

# Real Space Renormalization Group

李梓瑞

2025 年 3 月 28 日

## 1 Introduction

标度变换

$$f(x_1, x_2, \dots, \lambda^{\alpha_1/\alpha_j} x_j, \dots, x_N) = \lambda^{\alpha_1} f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1)$$

标度不变性在相变理论中十分重要, 所有不显含自然的能量尺度的系统都可以通过适当的重标参数来粗粒化. 这在场论中对应于共形场论 CFT 中的共形不变性, 对其研究可以给出 gapless 的 critical behavior. 这种粗粒化的操作称为重整化 renormalization. 不同于 Feynman diagram 等微扰方法, 重整化作为典型的非微扰方法, 给我们处理物理系统提供了有效的方案. 对于高能理论, 一个典型的应用是 QED 计算单圈图, 通过重整化消去微扰计算中的无穷大, 得到有意义的结果. 对于凝聚态理论, 朗道费米液体理论 Landau Fermi Liquid 就是一个重整化的例子.

我们已经知道在相变点附近存在关联长度的标度行为

$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu} \quad (2)$$

其在相变点处发散, 据此消除掉了所有有限尺度的影响, 因此我们可以不严格地说相变点处关联长度是唯一考虑的物理量. 接下来将展示如何从最简

单的实空间重整化群 Real Space Renormalization Group (by Kadanoff) 计算系统的普适类参数等我们关心的物理量.

一般来说, 我们考虑的都是可重整的理论.

## 2 Formal Theory of RSRG

### 2.1 Basis

首先介绍 RSRG 的一般性理论, 其是针对自旋模型的方案. 我们考虑经典模型.

$$-\beta\mathcal{H}_N(g, \{K\}) = Ng + H \sum_r \sigma_r + K_1 \sum_{r, \delta_1} \sigma_r \sigma_{r+\delta_1} + K_2 \sum_{r, \delta_2} \sigma_r \sigma_{r+\delta_2} \quad (3)$$

$$+ K_3 \sum_{1,2,3} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + K_4 \sum_{1,2,3,4} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 + \cdots \quad (4)$$

$$Z(H_N) = \text{Tr} e^{-\beta H_N \{\sigma\}} \quad (5)$$

我们稍后会知道能量零点的作用. 重整化要求物理本质不变, 即关联函数不变. 对于 RSRG 我们要求变换前后配分函数不变

$$Z[\mathcal{H}_{N/L^d}(g', \{K'\})] = Z[\mathcal{H}_N(g, \{K\})] \quad (6)$$

其中

$$\{K\} = \{H, K_1, K_2, \dots\} \quad (7)$$

变换规律可以表示为

$$K'_i = R_i(\{K\}), \quad g' = g'(g; \{K\}) \quad (8)$$

这称为迭代关系 recursion relations. 我们断言重整化变换是全平面解析的.

定义重整化 (流) 中的固定点

$$K_i^* = R_i(\{K^*\}), \quad \forall i \quad (9)$$

在固定点附近展开迭代关系式

$$K'_i = K_i^* + \sum_j \left( \frac{\partial R_i}{\partial K_j} \right)_{K^*} (K_j - K_j^*) = K_i^* + \sum_j \Lambda_{ij} (K_j - K_j^*) \quad (10)$$

对角化  $\Lambda$

$$\sum_i \phi_i^\alpha \Lambda_{ij} = \lambda_\alpha \phi_j^\alpha \quad (11)$$

定义 scaling field  $u_\alpha$ , 其与偏离固定点的程度相关

$$u'_\alpha \equiv \sum_i \phi_i^\alpha (K'_i - K_i^*) = \sum_{i,j} \phi_i^\alpha \Lambda_{ij} (K_j - K_j^*) \quad (12)$$

$$= \lambda_\alpha \sum_j \phi_j^\alpha (K_j - K_j^*) = \lambda_\alpha u_\alpha \quad (13)$$

这个结果给出了 Wilson's 标度的起源, 但是我们先考虑重整化群 RG 的结构.

$$R_{L_1 L_2} = R_{L_1} R_{L_2} \rightarrow \lambda_\alpha(L_1 L_2) = \lambda_\alpha(L_1) \lambda_\alpha(L_2) \quad (14)$$

重整化群存在结合律, 但物理上没有逆元, 因此 RG 并不是群而是半群. 令  $L_2 = 1 + \delta$ , 其中  $\delta$  是无穷小, 展开结合律有

$$\lambda_\alpha(L_1) + L_1 \delta \frac{d\lambda_\alpha}{dL_1} = \lambda_\alpha(L_1) \left[ 1 + \delta \left( \frac{d\lambda_\alpha}{dL_1} \right)_{L=1} \right] \quad (15)$$

解得

$$\lambda_\alpha(L) = L^{y_\alpha}, \quad y_\alpha = \left( \frac{d\lambda_\alpha}{dL} \right)_{L=1} \quad (16)$$

于是

$$\Lambda(L) = \sum_i |\phi_i\rangle L^{y_i} \langle \phi_i| \quad (17)$$

也满足结合律.

