几个重要积分的计算及其应用

李梓瑞

2022 年 12 月 20 日

1 几个重要积分的计算

1.1 椭圆积分

计算积分

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}(0<k<1)$$

上述积分被称为第一类完全椭圆积分。

解：由泰勒级数可知 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\dots$ 。

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}(k^2\sin^2 x)+\frac{3}{8}(k^2\sin^2 x)^2+\dots)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2 x+\frac{3}{8}k^4\sin^4 x+\frac{5}{16}k^6\sin^6 x+\dots)\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x)\,dx\end{aligned}$$

下面证明上述积分可以逐项积分。

首先

$$\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x\right|\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$$

令 $a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=k^2<1$

由达朗贝尔判别法和魏尔斯特拉斯判别法，级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x$ 对 x 一致收敛，从而可以逐项积分。

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\cdot\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi}{2}(1+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2k^{2n})\end{aligned}$$

其中运用了公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=\text{偶数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n=\text{奇数}. \end{cases}$$

通常记 I_1 为

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

1.2 欧拉积分

计算积分

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$$

解：$x=0$ 是瑕点，且

$$\lim_{x\to0+} x^{\frac{1}{2}}\ln\sin x = \lim_{x\to0+}(x^{\frac{1}{2}}\ln\frac{\sin x}{x} + x^{\frac{1}{2}}\ln x) = 0$$

由柯西判别法的极限形式，可知 I_2 收敛。

令 $x=2t$, 则

$$I_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin(2t)\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$$

而

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{2}-u)\,d(\frac{\pi}{2}-u) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$$

于是

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I_2$$

解方程得 $I_2 = -\frac{\pi}{2}\ln 2$

1.3 狄利克雷积分——费曼积分法

计算积分

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

解：运用费曼积分法！

考虑积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx(\alpha \geqslant 0)$.

由于

$$\left|\frac{d}{d\alpha}(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x})\right| \leqslant e^{-\alpha x}$$

及

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}$$

可知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{d}{d\alpha}(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x})\,dx$ 收敛。

于是有

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\alpha}(e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x})\,dx = -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$$
$$= \left[\frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha\sin x)}{\alpha^2+1}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha^2+1}$$
$$I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = \int -\frac{1}{\alpha^2+1}\,d\alpha = -\arctan\alpha + C$$

为了求出 C ，计算 $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$. 因为 $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty}(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx) = 0$, 所以 $\lim_{\alpha\to\infty}(-\arctan\alpha + C) = 0$ 因此 $-\frac{\pi}{2} + C = 0$, 解得 $C = \frac{\pi}{2}$.

于是

$$I(\alpha) = -\arctan\alpha + \frac{\pi}{2}$$

注意到 $I_3 = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, 则 $I_3 = \frac{\pi}{2}$.

费曼积分法是指构造含有特定积分的函数，并对其进行积分号内求导，间接求出目标积分的值。这种方法在求解许多积分时，相比分部积分可以大大节省时间。后面一些积分的求解还会用这个方法。

1.4 高斯积分与误差函数

计算积分

$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

解：考虑

$$I_4^2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx)(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

做极坐标变换 $r^2 = x^2 + y^2, dxdy = rdrd\theta$. 于是

$$I_4^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,rdrd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,d(r^2) = \pi$$
$$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

定义误差函数为 $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ，余误差函数为 $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ 。

这里不加证明地给出误差函数的渐近展开式（x 很大时）：

$$erf(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)^n}$$

1.5 积分 $\int_0^{+\infty} x^n\exp(-\alpha x)\,dx$ 与伽马函数

计算积分

$$I_5 = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx(\alpha > 0)$$

解：因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(x^n e^{-\beta x}) = 0$$

由柯西判别法的极限形式，可知积分 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\alpha x}\,dx$ 收敛。

考虑积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,dx = \frac{1}{\beta}(\beta > 0)$$

注意到

$$\frac{d^n I(\beta)}{d\beta^n} = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-\beta x}\,dx = (n!)\beta^{-(n+1)}$$

于是

$$I_5 = (n!)\alpha^{-(n+1)}$$

令 $\alpha = 1$, 则有 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$. 可以定义伽马函数 $\Gamma(n)$

$$\Gamma(n+1) \equiv \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

且 $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ 。

伽马函数给了我们一种将阶乘扩展到非整数的方法。例如定义 $x! \equiv \Gamma(x+1), x \in \mathbb{R}$.

