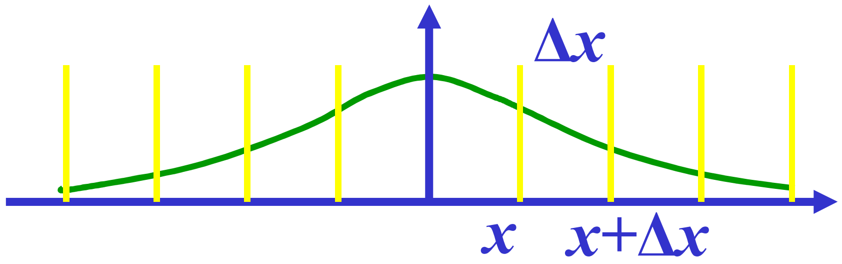
坐标 x 附近Δx间隔内粒子数ΔN_x占总分子数 N 的百分比

$$P_x = \frac{\Delta N_x}{N}$$

概率 $P_x = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\Delta N_x}{N}$

粒子按坐标的统计分布律



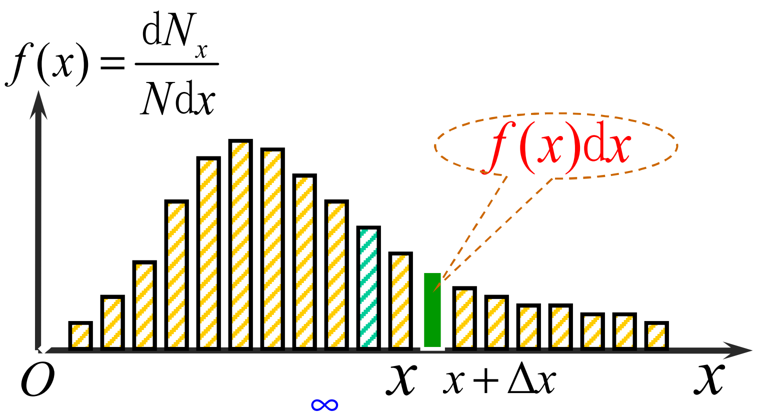


需要定义新的函数：分布函数（概率密度）。

•连续随机变量情形

分布函数:表示在随机变量x处单位间隔内事件的概率。

$$f(x)=\frac{dN}{Ndx}$$



dx内事件的概率 $f(x)dx=\frac{dN}{N}$

dx内的事件数 $Nf(x)dx=dN$

总事件数 $\int_0^\infty Nf(x)dx=N$　　归一化条件 $\int_0^\infty f(x)dx=1$

几何意义

$$\overline{x}=\int_0^\infty xf(x)dx$$ 随机变量的平均值

$$\overline{G}=\int_0^\infty G(x)f(x)dx$$ 任意物理量$G(x)$的平均值

分布函数不只是对空间变量的，还可以是对速度、能量的

从分立型随机变量到连续型随机变量

分立型随机变量		连续型随机变量
$P_i = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}$	概率	$dP = \boxed{\frac{dN}{N} = f(x)dx}$ 分布函数 概率密度
$\sum\limits_i P_i = 1$	归一	$\int f(x)dx = 1$
$\overline{x} = \sum\limits_i P_i x_i = \sum\limits_i \frac{N_i x_i}{N}$	平均值	$\boxed{\overline{x} = \int xf(x)dx}$
		$\overline{G} = \int G(x)f(x)dx$ 任意物理量

分布函数的物理意义 概率密度

$$dP=\frac{dN}{N}=\underline{f(x)}dx$$

分布函数

dN：分布在$x\to x+dx$内的粒子数

N：粒子总数

$$f(x)dx=\frac{dN}{N}$$

分布在 $x\to x+dx$ 区间的概率

粒子数占总粒子数的比率

$$f(x)=\frac{dN}{Ndx}$$

分布在 x 附近单位区间内的概率

概 率 密 度

$$Nf(x)dx=dN$$

分布在 $x\to x+dx$ 区间的粒子数

分布函数 及其物理意义

$$f(v)dv=\frac{dN(v)}{N}$$

速率分布函数

$$f(v_x)dv_x=\frac{dN(v_x)}{N}$$

速度x分量分布函数

$$f(\vec{v})d^3\vec{v}=\frac{dN(\vec{v})}{N}$$

速度(矢量)分布函数

$$f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{dN(\varepsilon)}{N}$$

能量分布函数

$$f(z)dz=\frac{dN(z)}{N}$$

高度分布函数

系统处于平衡态时分子的

2.2、麦克斯韦速率分布律(1860) 与麦克斯韦－玻耳兹曼分布律

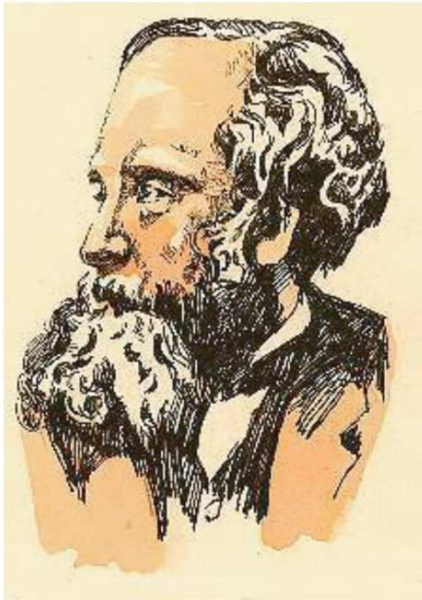
- 速度空间和速度分布律概念

通常的三维空间称为位形空间，可以用速度分量建立速度空间。

速度空间的小体积元：$d^3\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$

在球坐标中：$d^3\vec{v} = v\sin\theta d\varphi \cdot vd\theta \cdot dv$

$$= v^2 \sin\theta d\varphi d\theta dv$$



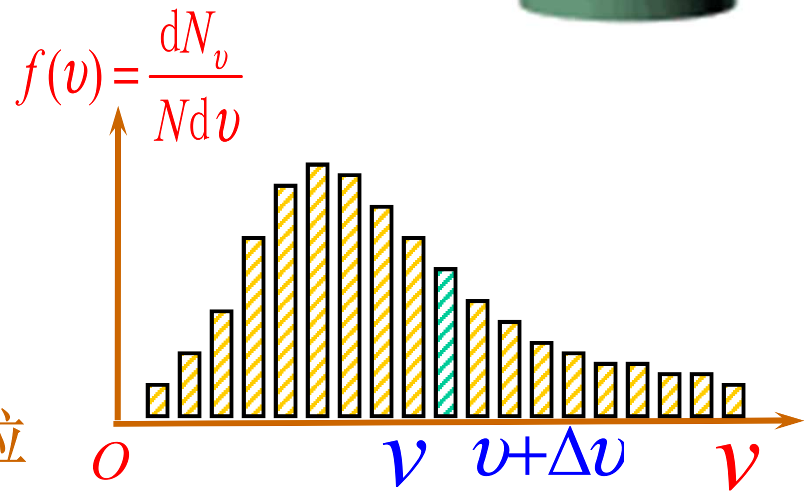
[英]J. C. Maxwell
1831-1879

N个粒子组成的系统，不同粒子的速度各不相同，而且碰撞还在变化，但处于平衡态，分子的速率（速度）有一定分布。

- 速率分布在$v \sim v+dv$ 内的粒子数：

$$dN(v_x, v_y, v_z)$$

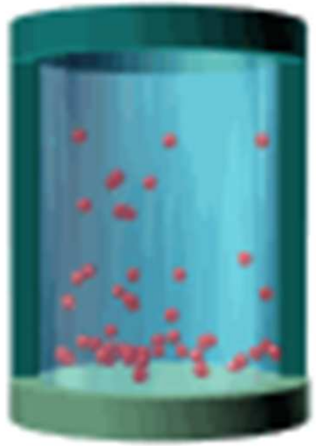
$$= Nf(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z$$



