高代串讲例题

李梓瑞

2023 年 11 月 8 日

题目 1. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$, 求 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

解答.

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
=&[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})+[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4
\end{aligned}
$$

题目 2. 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 是几何向量, 证明:

$$
(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\alpha},\ (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\delta})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma} & \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\delta}\end{vmatrix}
$$

解答. 设 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{\gamma}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{\delta}=d_1\boldsymbol{i}+d_2\boldsymbol{j}+d_3\boldsymbol{k}$, 注意 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

(1) 先来证第一个等式

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= [(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}]\times(c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}) \\
&= [(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2]\,\boldsymbol{i}+[(a_1b_2-a_2b_1)c_1-(a_2b_3-a_3b_2)c_3]\,\boldsymbol{j} \\
&\quad +[(a_2b_3-a_3b_2)c_2-(a_3b_1-a_1b_3)c_1]\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右端} &= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}) \\
&= [(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_2c_2+b_3c_3)a_1]\,\boldsymbol{i}+[(a_1c_1+a_3c_3)b_2-(b_1c_1+b_3c_3)a_2]\,\boldsymbol{j} \\
&\quad +[(a_1c_1+a_2c_2)b_3-(b_1c_1+b_2c_2)a_3]\,\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

对比可知左端 = 右端.

(2) 证第二个等式

$$
\begin{aligned}
\text{左端} &= [(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}]\cdot \\
&\quad [(c_2d_3-c_3d_2)\boldsymbol{i}+(c_3d_1-c_1d_3)\boldsymbol{j}+(c_1d_2-c_2d_1)\boldsymbol{k}] \\
&= (a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右端} &= \begin{vmatrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3)-(a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3)(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3) \\
&= a_1c_1(b_2d_2+b_3d_3)+a_2c_2(b_1d_1+b_3d_3)+a_3c_3(b_1d_1+b_2d_2) \\
&\quad -a_1d_1(b_2c_2+b_3c_3)-a_2d_2(b_1c_1+b_3c_3)-a_3d_3(b_1c_1+b_2c_2)
\end{aligned}
$$

展开并对比左右端, 可知左端 = 右端.(建议学习 mathematica, 算死我了喵)

题目 3. 已知 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,1,-1)^T,\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$. 试将向量 $\beta=(1,2,1,1)^T$ 表示成这四个向量的线性组合.

解答. 列出 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$, 解方程组得 $x_1=\frac{5}{4},x_2=\frac{1}{2},x_3=-\frac{1}{4},x_4=-\frac{1}{4}$.

题目 4. 已知 $\beta = (1,3,2)^T, \alpha_1 = (1+k,1,1)^T, \alpha_2 = (1,1+k,1)^T, \alpha_3 = (1,1,1+k)^T$. 当 k 满足什么条件时,β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表出?

解答. 同上题, 不过最后会转化为考虑线性方程组解的情况的问题.

题目 5. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性相关, 而其中任意 $p-1$ 个向量组成的向量组都线性无关, 证明: 存在 p 个全不为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$, 使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=0$.

解答. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性相关, 可得存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_p$, 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=0$. 若 $k_1,k_2,\cdots,k_p$ 全都不为零, 即得证. 假设 $k_1,k_2,\cdots,k_p$ 中至少有一个为零, 不妨设 $k_1=0$, 则有不全为零的 $k_2,\cdots,k_p$, 使得 $k_2\alpha_2+\cdots+k_p\alpha_p=0$, 于是 $\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 线性相关, 而题中说其中任意 $p-1$ 个向量组成的向量组都线性无关, 矛盾. 故假设不成立,$k_1,k_2,\cdots,k_p$ 全都不为零.

题目 6. 求 $\alpha_1=(1,0,0), \alpha_2=(0,\cos\theta,-r\sin\theta), \alpha_3=(0,\sin\theta,-r\cos\theta)$ 的一个极大线性无关组.$r,\theta\in\mathbb{R}, r>0$.

解答. 取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 组成 3×3 的矩阵, 然后对其初等变换, 考察列（行）向量的线性相关性即可.

题目 7. 若两个向量组秩相同, 且其中一组可被另一组线性表出. 证明这两个向量组等价.

