研究广义变系数 KP 方程的多孤子解时的详细过程

李梓瑞

2024 年 1 月 7 日

摘要

变系数 KP 方程可以比常系数方程更真实地描述流体力学和等离子体物理中的许多非线性现象. 因此, 本文研究了一类具有非线性、色散和摄动项的广义变系数 KP 方程. 利用 Painlevé 可积性条件和 Hirota 双线性方法, 从变系数双线性方程中得到变系数 KP 方程的多孤子解、自 Bäcklund 变换和 Lax 对.

关键词: KP 方程、多孤子解、Painlevé 可积性条件、Hirota 双线性方法、自 Bäcklund 变换、Lax 对

1 引言

经典 Korteweg-de Vries(KdV) 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

已被发现可以模拟许多物理、机械和工程现象, 如离子声波、分层内波、地球物理流体动力学、无碰撞的水磁波、晶格动力学、拥挤交通中的堵塞等.

作为 KdV 方程的二维模拟, Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \sigma u_{yy} = 0 \tag{2}$$

其中 $\sigma = \pm 1$, 已经被用来描述在 y 方向上具有弱非线性、弱色散和弱扰动的长水波和小振幅表面波的演化, 在磁化等离子体中的弱相对论性孤子作用, 热尘埃等离子体的尘埃声孤波和其他一些其他非线性模型.

作为具有幂律非线性和时间相关系数的 KdV 方程的一种特殊情况, 柱 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + \frac{1}{2t}u = 0 \tag{3}$$

是 Maxon 和 Viecelli 在 1974 年首次提出的, 当时他们研究了径向入射声波在圆柱几何中的传播. 这个方程可以在一些不同的情况下通过使用拉伸坐标给出. 它在 (2 + 1) 维中的对应, 柱 KP 方程

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \frac{1}{2t}u_x + \frac{\sigma}{2t}u_{yy} = 0 \tag{4}$$

其中 $\sigma = \pm 1$, 也可以用来描述了在很小的角范围内变化的接近直线的波的传播、受某些小横向扰动的圆柱形浅水波、密集量子电子-离子等离子体中的电子声孤波、具有方位角扰动的尘埃离子-声波等等.

近年来, 当考虑到非均匀介质和 (或) 非均匀边界时, 变系数非线性演化方程 (NLEEs) 受到了广泛关注, 它比常系数形式更能真实地描述复杂世界的非线性现象. 由此, 一种新的广义变系数 KP 方程

$$(u_t+\chi_1(t)uu_x+\chi_2(t)u_{xxx})_x+\chi_3(t)u_x+\chi_4(t)u_{yy}+\chi_5(t)u_{xy}+\chi_6(t)u_{xx}=\chi_7(t) \tag{5}$$

其中 $\chi_1(t)\neq 0,\chi_2(t)\neq 0,\chi_3(t),\chi_4(t)\neq 0,\chi_5(t),\chi_6(t)$ 和 $\chi_7(t)$ 均为解析函数. 在一些数学和物理的应用中,(5) 式给出以下的例子

1. 当 $\chi_5(t)=\chi_6(t)=0$,(5) 式变为

$$(u_t+\chi_1(t)uu_x+\chi_2(t)u_{xxx})_x+\chi_3(t)u_x+\chi_4(t)u_{yy}=\chi_7(t) \tag{6}$$

其中 $\chi_1(t)\neq 0,\chi_2(t)\neq 0,\chi_3(t),\chi_4(t)\neq 0$ and $\chi_7(t)$ 都为解析函数, 分别表示非线性、色散、扰动效应、y 方向扰动波速和外力. 上式可以描述表面波在不同深度和宽度的浅海和海沟中的传播, 倾斜底部上的湍流中的长波, 在初始数据沿平行波阵面方向缓慢调制时以缓慢变化的地形为界的三维流体域表面上的长波. (6) 式的精确解可以利用计算机代数得到. 在不考虑外力项 $\chi_7(t)$ 的情况下,(6) 式的 Painlevé 可积性和解析解已被讨论, 并在 $\chi_3(t)=\chi_7(t)=0$ 时使用 pfaffianization 过程. 此外, 大量研究关注在 $\chi_7(t)=0,\chi_7(t),\chi_2(t)$ 均为常数时 (6) 的精确解