- 速率分布在$v \sim v+dv$ 内的粒子数占总粒子数的比率：

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N}$$

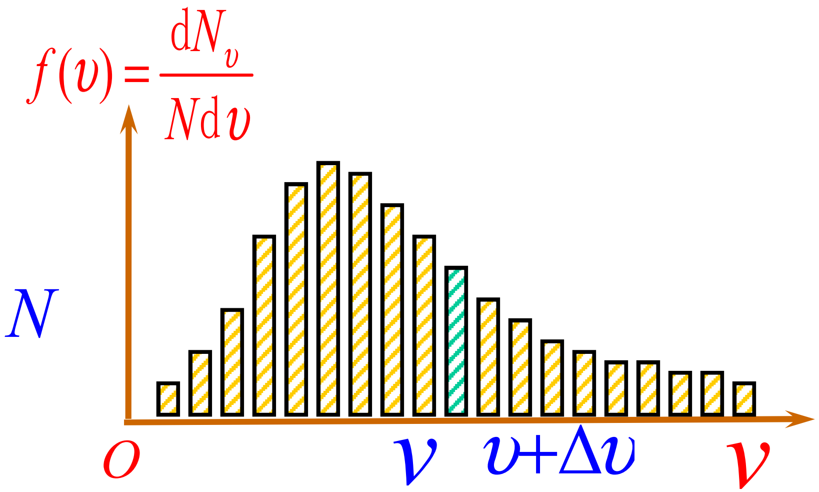
- 分布在速率*v*处单位速率间隔内粒子数占总粒子数的比率：



$$f(v_x, v_y, v_z)_z = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{Ndv_x dv_y dv}$$

- 总粒子数：

$$\iint\int_{-\infty}^{+\infty} Nf(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = N$$



在不受外界影响的情况下，系统粒子的运动是无规则热运动，三个速度分量v_x v_y v_z互相独立。相互独立的随机事件概率相乘，有

$$f(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

又有系统处于平衡态，分布函数仅与速度v大小有关而与v的方向无关，即速度分布各向同性，因此，

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2) = f(v^2)$$

于是 $$f(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)$$

取ln，两边分别对v_x，v_y，v_z求导，再分别用２v_x，２v_y，２v_z除，得

$$\frac{f'(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{f(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}=\frac{1}{2v_x}\frac{\varphi'(v_x)}{\varphi(v_x)}=\frac{1}{2v_y}\frac{\varphi'(v_y)}{\varphi(v_y)}=\frac{1}{2v_z}\frac{\varphi'(v_z)}{\varphi(v_z)}$$

$$\frac{f'(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{f(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}=-\lambda$$

$$f(v_x^2+v_y^2+v_z^2)=Ce^{-\lambda(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$ λ, C待定常数

----热平衡速度分布函数的基本形式

粒子数守恒(分布函数归一化)

$$\int f(v^2)d^3\vec{v} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Ce^{-\lambda v^2} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi = 1$$

能量守恒

$$\int f(v^2)\varepsilon(v)d^3\vec{v} = \frac{m}{2}\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^2 Ce^{\lambda v^2} \sin\theta dv d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3}{2}kT$$

c, λ 为待定常数

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

性质：

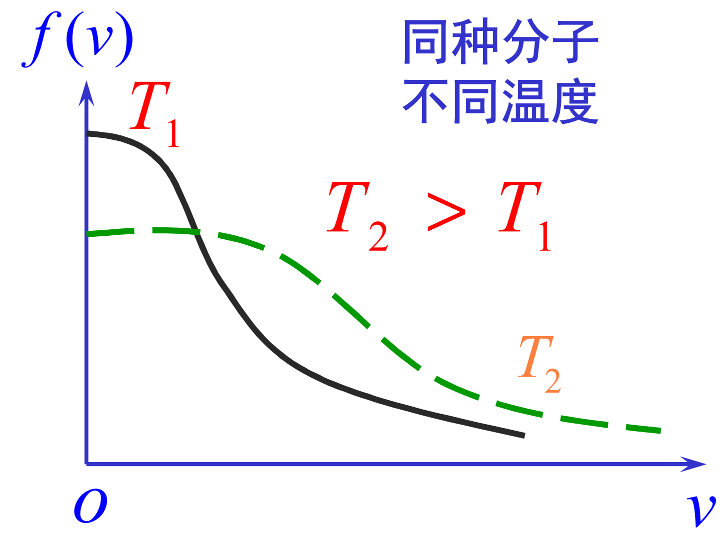
(1) f_M在$\vec{v}=0$处有极大值

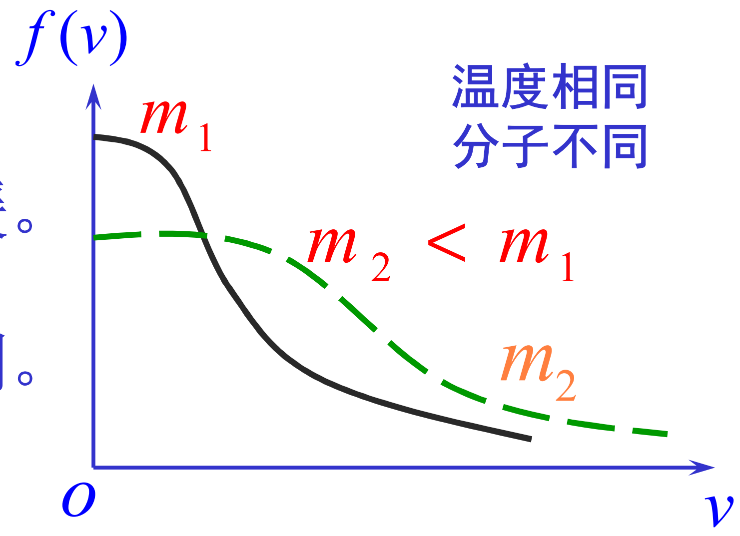
随$\vec{v}$增大，$f_M(\vec{v})$减小

(2) 随**T**增大，$f_M(\vec{v})$ 变化渐缓。

(3) 随**m**增大，$f_M(\vec{v})$ 变化加剧。

(4) 平均速度为零





麦克斯韦速度分布

粒子数守恒(分布函数归一化)

$$\int f(v^2)d^3\vec{v} = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Ce^{-\lambda v^2} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi$$

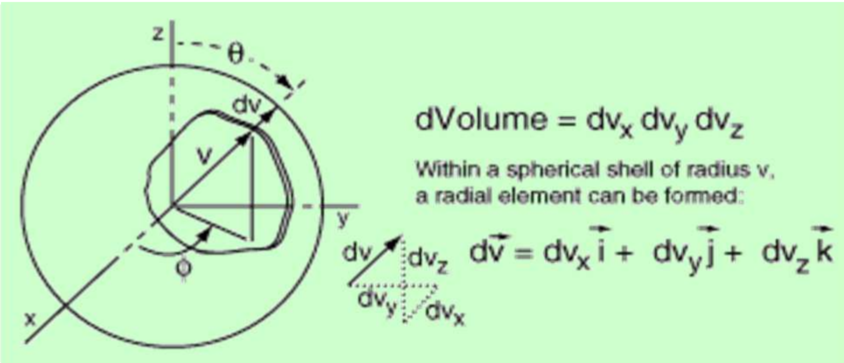
$$= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi$$

