蒙特卡洛模拟作业 1、2、3

22377056 李梓瑞

2025 年 3 月 28 日

1 第一次作业

解答 1. 设 $1-\xi$ 的分布函数为 $H(x)$，其中 ξ 是在 $[0\,,1\,)$ 均匀分布的随机数。

$$H(x) = P(1-\xi \leq x) = P(1-x \leq \xi) = P(\xi \leq x) = F(x) \tag{1}$$

其中倒数第二个等号是因为分布的均匀性。所以 $1-\xi$ 和 ξ 的分布相同。

解答 2. 设 $\sqrt{\xi}$ 的分布函数为 $H_1(x)$

$$H_1(x) = P(\sqrt{\xi} \leq x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{2}$$

设 $\max(\xi_1, \xi_2)$ 的分布函数为 $H_2(x)$

$$H_2(x) = P(\max(\xi_1, \xi_2) \leq x) = P(\xi_1 \leq x)P(\xi_2 \leq x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{3}$$

于是 $\sqrt{\xi}$ 的分布函数与 $\max(\xi_1, \xi_2)$ 的分布函数相同。

其余作业见 MC1.py

2 第二次作业

解答 3. 1. 均匀分布

$$F(x) = \frac{\int_a^x U(a,b)dt}{\int_a^b U(a,b)dt} = \begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, x > b \end{cases} \tag{4}$$

$$x_F = a + (b-a)\xi \tag{5}$$

2. 指数分布

$$F(x) = \frac{\int_0^x \epsilon(\lambda)dt}{\int_0^\infty \epsilon(\lambda)dt} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$x_F = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\xi) = -\frac{1}{\lambda}\ln(\xi) \tag{7}$$

3. Beta 分布 $B_e(\alpha, 1)$

$$F(x) = \frac{\int_0^x B_e(\alpha,1)dt}{\int_0^1 B_e(\alpha,1)dt} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ x^\alpha, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{8}$$

$$x_F = \xi^{1/\alpha} \tag{9}$$

4. Beta 分布 $B_e(1, \beta)$

$$F(x) = \frac{\int_0^x B_e(1,\beta)dt}{\int_0^1 B_e(1,\beta)dt} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-(1-x)^\beta, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{10}$$

$$x_F = 1 - (1-\xi)^{1/\beta} \tag{11}$$

5. Logistic 分布

$$F(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} L(\alpha,\beta)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\alpha,\beta)dt} = \frac{1}{1+e^{-(x-\alpha)/\beta}} \tag{12}$$

$$x_F = \alpha - \beta \ln(\xi^{-1} - 1) = \alpha \tag{13}$$

6. Weibull 分布

$$F(x) = \frac{\int_{0}^{x} W(\alpha,\beta)dt}{\int_{0}^{\infty} W(\alpha,\beta)dt} = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1 - e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, x > 0 \end{cases} \tag{14}$$

$$x_F = \beta\left[-\ln(1-\xi)\right]^{1/\alpha} = \beta\left[-\ln\xi\right]^{1/\alpha} \tag{15}$$

7. 正态分布

$$F(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} N(\mu,\sigma)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\mu,\sigma)dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt \tag{16}$$

$$x_F = F^{-1}(\xi) \tag{17}$$

无显式表示

8. 柯西分布

$$F(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} C(\alpha,\beta)dt}{\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha,\beta)dt} = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2} \tag{18}$$

$$x_F = \tan\left[\pi(\xi - \frac{1}{2})\right] \tag{19}$$

9. 帕累托分布

$$F(x) = \frac{\int_{\beta}^{x} P_a(\alpha,\beta)dt}{\int_{\beta}^{\infty} P_a(\alpha,\beta)dt} = \begin{cases} 0, x < \beta \\ 1 - (\beta/x)^{\alpha}, x \geq \beta > 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$x_F = \frac{\beta}{(1-\xi)^{1/\alpha}} = \frac{\beta}{\xi^{1/\alpha}} \tag{21}$$

3 第三次作业

解答 4.

$$P(\xi_1 < \xi_2) = \int_0^1 \int_{x_1}^1 dx_2 dx_1 = \frac{1}{2} \tag{22}$$

解答 5. 设 $1-\xi$ 的分布函数为 $H(x)$，其中 ξ 是在 $[0\,,1\,)$ 均匀分布的随机数。

$$H(x) = P(1-\xi \le x) = P(1-x \le \xi) = P(\xi \le x) = F(x) \tag{23}$$

其中倒数第二个等号是因为分布的均匀性。所以 $1-\xi$ 和 ξ 的分布相同。

解答 6. 设 $\sqrt{\xi}$ 的分布函数为 $H_1(x)$

$$H_1(x) = P(\sqrt{\xi} \le x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{24}$$

设 $\max(\xi_1, \xi_2)$ 的分布函数为 $H_2(x)$

$$H_2(x) = P(\max(\xi_1, \xi_2) \le x) = P(\xi_1 \le x)P(\xi_2 \le x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{25}$$

于是 $\sqrt{\xi}$ 的分布函数与 $\max(\xi_1, \xi_2)$ 的分布函数相同。

解答 7. 设 $\sqrt[n]{\xi}$ 的分布函数为 $H_1(x)$

$$H_1(x) = P(\sqrt[n]{\xi} \le x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^n, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{26}$$

设 $\max(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 的分布函数为 $H_2(x)$

$$H_2(x) = P(\max(\xi_1,\ldots,\xi_n) \le x) = P(\xi_1 \le x)\cdots P(\xi_n \le x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ x^n, 0 < x < 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{27}$$

于是 $\sqrt[n]{\xi}$ 的分布函数与 $\max(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 的分布函数相同。

解答 8. 设 $1-\sqrt{\xi}$ 的分布函数为 $H_1(x)$

$$H_1(x) = P(1-\sqrt{\xi} \le x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-(1-x)^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{28}$$

设 $\min(\xi_1,\xi_2)$ 的分布函数为 $H_2(x)$

$$H_2(x) = P(\min(\xi_1,\xi_2) \le x) = 1-P(\xi_1 > x)P(\xi_2 > x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-(1-x)^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{29}$$

于是 $1-\sqrt{\xi}$ 的分布函数与 $\min(\xi_1,\xi_2)$ 的分布函数相同。

解答 9. 设 $1-\sqrt[n]{\xi}$ 的分布函数为 $H_1(x)$

$$H_1(x) = P(1-\sqrt[n]{\xi} \le x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-(1-x)^n, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 1 \end{cases} \tag{30}$$

设 $\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 的分布函数为 $H_2(x)$

$$H_2(x)=P(\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)\le x)=1-P(\xi_1\le x)\cdots P(\xi_n\le x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ 1-(1-x)^n,0<x\le 1\\ 1,x>1\end{cases} \tag{31}$$

于是 $1-\sqrt[n]{\xi}$ 的分布函数与 $\min(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ 的分布函数相同。