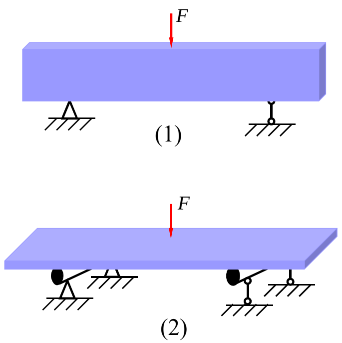
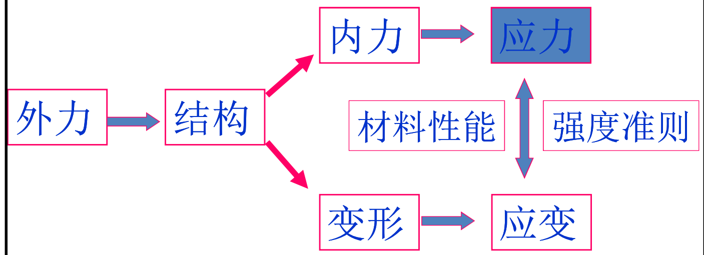


梁的横截面积相同

(1)与(2)两种情况那种情况对梁承载有利?

材料力学分析的基本路径



第十一章　弯 曲 应 力

§11-1 引言

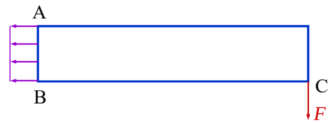
伽利略(1564-1642)指出：

- 如果杆件断裂，断口将发生在根部A-B部位，

原因：固接的边缘充当施力杠杆BC的支点，而杆的厚度BA则是杠杆的另一臂，沿BA作用有抗力。此抗力阻止墙内部分与墙外部分BD分离

$$(\sigma\cdot bh)\cdot\frac{h}{2}=F\cdot l$$

$$\sigma=\frac{F\cdot l}{\frac{bh^2}{2}}=\frac{M}{\frac{bh^2}{2}}$$

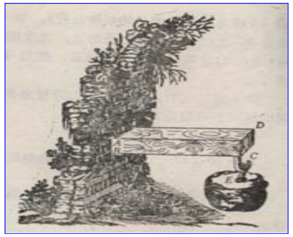


•伽利略开创性研究的评述

1. 局限性

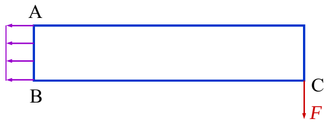
➢ 静力不平衡——19世纪初才由L.Poinsot以静力学公理明确阐明刚体上力系的简化与平衡

➢受当时实验条件的局限



2. 开创性

➢ 建立了“实验观测—假设—分析与推导”的现代科学研究方法



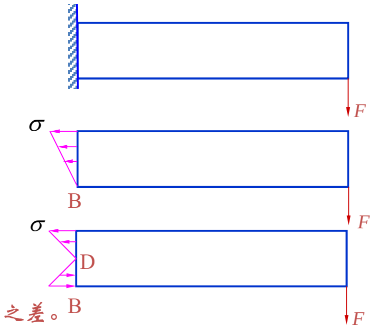
•马略特（1680）的研究

中图：B为矩心

$$\sigma = \frac{3Fl}{bh^2}$$

下图：D为矩心，$h \to h/2$

$$\sigma = \frac{3Fl}{bh^2}$$



结论：矩心位置无关紧要。

下图公式离正确结论仅一步之差。

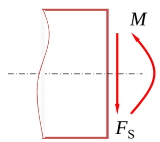
☞ 发现有的纤维拉伸，有的纤维压缩

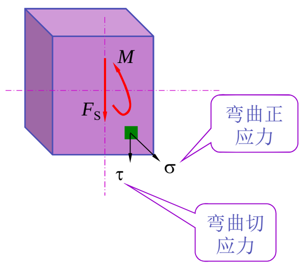
相关梁应力研究历史：

•1620，荷兰 I.Beeckman：梁一侧纤维伸长，一侧缩短
•1678，Hooke: 梁凸面纤维伸长，凹面缩短
•1702，P.Varignon:纤维拉力沿截面曲线变化
（同样忽略压 缩变形）
•1654-1705，Bernoull: 中性轴位置无关紧要
•1713，Parent.A: 指出应静力平衡，学说长期埋没
……
•1813，Navier: 中性轴位置无关紧要
•1826，Navier: 正确应用静力平衡方程，中性轴过形心