解答. 设这两个向量组分别为 S,T, 依题意得 $\mathrm{rank}S=\mathrm{rank}T$, 不妨设 S 可被 T 表出. 于是 $S\sqcup T$ 可由 T 线性表出,$\mathrm{rank}S\sqcup T=\mathrm{rank}T$, 从而

$\text{rank}S \sqcup T = \text{rank}S = \text{rank}T$. 考虑这三个向量组的极大线性无关组, 设 S_0 是 S 的极大线性无关组, 则 S_0 也是 $S \sqcup T$ 的极大线性无关组, 从而 T 可由 S_0 表出, 进而 T 可由 S 表出, 即得 S 与 T 等价.

题目 8. 已知 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上某非齐次线性方程组的线性无关解,$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{F}$. 求 $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$ 是方程组的解的充要条件.

解答. 设 $AX_i = B\,(\forall i = 1, 2, \cdots, k)$, 则

$$\begin{aligned}
&A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k)\\
=&A(\lambda_1 X_1) + A(\lambda_2 X_2) + \cdots + A(\lambda_k X_k)\\
=&\lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 + \cdots + \lambda_k AX_k\\
=&\lambda_1 B + \lambda_2 B + \cdots + \lambda_k B\\
=&(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)B
\end{aligned}$$

要使上式等于 B, 其充分必要条件就是 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$.

题目 9. 设向量组 S, T 的秩分别为 s, t. 求证:$\text{rank}S \sqcup T \leqslant s + t$.

解答. 取 S 的极大线性无关组 S_0,T 的极大线性无关组 T_0. 若 $S_0 \sqcup T_0$ 线性无关, 则 $\text{rank}S \sqcup T = \text{rank}S_0 \sqcup T_0 = s + t$. 同理, 若 $S_0 \sqcup T_0$ 线性相关, 则 $\text{rank}S \sqcup T = \text{rank}S_0 \sqcup T_0 < s + t$. 所以 $\text{rank}S \sqcup T \leqslant s + t$.

题目 10. 设向量组 $S = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s]$ 线性无关, 并且可以由向量组 $T = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t]$ 线性表出. 则

(1) 向量组 T 与 $S \sqcup T$ 等价

(2) 将 S 扩充为 $S \sqcup T$ 的极大线性无关组 $T_1 = \left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \beta_{i_{s+2}}, \cdots, \beta_{i_{s+k}}\right]$, 则 T_1 与 T 等价, 且 $s+k \leqslant t$.

(3)(Steinitz 替换定理) 可以用向量组 S 替换向量组 T 中某 s 个向量 $\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_s}$, 使得到的向量组 $T_2 = \left[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_{i_{s+1}}, \beta_{i_{s+2}}, \cdots, \beta_{i_t}\right]$ 与 T 等价.

解答. (1)T 与 $S \sqcup T$ 可互相线性表出.

(2) 由题意得 $S \leqslant T_1$,T_1 与 $S \sqcup T$ 等价, 从而 T_1 与 T 等价.$s+k = \operatorname{rank} T_1 = \operatorname{rank} T \leqslant t$.

(3) 将 T_1 补至 $s+k=t$? 利用数学归纳法逐个替换.

证明: 我们对 R 作数学归纳法.$r=1$ 时,$\{\alpha_1\}$ 线性无关. 这时 $r=1 \leqslant s$.α_1 可由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 设为 $\alpha_1 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_t\beta_t$. 由 $\alpha_1 \neq 0$, 至少一个 $b_j \neq 0$. 不妨设为 $b_1 \neq 0$, 则 $\beta_1 = \frac{1}{b_1}\alpha_1 - \frac{b_2}{b_1}\beta_2 - \cdots - \frac{b_t}{b_1}\beta_t$. 由此易知 $\{\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 等价. 现设 $r > 1$, 且定理对 $r-1$ 的情形已成立. 我们来讨论 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 r 个线性无关向量的情形. 这时 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 也线性无关, 且能由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出. 由归纳假设 $r-1 \leqslant s$ 且存在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 中 $r-1$ 个向量, 不妨设为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{r-1}$, 在用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 替代后, 所得的向量组 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \cdots, \beta_t\}$ 与 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$ 等价. 又 α_r 能由 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 线性表出, 就能由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \cdots, \beta_t$ 表出, 可以设

$$\alpha_r = \sum_{i=1}^{r-1} a_i\alpha_i + \sum_{j=r}^{t} b_j\beta_j$$

若所有 $b_j = 0$, 则 α_r 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{r-1}$ 表出, 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关矛盾. 故 b_j 不全为零. 不妨设 $b_r \neq 0$, 则

$$\beta_r = \frac{1}{b_r}\alpha_r - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{a_i}{b_r}\alpha_i - \sum_{j=r+1}^{t} \frac{b_j}{b_r}\beta_j$$

