

Lattice QCD: Large-Momentum Effective Theory

李梓瑞

2025 年 6 月 16 日

目录

1	Introduction	2
2	什么是格点 QCD[1]	2
2.1	QCD 简介	2
2.2	QCD 的理论	3
2.3	微扰 QCD	3
2.4	非微扰方法-格点 QCD[2]	4
3	大动量有效理论 [3]	5
3.1	简要介绍	5
3.2	实际例子: 计算 Pi 介子质量	6
3.3	未来展望	8

1 Introduction

高能物理领域中, 理解基本粒子之间的相互作用是核心目标. 量子色动力学作为描述强相互作用的理论基石, 成功地解释了夸克和胶子如何构成质子、中子等强子. 然而, 由于 QCD 在低能区域存在非微扰特性, 传统的微扰理论难以精确求解. 格点 QCD 应运而生, 它通过将时空离散化, 将连续的 QCD 理论转化为离散的格点模型, 从而利用数值计算方法处理非微扰问题. 大动量有效理论则进一步在格点 QCD 框架下, 在特定情形下针对特定物理量的计算提出了有效的策略, 为理论与实验的紧密结合提供了重要支撑.

2 什么是格点 QCD[1]

2.1 QCD 简介

量子色动力学 (英语:Quantum Chromodynamics, 简称 QCD) 是一个描述夸克、胶子之间强相互作用的标准动力学理论, 它是粒子物理标准模型的一个基本组成部分. 夸克是构成重子 (质子、中子等) 以及介子 (π , K 等) 的基本单元, 而胶子则传递夸克之间的相互作用, 使它们相互结合, 形成各种核子和介子, 或者使它们相互分离, 发生衰变等. 多年来量子色动力学已经收集了庞大的实验证据.

量子色动力学是非阿贝尔规范场论 (即杨米尔斯规范场论) 的一个成功运用, 它所对应是非阿贝尔规范群的 $SU(3)$ 群, 群量子数被称为”颜色”或者”色荷”. 每一种夸克有三种颜色, 对应着 $SU(3)$ 群的基本表示. 胶子是强作用力的传播者, 有八种, 对应着 $SU(3)$ 群的伴随表示. 这个理论的动力学完全由它的 $SU(3)$ 规范对称群决定.

量子色动力学享有 2 种特有的属性:

1. 禁闭, 这意味着当它们被分开时, 夸克之间的力并不降低. 因此, 当你试图分开两个夸克时, 在胶子场中的能量足够产生一个夸克对. 所以

夸克永远是以强子的方式束缚在一起, 如形成质子和中子或 π 介子或 K 介子. 虽然在解析上还未获得证明, 但夸克禁闭被广泛地接受, 因为它解释了为何寻找自由夸克一直失败, 而这在格点量子色动力学中很容易展示出来.

2. 渐近自由, 这意味着在非常高的能量反应中, 夸克和胶子之间非常微弱的相互作用创造了夸克-胶子等离子体. 量子色动力学的这一预测, 在 1970 年代初由大卫·波利泽和弗兰克·维尔切克和大卫·格罗斯首次发现. 因为这项工作, 他们被授予 2004 年诺贝尔物理学奖.

没有已知的相变线分开这两种属性, 分界大约在 1 GeV 左右; 禁闭是在低能量尺度中占主导地位, 但是, 随着能量的增加, 渐近自由成为主导.

2.2 QCD 的理论

理论上, 量子色动力学通过色荷定义局部对称性的 $SU(3)$ 规范群的杨-米尔斯理论.

拉氏密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_i - g_s A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (1)$$

其中 γ^μ 是狄拉克矩阵, ψ_i 是夸克场 (下标 ij 表示不同的味), $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$, $D_\mu = \partial_\mu + ig_s T^a A_\mu^a$ 是协变微分, g_s 是 $SU(3)$ 耦合常数, T^a 是 $SU(3)$ 的生成元盖尔曼矩阵, A_μ^a 是胶子场, $F_{\mu\nu}^a$ 是规范胶子场张量 QCD 的基本参数是耦合常数 g_s 或 $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ 和夸克的质量 m_q .