讨论:

1.  $\lambda_\alpha > 1$ ,  $y_\alpha > 0$ , 参数流向更大的  $u_\alpha$ , 即背离固定点, 此时  $u_\alpha$  是相关的 relevant;
2.  $\lambda_\alpha < 1$ ,  $y_\alpha < 0$ , 参数流向更小的  $u_\alpha$ , 即跑向固定点, 此时  $u_\alpha$  是不相关的

irrelevant;

3.  $\lambda_\alpha = 1$ ,  $y_\alpha = 0$ , 参数不变, 称  $u_\alpha$  为 marginal.

这种行为在参数空间定义了 RG flow. 我们找到所有 relevant 的  $u_i$ , 可以定义  $u_i = 0, \forall i$  的超曲面, 称为 critical surface. 最终, 所有 irrelevant 的变量都会被重整化为 0, 只剩下表示普适类的 relevant scaling field.

接下来我们考虑临界面上的 linearized equation

$$0 = u_T = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^T (K_{\alpha} - K_{\alpha}^*), \quad K = J/k_B T \quad (18)$$

得到临界温度

$$k_B T_c(\{J\}) = \frac{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^T J_{\alpha}}{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^T K_{\alpha}^*} \quad (19)$$

如果我们引入只考虑最近邻相互作用的临界温度

$$k_B T_c^{(0)} = \frac{\phi_{nn}^T J_{nn}}{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^T K_{\alpha}^*} \quad (20)$$

那么就有

$$T_c(\{J\}) = T_c^{(0)} \left[ 1 + \sum_{\alpha \neq nn} \left( \frac{\phi_{\alpha}^T}{\phi_{nn}^T} \right) \left( \frac{J_{\alpha}}{J_{nn}} \right) \right] \quad (21)$$

后面我们会看到实际上参数空间的维数是无穷维, 每次重整后参数空间都有可能变大, 因此有变换

$$\Delta K' = \left( \frac{\partial K'}{\partial K} \right)_{K^*} \Delta K = \mathcal{D} \Delta K \quad (22)$$

其中  $\mathcal{D}$  是一个矩阵.

## 2.2 Finite Cluster RG

至此, 我们在理论上研究了 RSRG 的基本原理, 但在解决问题的过程中我们一般不能精确地想出迭代关系. 有限簇方法 finite cluster 能是一种很经典的能很好的生成迭代关系的方法. 这种方法通常在周期性边界条件 PBC 下把系统划分为不同的簇, 通过不断扩大簇来近似计算系统参数.

首先考虑  $N$  个格点上的自旋系统, 其单个自旋 (spin) 表示为  $\sigma_i, i = 1, \dots, N$ , 假设在重整化后单个簇内自旋 (cell spin) 变为  $\mu_j, j = 1, \dots, N/L^d$ . 此时 RG 变换为

$$Z'\{\mu\} = \sum_{\{\sigma\}} T\{\mu, \sigma\} Z\{\sigma\} \quad (23)$$

且总配分函数不变

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} Z\{\sigma\} = \sum_{\{\mu\}} Z\{\mu\}, \quad \sum_{\{\mu\}} T\{\mu, \sigma\} = 1 \quad (24)$$

普遍地说  $T$  可以取任意满足要求 (归一, 收敛) 的形式, 这里介绍一个常用的形式

$$T\{\mu, \sigma\} = \prod_{i=1}^{N_\mu} \frac{1}{2} (1 + \mu_i t\{\sigma\}) \quad (25)$$

其中  $t\{\sigma\}$  是  $\sigma$  的函数, 一个例子就是 majority rule

$$T\{\mu; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \mu \right] \quad (26)$$

即

$$T = \begin{cases} (1 + \mu)/2, & \text{if } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 > 0 \\ (1 - \mu)/2, & \text{if } \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 < 0 \end{cases} \quad (27)$$

### 2.3 Transfer Matrices

在格点上我们可以定义转移矩阵 transfer matrix. 对于一般两自旋耦合的配分函数 with PBC, 有

$$Z = \sum_{\{s_i\}} \exp \left[ \sum_{i=1}^N B(s_i, s_{i+1}) \right] = \sum_{\{s_i\}} \prod_{i=1}^N e^{B(s_i, s_{i+1})} \quad (28)$$

$$= \text{Tr} [\langle s_1 | T | s_2 \rangle \cdots \langle s_N | T | s_1 \rangle] \quad (29)$$

