《热平衡的统计分布律》内容概要

理论内容总结：

- §2-1　统计规律与分布函数的概念
- §2-2 Maxwell 分布律
- §2-3 Maxwell-Boltzmann 分布律
- §2-4 能量均分定理与热容
- §2-5 微观粒子运动状态的一般讨论(简介)

平衡态的统计规律与分布函数

- 统计规律与分布函数的概念，按位置、速度、能量等分布
  注意归一化及平均值
- 理想气体的分布函数
  - 按速度及速率分布的函数，形式，由速度推导出速率
    三种平均值
  - 按高度(位置)分布的函数的形式，分子数密度、压强，
    要求推导
  - 按能量分布的函数形式及推导
  - 应用
    - 能量按自由度均分定理
    - 理想气体的内能
    - 热容
- 补充—非理想气体的分布函数
  - 玻色系统
  - 费米系统

习题总结

本章习题可分为二大类

第一类：基本知识

一、基本概念(分布函数、平均值、归一化等)

二、麦克斯韦速度分布律和速率分布律

1、麦克斯韦速度分布律形式，意义(三维、一维、二维)

2、麦克斯韦速率分布律形式，意义(三维、一维、二维)

1、 任一物理量的平均值及三种速度平均值

2、 推广：任意物理量的分布函数，及三种平均值

3、 推广：碰壁次数(泻流数率)

三、波尔兹曼分布律及麦克斯韦—波尔兹曼分布律

1、波尔兹曼分布律：粒子数密度及压强随高度的变化

2、麦克斯韦—波尔兹曼分布律：粒子数按高度的速度的分布

第二类：能量按自由度均分定理

1、 能量按自由度均分定理

根据自由度计算粒子的平均能量

2、 理想气体的内能

3、 理想气体的热容

第三类：，微观粒子的运动状态的分布律

1、波尔兹曼系统的最概然分布(波尔兹曼分布)： $N_{i,\mathrm{Bp}} = g_i e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}$

2、玻色系统的最概然分布(玻色分布)，也称玻色-爱因斯坦分布： $N_{i,\mathrm{B}} = \dfrac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1}$

3、费米系统的最概然分布(费米分布)，也称费米-狄拉克分布： $N_{i,\mathrm{F}} = \dfrac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$

			例题	习题	作业	习题课讲解
基本概念(分布函数、平均值、归一化等)	分布函数 $f(q)$ 意义：	粒子数在 q 处单位间隔内的几率 $f(q)=\dfrac{dN(q)}{Ndq}$	2个	2.1-2	2.1-2	2.2
	任一物理量的分布函数	$f(w)=f(q)\dfrac{dq(w)}{dw}$				
	归一化	$\int_0^{\infty} f(q)dq=1$				
	任一区间，任一物理量的平均值	$\overline{W}=\dfrac{\int_{q_1}^{q_2} Wf(q)dq}{\int_{q_1}^{q_2} f(q)dq}$				
	三种平均值最可几值 q_p、算术平均值 $\bar{q}$、方均根 $\sqrt{\overline{q^2}}$	$\left.\dfrac{df(q)}{dq}\right\|_{q_p}=0$ $\bar{q}=\int_0^{\infty} qf(q)dq$，$\sqrt{\overline{q^2}}=\int_0^{\infty} q^2 f(q)dq$				

麦克斯韦速度分布	分布函数 $f_M(\vec{\upsilon})$ 意义	速度处在 υ_x， υ_y， υ_z 附近单位速度区间的粒子数百分比，即速度 $\vec{\upsilon}$ 附近粒子的概率密度 $f(\upsilon)=\dfrac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon}$		2.10-14	2.10	2.12
	分布函数 $f(\upsilon)$ 形式：	三维： $f_{\mathrm{M}}(\vec{\upsilon})=\left(\dfrac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}}T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_B T}}$				

律		一维(即任一方向)： $f_{\mathrm{M}}(\upsilon_x\vec{i}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2k_BT}}$				
	任一区间，任一物理量的平均值 $\overline{W}$	$\frac{\int_{\upsilon_{1z}}^{\upsilon_{2z}}[\int_{\upsilon_{1y}}^{\upsilon_{2y}}(\int_{\upsilon_{1x}}^{\upsilon_{2x}} We^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2k_BT}-\frac{m\upsilon_y^2}{2k_BT}-\frac{m\upsilon_z^2}{2k_BT}} d\upsilon_x)d\upsilon_y]d\upsilon_z}{\int_{\upsilon_{1z}}^{\upsilon_{2z}}\int_{\upsilon_{1y}}^{\upsilon_{2y}}(\int_{\upsilon_{1x}}^{\upsilon_{2x}} e^{-\frac{m\upsilon_x^2}{2k_BT}-\frac{m\upsilon_y^2}{2k_BT}-\frac{m\upsilon_z^2}{2k_BT}} d\upsilon_x)d\upsilon_y]d\upsilon_z}$				
推广	碰壁数率Γ	单位时间内碰到单位面积器壁上的分子数称为气体分子的碰壁数率Γ： $\Gamma = \frac{1}{4}n\overline{\upsilon}$				
	泻流数率	单位时间内分子从小孔单位面积逸出的分子数称为气体分子的泻流数率。 如果小孔的器壁很薄，则泻流数率等于碰壁数率： $\Gamma_{\mathrm{effu}} = \frac{1}{4}n\overline{\upsilon}$				