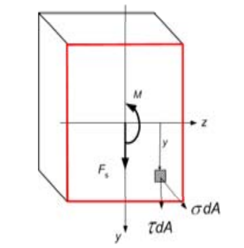
§11-1 引言

问题：已知横截面上的弯曲内力，如何确定横截面上的应力？





弯曲内力与弯曲应力的关系



截面上的法向微内力与切向微内力

(1) 只有法向微内力 σdA 才能构成截面上的弯矩 M; 只有切向微内力 τdA 才能构成截面上的剪力 F_s

$$M = \int_A \sigma dA \times y = \int_A \sigma y dA;$$

$$F_s = \int_A \tau dA \qquad A \text{ 为截面面积}$$

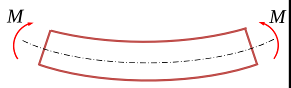
(2) 截面上弯曲正应力 σ 只决定于弯矩 M 和截面的几何尺寸, 剪力 F_S 的影响忽略不计; 弯曲切应力 τ 只决定于剪力 F_S 和截面的几何尺寸, 而不计弯矩 M 的影响

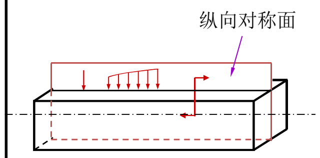
寻找横截面上的应力分布最简单的弯曲变形模式作为研究对象

对称弯曲　＋　纯弯曲

外力作用在纵向对称面上

横截面上只有弯矩

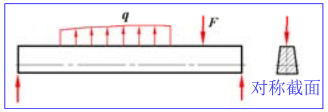




对称弯曲与纯弯曲

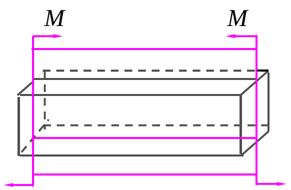
对称弯曲

梁具有对称截面，且在纵向对称面承受横向外力（或外力的合力）时的受力与变形形式。



纯弯曲与横力弯曲

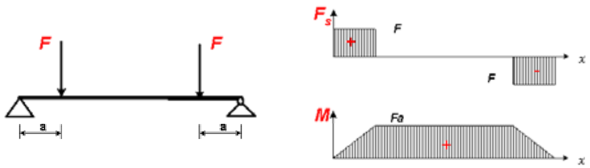
梁或梁段各横截面剪力为零、弯矩为常数的受力状态称为纯弯曲；既有剪力又有弯矩则称为横力弯曲。