2.3 微扰 QCD

在反应过程有一个大的能标的时候, 量子色动力学耦合常数 α_s 小于 1, 可以将反应截面展开为 α_s 的幂级数, 这种处理量子色动力学的方法叫做微扰量子色动力学.

微扰量子色动力学首先被应用到轻子强子深度非弹性散射, 计算轻子部分子散射过程的高阶修正, 成功解释了比约肯无标度性 (Bjorken Scaling) 因为能标的变化导致的微小破坏. 这坚定了物理学家的信心, 相信量子色动力学是描述强相互作用的正确理论. 70 到 80 年代微扰量子色动力学推广到其他各种高能反应过程, 如强子强子对撞产生双轻子过程, 以及强子强子对撞产生大横动量强子的过程, 所得结果与实验在许多个数量级的层次上是符合的.

理论方面, 微扰量子色动力学也有许多新的成果. 为处理高阶修正 α_s^n 产生的发散 (也就是高阶修正在某些情况下趋近于无穷大), 人们发展了 QCD 因子化定理, 将发散吸收到普适的部分子分布函数或者部分子碎裂函数中.

2.4 非微扰方法-格点 QCD[2]

格点 QCD (Lattice QCD) 是基于量子色动力学 (QCD) 发展而来的非微扰计算方法. QCD 作为描述夸克与胶子间强相互作用的基础理论, 在低能区呈现非微扰特性, 难以用传统微扰理论求解. 格点 QCD 通过将连续的时空离散化为格点, 把 QCD 理论转化为可数值计算的模型, 在欧几里得空间中运用路径积分表示进行计算, 格点间距提供紫外截断, 格点总体积提供红外截断, 以此处理理论中的无穷大问题.

在具体方法上, 格点 QCD 通过对夸克、胶子等场在格点上的各种组态求和来计算物理量. 它采用因子化方法分离顶角和强子内部贡献, 并结合 twist-expansion 等技术, 最终获取与光锥分布振幅等相关的物理结果, 将抽象的理论问题转化为可操作的数值计算过程.

格点 QCD 在高能物理研究中应用广泛. 它能够精确计算强子的质量和能谱, 为理解强子内部结构提供关键数据; 还可通过改变温度、化学势等参数, 模拟探索 QCD 物质在不同条件下的相结构, 如夸克 - 胶子等离子体相和强子相之间的相变, 对研究早期宇宙演化和高能重离子碰撞实验中的物

理过程意义重大.

3 大动量有效理论 [3]

3.1 简要介绍

大动量有效理论 (Large-Momentum Effective Theory, LaMET) 是一种从量子色动力学 (QCD) 基础理论出发计算强子部分子结构的系统理论框架. 其核心思想是利用洛伦兹对称性, 将传统光前量子化中依赖时间演化的部分子算符, 等价转换为大动量强子态下的时间无关算符, 从而通过中等 Boost 因子 (2-5) 下的强子性质提取部分子物理量 (如部分子分布函数 PDF、广义 PDF 等). 这一理论突破了传统方法中光前量子化的技术瓶颈, 为格点 QCD 模拟直接计算部分子可观测量提供了桥梁.

LaMET 的理论基础建立在有效场论 (EFT) 的匹配与跑动机制上. 具体而言, 通过构造“准部分子可观测量”(如准 PDF), 这些量在大动量强子态下的矩阵元可通过格点 QCD 计算, 随后通过微扰论匹配到标准光前定义的部分子物理量. 例如, 准 PDF 与标准 PDF 的关系可表示为因子分解形式:

$$\tilde{q}(y, P^z, \mu) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|} C\left(\frac{y}{x}, \frac{\mu}{xP^z}\right) q(x, \mu) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{(yP^z)^2}\right) \quad (2)$$

其中 C 为微扰匹配系数, 压制项由强相互作用标度 Λ_{QCD} 和强子动量 P^z 决定. 理论还需处理非局域威尔逊线算符的重整化, 解决紫外发散与快度发散等问题.