由此易知 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_t\}$ 与 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta_r,\cdots,\beta_t\}$ 等价, 也就与 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$ 等价. 于是,$T_2=\left[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_{i_{s+1}},\beta_{i_{s+2}},\cdots,\beta_{i_t}\right]$ 与 T 等价.

题目 11. 设 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 中的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_n$ 线性无关, 对复数 λ 的不同值, 求向量组 $[\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1]$ 的秩

解答. 法一:

考虑映射 $\sigma([\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n])=[\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1]$. 可以验证这个映射是同态映射, 现在考察 σ 成为同构映射的条件. 这需要保证像空间的零向量和原空间的零向量对应.

法二 (重点!):

将 $M=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 作为一组基, 则 $\alpha_1+\lambda\alpha_2,\alpha_2+\lambda\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\lambda\alpha_n,\alpha_n+\lambda\alpha_1$ 在此表象下的坐标为 (这其实就是一个同构映射)$\alpha_1+\lambda\alpha_2=(1,\lambda,0,\cdots,0)_M$, $\cdots$, $\alpha_n+\lambda\alpha_1=(\lambda,0,\cdots,0,1)_M$. 之后按照步骤求解线性无关性就可以了.

答案:

$$\text{rank}=\begin{cases}n-1, & \lambda^n=(-1)^n\\ n, & \lambda^n\neq(-1)^n\end{cases}$$

题目 12. 将 $\mathbb{C}$ 看成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. 求 ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}$ 上 2 维向量空间 $\mathbb{R}^2$ 之间的同构映射 σ, 将 $1+i,1-i$ 分别映到 $(1,0),(0,1)$.

解答. $\sigma(1+i)=(1,0),\sigma(1-i)=(0,1)$. 利用同构变换的性质, $\sigma(1)=\frac{1}{2}\left[\sigma(1+i)+\sigma(1-i)\right],\sigma(i)=\frac{1}{2}\left[\sigma(1+i)-\sigma(1-i)\right]$, 于是,$\sigma(a+bi)=a\sigma(1)+b\sigma(i)=(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2})$.

题目 12 的注记. 可以取 ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 的一组基 $1,i$. 定义同构映射 $\sigma:{}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, 则 $\sigma(a+bi)=(a,b)$.

题目 13. 设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 的全体组成的集合, 定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 及任意数列与任意复数的乘法 $\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$ 之后成为 $\mathbb{C}$ 上线性空间.

(1) 证明 V 中满足条件 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,(\forall n \geqslant 3)$ 的全体数列 $\{a_n\}$ 组成 V 的子空间 W, 并求 W 的维数.

(2) 对任意 $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^2$, 定义 $\sigma(a_1, a_2) = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \in W$. 证明:$\sigma$ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射.

(3) 证明 W 中存在一组由等比数列组成的基 M.

(4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1 = F_2 = 1$ 且 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. 求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标, 并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式.

解答. (1) 斐波那契数列, 通项公式为

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n c_2 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

其中 c_1, c_2 由 a_1, a_2 确定. 可以验证 $\{a_n\} + \{b_n\} \in W, \lambda\{a_n\} \in W$. 维数是 2.

(2) 一一对应, 且

$$\begin{aligned}
\sigma(a_1, a_2) + \sigma(b_1, b_2) &= (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) + (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots) \\
&= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n, \cdots) \\
&= \sigma(a_1 + b_1, a_2 + b_2)
\end{aligned}$$

$$\lambda\sigma(a_1, a_2) = \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n, \cdots) = \sigma(\lambda a_1, \lambda a_2)$$

(3) 由通项公式可以直接得到.$M = \{\alpha_1, \alpha_2\}$

(4) 列出条件

$$\begin{cases}
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) c_2 = 1 \\
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 c_2 = 1
\end{cases}$$

解得 $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, 通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

于是 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标为 $(c_1,c_2)=(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$.