麦克斯韦速率分布律	分布函数 $f_M(\upsilon)$ 意义	速率在 υ 附近、单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率，或者，分子速率处在 υ 附近单位速率间隔内的概率 $f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z) = \frac{dN(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)}{Nd\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z}$	3 个	2.3-9	2.4-6	2.4-6
	分布函数 $f_M(\overline{\upsilon})$ 形式	三维： $f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\upsilon^2 e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_BT}}$				
		一维： $f(\upsilon) = 2\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_BT}}$				
		二维： $f(\upsilon) = \left(\frac{m\upsilon}{k_B T}\right) e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_BT}}$				
	任一区间，任一物理量的平均值 $\overline{W}$	$\frac{\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} We^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_BT}}\upsilon^2 d\upsilon}{\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} e^{-\frac{m\upsilon^2}{2k_BT}}\upsilon^2 d\upsilon}$				

	三种平均值，即最可几值、算术平均值、方均根	$\upsilon_p=\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$， $\bar{\upsilon}=\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$，$\sqrt{\overline{\upsilon^2}}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$				

波尔兹曼分布律	分布函数 $f_B(r)=f_0e^{-\frac{\varepsilon_p}{k_BT}}$ 适用于任何形式的保守力场	分布函数的意义：平衡态下温度为 T 的气体中，位于空间 $\vec{r}$ 处单位体积内的分子数。 式中 ε_p 是位于 $\vec{r}$ 处分子的势能	3 个	2.15-18	2.15, 2.17,	
		重力场中微粒密度随高度的等温分布： $n=n_0e^{-\frac{mgh}{k_BT}}$ （ $h=0$ 处 $n=n_0$ ）				
		等温气压公式：$p=p_0e^{-\frac{mgh}{k_BT}}$ 其中 $p_0=n_0k_BT$ 是 $h=0$ 处气体的压强				

麦克斯韦—波尔兹曼分布律	分布函数，又称玻耳兹曼能量分布律： 在温度为 T 的平衡态下，任何保守系统在某一状态区间的粒子数与该状态区间的粒子能量 ε 有关，且与 Boltzmann 因子 $e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}$ 成正比.	分布函数形式：$f(\vec{r},\vec{\upsilon})=n_0\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}$ 其中 $\varepsilon=\varepsilon_k+\varepsilon_p$ 是分子的总能量，C是与$(\vec{r},\vec{\upsilon})$无关的比例因子。		4.17， 4.18 4.27	4.17	
		分布函数的意义：平衡态下温度为 T 的气体中,位置在 $\vec{r}$ 处单位体积内,速度在区间 υ_x ~ $\upsilon_x+d\upsilon_x$， υ_y ~ $\upsilon_y+d\upsilon_y$， υ_z ~ $\upsilon_z+d\upsilon_z$，单位单位速度间隔内的分子数百分比。 $f(\vec{r},\vec{\upsilon})=\frac{dN(\vec{r},\vec{\upsilon})}{Nd\upsilon_xd\upsilon_yd\upsilon_zdxdydz}$				
		分子在空间的位置分布由势能决定： $dN(\vec{r})=ndV=n_0e^{-\frac{\varepsilon_p}{k_BT}}dxdydz$				
		分子按速度的分布由动能决定： $dN(\vec{\upsilon})=N\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon_k}{k_BT}}d\upsilon_xd\upsilon_yd\upsilon_z$				

		平衡态下温度为 T 的气体中,位置在区间 $x\sim x+dx$，$y\sim y+dy$ ，$z\sim z+dz$,速度在区间 $\upsilon_x\sim\ \upsilon_x+d\upsilon_x$， $\upsilon_y\sim\ \upsilon_y+d\upsilon_y$， $\upsilon_z\sim\ \upsilon_z+d\upsilon_z$，内的分子数为 $dN(\vec{r},\vec{\upsilon})=dN(\vec{r})dN(\vec{\upsilon})$ $=n_0\left(\dfrac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon_k+\varepsilon_p}{k_BT}}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z d\upsilon_y d\upsilon_z dv$ $=Ce^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z dv$				