$$= \text{Tr}(T^N) \simeq \lambda_{max}^N \quad (30)$$

其中  $T$  是转移矩阵

$$\langle s_i | T | s_j \rangle = e^{B(s_i, s_{i+1})} \quad (31)$$

当  $N$  极大时除最大值外的特征值全部被压低, 因此最后的近似是合理的, 最大特征值非简并由 Frobenius' theorem 保证. 例如, 对于  $s = 1/2$

$$T = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix}, \quad Z \simeq \lambda_+^N, \quad \lambda_{\pm} = e^K \cosh h \pm \sqrt{e^{2K} \sinh^2 h + e^{-2K}} \quad (32)$$

$$\langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(T^N \hat{\sigma}_z) = 0, \quad \langle \sigma_i \sigma_{i+r} \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr}(\hat{\sigma}_z T^r \hat{\sigma}_z T^{N-r}) \simeq \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^r = e^{-r/\xi} \quad (33)$$

$$\xi = -\frac{1}{\ln \tanh K} \quad (34)$$

在 RG 过程中, 可以视为转移矩阵的变化

$$Z = \text{Tr} [(T')^{N/b}] \quad (b=2), \quad e^{B(s'_i, s'_j)} = \langle s'_i | T' | s'_j \rangle = \langle s'_i | T^b | s'_j \rangle \quad (35)$$

## 2.4 The Niemeijer-van Leeuwen cumulant approximation

这个方法最早是 Niemeijer and van Leeuwen (NvL) 在 2D 三角格子上的近似 RSRG 方案. 下面以此为例介绍. 为了截断高维中 RG 产生的多自旋耦合, 引入  $\beta\mathcal{H} = \beta\mathcal{H}_0 + U$

$$-\beta\mathcal{H}_0 = K \sum_{\alpha} (\sigma_{\alpha}^1 \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\alpha}^2 \sigma_{\alpha}^3 + \sigma_{\alpha}^3 \sigma_{\alpha}^1) \quad (36)$$

$$-U = K \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \left( \sigma_{\beta}^{(1)} \sigma_{\alpha}^{(2)} + \sigma_{\beta}^{(1)} \sigma_{\alpha}^{(3)} \right) \quad (37)$$

微扰展开得

$$\beta\mathcal{H}'[\sigma'_{\alpha}] = -\ln Z_0[\sigma'_{\alpha}] + \langle U \rangle_0 - \frac{1}{2} (\langle U^2 \rangle_0 - \langle U \rangle_0^2) + O(U^3) \quad (38)$$

with majority rule

$$\sigma'_\alpha = \text{sign}(\sigma_\alpha^1 + \sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha^3) \quad (39)$$

and

$$Z_0 = (e^{3K} + 3e^{-K})^{N/3}, \quad -\langle U \rangle_0 = 2K \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \langle \sigma_\alpha^i \rangle_0 \langle \sigma_\beta^j \rangle_0 \quad (40)$$

where

$$\langle \sigma_\alpha^i \rangle_0 = \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \sigma'_\alpha \quad (41)$$

代入可得

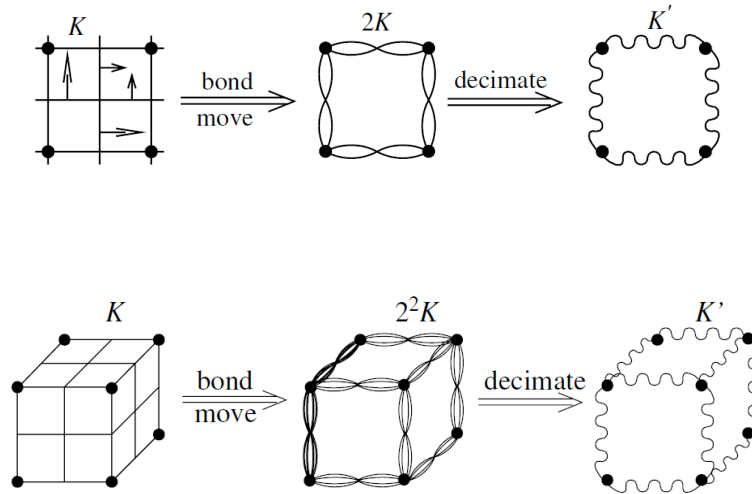
$$-\beta \mathcal{H}'[\sigma'_\alpha] = -\frac{N}{3} \ln(e^{3K} + 3e^{-K}) + 2K \left( \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} \sigma'_\alpha \sigma'_\beta + O(U^2) \quad (42)$$

于是迭代关系为

$$K' = 2K \left( \frac{e^{3K} + e^{-K}}{e^{3K} + 3e^{-K}} \right)^2 \quad (43)$$

fixed point  $K^* \simeq 0.3356$ . 也可以引入外场计算磁化率的标度  $\beta \mathcal{H} = \beta \mathcal{H}_0 + U - h \sum_i \sigma_\alpha^i$ .