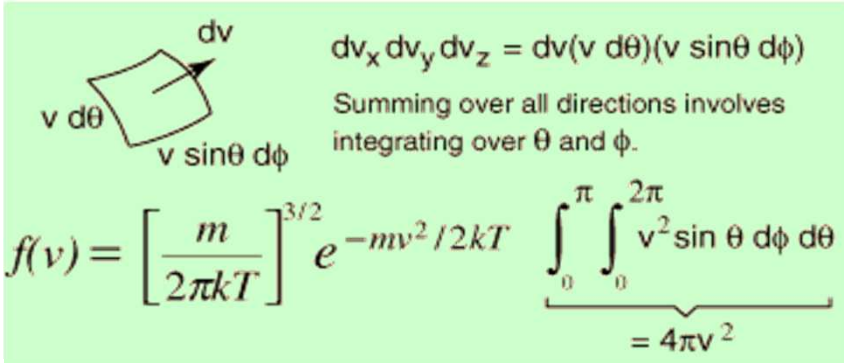
$$= \int_0^\infty (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-mv^2/2kT} dv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= 4\pi v^2$$

• 麦克斯韦速率分布

速率分布是仅考虑粒子按照速度大小的分布，不考虑速度方向的不同，即仅考虑速度大小的不同，把不同速度方向的粒子加起来。





$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vec{v})v^2 \sin\theta dv d\theta d\varphi = 4\pi v^2 f(\vec{v})dv = F(v)dv$$

$$F(v) = 4\pi v^2 f(\vec{v}) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

表示速度空间单位厚度球壳内的概率

麦克斯韦分布律

麦氏速度分布律

$$\frac{dN(v_x,v_y,v_z)}{N}=\underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}}_{f(v_x,v_y,v_z)}dv_x dv_y dv_z$$

- 分布在速度范围

$v_x\to v_x+dv_x$， $v_y\to v_y+dv_y$， $v_z\to v_z+dv_z$ 内的分子数占总分子数的概率

麦氏速率分布律

$$\frac{dN(v)}{N}=\underbrace{4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2kT}v^2}}_{F(v)}dv$$

- 分布在速律范围 $v\to v+dv$ 内的分子数占总分子数的概率

麦克斯韦分布函数

麦氏速度分布函数:

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

分布在速度空间单位体积元

$$dv = dv_x dv_y dv_z$$

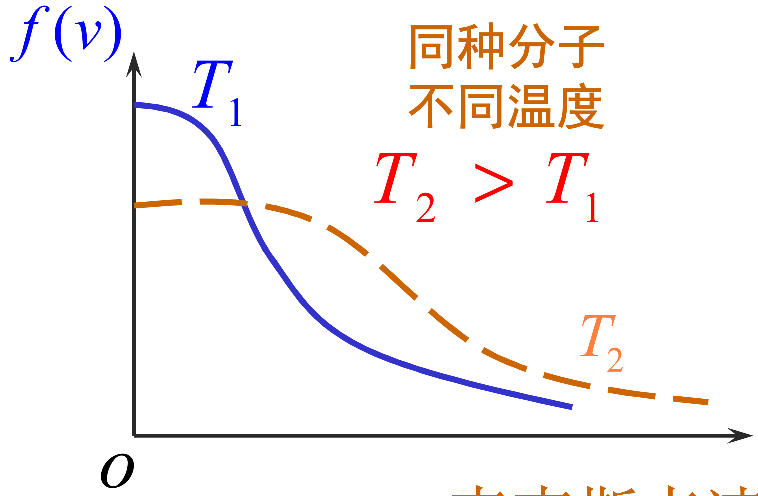
内的分子数占总分子数的比率

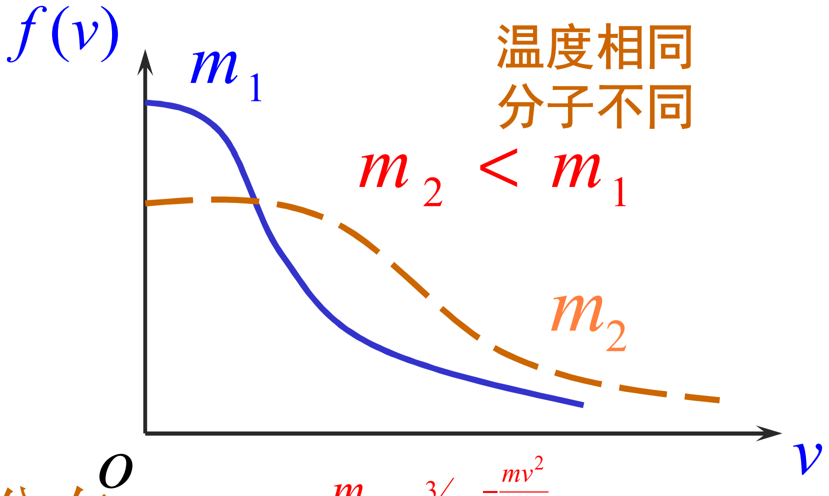
麦氏速率分布函数:

$$F(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2kT}v^2}$$

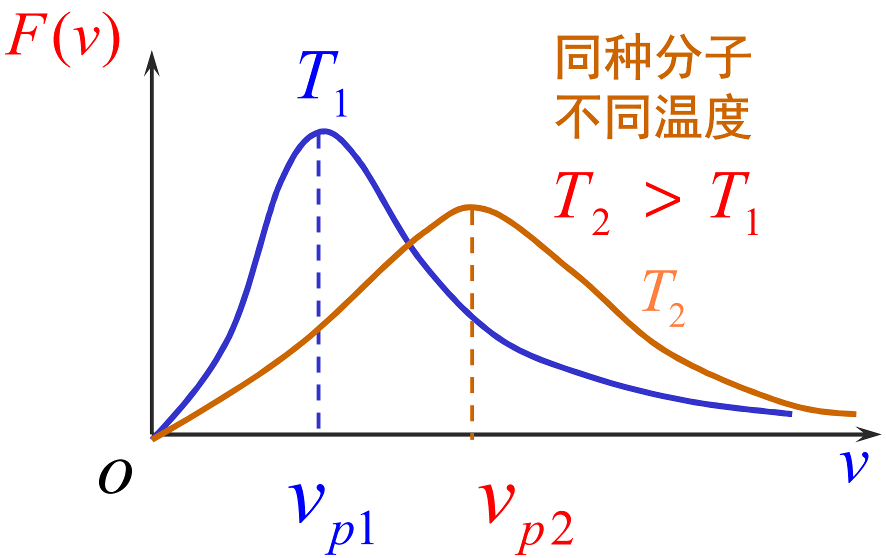
分布在速率v附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率

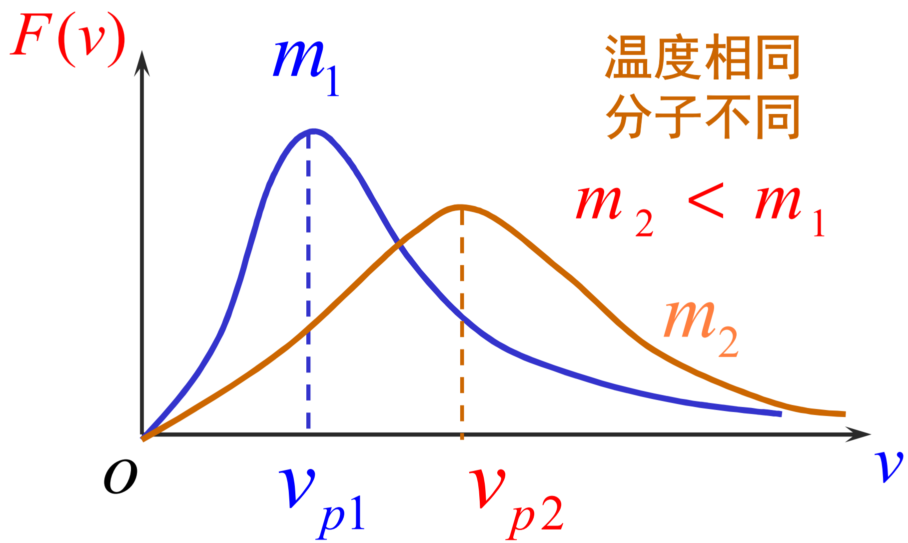
- 物理意义, 几何意义(速度空间)　　“概率密度”
- 比率的观点, 概率的观点
- 函数中各部分的物理意义
- 速度分布函数与速率分布函数的关系　$F(v) = 4\pi v^2 f(\vec{v})$