能量按自由度均分定理	利用自由度计算粒子的平均能量：在温度为 T 的平衡状态下，分子的每个自由度的平均动能均为 $\dfrac{1}{2}k_BT$	某种气体分子具有 t 个平动自由度和 r 个转动自由度，s 个振动自由度， 分子平均总动能为 $\bar{\varepsilon}_k=\dfrac{1}{2}(t+r+s)kT$ 分子的平均势能为 $\bar{\varepsilon}_p=\dfrac{1}{2}skT$ 气体分子的平均热运动总能量：$\bar{\varepsilon}=\dfrac{1}{2}(t+r+2s)kT$ 令 $i=t+r+2s$，$\bar{\varepsilon}=\dfrac{i}{2}kT$	1个	2.19-24	2.21	2.21,2.22
	理想气体的内能：只包括分子的平动，转动，振动动能和振动势能。	每个气体分子的平均总能量为： $\bar{\varepsilon}=\dfrac{i}{2}kT$ 1mol 理想气体的内能为： $U=N_A\dfrac{i}{2}k_BT=\dfrac{i}{2}RT$ ν mol 理想气体的内能为： $U=\nu\dfrac{i}{2}RT$				
	理想气体的热容：物体在温度升高(或降低)1K时所吸收(或放出)的热量，与过程有关	比热容 c ：单位质量，$c=\dfrac{C}{m}$ 摩尔热容 C_m：1mol 气体，$C_m=\mu c$ 定体摩尔热容：				

	$C=\lim\limits_{\Delta T\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$	$C_{V,m}=\lim\limits_{\Delta T\to 0}(\dfrac{\Delta Q}{\Delta T})_V=(\dfrac{\partial U}{\partial T})_V=\dfrac{i}{2}R$				

微观粒子的运动状态的分布律	波尔兹曼系统	微观态总数： $\Omega=\dfrac{N!}{\prod_i N_i!}\prod_i g_i^{N_i}$		2.25		
		最概然分布(波尔兹曼分布)： $N_{i,\mathrm{Bp}}=g_i e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}$				
	玻色系统	微观态总数：$\Omega_{\mathrm{B}}=\prod_i\dfrac{(N_i+g_i-1)!}{N_i!(g_i-1)!}$				
		最概然分布(玻色分布)，也称玻色–爱因斯坦分布： $N_{i,\mathrm{B}}=\dfrac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1}$				
	费米系统	微观态总数：$\Omega_{\mathrm{F}}=\prod_i\dfrac{g_i!}{N_{i,\mathrm{F}}!(g_i-N_{i,\mathrm{F}})!}$				
		最概然分布(费米分布)，也称费米–狄拉克分布：$N_{i,\mathrm{F}}=\dfrac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1}$				

习题课

建议讲述下列习题：

2.2，2.4-6，2.12，2.21，2.22

补充题

（05-06-1）

一．选择题(每题 1 分，共 15 分)

*1. 三个容器 A、B、C 中装有同种理想气体，其分子数密度 n 相同，而方均根速率之比为 $\left(\overline{v_A^2}\right)^{1/2}:\left(\overline{v_B^2}\right)^{1/2}:\left(\overline{v_C^2}\right)^{1/2}$ ＝1∶2∶4，则其压强之比 p_A ∶ p_B ∶ p_C 为：

(A) 1∶2∶4.　　　(B) 1∶4∶8.

(C) 1∶4∶16.　　　(D) 4∶2∶1.　　　［ C ］

***2. 金属导体中的电子，在金属内部作无规则运动，与容器中的气体分子很类似．设金属中共有 N 个自由电子，其中电子的最大速率为 υ_m，电子速率在 $\upsilon \sim \upsilon + d\upsilon$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} A\upsilon^2 d\upsilon & 0 \leqslant \upsilon \leqslant \upsilon_m \\ 0 & \upsilon > \upsilon_m \end{cases}$$

式中 A 为常数．则该电子气电子的平均速率为

(A) $\dfrac{A}{3}\upsilon_m^3$．　　(B) $\dfrac{A}{4}\upsilon_m^4$．

(C) υ_m．　　(D) $\dfrac{A}{3}\upsilon_m^2$．　　[B]

**3. 按照麦克斯韦分子速率分布定律，具有最概然速率 υ_p 的分子，其动能为：

(A) $\dfrac{3}{2}RT$．　　(B) $\dfrac{3}{2}kT$．

(C) kT.　　(D) $\dfrac{1}{2}RT$．　　[C]

二．填空题(每题 1 分，共 15 分)

**1. 在容积为 10^{-2} m^3 的容器中，装有质量 100 g 的气体，若气体分子的方均根速率为 200 m•s^{-1}，则气体的压强为__1.33×10^5 Pa ___.

**2. 一容器内储有某种气体，若已知气体的压强为 3×10^5 Pa，温度为 27℃，密度为 0.24 kg/m^3，则可确定此种气体是__氢 __气；并可求出此气体分子热运动的最概然速率为_____1.58×10^3 __________m/s．