1.6 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{\exp(x)\pm 1}\,dx$ 与黎曼 ζ 函数

计算积分

$$I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{e^x \pm 1}\,dx$$

解：先将 $\frac{1}{e^x \pm 1}$ 展开成无穷级数

$$\frac{1}{e^x \pm 1} = \frac{e^{-x}}{1 \pm e^{-x}} = e^{-x} \mp (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 \mp \cdots = e^{-x} \mp e^{-2x} + e^{-3x} \mp \dots$$

考虑先计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x \pm 1}\,dx = \int_0^{+\infty} (xe^{-x} \mp xe^{-2x} + xe^{-3x} \mp \dots)\,dx = 1 \mp \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \mp \frac{1}{4^2} + \dots$$

以上这种无穷级数的形式很常见，可以定义黎曼 ζ 函数

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

且断言 $\zeta(n)$ 在 $n > 1$ 时收敛。

则

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \zeta(2)$$

对于被积函数分母中是加法时，交换求和次序

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x + 1}\,dx &= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \\ &= (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots) - 2(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots) \\ &= \zeta(2) - \frac{2}{2^2}\zeta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2)\end{aligned}$$

下面推导更一般的结论

因为有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{e^x\pm 1}\,dx&=\int_0^{+\infty}(x^ne^{-x}\mp x^ne^{-2x}+x^ne^{-3x}\mp\dots)\,dx\\&=(n!)1^{-(n+1)}\mp(n!)2^{-(n+1)}+(n!)3^{-(n+1)}+\dots\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{e^x-1}\,dx&=\sum_{k=1}^{\infty}(n!)k^{-(n+1)}=(n!)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}\\&=\Gamma(n+1)\zeta(n+1)\\\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{e^x+1}\,dx&=(n!)\cdot\left[(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\dots)-2(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}+\dots)\right]\\&=(n!)\cdot(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}-\frac{2}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}})\\&=(1-\frac{1}{2^n})\Gamma(n+1)\zeta(n+1)\end{aligned}$$

因此

$$I_6=\begin{cases}(1-\frac{1}{2^n})\Gamma(n+1)\zeta(n+1), & \text{被积函数分母中是加法,}\\\Gamma(n+1)\zeta(n+1), & \text{被积函数分母中是减法.}\end{cases}$$

2 上述积分的其他应用

2.1 单摆

例 1. 试求平面单摆（质量为 m ，摆长为 l ，在重力场中运动）振动周期和振幅之间的函数关系。

解：将绳与竖直方向的夹角 φ 作为单摆的广义坐标。

写出该系统的能量表达式

$$E=\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}-mgl\cos\varphi=-mgl\cos\varphi_0$$

其中 φ_0 为最大摆角。

解出周期 T

$$\begin{aligned}\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}&=mgl(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\\\frac{d\varphi}{dt}&=\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}\\dt&=\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi-\cos\varphi_0)}}\end{aligned}$$

$$T=4t=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2)-\sin^2(\varphi/2)}}$$

令 $\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = \sin\xi$ ，可将上面积分写成

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi_0/2)\sin^2\xi}}\, dx = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin\frac{\varphi_0}{2})$$

注意到 $K(\sin\frac{\varphi_0}{2})$ 即为第一类完全椭圆积分。在微振动时，代入 I_1 的级数展开式，可得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+\dots)$$

2.2 确定高斯分布

例 2. 考虑高斯分布 $\rho(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$ ，其中 $A, \lambda, a > 0$ 。试求出 A .