在技术实现上, LaMET 依赖三大关键步骤:

1. 算符重整化: 非局域算符 (如含威尔逊线的夸克 / 胶子算符) 需通过 RI/MOM 方案、威尔逊线质量减法等方法进行非微扰重整化, 确保格点结果的物理有效性.
2. 动量空间因子分解: 通过证明准可观测量与标准部分子量的 collinear

发散等价性, 建立严格的微扰匹配关系, 如准 TMD 与物理 TMD 需通过软函数 $S(b_\perp, \mu)$ 消除快速发散.

3. 格点计算优化: 利用动量涂抹技术生成大动量强子态, 结合多态拟合抑制激发态污染, 目前已实现质子 / 介子非单态 PDF、胶子螺旋度 ΔG 等物理量的格点计算, 结果与实验拟合 (如 CT18、NNPDF) 初步吻合.

LaMET 的应用覆盖强子结构的核心问题: 从质子自旋分解 (如夸克自旋贡献 $\Delta \Sigma$ 、胶子螺旋度 ΔG) 到三维部分子分布 (TMD、GPD), 再到光前波函数的非微扰提取.

大动量有效理论的核心思想就是考虑高能粒子在相对论条件下动量近似全部分布在 p_z 方向上. 在实际操作中, 我们可以把粒子的物理量表示为 (p_z, p_+, p_-) 的函数, 然后对纵向动量 (p_+, p_-) 做微扰展开, 得到欧几里得空间中高能粒子的物理量, 并且可以直接投影到真实世界中.

3.2 实际例子: 计算 Pi 介子质量

实际计算光锥分布振幅进而计算其他物理量, 基本操作如下:

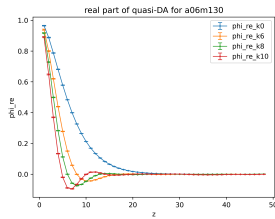
1. 格点产生关联函数: 在格点 QCD 模拟中, 首先通过数值计算产生关联函数. 关联函数描述了不同时空点上场算符之间的相关性, 它包含了系统的重要物理信息. 例如, 对于介子质量的计算, 需要构造与介子相关的场算符 $\mathcal{O}(x)$ $\mathcal{O}(y)$, 并计算它们在格点上的关联函数 $C(x, y) = \langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}^\dagger(y) | 0 \rangle$.
2. 关联函数到 Quasi - matrix element (LSZ reduction formula): 利用 LSZ 约化公式, 将格点上得到的关联函数转换为 Quasi - matrix element (准矩阵元), 从中我们可以提取质量以及粒子激发态等信息.

3. Quasi - ME 非微扰重整化: 由于格点计算中存在各种截断效应, 准矩阵元需要进行非微扰重整化. 重整化的目的是消除由于格点间距、格点体积等因素引入的无穷大项, 并使物理量具有可预测性和与实验对比的意义. 通过合适的重整化方案, 可以得到重整化后的准矩阵元.
4. renormalized Quasi - ME 傅里叶变换: 对重整化后的准矩阵元进行傅里叶变换, 得到在动量空间中的表示 $\tilde{\phi}$. 傅里叶变换将时空域的信息转换到动量域, 更便于分析物理量的动量依赖性. 即 $\tilde{\phi}(p) = \int d^4x e^{-ip \cdot x} \langle p | \mathcal{O}_R(x) | 0 \rangle$.
5. 反解积分: 通过反解积分方程, 从 $\tilde{\phi}$ 中提取出与物理量相关的函数 $\phi(y)$. 这里的积分核 $C(x, y)$ 与格点模型的具体性质有关, 通过求解积分方程可以得到在不同位置 y 处的 $\phi(y)$.
6. 物理外推: 最后, 为了得到连续时空下的物理结果, 需要将格点间距 a 外推到 0. 这是因为格点间距的存在是一种人为的离散化近似, 只有当 $a \rightarrow 0$ 时, 才能恢复到连续时空的 QCD 理论. 通过对不同格点间距下的计算结果进行外推, 可以得到连续极限下的物理量, 如介子的质量等.