**3. 边长为 1 m 的立方箱子内盛有处于标准状态下的 3×10^{25} 个氧分子，此时氧分子的平均速率 $\overline{\upsilon}$ =_____425 ________m/s．若已知在单位时间内撞击在容器器壁单位面积上的分子数是 $\dfrac{1}{4}n\overline{\upsilon}$（其中 n 为分子数密度），计算 1 秒钟内氧分子与箱子碰撞的次数 N = ___ 1.9×10^{28} _____s^{-1}.

*4. 在无外力场作用的条件下，处于平衡态的气体分子按速度分布的规律，可用_____麦克斯韦_____分布律来描述．如果气体处于外力场中，气体分子在空间的分布规律，可用___玻尔兹曼__分布律来描述．

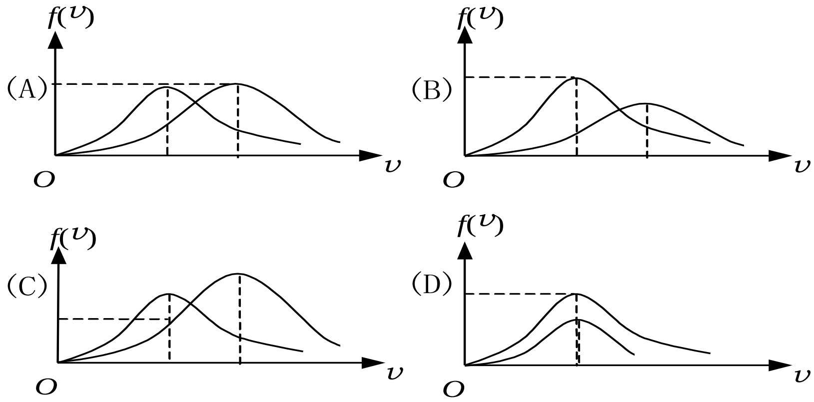
*****5. 某系统由两种理想气体 A、B 组成．其分子数分别为 N_A、N_B．若在某一温度下，A、B 气体各自的速率分布函数为 $f_A(\upsilon)$、$f_B(\upsilon)$，则在同一温度下，由 A、B 气体组成的系统的速率分布函数为 $f(\upsilon)$ =_____ $\dfrac{N_A f_A(\upsilon) + N_B f_B(\upsilon)}{N_A + N_B}$ __________.

（06-07-1）

一．选择题（每题 3 分，共 30 分）

**1. 下列各图所示的速率分布曲线，哪一图中的两条曲线能是同一温度下氮气和氦气的分子速率分布曲线？

［ B ］



二．填空题（每题 3 分，共 30 分）

*1. 有一瓶质量为 M 的氢气(视作刚性双原子分子的理想气体)，温度为 T，则氢分子的平均平动动能为__$\frac{3}{2}kT$____，氢分子的平均动能为___$\frac{5}{2}kT$___，该瓶氢气的内能为____$\frac{5}{2}MRT/M_{\text{mol}}$___.

（07-08-1）

一、 选择题（将正确答案的字母填在空格内，每题 3 分，共 30 分）

***2、 若 $f(\upsilon)$为气体分子速率分布函数，N 为分子总数，m 为分子质量，则$\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2}\frac{1}{2}m\upsilon^2 Nf(\upsilon)\,\mathrm{d}\upsilon$的物理意义是

(A) 速率为υ_2的各分子的总平动动能与速率为υ_1的各分子的总平动动能之差.

(B) 速率为υ_2的各分子的总平动动能与速率为υ_1的各分子的总平动动能之和.

(C) 速率处在速率间隔υ_1~υ_2之内的分子的平均平动动能.

(D) 速率处在速率间隔υ_1~υ_2之内的分子平动动能之和.

［ D ］

（08-09-1）

二、 填空题（每空 3 分，共 30 分）

*1、1 mol 氧气(视为刚性双原子分子的理想气体)贮于一氧气瓶中，温度为 27℃，这瓶氧气的内能为__6.23×10^{3}___J；分子的平均平动动能为__6.21×10^{-21}__ J；分子的平均总动能为___1.035×10^{-20}___J．

(摩尔气体常量 R= 8.31 J・mol^{-1}・K^{-1} 玻尔兹曼常量 k= 1.38×10^{-23} J ・K^{-1}）

**2、图示的曲线分别表示了氢气和氦气在同一温度下的分子速率的分布情况．由图可知，氦气分子的最概然速率为__1000 m/s __，氢气分子的最概然速率为__$\sqrt{2}\times1000$ m/s ___.