题目 14. 设 $\mathbb{R}_+$ 是所有的正实数组成的集合, 对任意 $a,b\in\mathbb{R}_+$, 定义加法 $a\oplus b=ab$; 对任意 $a\in\mathbb{R}_+$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义数乘 $\lambda\odot a=a^\lambda$. 求证:

(1) $\mathbb{R}_+$ 按上述定义的加法和数乘成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

(2) $\mathbb{R}$ 按通常方式定义加法和乘法看成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 证明通常的这个线性空间 $\mathbb{R}$ 与按上述方式定义的线性空间 $\mathbb{R}_+$ 同构, 并给出这两个线性空间之间的全部同构映射.

解答. (1) 验证八条性质 + 封闭性即可 (注意零元和单位元)

(2) 猜测同构变换的形式为 $\sigma(x)=Aa^{kx}$, 利用同构的运算性质可得 $A=1$. 所以 $\sigma(x)=a^x(a\in\mathbb{R}_+)$.

题目 15. 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 将它看成实数域 $\mathbb{R}$ 的线性空间, 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 按复线性空间 V 中的加法定义 $\alpha+\beta$, 对 $\alpha\in V$ 及实数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 按 V 中向量与 λ 的数乘定义 $\lambda\alpha$. 求实线性空间 V 的维数, 并由复线性空间 V 的一组基求出实线性空间 V 的一组基.

解答. 取 $V_{\mathbb{C}}$ 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n(\text{dim}V_{\mathbb{C}}=n)$, $V=\left\{\sum_{j=1}^n(a_j+b_ji)\alpha_j|a_j,b_j\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\sum_{j=1}^n\left[a_j\alpha_j+b_j(i\alpha_j)\right]|a_j,b_j\in\mathbb{R}\right\}$. 于是 $\text{dim}V_{\mathbb{R}}=2n$, 基为 $\alpha_1,i\alpha_1,\alpha_2,i\alpha_2,\cdots,\alpha_n,i\alpha_n$.

题目 16. 设 W_1,W_2 分别是数域 F 上齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间. 求证:$F^n=W_1\oplus W_2$.

解答. 解空间分别为

$$W_1=\left\{X=(-1,1,\cdots,0)^Tt_1+(-1,0,\cdots,0)^Tt_2+\cdots+(-1,0,\cdots,1)t_{n-1}|t_i\in F\right\},$$

$$\dim W_1=n-1.$$

$$W_2=\left\{X=(1,1,\cdots,1)^Tt|t\in F\right\},\dim W_2=n-(n-1)=1.$$

验证 $(-1,1,\cdots,0)^T,(-1,0,\cdots,0)^T,\cdots,(-1,0,\cdots,1),(1,1,\cdots,1)^T$ 线性无关即可 (或可表出自然基).

题目 17. 设 $F[x]$ 是系数在数域 F 中, 以 x 为未定元的全体一元多项式 $f(x)$ 组成的 F 上的线性空间. 求证:

(1)$S=\{f(x)\in F[x]\,|f(-x)=f(x)\}$ 和 $K=\{f(x)\in F[x]\,|f(-x)=-f(x)\}$ 都是 $F[x]$ 的子空间.

(2)$F[x]=S\oplus K$.

解答. (1) 验证加法和数乘的封闭性即可

(2)$\forall f(x)\in F[x],f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, 可以发现 $\frac{f(x)+f(-x)}{2}\in S,\frac{f(x)-f(-x)}{2}\in K$.

题目 18. 在 $V=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ 中, 定义加法和数乘分别为

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac),(a,b),(c,d)\in V,$$
$$k\otimes(a,b)=\left(ka,kb+\frac{1}{2}k(k-1)a^2\right),k\in\mathbb{R},(a,b)\in V.$$

则 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 令 $p\in\mathbb{R}$, 若 $(1,1)$ 和 $(2,p)$ 线性相关, 则 $p=$.

解答. 先求零元 $(0,0)$, 单位元 1. 考虑等式 $k_1\otimes(1,1)\oplus k_2\otimes(2,p)=(0,0)$. 解得 $\left(k_1+2k_2,k_1+\frac{k_1(k_1-1)}{2}+pk_2+2k_2(k_2-1)+2k_1k_2\right)=(0,0)$, 进而解得 $p=3$.

题目 19. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 为 n 维列向量, $A \in F^{m\times n}$, 则下列说法正确的是.

A. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性相关, 则 $AX_1, AX_2, \cdots, AX_s$ 线性相关

B. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性相关, 则 $AX_1, AX_2, \cdots, AX_s$ 线性无关

C. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性无关, 则 $AX_1, AX_2, \cdots, AX_s$ 线性相关

D. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_s$ 线性无关, 则 $AX_1, AX_2, \cdots, AX_s$ 线性无关

解答. 考虑等式 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s = 0$ 和 $k_1(AX_1) + k_2(AX_2) + \cdots + k_s(AX_s) = A(k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s) = 0$.

从同态角度考虑.

题目 20. 考虑数域 F 上的非齐次线性方程组 $AX = B$, 其中 A 是 4×6 矩阵, B 是 F^4 中的非零向量. 已知 $\operatorname{rank} A = 3$, 则该线性方程组的解集生成的子空间的维数为.

解答. 利用公式 $\operatorname{rank} W_{A,B} = n - \operatorname{rank} A + 1$.

题目 21. 以下论述中正确的是 (错选、少选均得零分)

(a) 我们知道, 实数对四则运算封闭, 则此实数域上的方程组的解向量也都是实向量;

(b) 一个线性无关的向量组的任意一个部分组也线性无关;

(c) 若两个向量组的秩相等, 则这两个向量组等价;

(d) 设某个线性方程组系数矩阵 A 有 n 列, 解集的秩为 s, 则有 $s + \operatorname{rank} A = n$;

(e) 设集合 $W = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_2 + y_3 = a\}$, 且 W 继承了 $\mathbb{R}^3$ 中的加法和数乘, 则 W 是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间的充分必要条件是 $a = 0$;

(f) 设 S 为一个有限向量组, 则 S 的极大线性无关组唯一的充分必要条件是 S 线性无关.

解答. (a)e.g. 实系数多项式

(b) 正确

(c)e.g.$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ 和 $\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

(d) 齐次:$s=n-\mathrm{rank}A$; 非齐次:$s=n-\mathrm{rank}A+1$

(e) 正确, 必要性显然; 充分性只需要验证加法和数乘就可以推出

(f)e.g.$\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$

题目 22. 求包含 $\sqrt[3]{2}$ 的 (在集合的包含顺序意义下) 最小的数域. (提示, 在证明对非零元素的除法封闭时, 除了分母有理化外, 一种做法可用如下因式分解的结果: 对于任意复数 a,b,c , 成立 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.)

解答. 验证 $F=\left\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}|a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ 对于加减乘除封闭即可.

重点证一下除法:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4}}{a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}}\\
=&\frac{\left(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4}\right)\left(a_2^2+(b_2\sqrt[3]{2})^2+(c_2\sqrt[3]{4})^2-a_2b_2\sqrt[3]{2}-a_2c_2\sqrt[3]{4}-2b_2c_2\right)}{\left(a_2+b_2\sqrt[3]{2}+c_2\sqrt[3]{4}\right)\left(a_2^2+(b_2\sqrt[3]{2})^2+(c_2\sqrt[3]{4})^2-a_2b_2\sqrt[3]{2}-a_2c_2\sqrt[3]{4}-2b_2c_2\right)}\\
=&\frac{\left(a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4}\right)\left((a_2^2-2b_2c_2)+(2a_2^2-a_2b_2)\sqrt[3]{2}+(b_2^2-a_2c_2)\sqrt[3]{4}\right)}{a_2^3+2b_2^3+4c_2^3}\in F
\end{aligned}$$

题目 22 的注记. 注意要说明最小性!

题目 23. 设 (I) 是数域 K 上的含有 n 个未知数的非齐次线性方程组, 且其系数矩阵的秩为 $n-s\,(s\geq 1)$. 若 γ_0 是 (I) 的一个特解, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 (I) 的导出组 (II) 的一个基础解系, 证明:

(1) $\gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \cdots, \gamma_0+\eta_s$ 是 (I) 的 $(s+1)$ 个线性无关的解.

(2) (I) 的每个解均可由 $\gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \cdots, \gamma_0+\eta_s$ 线性表出.