麦克斯韦速度分布 $f(\vec{v}) = (\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$



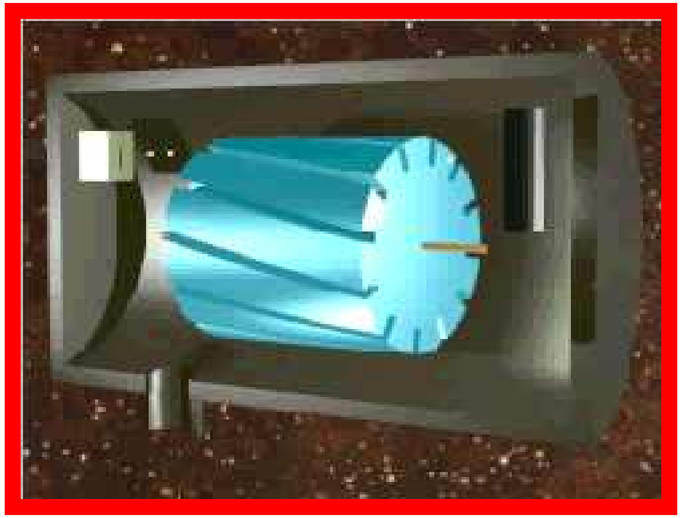


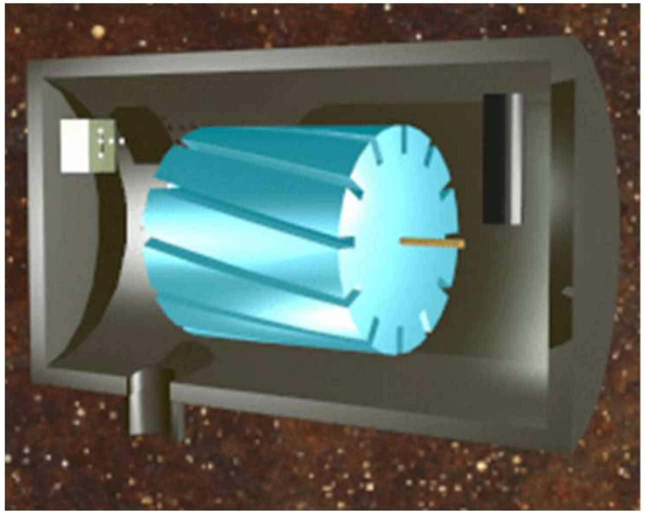
麦克斯韦速率分布

$$F(v) = 4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

•麦克斯韦速率分布的实验检验

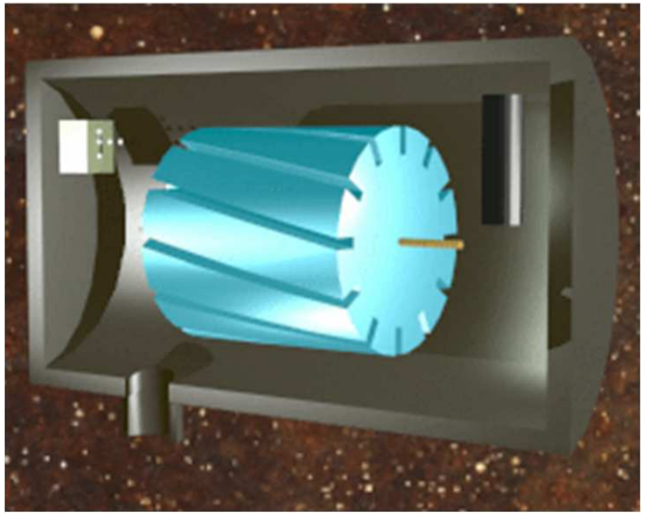
——密勒—库士实验(1956年) 速度选择

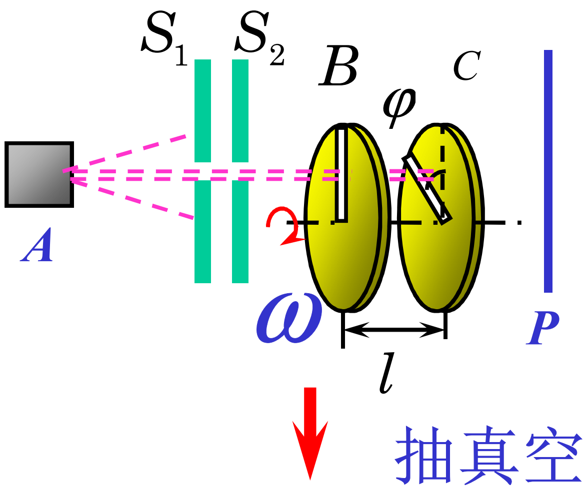


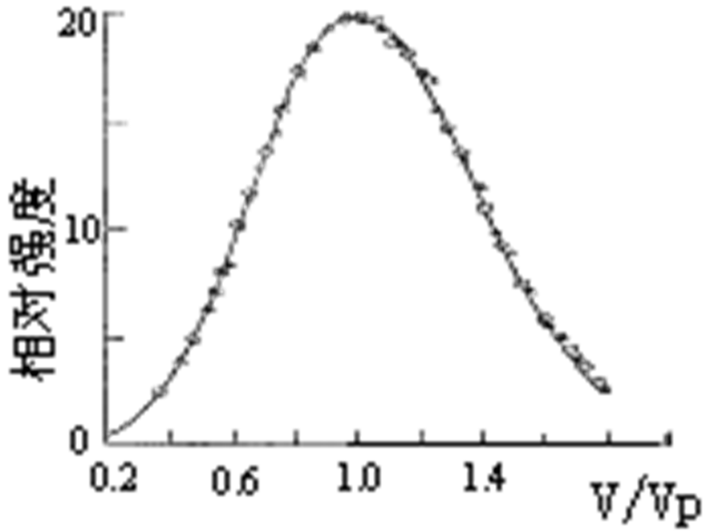


实验结果 p.58

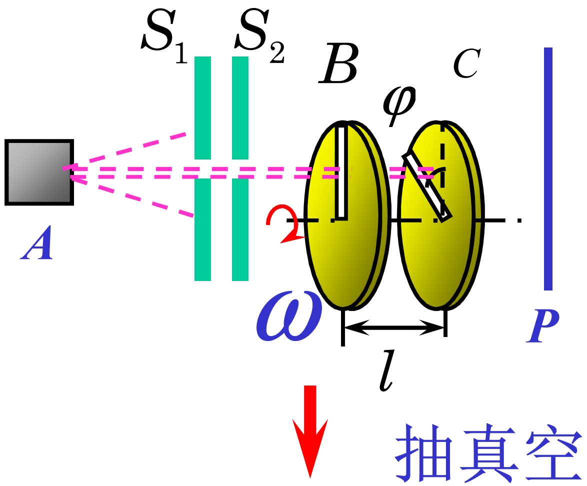
射线束分子速率分布律 $F_B(v) \propto vF_M(v)$





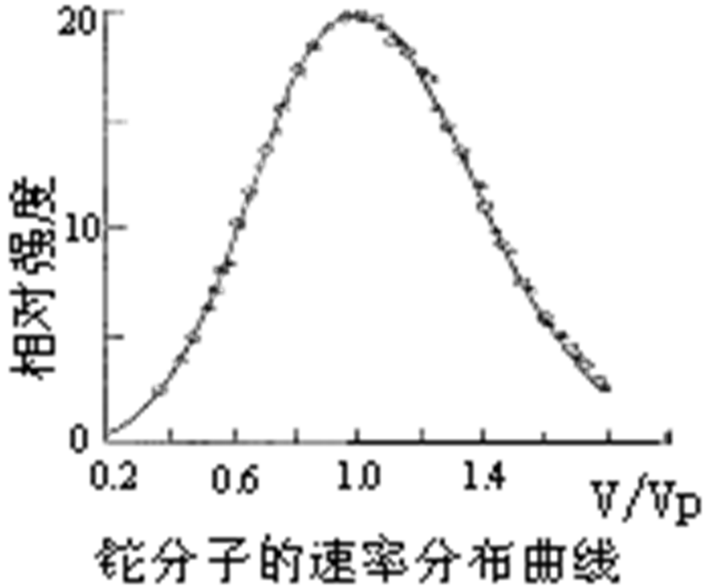


铊分子的速率分布曲线



$$t = \frac{L}{v} = \frac{\phi}{\omega}$$

$$v = \frac{\omega}{\phi} L$$



• 麦克斯韦速率分布律的一些应用

1. 气体分子的三个特征速率

<u>最概然速率</u> **(Most Probable)**

$$由\frac{dF(v)}{dv}=0，得$$

$$v_P=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

平均速率(Mean Speed)

$$\bar{v} = \int_0^\infty vF(v)dv = 4\pi\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v^2}dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2\lambda^2} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

$$1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

方均根速率 (Root mean squared speed)

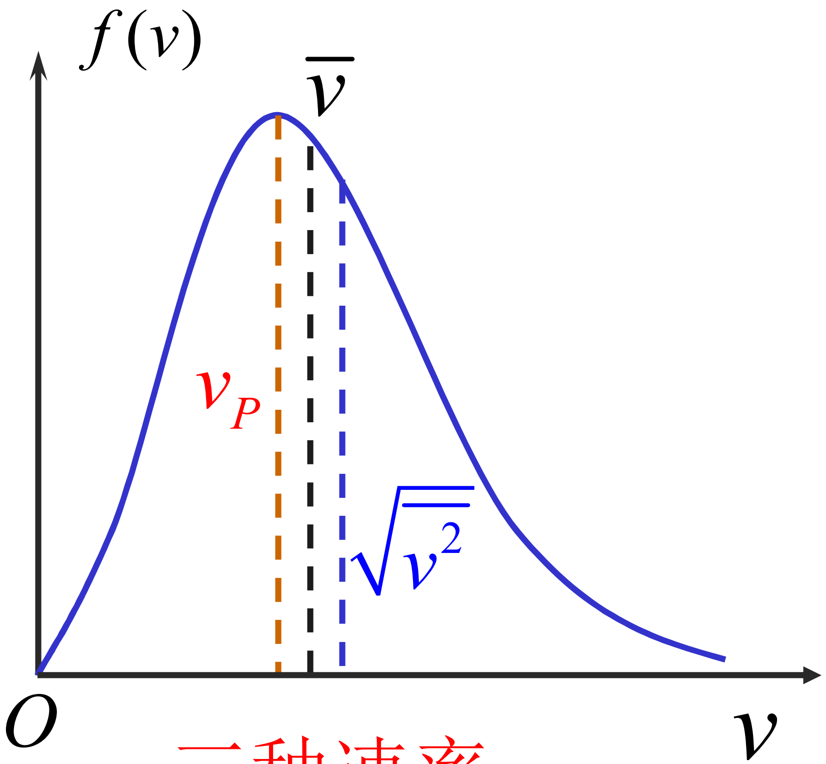
$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 F(v)dv = 4\pi\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4 e^{-\lambda v^2}dv$$