## 2.5 The Migdal-Kadanoff bond moving approximation



当我们按照最简单的 RG 方案去除一半的自旋, 会出现多自旋耦合. 为了避免这样, 可以采用上图这种方式近似.

$$K' = \frac{1}{2} \ln(2 \times 2K) \quad (44)$$

fixed point  $K^* = 0.305$  while exact value is 0.441. 对于高维  $d$  的情况, 有

$$K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2 \times 2^{d-1} K) \quad (45)$$

对于更一般的情况  $\{K\}$

$$T'_b(\{K'\}) = T(\{b^{d-1}K\})^b \quad (46)$$

上述方程可以作为一种快速估算相图和指数的方法. 这种处理方法在  $d = 1$  时是精确的, 而在更高维度中效果逐渐变差. 因此, 它在更高维度中与更可靠的平均场 (鞍点) 方法形成了互补.

## 2.6 beta 函数

本小节只是简单介绍  $\beta$  函数, 之后在动量空间做 RG 会更详细地介绍, 从中我们能一窥 Wilson 的想法. 假设重整化结合了  $L$  个格点, 在不动点  $K'(K^*, L) = K^*$  附近展开

$$\Delta K' = K'(K^* + \Delta K, L) - K^* = \left( \frac{\partial K'(K, L)}{\partial K} \right)_{K^*} \Delta K \equiv \mathcal{D}'(K^*, L) \Delta K \quad (47)$$

且关联长度  $\propto |K - K_c|^{-\nu}$

$$\xi(\Delta K) = L \xi(\Delta K') \Rightarrow \frac{1}{\nu} = \frac{\ln \mathcal{D}'(K^*, L)}{\ln L} \quad (48)$$

边界条件  $\mathcal{D}'(K^*, 1) = 1$  ( $K' = K$ ), 令  $L = 1 + \epsilon$ , 可以写出

$$\frac{1}{\nu} = \left( \frac{\partial \ln \mathcal{D}'(K^*, L)}{\partial \ln L} \right)_{L=1} = \left( \frac{\partial^2 K'(K^*, L)}{\partial \ln L \partial K} \right)_{K=K^*, L=1} \quad (49)$$



定义  $\beta$  函数描述  $K$  在无限小标度变换下的变化率

$$\beta(K) \equiv \left( \frac{\partial K'(L)}{\partial \ln L} \right)_{L=1}, \quad \beta(K^*) = 0 \quad (50)$$

$\beta$  和  $K$  相关, 但和  $L$  无关. 在  $\beta$  零点附近展开

$$\beta(K) = \left( \frac{d\beta}{dK} \right)_{K^*} (K - K^*) \Rightarrow \left( \frac{d\beta}{dK} \right)_{K^*} = \frac{1}{\nu} \quad (51)$$

其中使用了定义  $\Delta K' / \Delta K = L^{1/\nu}$ . 多参数情况,  $\beta$  就变为矩阵, 上面的式子就换成  $\beta$  的本征值. 用群论的名词,  $\mathcal{D}'$  是重整化群的群元, 而  $\beta$  是无限小标度变化的生成元.

### 3 Application

#### 3.1 1D Ising

1D Ising Model

$$-\beta\mathcal{H} = K \sum_i S_i S_{i+1} + H \sum_i S_i + NA \quad (52)$$

and partition function

$$Z_N = e^{NA} \text{Tr} \left[ e^{KS_1 S_2 + \frac{H}{2}(S_1 + S_2)} e^{KS_2 S_3 + \frac{H}{2}(S_2 + S_3)} \dots \right] = e^{NA} \text{Tr} \prod_{i=\text{odd}} Z(S_i, S_{i+2}) \quad (53)$$

where

$$Z(S_i, S_{i+2}) = \sum_{S_{i+1}=\pm 1} e^{K(S_1 S_2 + S_2 S_3) + \frac{H}{2}(S_1 + 2S_2 + S_3)} \quad (54)$$

$$= e^{H(S_1 + S_3)/2} 2 \cosh [K(S_1 + S_3) + H] \quad (55)$$

可以看到在这个过程中我们将  $S$  的数量减半了, 根据重整化的精神, 我们试图还原原始的配分函数形式, 这就是要求迭代方程式

$$e^{2A} Z(S_1, S_3) = e^{A'} e^{K' S_1 S_3 + \frac{H'}{2}(S_1 + S_3)} \quad (56)$$

取不同的  $S_1, S_3$  取值, 得到三个方程  $++$ ,  $+-$ ,  $--$

$$\ln Z(++) = A' - 2A + K' + H' \quad (57)$$

$$\ln Z(+-) = A' - 2A - K' \quad (58)$$

$$\ln Z(--)= A' - 2A + K' - H' \quad (59)$$

where

$$Z(++) = 2e^H \cosh(2K + H) \quad (60)$$

$$Z(+-) = 2 \cosh H \quad (61)$$

$$Z(--)= 2e^{-H} \cosh(2K - H) \quad (62)$$

解得

$$A' = 2A + \frac{1}{4} \ln [Z(++)Z^2(+-)Z(--)] \quad (63)$$

$$K' = \frac{1}{4} \ln \left[ \frac{Z(++)Z(--)}{Z^2(+-)} \right] \quad (64)$$

$$H' = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{Z(++)}{Z(--)} \right] \quad (65)$$

至此, 我们完成了一步重整化.