纯弯曲梁的受力特点：

任一横截面上的弯矩恒定，剪力为零。

常用的纯弯曲加载方法



本章要解决的核心问题：

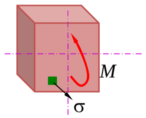
对称弯曲梁横截面上的弯曲应力的分布与计算。

§11-2 对称弯曲正应力

➢ 对称纯弯曲的弯曲正应力分析

横截面上的内力与应力的关系：

$$M=\int_A y\sigma dA \qquad 0=\int_A \sigma dA$$



☹ 弯曲应力问题是一个*静不定问题*

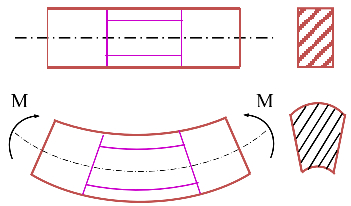
研究思路———静不定问题的分析方法

几何、物理、平衡三方面分析

1. 几何方面

方法： 观察外部变形 ➡ 假设内部变形 ➡ 建立几何方程

试验观察： （动画）



外部观察结果：

横线：
- 仍为直线
- 仍与纵线正交
- 两横线相对转动

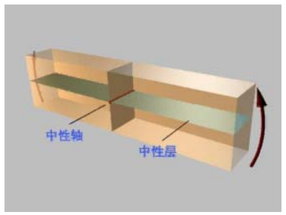
纵线：
- 变为曲线
- 上缩短，下伸长

横截面：上宽度变宽，下宽度变窄(泊松效应)。

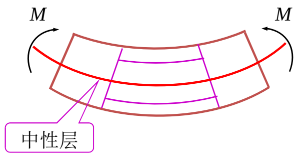
1. 平面假设：变形后，横截面仍为平面，且仍与纵线正交

2. 单向受力假设：梁内各纵向纤维仅受轴向应力

内部变形假设



✈ 推论：

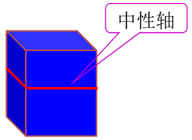


一侧伸长，一侧缩短

中性层

存在既不伸长，也不缩短的面

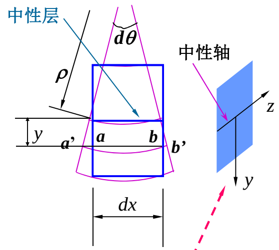
- 中性轴⊥截面纵向对称轴



- 变形过程中横截面间绕中性轴相对转动

二、弯曲正应力一般公式

1. 几何方面



注意坐标系的取法

考察线段ab的变形：

变形前：$ab=dx=\rho d\theta$

变形后：$a'b'=(\rho+y)d\theta$

$\therefore\ \Delta=a'b'-ab=yd\theta$

$$\boxed{\varepsilon=\frac{\Delta}{dx}=\frac{yd\theta}{\rho d\theta}=\frac{y}{\rho}}$$

$$\gamma(y)=0$$

1. 几何方面　$\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$

2. 物理方面

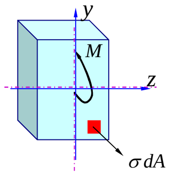
由胡克定律和单向受力假设：$\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{\rho}$　中性轴位置？ρ的大小？

y—坐标原点位于中性轴，ρ—中性层的曲率半径

3. 静力学方面

$\int_A \sigma dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0$　中性轴过形心

$\int_A y\sigma dA = M \Rightarrow \dfrac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = M$



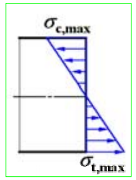
定义

$I_z = \int_A y^2 dA$　$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z}$　确定ρ　$\therefore \quad \sigma = \dfrac{My}{I_z}$

$\sigma = \dfrac{My}{I_z}$

三、最大弯曲正应力

•正应力沿截面如何分布？



$\sigma_{max} = \dfrac{My_{max}}{I_z} = \dfrac{M}{I_z/y_{max}}$

定义

$W_z = \dfrac{I_z}{y}$（抗弯截面系数）

$\sigma_{max} = \dfrac{M}{W_z}$

上次课内容

•剪力、弯矩与载荷集度间的微分关系

$\dfrac{dF_S}{dx} = q \quad \dfrac{dM}{dx} = F_S \quad \dfrac{d^2M}{dx^2} = q$

在集中载荷作用处，

$F_左 + F = F_右$
$M_左 = M_右$

$F_左 = F_右$
$M_左 + M = M_右$

•利用微分关系确定剪力弯矩图

线形看微分，端值看积分。

跟着箭头走　　两点对一段

•梁的弯曲正应力分析

对象：对称弯曲+纯弯曲的直梁

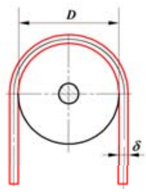
条件：平面假设＋单向受力假设

$\varepsilon = \dfrac{y}{\rho} \quad \sigma = E\dfrac{y}{\rho} \quad \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z} \quad \sigma = \dfrac{My}{I_z}$

例 1　已知：钢带厚δ=2mm, 宽b=6mm, D=1400mm, E=200GPa。计算：带内的 σ_{max} 与 M

解：1. 问题分析

已知$\rho=(D+\delta)/2$, E, 截面尺寸，可应用下述关系求应力与内力



❶ 应力～变形 关系：

$\sigma = E\dfrac{y}{\rho} \quad \sigma_{max} = E\dfrac{y_{max}}{\rho}$

❷ 内力～变形或内力～应力关系：

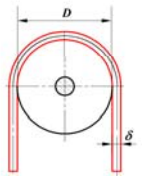
$\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{M}{EI_z}$　或　$M = \sigma_{max}W$