解：由归一化条件可知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1$$

代入得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx &= A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x-a)^2}\, dx \\ &= \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}(x-a))^2}\, d(\sqrt{\lambda}(x-a)) \\ &= \frac{A}{\sqrt{\lambda}}\cdot I_4 = A\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1\end{aligned}$$

解得 $A = \sqrt{\lambda/\pi}$.

事实上，高斯分布为

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

式中的 σ^2, μ 分别为方差和期望，且题目中 $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \lambda = \frac{1}{2\sigma^2}, a = \mu$.

可以看出，$\sqrt{\lambda/\pi} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} = A$ 成立。

2.3 斯特林近似

例 3. 推导

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

.

解：先考虑

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

显然函数 $x^n e^{-x}$ 先增大，后减小。

而且

$$\frac{d}{dx}(x^n e^{-x}) = (nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = n, x^n e^{-x} = n^n e^{-n}$$

所以函数 $x^n e^{-x}$ 的最大值在 $x = n$ 处取到，最大值为 $n^n e^{-n}$.

这个函数在 $x=n$ 处可以用高斯函数近似。
先将函数写成 e 的指数的形式

$$x^n e^{-x} = e^{n\ln x - x}$$

令 $y=x-n$ ，则

$$\begin{aligned} n\ln x - n &= n\ln y + n - (y+n) \\ &= n\ln\left[n(1+\frac{y}{n})\right] - y - n \\ &= n\ln n - n + n\ln(1+\frac{y}{n}) - y \end{aligned}$$

因为在 $x=n$ 附近有 $y \ll n$ ，于是

$$\ln 1 + \frac{y}{n} \approx \frac{y}{n} - \frac{1}{2}(\frac{y}{n})^2$$

因此我们就有

$$n\ln x - n \approx n\ln n - n - \frac{y^2}{2n}$$
$$x^n e^{-x} \approx n^n e^{-n} e^{-\frac{y^2}{2n}}$$

由于函数 $x^n e^{-n}$ 在 $x<0$ 时基本也是 0 ，所以可将积分上下限换为 $+\infty$ 和 $-\infty$, 两边积分得

$$n! \approx n^n e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2n}}\, dy$$

注意到积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2n}}\, dy$ 换元后正是高斯积分 I_4 , 于是

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

检验：

$$n=1\text{时}, \frac{n! - n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} \approx 7.786299\times 10^{-2}$$
$$n=10\text{时}, \frac{n! - n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} \approx 8.295960\times 10^{-3}$$

2.4 量子统计中有关费米子和玻色子的计算

例 4. 计算低温下简并费米气体的能量关于电子数量的函数。
解：直接给出所有电子的总能量的表达式

$$U = 2\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}\epsilon(\vec{n}) = \pi\int_0^{n_{\max}}\epsilon(n)n^2\, dn$$

其中每个 $\vec{n}$ 代表此电子的两个态，单电子能量$\epsilon = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{8mL^2}{h^2}\epsilon}, dn = \sqrt{\frac{8mL^2}{h^2}}\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}d\epsilon$
代换并将其拓展到 $T\neq 0$ 的情况，得

$$N = \int_0^{\infty} g(\epsilon)\overline{n}_{FD}(\epsilon)\, d\epsilon$$

$$U = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon)\overline{n}_{FD}(\epsilon)\, d\epsilon$$

其中态密度 $g(\epsilon) = \frac{\pi(8m)^{3/2}}{2h^2}V\sqrt{\epsilon} = g_0\sqrt{\epsilon}$ ，费米-狄拉克分布函数 $\overline{n}_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT}+1}$.