为了简单明了地展示 RSRG 的威力, 考虑  $H = 0$  的情况.

$$Z(+-) = 2, \quad Z(++) = Z(--)= 2 \cosh(2K) \quad (66)$$

and

$$H' = 0, \quad K' = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K), \quad A' = 2A + \frac{1}{2} \ln[4 \cosh(2K)] \quad (67)$$

可以证明  $K' < K$ . 也可以简单但不严谨地用渐近展开分析. 于是, 随着 RG flow 的流动,  $K$  最终不可避免的滑向湮灭. 在实轴上, 我们可以找到两个固定点  $K = 0, K = \infty$ , 但是前者稳定 (irrelevant) 而后者不稳定. 这反映了 RG 对热力学极限的有效描述.

下面恢复  $H$ , 计算自由能

$$Z_N(A, K, H) = e^{NA} e^{Nf(K, H)} \quad (68)$$

$$= Z_{N/2}(A', K', H') = e^{NA'/2} e^{Nf(K', H')/2} \quad (69)$$

对于  $n$  步重整化, 有

$$A + f(K, H) = \frac{1}{2^n} [A^{(n)} + f(K^{(n)}, H^{(n)})] \quad (70)$$

事实上对于  $H \neq 0$ ,  $K$  也会流向零点, 即

$$f(K^{(n)}, H^{(n)}) = \ln(2 \cosh H^{(n)}), \quad n \rightarrow \infty \quad (71)$$

对于  $H = 0, A = 0$

$$K^{(n+1)} = \frac{1}{2} \ln \cosh(2K^{(n)}) \quad (72)$$

$$A^{(n+1)} = 2A^{(n)} + \frac{1}{2} \ln \cosh(2K^{(n)}) + \ln 2 \quad (73)$$

借由  $f(0, 0) = \ln 2$ , 写出自由能的级数解

$$f(K, 0) = \frac{1}{4} \left[ \phi(2K) + \frac{1}{2} \phi^{(2)}(2K) + \frac{1}{4} \phi^{(3)}(2K) + \cdots \right] + \ln 2 \quad (74)$$

where  $\phi(u) = \ln \cosh u$ . 而 1D Ising 的精确解已经知道是  $f(K, 0) = \ln[\cosh K] + \ln 2$ , 一个自然的问题就是这两种形式的解是否相等. 事实上, 借由一些数学技巧可以证明这点, 这里不赘述但给出启发性的提示:

$$\psi(2u) \equiv 2\phi(u), \quad \psi(2u) = \frac{1}{2}\phi(2u) + \frac{1}{2}\psi[\phi(2u)] \quad (75)$$

$$\Rightarrow \phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} \phi^{(n)}(2u) \quad (76)$$

## 3.2 2D Ising

### 3.2.1 nearest neighbor interaction

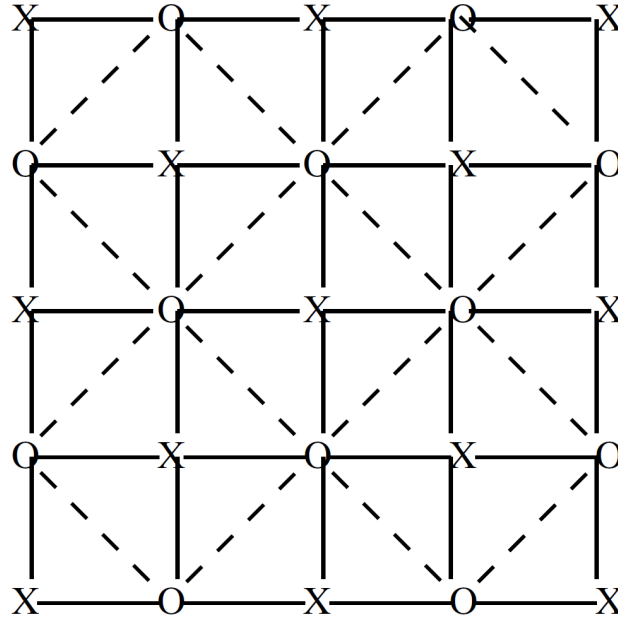
Hamiltonian

$$-\beta\mathcal{H} = \frac{K}{2} \sum_{i,j} S_{i,j} [S_{i+1,j} + S_{i,j+1} + S_{i-1,j} + S_{i,j-1}] + NA \quad (77)$$

想象系统中有两种格点, 称为 X 和 O. 如果我们把所有 X 都 trace 掉, 得到

$$Z = e^{NA} \sum \dots \sum \left[ e^{K(S_X^1 + S_X^2 + S_X^3 + S_X^4)} + e^{-K(S_X^1 + S_X^2 + S_X^3 + S_X^4)} \right] \times [\text{similar terms}] \quad (78)$$

其中  $S_X^n$  是 X 格点周围在 O 格点上的自旋.