$$= 4\pi\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}} = \frac{3kT}{m}$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

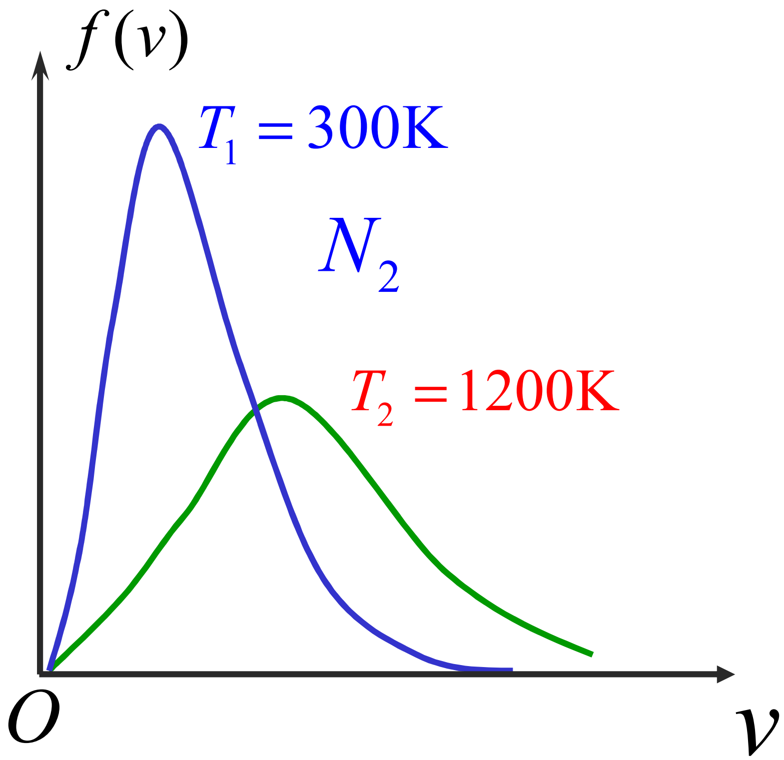
- 气体分子的三个特征速率的大小关系

$$v_{rms} : \overline{v} : v_p = \sqrt{3} : \sqrt{8/\pi} : \sqrt{2} = 1.732 : 1.596 : 1.414$$



三种速率

$$v_p < \bar{v} < \sqrt{\bar{v}^2}$$



N_2分子在两种温度的速率分布

五、气体分子运动的方均根速率

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{\upsilon^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\overline{\upsilon^2} = \frac{3kT}{m} = \frac{3kN_A T}{mN_A} = \frac{3RT}{\mu}$$

$$\sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

讨论

1. 应记住几个数量级

1) 标况下　分子的平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 273$$

$$= 5.6\times 10^{-21}\,\mathrm{J} = 3.5\times 10^{-2}\,\mathrm{eV}$$

一般金属的逸出功是 几个 eV

2) 氧气的方均根速率

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{3\times 8.31\times 273}{32\times 10^{-3}}}$$

$$=461\mathrm{m/s}$$

一般气体方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}}\sim 10^2 m/s$

3）标况下　分子数密度　$n\approx 10^{25}/\mathrm{m}^3$

- 例题

计算在 **0 ^{0}C** 时 **N_2, O_2, H_2** 的气体分子方均根速率。

(M_{N2}=28 g/mol, M_{O2}=32 g/mol, M_{H2}=2 g/mol)

