

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

例: 一长为300mm的钢直尺, 横截面尺寸为20mm×1mm, 钢的许用应力为 $[\sigma]=196\text{MPa}$

第八章学过轴向拉压杆件强度条件:  $\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$

按强度条件计算钢尺能承受的轴向压力为:

$[F] = A[\sigma] = 3920\text{ N} = 400\text{ kgf}$

**实际上..... <40N, 相差100多倍!!**

构件丧失承载能力, 并非因强度不够, 而是因不能保持原有直线平衡状态

构件丧失原有平衡状态的现象——失稳,

构件在外力作用下保持原有平衡形式的能力——稳定性

工程力学 第十五章 压杆稳定问题



1907年8月29日，加拿大  
大圣劳伦斯河上的魁北克桥  
修建中的事故



自重过大而桥身压溃  
75人死亡

<http://www.baik.com/wiki/魁北克桥>

工程力学 第十五章 压杆稳定问题



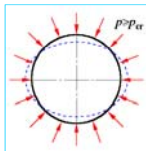



南京电视台脚手架失稳

[http://www.czjt.gov.cn/sofpro/cms/previewjspfile/ajc/cms\\_000000000000000070\\_tpl.jsp?requestCode=1029&CategoryID=422](http://www.czjt.gov.cn/sofpro/cms/previewjspfile/ajc/cms_000000000000000070_tpl.jsp?requestCode=1029&CategoryID=422)南京“2000.10.25”重大伤亡事故调查报告


工程力学 第十五章 压杆稳定问题

### 薄壁件稳定性

### 飞行器气动弹性稳定性

左侧为风速低于颤振速度  
——结构稳定；  
右侧为风速等于颤振速度  
——结构振动发散。



30年代英国蛾式歼击机连续发生9次在大速度时空中解体事故。  
40年代，英国台风歼击机在3年间发生20起空中解体事故。

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

## 第十五章 压杆稳定问题

- § 15-1 稳定性的概念
- § 15-2 临界载荷的欧拉公式
- § 15-3 中、小柔度杆的临界应力
- § 15-4 压杆稳定条件与合理设计

## § 15-1 稳定性的概念

稳定性?

构件在外力作用下保持原有平衡形式的能力

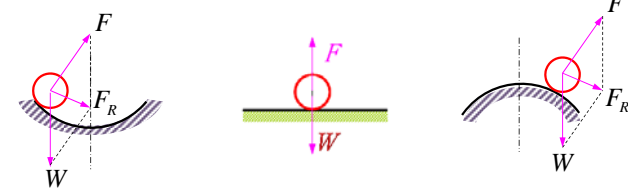
关键词一：平衡形式

关键词二：外力作用

9

## • 刚体、变形体的平衡

## (1) 刚性面上，刚性球受微干扰

a. 合力  $F_R$  指向平衡位置b.  $F_R$  为 0c.  $F_R$  偏离平衡位置

稳定平衡

临界(随遇)平衡

不稳定平衡

咬定青山不放松 任尔东南西北风

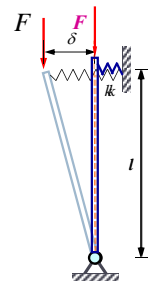
10<sup>0</sup>

## (2) 刚杆—弹簧系统受微干扰

a.  $T_{pl} < T_{hf} \Rightarrow F\delta < k\delta l \Rightarrow F < kl$   
稳定平衡

b.  $T_{pl} = T_{hf} \Rightarrow F\delta = \delta l \Rightarrow F = kl$   
临界(随遇)平衡

c.  $T_{pl} > T_{hf} \Rightarrow F\delta > k\delta l \Rightarrow F > kl$   
不稳定平衡

 $F_{cr} = kl$  临界载荷 $T_{qd} = F\delta$  驱动力矩 $T_{hf} = k\delta l$  恢复力矩

外加压力的大小是影响构件稳定性的一个控制因素

11

## (3) 受压弹性杆受微干扰

 $F < F_{cr}$  稳定平衡

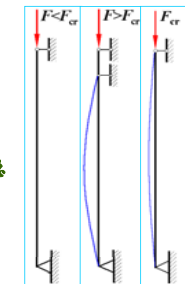
压杆在微弯位置不能平衡, 要恢复直线

 $F > F_{cr}$  不稳定平衡

压杆在微弯位置不能平衡, 要继续弯曲, 导致失稳

 $F = F_{cr}$  临界状态

压杆在任意微弯位置均可保持平衡

临界载荷 —  $F_{cr}$ : 压杆直线形式的平衡由稳定转变为不稳定时的轴向压力值。压杆稳定性  $\longrightarrow$  受压杆件保持初始直线平衡状态的能力