类似于我们在 1D Ising 的操作:

$$e^{2A} \left[ e^{K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)} + e^{-K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)} \right] = e^{A'} e^{-\beta \mathcal{H}'(S_1, S_2, S_3, S_4)} \quad (79)$$

然而经过证明, 要满足上述等式, 我们必须在  $\mathcal{H}'$  中引入 4 格点 coupling 的项. 随着一步一步的重整化, 这样的方案会使迭代关系和哈密顿量越来越复杂. 参数数量的激增违反了对 RG 的期望. 于是, 是否能够通过某种近似丢掉一些高阶耦合项就成为一个自然的想法, 但我们可以先做一些计算

$$-\beta \mathcal{H}' = \frac{1}{2} K_1 (S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + S_4 S_1) + K_2 (S_1 S_3 + S_2 S_4) + K_3 S_1 S_2 S_3 S_4 \quad (80)$$

where

$$A' = 2A + \frac{1}{2} \left[ \ln(4 \cosh 2K) + \frac{1}{4} \ln \cosh 4K \right] \quad (81)$$

$$K_1 = \frac{1}{4} \ln \cosh 4K \quad (82)$$

$$K_2 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K \quad (83)$$

$$K_3 = \frac{1}{8} \ln \cosh 4K - \frac{1}{2} \ln \cosh 2K \quad (84)$$

接下来我们为了近似做一些 argument. 这种近似必须使得重整化能继续进行下去, 即闭合的迭代关系. 注意到当  $K$  很大时  $K_2, K_3 \ll K_1$ , 最简单的做法自然就是直接令  $K_2 = K_3 = 0$ . 然而如果我们这样做了, 就会发现这正是 1D Ising 的结果, 其与简单平均场理论相同, 都无法给出精确解中的相变行为. 这显然是因为这种近似太粗糙了. 让我们更加细致地考虑. 在  $\mathcal{H}$  中,  $K_1, K_2$  控制 2 格点耦合, 而  $K_3$  控制 4 格点的耦合. 他们两者的重要区别就是是否能区分铁磁态和反铁磁态, 后者的铁磁态和反铁磁/Neel 态是简并的, 因此此项比  $K_2$  term 贡献更小. 而在平均场理论的结论中次近邻铁磁相互作用可以很好的近似为对最近邻铁磁耦合的增强. 于是我们给出新的方案

$$K' = K_1 + K_2 = \frac{3}{8} \ln \cosh 4K \quad (85)$$

于是自由能

$$f(K') = 2f(K) - (A' - 2A) = 2f(K) - \ln \left[ 2 \cosh^{1/2}(2K) \cosh^{1/8}(4K) \right] \quad (86)$$

对于大  $K$ ,  $K' = \frac{3}{2}K - \frac{3 \ln 2}{8} > K$ ; 对于小  $K$ ,  $K' = 3K^2 < K$ . 可以预期在某点  $K^*$ , 有  $K = K' = K^*$ , 即是 RSRG 的固定点. 此方案的数值结果是  $T_c = 1.97J$ , 而精确解是  $T_c = 2.27J$ .

在 critical surface 附近展开

$$\left( \frac{dK'}{dK} \right)_{K=K^*} = \frac{3}{2} \tanh(4K^*) \quad (87)$$

关联长度在 RSRG 中的行为

$$\xi' = \xi/\sqrt{2}, \quad \xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \sim |K - K^*|^{-\nu} \quad (88)$$

求得临界指数  $\nu$

$$\nu = \frac{\ln 2}{2 \ln \left| \left( \frac{dK'}{dK} \right)_{K=K^*} \right|} = 0.935 \quad (89)$$

对比平均场的结果是  $\nu = 0.5$ , 精确的结果是  $\nu = 1$ . 同样的, 也可以计算临界指数  $\alpha = 0.131$ , 符合  $\alpha = 2 - d\nu$ .