代入 $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3N_Ak_BT}{M}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$$v_{rms}(N_2) = 493m/s$$

$$v_{rms}(O_2) = 461m/s$$

$$v_{rms}(H_2) = 1845m/s$$

- 例题

将 **0 ^{0}C** 时 **N_2, O_2, H_2** 的气体分子方均根速率与分子的逃逸速度相比较。

逃逸速度V_e：分子动能等于星球引力势能时的速度

$$\frac{1}{2}mv_e^2=\frac{GM_@ m}{R_@} \quad \Rightarrow \quad v_e=\sqrt{\frac{2GM_@}{R_@}}, \quad g=\frac{GM_@}{R_@^2}$$

$$\Rightarrow \quad v_e=\sqrt{2gR_@}$$

气体分子热运动促使其逸散

方均根速率 v_{rms} 大

热运动剧烈, 易逃脱

万有引力阻止其逃脱

逃逸速度 v_e 大

引力势能大,不易逃脱

$$k = \frac{v_e}{v_{rms}}$$

k值大，表示引力势能大，分子不易逃脱

$$k = \frac{v_e}{v_{rms}} \propto \sqrt{\frac{mR_@}{T}}$$

气体	H_2	He		CH_4	H_2O	N_2	O_2	Ar	CO_2
$N_A m$	2	4	10	16	18	28	32	40	44
k	6.63	8.32		16.6	17.6	22	23.5	26.5	27.5

易逃逸 ← → 难逃逸

地球大气温度T增加，*k*减小，影响大气结构的稳定性

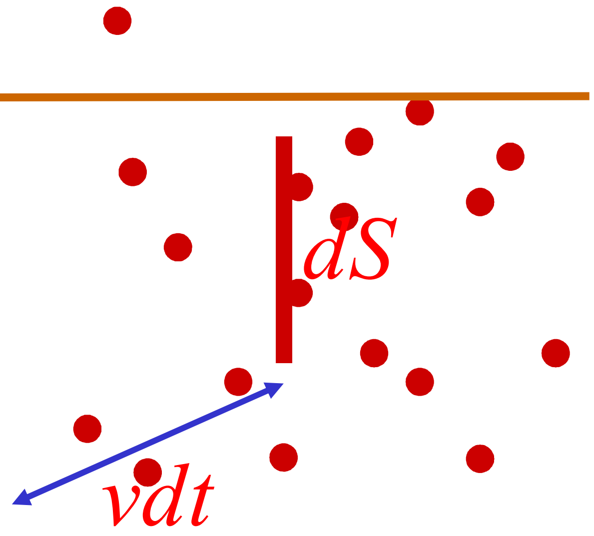
行星、卫星大气逃逸问题

宇宙中原初化学成分是氢(约占3/4)氦(约占1/4)。但现在地球大气里几乎没有H_2和 He，主要成分是N_2和O_2

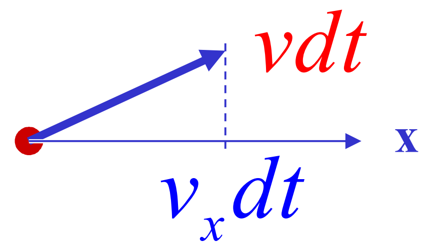
月球、水星无大气，金星、火星大气以CO_2为主，土星、木星以H_2、He为主

2. 气体分子碰壁数Γ与泻流率

考察容器内分子在单位时间内碰到单位面积容器壁上的分子数。



在dt时间内dS扫过的空间体积为$V_x\,dtdS$。在dt时间内，此体积内的分子全部都可以与器壁相碰撞。



于是：

$$v_x dtdS \cdot n(v_x) = v_x dtdS \cdot nf(\vec{v})dv_x dv_y dv_z$$

对不同的$V_x\,V_y\,V_z$求和，再除以$dtdS$，即为分子碰壁数：

$$\Gamma = \int_0^\infty v_x dtdS \cdot nf(\vec{v})dv_x dv_y dv_z \Big/ dtdS$$

$$= \int_0^\infty nv_x \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_BT}} dv_x$$

$$\cdot \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_y^2}{2k_BT}} dv_y \cdot \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_BT}} dv_z$$

$$= n\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot \frac{k_B T}{m} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{4} n\bar{v}$$

故: $$\Gamma = \frac{1}{4} n\overline{v}$$

这也是器壁很薄时从ds中逸出的数率——泻流数率

泻流: *effusion*

问题：为什么要求器壁很薄?

大孔行否?

当泻流出的气体被收集在V体积内, 数密度为:

$$n' = \Gamma/V$$

两种气体泻流后的数密度之比为:

$$\frac{n_1'}{n_2'} = \frac{\Gamma_1/V}{\Gamma_2/V} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

(利用了关系 $\begin{cases} \bar{v} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}} \\ \Gamma = \dfrac{1}{4} n\bar{v} \end{cases}$

即不同质量的物质泻流量不一样。

如果 $m_2 > m_1$，则 $\dfrac{n_1'}{n_2'} > \dfrac{n_1}{n_2}$

所以, 经过泻流质量小的物质得到富集。

例题

同位素天然丰度：**^{238}U: 99.3%, ^{235}U: 0.7%**。

把可裂变的**^{235}U**从天然铀中分离。

方法：将固态铀转化为气体化合物**UF_6**。（***F原子量19***）

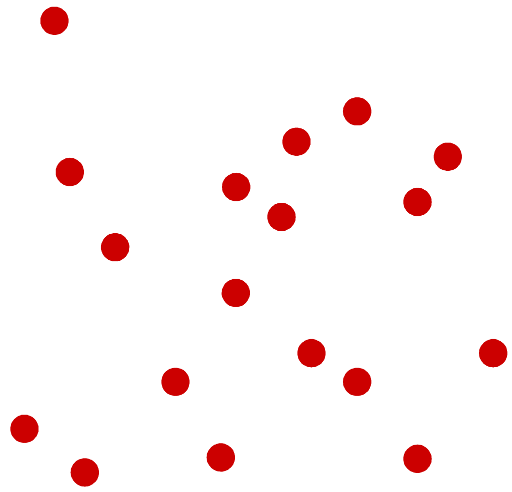
$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{235+19\times 6}{238+19\times 6}=\frac{349}{352},\qquad \frac{n_2}{n_1}=\frac{99.3}{0.7}$$

一次泻流：
$$\frac{n_2}{n_1}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}=141.25=\frac{99.297}{0.703}$$

要想富集到 **99% ^{235}U:**

$$\left(\frac{99.3}{0.7}\right)^{K}\left(\frac{349}{352}\right)^{K/2}=\frac{1}{99}\quad\Rightarrow\quad K=2232$$

麦克斯韦速率和速度分布中，气体分子基本上是自由粒子，他们之间没有长时间的相互作用，且不受任何外力作用。气体分子的分布仅仅依赖于分子的速度，在坐标空间的分布是均匀的。