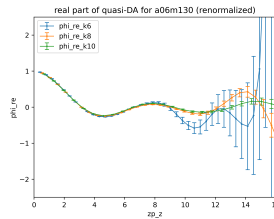
利用代码, 我们可以实现如下操作得到 quasi-DA:

$$\tilde{\phi}(z, P_z) = \frac{C_2(z, t, P_z)}{C(z=0, t, P_z)} = \frac{H_0(1 + C(z)e^{-dE \cdot t})}{1 + C(0)e^{-dE \cdot t}} \quad (3)$$

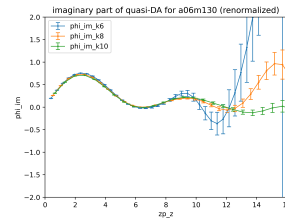
结果如下图.



(a) quasi-DA (real)



(b) renormalized quasi-DA (real)



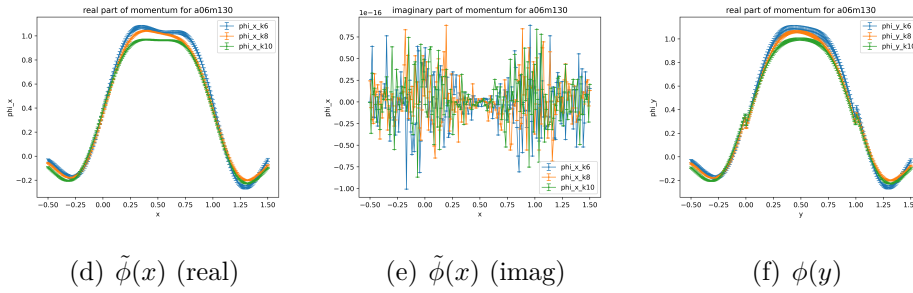
(c) renormalized quasi-DA (imag)

之后再分别做傅里叶变换到动量空间和做 matching kernel 的积分变换:

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ix\lambda} \tilde{\phi}(\lambda = zP_z) \quad (4)$$

$$\phi(y) = \int dx C^{-1}(x, y) \tilde{\phi}(x) + \cdots = \tilde{\phi}(x) - \int dx C_p(x, y) \tilde{\phi}(x) + \cdots \quad (5)$$

结果如下图.



其中, 通过关联函数, 我们可以直接拟合提取质量:

$$C_2 = A_0 e^{-mt} (1 + A'_1 e^{-\Delta E_1 t} + \cdots) \quad (6)$$

拟合是要注意只取时间的中间部分拟合, 目的是为了去掉高能激发和统计噪声.

此外, 还有很多技术细节未涉及, 如重采样技术、不同的非微扰重整化方案等. 这些内容已经超出本报告计划涵盖的范围, 因此不做介绍.

3.3 未来展望

大动量有效理论 (LaMET) 是连接量子色动力学 (QCD) 与强子部分子结构的桥梁. 它利用洛伦兹对称性, 把高速运动质子 (Boost 因子 2-5) 的性质转化为可计算的部分子分布, 比如通过格点 QCD 算”准 PDF”, 再用微扰论匹配到标准 PDF, 解决了传统光前量子化的难题.

格点 QCD 未来会靠超算提升计算能力, 比如用更小晶格 (如 0.04 fm) 和更大体积模拟大动量质子 (动量 5 GeV). 同时优化重整化技术, 减少系统

误差, 精准计算质子自旋、胶子螺旋度等物理量, 为未来电子 - 离子对撞机 (EIC) 提供理论支持.

两者结合将揭开质子三维结构之谜.LaMET 指导格点算符设计, 格点数据验证理论模型, 共同破解质子自旋危机、部分子轨道角动量等问题, 推动强相互作用物理从” 拟合” 走向” 第一性原理计算”.

参考文献

- [1] Wikipedia. Quantum chromodynamics — wikipedia, the free encyclopedia, 2025. (Online; accessed 2025-06-16).
- [2] 刘川. 格点量子色动力学导论. 北京大学出版社, 2017.
- [3] Xiangdong Ji, Yizhuang Liu, Yu-Sheng Liu, Jian-Hui Zhang, and Yong Zhao. Large-momentum effective theory. *Rev. Mod. Phys.*, 93:035005, Aug 2021.