下面我们考虑  $H \neq 0$  的小  $H$  极限.

$$e^{2A} \left[ e^{K(S_1+S_2+S_3+S_4)+H} + e^{-K(S_1+S_2+S_3+S_4)-H} \right] = e^{A'} e^{-\beta \mathcal{H}'(S_1, S_2, S_3, S_4)} \quad (90)$$

得到

$$-\beta \mathcal{H}'(S; H) = -\beta \mathcal{H}'(S; H=0) + H \tanh [K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)] \quad (91)$$

取 ansatz

$$\tanh [K(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)] = a(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \quad (92)$$

$$+ b(S_1 S_2 S_3 + S_1 S_2 S_4 + S_1 S_3 S_4 + S_2 S_3 S_4) \quad (93)$$

where

$$a = \frac{1}{8} [\tanh(4K) + 2 \tanh(2K)] \quad (94)$$

$$b = \frac{1}{8} [\tanh(4K) - 2 \tanh(2K)] \quad (95)$$

考虑到 3 自旋耦合项简并基态的平均贡献为 0 和格点结构, 我们近似取  $b = 0$  得到  $H$  的迭代关系

$$H' = H + 4aH \Rightarrow \left( \frac{dH'}{dH} \right)_{H=0, K=K^*} = 2.25 \quad (96)$$

critical point:  $H = 0$ . 现在我们期望

$$F(H, T) \sim t^{2-\alpha} g(H/t^\Delta), \quad t = \frac{|T - T_c|}{T_c}, \Delta = \beta + \gamma \quad (97)$$

用关联长度表达

$$F(H, T) \sim \xi^{-d\nu} h(H/\xi^{\Delta/\nu}) \quad (98)$$

得到

$$\frac{\Delta}{\nu} = \frac{\ln(H'/H)}{\ln(\xi/\xi')} = \frac{\ln\left(\frac{dH'}{dH}\right)_{H=0, K=K^*}}{\ln\sqrt{2}} = 2.34 \quad (99)$$

RSRG 中我们可以从迭代关系得到  $\nu, \beta$  或诸如此类的临界指数, 进而通过标度关系得到全部临界指数.

- Rushbrooke 标度律:  $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
- Griffiths 标度律:  $\gamma = \beta(\delta - 1)$
- Fisher 标度律:  $(2 - \eta)\nu = \gamma$
- 超标度 (hyperscaling) 关系:  $2 - \alpha = d\nu$  for  $d < d_{\text{upper}} = 4$
- ...

### 3.2.2 4-spin coupling in Square Lattice

Hamiltonian with PBC

$$-\beta\mathcal{H} = 4A' + H'(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) \quad (100)$$

$$+ 2K'_1(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_1) \quad (101)$$

$$+ 4K'_2(S_1S_3 + S_2S_4) \quad (102)$$

$$+ 4L'(S_2S_3S_4 + S_1S_3S_4 + S_1S_2S_4 + S_1S_2S_3) \quad (103)$$

$$+ 4M(S_1S_2S_3S_4) \quad (104)$$

symmetry

$$F(-H, K_1, K_2, -L, M) = F(H, K_1, K_2, L, M) \quad (105)$$

$$F(0, -K_1, K_2, 0, M) = F(0, K_1, K_2, 0, M) \quad (106)$$

$$F(0, 0, -K_2, 0, M) = F(0, 0, K_2, 0, M) \quad (107)$$

$$F(0, 0, 0, 0, -M) = F(0, 0, 0, 0, M) \quad (108)$$

重整化过程中, 要注意保护对称性. 有限簇方法给出 subsystem nontrivial 的结果:

$$(K_1^*, K_2^*, M^*) = (\pm 0.307, 0.084, -0.004), \quad (K_{1c}^*, 0, 0) = (0.420, 0, 0) \quad (109)$$

$$T_{1c} = 2.38, \quad y_T = 1/\nu = 0.937, \quad \alpha = -0.135 \quad (110)$$

有关细节的讨论见 [1][4][5].

### 3.3 MBL transition

本小节举一个更加现代的例子, 用 RG 研究多体局域化 MBL 的相变, 即从 MBL 相到热化相. 然而我们这里说相变是不太准确的, 因为这目前还属于一个 open question. 目前主流的看法是这种行为属于 cross-over 而不是相变 (即使有相变的特征), 这种 argument 认为其在热力学极限下所需的 disorder 发散进而只是一种有限尺度效应. MBL 可以通过 disorder, Floquet 甚至测量等手段实现, 其现象包括波函数的 localization, 能级的反常分布, 准局域的运动积分, 动力学下纠缠熵的对数增长, 等等. 下面会简单叙述如何针对这个问题 RG 方案是如何构造的, 文中称为 strong-randomness RG. 更多有关的讨论见 [6][7][8][9].