12

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

**第十五章 压杆稳定问题**

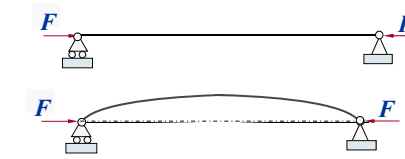
- § 15-1 稳定性的概念
- Q1** 如何确定压杆的失稳临界载荷
- § 15-2 临界载荷的欧拉公式
- Q2** 哪些因素会影响压杆的失稳临界载荷
- § 15-3 中、小柔度杆的临界应力
- Q3** 如何利用失稳临界载荷进行压杆合理设计
- § 15-4 压杆稳定条件与合理设计

13

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

**§ 15-2 临界载荷的欧拉公式**

• 两端铰支细长压杆的临界载荷



画出偏离直线平衡位置后的变形图

建立x坐标处梁段的平衡方程

建立平衡微分方程

$$M(x) = -Fw$$


$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

14

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{F}{EI} w \quad \frac{F}{EI} = k^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

通解可以写成:  $w = A \sin kx + B \cos kx$



位移边界条件:

$$x=0, w=0 \rightarrow B=0$$

$$x=l, w=0 \rightarrow A \sin kl = 0$$

存在非零解的唯一条件:  $\sin kl = 0$

15

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

$$\sin kl = 0 \rightarrow kl = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{l}$$

$$\frac{F}{EI} = k^2$$

$$\Rightarrow F = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$n=1$ , 得到存在非零解的最小的压力:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

临界载荷的欧拉公式(欧拉临界载荷)

——与截面抗弯刚度成正比, 与杆长的平方成反比。

16

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

穆申布洛克 (Musschenbroek P van, 1692-1761) 荷兰物理学教授

莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783) 瑞士数学家、自然科学家

约瑟夫·拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813), 法国著名数学家、物理学家

1729: 通过木杆的受压实验, 得出“压曲载荷与杆长的平方成反比的重要结论”

1744: 微分法专著中, 得到细长压杆失稳后弹性曲线的精确描述及压曲载荷的计算公式

1757: 《关于柱的承载能力》的论著纠正了在1744年专著中关于矩形截面抗弯刚度计算中的错误

1770左右: 在欧拉近似微分方程的基础上, 得到大家熟知的两端铰支压杆压曲载荷公式

17

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

例: 一长为300mm的钢直尺, 横截面尺寸为20mm×1mm, 钢的许用应力为 $[\sigma]=196\text{MPa}$ ,  $E=210\text{GPa}$

第八章学过轴向拉压杆件强度条件:  $\sigma_{\max} = \left( \frac{F_N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma]$

按强度条件计算钢尺能承受的轴向压力为:

$[F] = A[\sigma] = 3920\text{ N} = 400\text{ kgf}$  相差100倍!!

欧拉临界载荷  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 38\text{ N}$

18

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

三根不同长度的钢直尺 (300mm, 200mm, 100mm) 立在沙地上, 展示其失稳现象。

一座桥梁的局部特写, 显示其结构在荷载作用下的失稳。

19

COMING SOON.....

为什么不能承受强度条件确定的压缩载荷? 丧失原有平衡形式——失稳

为什么构件会丧失原有平衡状态? 稳定平衡 & 不稳定平衡

除压杆稳定外, 还有什么形式的稳定性问题? 静力学、动力学 利用稳定性

压杆什么时候从稳定平衡转为不稳定平衡? 细长压杆欧拉公式

20

➤ 欧拉公式的适用范围:

- ➔ 理想均质材料, 细长
- ➔ 线弹性
- ➔ 小挠度 (小变形)
- ➔ 压力沿杆件轴线

$$\left. \begin{array}{l} \text{理想均质材料, 细长} \\ \text{线弹性} \\ \text{小挠度 (小变形)} \end{array} \right\} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$



思考:

1. 如果支座为球形铰支座, 杆件的失稳形式及  $F_{cr}$  有何变化?

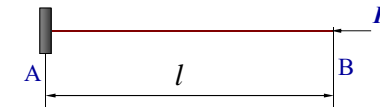
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (I = I_{\min}) \quad \text{—— } I \text{ 取压杆横截面的最小惯性矩}$$

21

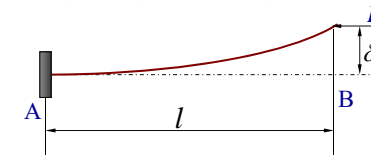
思考:

2 两端非铰支细长压杆的临界载荷

一、一端固支一端自由细长压杆的临界载荷



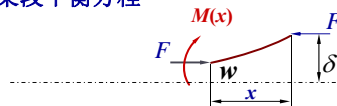
偏离直线平衡位置后的状态



22

解析法

建立梁段平衡方程



$$M(x) = F(\delta - w)$$

挠曲轴近似微分方程:

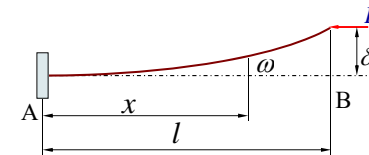
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{F}{EI} (\delta - w)$$

23

$$\text{令 } k^2 = \frac{F}{EI} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = k^2 \delta$$

满足方程的解为:  $w = A \sin kx + B \cos kx + \delta$



$$x = 0, w = 0, \quad \Rightarrow \quad B = -\delta$$

边界条件:  $x = 0, \theta = \frac{dw}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad Ak = 0$

$$x = l, w = \delta \quad \Rightarrow \quad A \sin kl + B \cos kl + \delta = \delta$$

24



工程力学 第十五章 压杆稳定问题

$\cos kl = 0$

$$\left. \begin{aligned} kl &= \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (n=1,2,\dots) \\ k^2 &= \frac{F}{EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 EI}{(2l)^2}$$

取  $n=1$ , 得:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$

25

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

类比法

观察: 受力与变形与两端铰支压杆左半部分相同

类比: 一端固支一端自由长  $l$  的压杆的临界载荷等于长  $2l$  的对应铰支压杆的临界载荷。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad \text{与解析法结果相同}$$

26

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

欧拉公式的一般表达式:

$$\begin{aligned} F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{l^2} & \mu &= 1 \\ F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} & \mu &= 2 \\ F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{(l/2)^2} & \mu &= \frac{1}{2} \\ F_{cr} &= \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} & \mu &= 0.7 \end{aligned}$$

欧拉公式可以写成统一形式:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

$\mu l$  ——相当长度: 相当的两端铰支压杆的长度  
 $\mu$  ——长度因数: 支持方式对临界载荷的影响

27

工程力学 第十五章 压杆稳定问题

§ 15-3 中、小柔度杆的临界应力

欧拉公式一般表达式  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

- 理想均质材料, 细长
- 线弹性
- 小挠度(小变形)
- 压力沿杆件轴线

28

## 一、临界应力与柔度

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \cdot \frac{I}{A}$$

$\mu l$ ——反映约束条件，与杆长度、约束条件有关，与材料性质无关

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{——截面的惯性半径，只与截面形状相关}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad \text{——压杆的柔度或长细比，无量纲量}$$

$\lambda$ 综合反映了压杆长度 $l$ ，支撑方式 $\mu$ 与截面几何性质 $i$ 对临界应力的影响。

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

29

## 二、Euler公式的适用范围

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

$$\text{令 } \lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

→ Euler公式的适用条件： $\lambda \geq \lambda_p$

$\lambda_p$ ——材料常数，仅与材料的弹性模量 $E$ 及比例极限 $\sigma_p$ 有关

$\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆，称为大柔度杆

如何处理 $\lambda \leq \lambda_p$ 即 $\sigma_p < \sigma < \sigma_s$ 和 $\sigma > \sigma_s$ 时的压杆失稳问题？

30

## 三、(非弹性稳定问题) 临界应力的经验公式

(1)  $\sigma_p < \sigma_{cr} < \sigma_s$  → 中柔度杆

(2)  $\sigma_{cr} \geq \sigma_s$  → 小柔度杆（短粗杆，不屈曲，只屈服）

经验公式：

(I) 直线公式（合金钢、铝合金、铸铁与松木等）

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda \quad (a > 0, b > 0 \text{ 材料常数，查表})$$

$$\lambda \text{ 下限} \quad \sigma_s = a - b\lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{a - \sigma_s}{b}$$

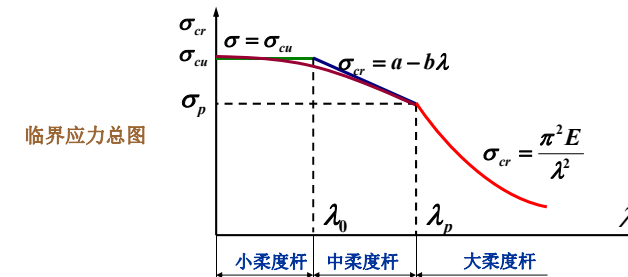
$$\lambda \text{ 上限} \quad \lambda_p = \pi \sqrt{E/\sigma_p} \quad \text{中柔度杆直线公式适用范围} \quad (\lambda_0, \lambda_p)$$

(II) 抛物线公式（结构钢、低合金钢等）

$$\sigma_{cr} = a_1 - b_1 \lambda^2 \quad 0 < \lambda < \lambda_p \quad \text{中小柔度杆通用公式}$$