2. 应力计算

$$\sigma_{\max} = E\frac{y_{\max}}{\rho} \qquad \rho = \frac{D}{2}+\frac{\delta}{2} = 0.701\ \text{m}$$

$$y_{\max} = \frac{\delta}{2} = 1.0\times10^{-3}\ \text{m}$$

$$\sigma_{\max} = E\frac{y_{\max}}{\rho} = 285\ \text{MPa}$$



3. 弯矩计算

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \qquad M = \frac{EI_z}{\rho} = \frac{E}{\rho}\frac{b\delta^3}{12} = 1.141\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

或 $$\text{M} = \sigma_{\max}\text{W} = \frac{\text{b}\delta^2\sigma_{\max}}{6} = 1.14\text{kN}\cdot\text{m}$$

小结

- 根据实验结果，引出纯弯曲梁变形的平面假设和单向受力假设
- 由上述两个假设出发，从几何、物理和静力学三个方面对弯曲正应力进行分析
- 正应力公式：

$$\sigma(y) = \frac{My}{I_z} \qquad \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

（W_z—抗弯截面系数）

该公式基于特定的坐标系（中性轴 z 轴，纵向对称轴为 y 轴，向下为正）

- 应用条件： $\sigma_{\max}\le\sigma_p$，对称弯曲，纯弯与非纯弯

截面几何性质

截面的几何性质：与截面形状和几何尺寸有关的量。

我们已经学习了哪些截面的几何性质？

拉压： $\sigma = \dfrac{F}{A}$， $\Delta l = \dfrac{Fl}{EA}$

扭转： $\tau = \dfrac{T\rho}{I_p}$， $\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_p}$， $\varphi = \dfrac{Tl}{GI_p}$

弯曲： $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$， $\sigma_{\max} = \dfrac{M}{W_z}$

A, I_P, W_P, I_z, W_z——表征截面几何性质的量

静矩

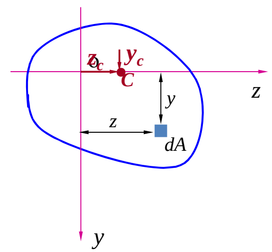
惯性矩

一、 静矩

积分

$$S_z = \int_A y\,dA$$

$$S_y = \int_A z\,dA$$



分别称为截面对坐标轴z和y的静矩

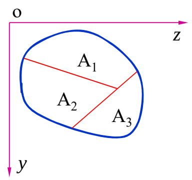
二. 形心

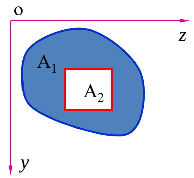
$$\therefore\ y_c = \frac{S_z}{A},\quad z_c = \frac{S_y}{A} \Longrightarrow S_z = y_c\cdot A \quad S_y = z_c\cdot A$$

- **如果截面对某轴的静矩为零，则该轴为形心轴。**

形心轴：通过截面形心的坐标轴。

三、 组合截面的静矩与形心





$$S_z=\int_A ydA$$
$$=\int_{A_1} ydA_1+\int_{A_2} ydA_2+\int_{A_3} ydA_3$$
$$=y_{c_1}\cdot A_1+y_{c_2}\cdot A_2+y_{c_3}\cdot A_3$$

$$y_c=\frac{S_z}{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{c_i}\cdot A_i}{A}$$

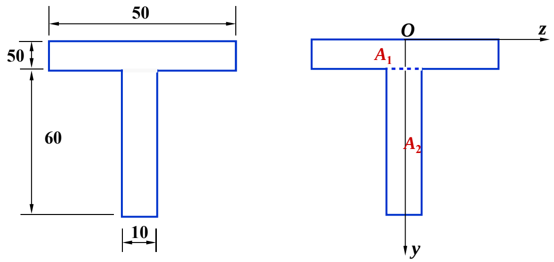
$$S_z=S_z^{(整)}-S_z^{(孔)}$$

负面积法

$$y_c=\frac{S_z^{(整)}-S_z^{(孔)}}{A^{(整)}-A^{(孔)}}$$

25

例： 确定下图所示截面的形心位置



解：将截面分为两部分，
利用组合截面的公式：

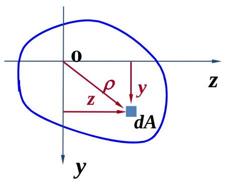
$$y_c=\frac{y_{c1}\cdot A_1+y_{c2}\cdot A_2}{A_1+A_2}$$