解答. (1) 因为我们知道一个特解加导出组的通解就是原方程组的解, 所以只要证明这个 $(s+1)$ 个解线性无关即可. 考虑

$$k_0\gamma_0+k_1(\gamma_0+\eta_1)+\cdots+k_s(\gamma_0+\eta_s)=(k_0+k_1+\cdots+k_s)\gamma_0+k_1\eta_1+\cdots+k_s\eta_s=0$$

由于 $\gamma_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s$ 线性无关, 所以有 $k_0+k_1+\cdots+k_s=0, k_1=k_2=\cdots=k_s=0$, 即 $k_0=k_1=\cdots=k_s=0$. 从而 $\gamma_0, \gamma_0+\eta_1, \cdots, \gamma_0+\eta_s$ 线性无关.

(2) (I) 的每个解均可表示为

$$\gamma=\gamma_0+\sum_{i=1}^{s} t_i\eta_i=\left(1-\sum_{i=1}^{s} t_i\right)\gamma_0+t_1(\gamma_0+\eta_1)+\cdots+t_s(\gamma_0+\eta_s).$$

题目 24. 考虑函数空间. 我们可以将函数空间中的元素, 即函数视为一个向量, 并考虑其代数性质.

说明:

(1) 对任意非负整数 n 是否都存在常数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使

$$\cos^n x=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx$$

为什么?

(2) 以上表达式如果成立, 其中的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是否由 $\cos^n x$ 唯一决定? 为什么?

解答. (1) 利用数学归纳法

对每个非负整数 n, 存在有理常数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 使上式成立. 对 n 作数学归纳法证明这一结论.

当 $n=0$ 时,$\cos^0 x=1$, 结论成立.

设结论对 $n-1$ 成立, 即存在有理数 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 使 $\cos^{n-1}x=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_{n-1}\cos(n-1)x$. 此等式两边乘 $\cos x$, 得

$$\cos^n x=a_0\cos x+a_1\cos^2 x+a_2\cos x\cos 2x+\cdots+a_{n-1}\cos x\cos(n-1)x.$$

利用积化和差公式 $\cos kx\cos x=\frac{1}{2}[\cos(k+1)x+\cos(k-1)x]$. 于是上式化为

$$\cos^n x=b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx$$

其中 $b_0=\frac{1}{2}a_1, b_n=\frac{1}{2}a_{n-1}, b_k=\frac{1}{2}(a_{k-1}+a_{k+1})\,(\forall 1\leqslant k\leqslant n-1)$.

(2) 先证线性无关. 设

$$\cos^n x=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_n\cos nx=b_0+b_1\cos x+b_2\cos 2x+\cdots+b_n\cos nx$$

则 $(a_0-b_0)+(a_1-b_1)\cos x+(a_2-b_2)\cos 2x+\cdots+(a_n-b_n)\cos nx=0$. 如果 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$ 线性无关, 则 $a_k=b_k(\forall 0\leqslant k\leqslant n)$, 即系数由 cos"x 唯一决定.

注意:$1,\cos x,\cos^2 x,\cdots,\cos^n x$ 这 $n{+}1$ 个函数都是 $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx$ 这 $n+1$ 个函数的线性组合, 如果能将集合 $S_2=\{1,\cos x,\cos^2 x,\cdots,\cos^n x\}$ 与 $S_1=\{1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx\}$ 都看作向量组, 则 S_2 是 S_1 的线性组合,$\mathrm{rank}S_2\leqslant\mathrm{rank}S_1$. 如果还能证明 S_2 线性无关, 则 $n+1=\mathrm{rank}S_2\leqslant\mathrm{rank}S_1\Rightarrow\mathrm{rank}S_1=n+1$, 即 S_1 线性无关.

现在证明 S_2 线性无关, 设有常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 使

$$\lambda_0+\lambda_1\cos x+\lambda_2\cos^2 x+\cdots+\lambda_n\cos^n x=0$$

即对自变量 x 的所有值,$\cos x$ 都是方程 $f(y)=0$ 的根, 其中 $f(y)=\lambda_0+\lambda_1 y+\lambda_2 y^2+\cdots+\lambda_n y^n$ 是多项式. 如果 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 不全为零, 因为 $f(y)$ 是次数不超过 n 的非零多项式, 至多有 n 个不同的根. 但 $\cos x$ 显然可以取无穷多个不同的值, 这说明 $f(y)$ 只能是零多项式,$\lambda_0=\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. 这就证明了 S_2 线性无关, 从而 $S_1=\{1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx\}$ 线性无关, 系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 由 $\cos^n x$ 唯一决定.