31

$\lambda$	$\lambda \leq \lambda_0$	$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_p$	$\lambda \geq \lambda_p$
压杆类型	小柔度杆	中柔度杆	大柔度杆
$\sigma_{cr}$	$\sigma_{cr} = \sigma_s$	$\sigma_{cr} = a - b\lambda$	$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
$\sigma_{cr}$ 范围	$\sigma_{cr} = \sigma_s$	$\sigma_p \leq \sigma_{cr} \leq \sigma_s$	$\sigma_{cr} \leq \sigma_p$



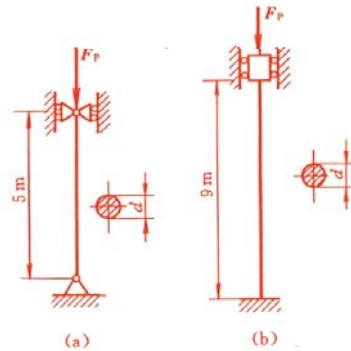
32



## 例 题 1

1. Q235钢, 圆截面且直径相同, 分析哪一根压杆的临界载荷比较大;

2. 已知:  
 $d=160\text{ mm}$ 、  
 $E=206\text{ GPa}$ , 求:  
 二杆的临界载荷



33

1. 分析: 哪一根压杆的临界载荷比较大:

$$F_{Pcr} = \sigma_{cr} A,$$

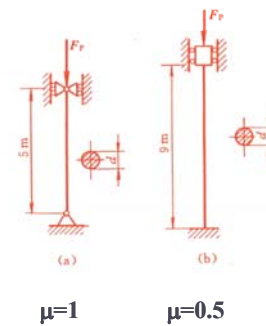
首先计算柔度,

$$\lambda = \mu l / i,$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 64}{\pi d^2 / 4}} = \frac{d}{4}$$

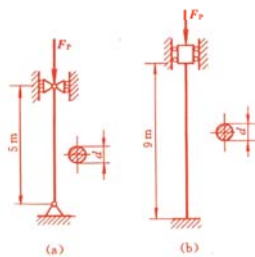
$$\lambda_a = 20/d, \quad \lambda_b = 18/d.$$

$$F_{Pcr(a)} < F_{Pcr(b)}$$



34

2. 已知:  $d=160\text{ mm}$ ,  
 Q235钢( $\lambda_p=132$ ),  $E=206\text{ GPa}$ ,  
 求: 二杆的临界载荷.



$$\lambda_a = 20/d = 20/0.16 = 125,$$

$$\lambda_b = 18/d = 18/0.16 = 112.5$$

$$\text{Q235钢 } \lambda_p = 132$$

二者都属于中小柔度杆,  $\sigma_{cr}$  采用抛物线或直线公式。

35

## § 15-4 压杆稳定条件与合理设计

## 一、稳定条件

$$F \leq \frac{F_{cr}}{n_{st}} = [F_{st}] \quad \sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = [\sigma_{st}]$$

$[F_{st}]$ : 稳定许用压力       $[\sigma_{st}]$ : 稳定许用应力

$n_{st}$ : 稳定安全因数

选择稳定安全因数时, 除了遵循确定强度安全因数的一般原则外, 还应考虑加载偏心与压杆初曲等因素。

一般情况下: 稳定安全因数 > 强度安全因数

36

## 二、压杆的合理设计

合理设计的核心：提高压杆抗失稳的能力

合理设计的依据： $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \mu l \sqrt{\frac{A}{I}}$   $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$   $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ 

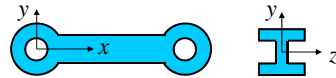
## 1. 合理截面形状

失稳方向确定时：

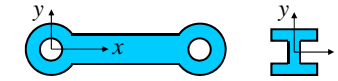
截面面积一定时  
 $\lambda \downarrow \rightarrow i \uparrow$  或  $I \uparrow$ 

失稳方向确定时：

等稳定设计：



37

xy面,  $\mu_1 = 1, l, i_1 \rightarrow \sigma_{cr1} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2}$ 

||

xz面,  $\mu_2 = 0.7, l, i_2 \rightarrow \sigma_{cr2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_2^2}$  $\lambda_1 = \lambda_2$  $I_z / I_y \approx 2$ 

38

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \mu l \sqrt{\frac{A}{I}}$$

## 2. 合理选择材料：

- 大柔度压杆：E 较高的材料， $\sigma_{cr}$  也高，各种钢材（或各种铝合金）的 E 基本相同
- 中柔度压杆：强度较高的材料， $\sigma_{cr}$  也高
- 小柔度压杆：按强度要求选择材料

3. 合理安排压杆约束与杆长： $\mu l \downarrow$ 

## 4. 不计局部削弱。

- ☞ 压杆的稳定取决于整个杆件的弯曲刚度
- ☞ 对于局部削弱的横截面，应进行强度校核

39

作业

15-4, 15-8

40