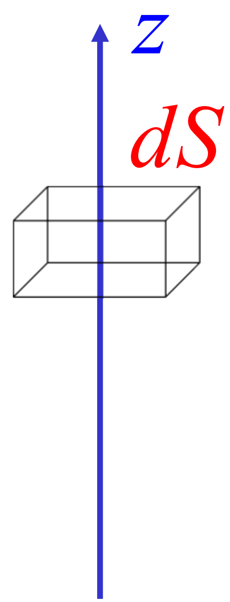
在外力作用下气体分子遵从什么分布？

3. 重力场中微粒密度随高度的等温分布

气体的密度随高度变化，$n(z)$

局域平衡假设：

在一个确定高度z上，总可以取一个宏观小、微观大的体积元，其中的气体是处于平衡态的理想气体。



宏观小：体积元中气体的密度是处均匀的，$n(z)$ 。

微观大：体积元中气体的数目巨大，可以看成是一个热力学系统。

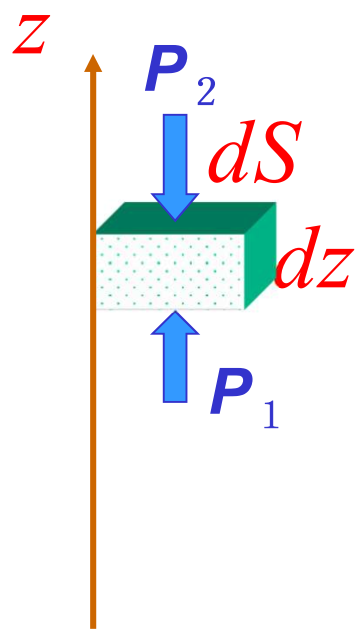
考虑高度**z**附近、厚度为**dz**、面积为**dS**的矩形中的气体。

平衡条件：体积元上下压强差引起的力

= 体积元中气体分子所受的重力

$$p_2 S - p_1 S = \rho g S dz$$

$$nmgdz = p_1 - p_2 = -(p_2 - p_1) = -dp$$



设系统近似为理想气体 $p = nk_B T$

对等温大气系统 $dp = k_B T dn$

代入上式 $k_B T dn = -nmgdz$

$$dn / n = -mg / (k_B T) dz$$

积分并代入初条件，$Z=0$, $n=n_0$, 得

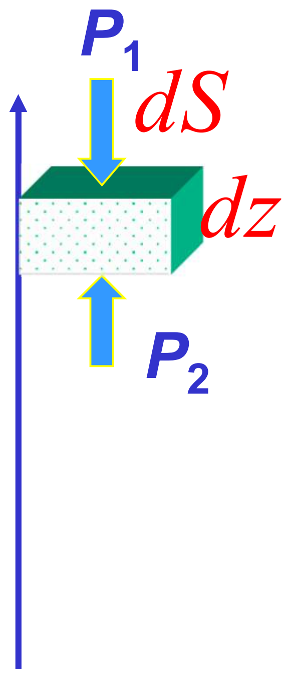
$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

，n_0为地面处微粒的数密度。

随高度z增大，微粒的数密度指数衰减。

代入 $$p = nk_B T$$

解得：$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$ —— 等温气压公式



等温大气系统的压强随高度增大而指数衰减。

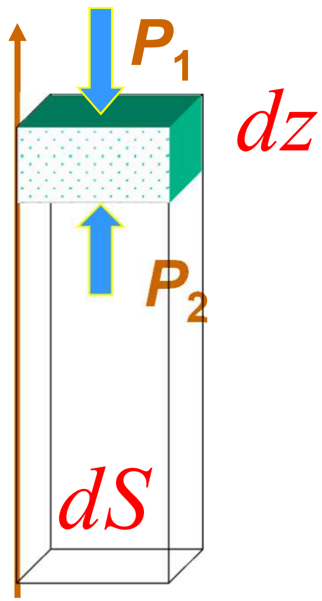
理想气体在有外力场情况下的平衡态分布。

重力场中微粒按高度的分布律

体积元中粒子的数目为

$$dN(z) = ndzdS = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dzdS$$

底面积为**dS**的柱体（高度无限延伸）中的微粒总数为



$$N = \int dN(z) = n_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dzdS = \frac{n_0 k_B T}{mg} dS$$

$$\frac{dN(z)}{N} = f(z)dz = \left(\frac{mg}{k_B T}\right) e^{-\frac{mgz}{k_B T}} dz$$

即重力场中微粒按高度的分布律为：

$$f(z) = \left(\frac{mg}{k_B T}\right) e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

• 玻尔兹曼分布律

玻尔兹曼把微粒在重力场中的分布直接推广到任意势场***U(r)***中，并考虑微粒按速度的分布，得到

$$n(r) = n_B(r) = n_0 e^{-\frac{U(r)}{k_B T}}$$

---- 波尔兹曼密度分布律。

例如：回转体中质量为**m**的微粒的势能为

$$U_{离}(r)=-\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

微粒随**r**的分布率为 $n(r)=n_0e^{\frac{m\omega^2r^2}{2k_BT}}$

不同质量的分子在 **r** 上的分布不同，可以用于物质分离。

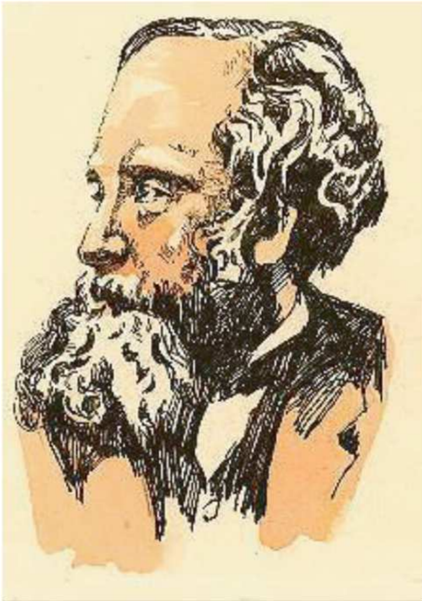
系统压强随**r**的分布率为

$$p(r)=p_0e^{\frac{m\omega^2r^2}{2k_BT}}$$

龙卷风、台风、飓风等有眼，呈漏斗状。

龙卷风、台风、飓风等有眼，呈漏斗状。

•麦克斯韦—玻尔兹曼分布律



[英]J. C. Maxwell
1831-1879

[奥地利] Ludwig Boltzmann
1844-1906

•麦克斯韦—玻尔兹曼分布律

Maxwell分布的指数中 $\frac{1}{2}mv^2=\varepsilon_k$

$$f_M(\vec{v})=\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}e^{-\frac{\varepsilon_k}{k_B T}}$$

Boltzmann分布的指数中 $U(r)=\varepsilon_p$

$$f_B(r)=C_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{k_B T}}$$

气体分子取那个速度与它的位置无关（独立事件），因而气体在势场中的分布为

$$f_{MB}(v,r)=f_M(v)f_B(r)=Ce^{-\frac{\varepsilon_k+\varepsilon_p}{k_B T}}$$

记 $\varepsilon=\varepsilon_k+\varepsilon_p$ 为包括各种形式的动能和势能的总能量

即有麦克斯韦—玻尔兹曼(MB)分布律

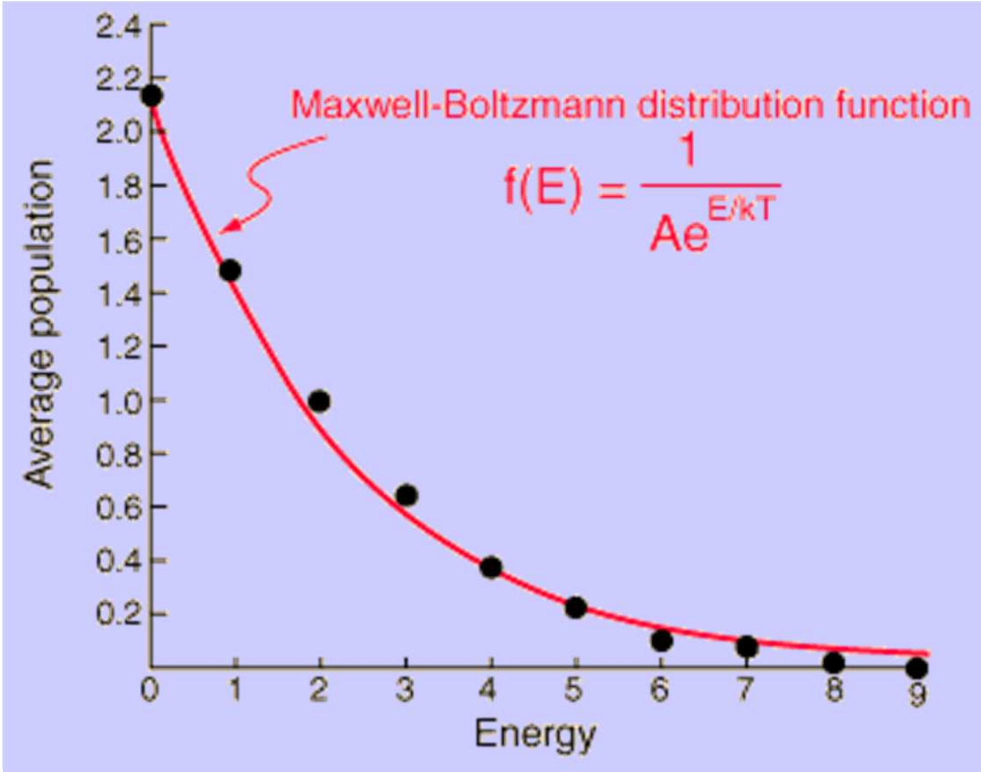
$$f(v,r)=n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}e^{-\varepsilon/k_B T}$$