先计算 N 的积分

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty g(\epsilon)\overline{n}_{FD}(\epsilon)\, d\epsilon = g_0 \int_0^\infty \sqrt{\epsilon}\overline{n}_{FD}(\epsilon)\, d\epsilon \\ &= \frac{2}{3}g_0\epsilon^{3/2}\overline{n}_{FD}(\epsilon)\mid_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty \epsilon^{3/2}(-\frac{d\overline{n}_{FD}(\epsilon)}{d\epsilon})\, d\epsilon \\ &= 0 + \frac{2}{3}g_0\int_0^\infty \frac{1}{kT}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\epsilon^{3/2}\, d\epsilon = \frac{2}{3}g_0\int_{-\mu/kT}^\infty \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\epsilon^{3/2}\, dx \end{aligned}$$

式中 $x = \frac{\epsilon-\mu}{kT}$.

由于低温下有 $kT \ll \epsilon_F(\epsilon_F \approx \mu)$ ，所以在 $\epsilon = \mu$ 附近有 $|\epsilon-\mu| \gg kT$ ，因此可以近似将积分下限变为 $-\infty$ ，并且将函数 $\epsilon^{3/2}$ 在 $\epsilon = \mu$ 处的泰勒级数（只保留前几项）带入积分中

$$N = \frac{2}{3}g_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\left[\mu^{3/2} + \frac{3}{2}xkT\mu^{1/2} + \frac{3}{8}(xkT)^2\mu^{-1/2} + \dots\right] dx$$

第一项：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{d\overline{n}_{FD}(\epsilon)}{d\epsilon}\, d\epsilon = 1$$

第二项：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(e^x+1)(1+e^{-x})}\, dx = 0$$

第三项：

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\, dx &= 2\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\, dx = -2\int_0^{+\infty} x^2\, d(\frac{1}{e^x+1}) \\ &= -2\left[\frac{x^2}{e^x+1}\mid_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{2x}{e^x+1}\, dx\right] = 4\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}\, dx \end{aligned}$$

注意到上式中的积分正是 $n = 1$ 时的 I_6 ，代入得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\, dx = 4\cdot\frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$$

于是

$$N = \frac{2}{3}g_0\mu^{3/2} + \frac{1}{4}g_0(kT)^2\mu^{-1/2}\cdot\frac{\pi^2}{3} + \dots = N(\frac{\mu}{\epsilon_F})^{3/2} + N\frac{\pi^2}{8}\frac{(kT)^2}{\epsilon_F^{3/2}\mu^{1/2}} + \dots$$

对第二项做 $\mu \approx \epsilon_F$ 近似后，解得

$$\frac{\mu}{\epsilon_F} = 1 - \frac{\pi^2}{12}(\frac{kT}{\epsilon_F})^2 + \dots$$

类似的，可以写出 U 的表达式

$$U = \frac{3}{5}N\frac{\mu^{5/2}}{\epsilon_F^{3/2}} + \frac{3\pi^2}{8}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_F} + \dots$$

代入 μ/ϵ_F ，得

$$U(N) = \frac{3}{5}N\epsilon_F + \frac{\pi^2}{4}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_F} + \dots$$

3 总结

本文着重讨论了六个重要积分及其相关的一些函数和应用，包括椭圆积分、欧拉积分、狄利克雷积分、高斯积分、伽马函数、黎曼 ζ 函数等。题目中所说的“重要”并不是说这些积分有多么的难做，而是说这些积分在数学领域乃至其他领域的广泛应用和重要作用。例如，椭圆积分计算椭圆的周长和单摆的周期；欧拉积分可以用于一些特殊积分的计算；狄利克雷积分在本文中引出了费曼积分法；高斯积分在概率和统计方面有重要应用；伽马函数在扩展阶乘和计算其他积分方面均有重要作用；黎曼 ζ 函数更是几乎在所有的数理领域有着巨大的影响力。

在撰写这篇文章中，参考了一部分其他人的工作，但也有许多是我自己写出或是补充的，比如 1.1 和 1.6 的大部分计算过程，1.3 和 1.4 的全部计算和证明，1.5 的证明和拓展；2.1 和 2.2 的全部计算过程，2.3 的部分证明，2.4 中关于 N 的积分的具体计算。另外，文中也省略了一些较为简单的证明。

由于参考的资料大部分都是从网络上找到的，因此这里就不给出参考文献了。