26

极惯性矩· 惯性矩

一、 截面对o点的极惯性矩或二次极矩

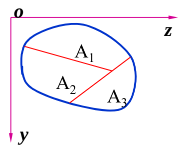
$$I_p=\int_A \rho^2 dA$$



二、 截面对z轴或y轴的惯性矩

$$I_z=\int_A y^2dA,\quad I_y=\int_A z^2dA$$

三、 惯性矩的组合截面公式



$$I_z=\sum_{i=1}^{n} I_{zi},\quad I_y=\sum_{i=1}^{n} I_{yi}$$

四、 一个恒等式 $I_p=I_z+I_y\quad(\because\ \rho^2=z^2+y^2)$

27

惯性矩的平行移轴定理

$$I_z=\int_A y^2dA,\quad I_y=\int_A z^2dA$$

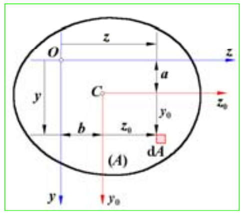
一、 惯性矩的平行移轴定理

$$I_z=\int_A y^2dA=\int_A (y_0+a)^2dA$$
$$=\int_A (y_0^2+2ay_0+a^2)dA$$

$\because\ I_{z0}=\int_A y_0^2dA\qquad \int_A y_0dA=0$

$\therefore\qquad I_z=I_{z_0}+a^2A$

同理： $I_y=I_{y_0}+b^2A$



Cy_0z_0—形心直角坐标系
Oyz—任意直角坐标系
二者平行

28

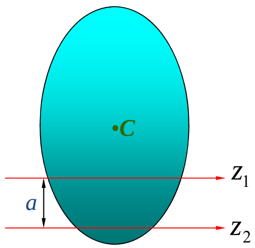
思考：下列计算是否正确？

其中C是截面形心。

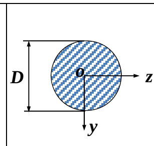
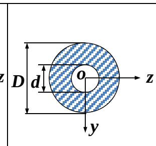
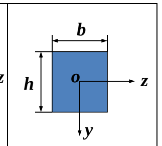
$$I_{z_2} = I_{z_1} + Aa^2$$

解：不正确。

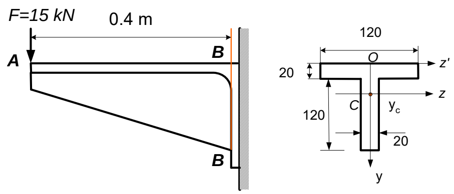
因为 z_1 不是形心轴



典型截面的惯性矩与抗弯截面系数 $(\alpha = d/D)$

截面			
I_z	$\frac{\pi D^4}{64}$	$\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)$	$\frac{1}{12}bh^3$
W_z	$\frac{\pi D^3}{32}$	$\frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)$	$\frac{1}{6}bh^2$

例2　求截面 *B-B* 上的最大拉/压应力



特点：非等截面，非恒定弯矩

步骤1: 求解 *B-B* 截面上的弯曲内力:

弯矩: $M_B = F \times L = 6000\ Nm$

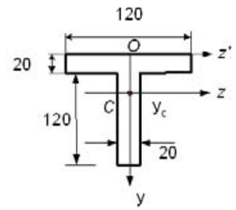
~~剪力: $F_S = 15\ kN$~~

步骤2: 建立临时坐标系，确定截面*B-B*的形心和中性轴 *z* 的位置 (Y_c)

$$Y_c = \frac{\int_A ydA}{A} = \frac{\int_{A_1} ydA_1 + \int_{A_2} ydA_2}{A_1 + A_2} = 0.045\ \mathrm{m}$$

步骤3: 计算截面对中性轴 *z* 的惯性矩

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA_1 + \int_{A_2} y^2 dA_2 = 8.84\times10^{-6}\ \mathrm{m^4}$$



步骤4: 依据公式，计算最大拉/压应力

$$\sigma_{T/C\max} = \frac{M_B y_{\pm\max}}{I_z} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_{T\max} = 30.5MPa \\ \sigma_{C\max} = 64.5MPa \end{matrix}$$

作业

11-6

11-8

11-9