目标是在有限尺寸系统中通过不断的粗粒化系统研究热力学极限下 MBL 相变的性质. 首先假设 1D 系统中存在两种块, 称为 T(thermal) 块和 I(isolated) 块. 对于 T 块我们定义一个特征长度称为 physical length  $L^T$ ; 对于 I 块我们定义两个独立的特征长度, 分别是 physical length  $L^I$  和 decay



length  $\xi$ , 并额外引入两个度量 effective interaction length  $l_n = L_n^I/\xi_n$  和  $d_n = l_n - L_n^I$ . 当  $d = 0$  即  $\xi_n = 1$  (已归一化) 时, T 块和 I 块的接触面发生“雪崩”, 相变. 这样, 我们给出 T 块能完全热化 I 块的条件:  $L_{n-1}^T \geq d_n$ . 注意这里忽略了 T 块内部的相互作用贡献, 如果要考虑这种效应可以在参数中加入 entanglement time.

定义一个 cutoff 尺度  $\Lambda$ , 称 T 块的  $L^T$  和 I 块的  $d$  为 primary length. 有两种 3-block RG move

- $ITI \rightarrow I$ , for  $\Lambda = L_n^T$

$$L_{new}^I = L_{n-1}^I + \Lambda + L_{n+1}^I \quad (111)$$

$$d_{new} = d_{n-1} - \Lambda + d_{n+1} \quad (112)$$

where  $d_{new} > 1$ ,  $l_{new} = l_{n-1}^I + l_{n+1}^I$ ,  $\xi_{new} < 1$

- $TIT \rightarrow T$ , for  $\Lambda = d_n$

$$L_{new}^T = L_{n-1}^T + L_n^I + L_{n+1}^T \quad (113)$$

假设块之间无耦合, 因此我们只需要考虑单块的概率分布函数, 分别定义为  $\rho_\Lambda^T(L^T)$  和  $\rho_\Lambda^I(d, L^I)$ . 另外定义边缘分布  $\mu_\Lambda^I(d) = \int_0^\infty \rho_\Lambda^I(d, L^I) dL^I$ .

在数值模拟中, 取分布

$$\rho^T(L^T) = \exp(1 - L^T), \quad L^T \in [1, \infty) \quad (114)$$

$$\mu^I(d) = \lambda(\xi_{bare}) \exp[(1 - d)\lambda(\xi_{bare})] \quad (115)$$

其中所有 I 块取相同初始的  $\xi$ , 取函数  $\lambda$  使得  $\langle L^I \rangle = \langle L^T \rangle$ . 取其他的初态也可以, 这样取只是为了方便计算. 针对该初态进行 two-parameter flow 计算, 定义两个相空间 mapping 的参数: locally thermal 时系统的分数  $f$ , global decay length  $\tilde{\xi}$

$$f = \frac{\langle L^T \rangle}{\langle L^T \rangle + \langle L^I \rangle} \quad (116)$$

$$\tilde{\xi} = \frac{\langle L^I \rangle + \langle L^T \rangle}{\langle l \rangle} \quad (117)$$

where  $\xi$  can take values  $> 1$ . 在  $(\tilde{\xi}^{-1}, f)$  平面上模拟 RG 过程, 可以得到固定线  $f = 0, \tilde{\xi}_\infty \in (0, 1)$ . 在相变点附近 physical length 有幂律依赖  $\propto (L^T)^{-\alpha}, \alpha \simeq 2$ .

再经过解析计算 RG flow 方程可以获得 KT-type flow, 分型维度, 临界指数发散等有用的信息. 更进一步的分析可以得到 MBL transition 的临界行为划分不同于 KT transition 的普适类. 然而完全区分 KT 标度与其他的幂律发散仍然是一个 hard problem.

## 参考文献

- [1] A. J. Berlinsky, A. B. Harris. Statistical Mechanics: An Introductory Graduate Course.
- [2] Yan Zhong. An Introduction to Condensed Matter Physics.
- [3] Mehran Kardar. Statistical Physics of Fields.
- [4] M. Nauenberg, B. Nienhuis, Critical surface for square Ising spin lattice. Phys. Rev. Lett. 33, 944 and Renormalization-group approach to the solution of general Ising models, ibid. 1598 (1974)
- [5] B. Nienhuis, M. Nauenberg, Renormalization-group calculation for the equation of state of an Ising ferromagnet. Phys. Rev. B 11, 4152 (1975)
- [6] Alan Morningstar, David A. Huse. Renormalization-group study of the many-body localization transition in one dimension. Phys. Rev. B 99, 224205 (2019)
- [7] Alan Morningstar, David A. Huse and John Z. Imbrie. Many-body localization near the critical point. Phys. Rev. B 102, 125134 (2020)

- [8] Dmitry A. Abanin, Ehud Altman, Immanuel Bloch and Maksym Serbyn. Colloquium: Many-body localization, thermalization, and entanglement. *Rev. Mod. Phys.* 91, 021001 (2019)
- [9] Piotr Sierant, Maciej Lewenstein, Antonello Scardicchio, Lev Vidmar and Jakub Zakrzewski. Many-body localization in the age of classical computing. *Rep. Prog. Phys.* 88, 026502 (2025)
- [10] Ramamurti Shankar. *Quantum Field Theory and Condensed Matter*.