或 $$dn(x,y,z,v_x,v_y,v_z)=n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}e^{-\varepsilon/k_B T}dxdydzdv_xdv_ydv_z$$

此分布适用于任意经典热力学系统。

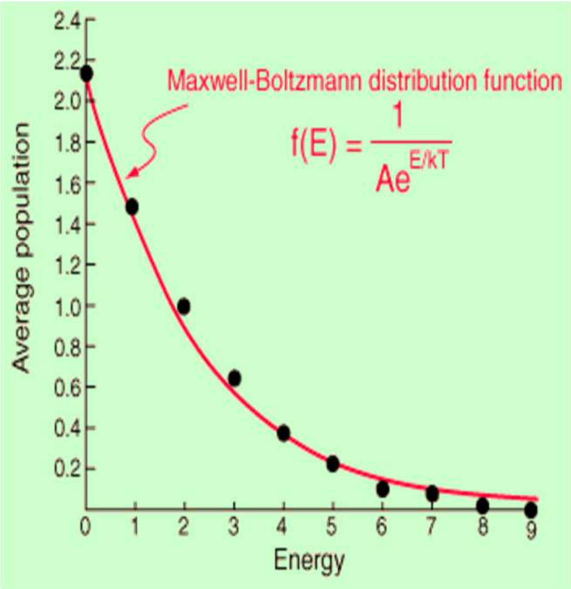
麦—玻(MB)分布律 $f(v,r)=n_0\left(\dfrac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}e^{-\varepsilon/k_BT}$

能级	态
0	2.146
1	1.48
2	0.989
3	0.629
4	0.378
5	0.210
6	0.105
7	0.045
8	0.003
9	0.015

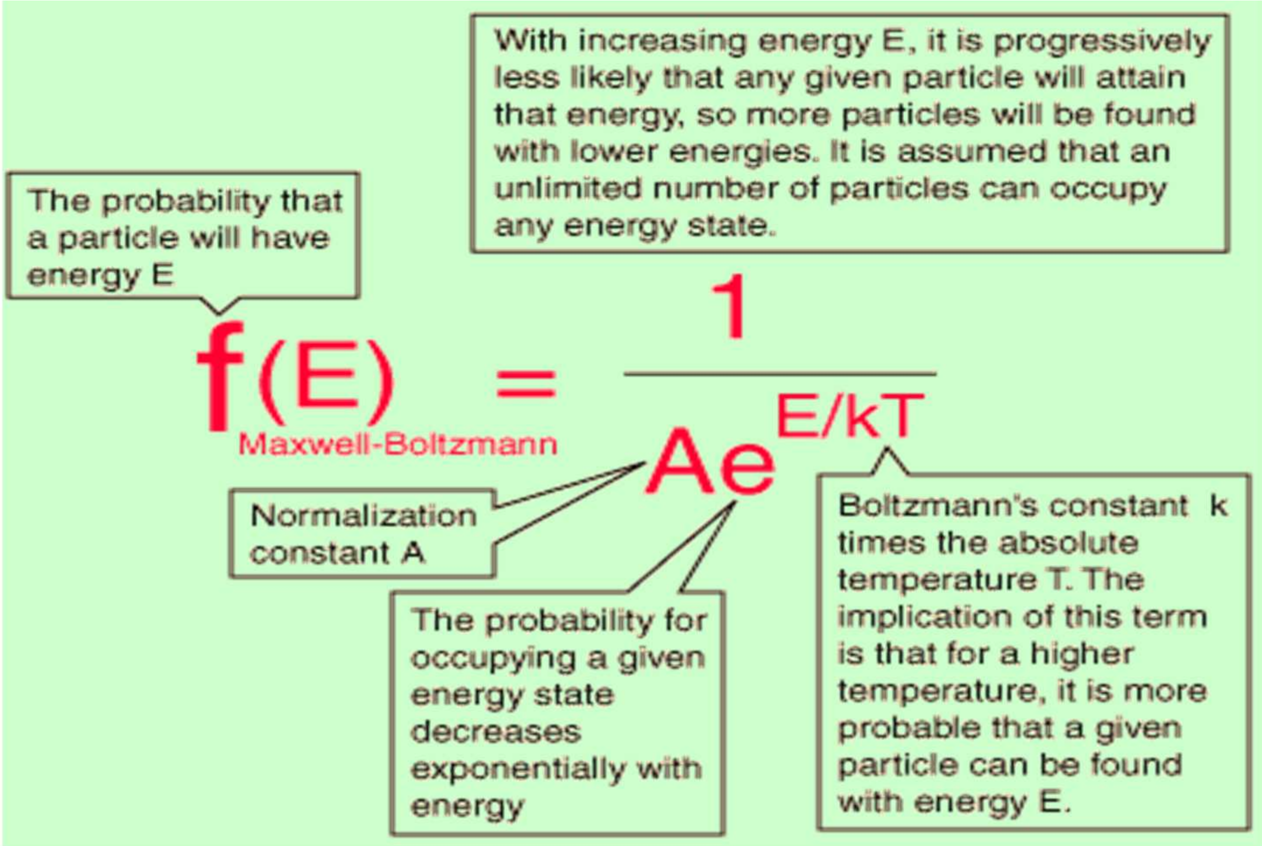


粒子优先占据能量小的状态

麦—玻(MB)分布律



Maxwell-Boltzmann distribution function
$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$
Average population
Energy
2.4
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9



With increasing energy E, it is progressively less likely that any given particle will attain that energy, so more particles will be found with lower energies. It is assumed that an unlimited number of particles can occupy any energy state.
The probability that a particle will have energy E
$f(E)_{\text{Maxwell-Boltzmann}} = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$
Normalization constant A
The probability for occupying a given energy state decreases exponentially with energy
Boltzmann's constant k times the absolute temperature T. The implication of this term is that for a higher temperature, it is more probable that a given particle can be found with energy E.

能量分布函数

Maxwell-Boltzmann (classical)	Bose-Einstein (quantum)	Fermi-Dirac (quantum)
$f(E) = \dfrac{1}{Ae^{E/kT}}$	$f(E) = \dfrac{1}{Ae^{E/kT} - 1}$	$f(E) = \dfrac{1}{Ae^{E/kT} + 1}$
全同粒子	全同粒子	全同粒子
粒子可由位置分辨	不可分辨波色子	不可分辨费米子
处于同一量子态的粒子数不受限制	处于同一量子态的粒子数不受限制	处于同一量子态的粒子数只限一个
应用：分子速度分布	热辐射	金属中的电子

第２章 作业

P.87， 第1, 3, 4, 7, 8, 9,11

15, 17, 19, 23题