2. 当 $\chi_3(t)=\chi_5(t)=\chi_7(t)=0$ 时,(5) 可以降阶为以下方程

$$(u_t+\chi_1(t)uu_x+\chi_2(t)u_{xxx})_x+\chi_4(t)u_{yy}+\chi_6(t)u_{xx}=0 \tag{7}$$

可以用来描述具有弱衍射波束的非线性波、沿两流体层界面传播的内波、Alboran(阿尔沃兰) 海的内孤立波等

3. 以下变系数 KP 方程的可积性和 Jacobi 椭圆函数解已经得出

$$(u_t+f_1(t)uu_x+f_2(t)u_{xxx})_x+6f(t)u_x+g^2(t)u_{yy}+f_3(t)=0 \tag{8}$$

在不考虑式 (5) 中的外力项的情况下, 我们在本文中将主要研究以下广义变系数 KP 方程

$$(u_t+f(t)uu_x+g(t)u_{xxx})_x+l(t)u_x+m(t)u_{yy}+n(t)u_{xy}+q(t)u_{xx}=0 \tag{9}$$

该方程的 Grammian 解在 Grammian Solutions to a Variable-Coefficient KP Equation 中给出

利用计算机符号计算, 我们可以从广义变系数 KP 方程 (9) 分别通过四种变换变换到 KP 方程 (2)、柱 KP 方程 (4)、KdV 方程 (1) 和柱 KdV 方程 (3).

本文的结构如下. 在第 2 节中, 我们得到了 (9) 的可积条件. 在第 3 节中, 我们利用可积条件导出了 (9) 的解析多孤子解、自 Bäcklund 双线性变换和 Lax 对. 在最后一节提出结论和结果的讨论.

2 分析可积条件

通过分析 (9) →(2)(4) 的变换, 我们可以得到

$$g(t)=C_1f(t)\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\left[\lambda_1+\lambda_2\int f(t)\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right] \tag{10}$$

$$m(t)=C_2f(t)\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\left[\lambda_1+\lambda_2\int f(t)\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right]^{-3} \tag{11}$$

其中 $C_1\neq 0,C_2\neq 0,\lambda_1$ 和 λ_2 是任意常数且满足 $\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$

我们可以观察到, 上述两式刚好是 (9) 式的可积条件.

3 分析多孤子解决方案

3.1 解出多孤子解

通过变量替换

$$u(x,y,t)=\frac{12g(t)}{f(t)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\Phi(x,y,t)) \tag{12}$$

考虑可积条件 (10) 式 $\lambda_2=0$ 的条件

$$g(t)=C_1 f(t)\mathrm{e}^{-\int(t)dt} \tag{13}$$

其中 C_1 是任意非零常数

我们可以验证 (9) 式可以被转化为变系数双线性方程

$$\frac{6f}{g}[\frac{[D_xD_t+g(t)D_x^4+q(t)D_x^2+n(t)D_xD_y+m(t)D_y^2](\Phi\cdot\Phi)}{\Phi^2}]_{xx}=0 \tag{14}$$

进而有

$$[D_xD_t+g(t)D_x^4+q(t)D_x^2+n(t)D_xD_y+m(t)D_y^2](\Phi\cdot\Phi)=0 \tag{15}$$

上式中的 Hirota 双线性算子为

$$D_x^mD_y^nD_t^l a(x,y,t)\cdot b(x,y,t)=\left.\frac{\partial^m}{\partial x'^m}\frac{\partial^n}{\partial y'^n}\frac{\partial^l}{\partial t'^l}a\left(x+x',y+y',t+t'\right)b\left(x-x',y-y',t-t'\right)\right|_{x'=0,y'=0,t'=0} \tag{16}$$

按照参数展开法的一般程序, 式 (9) 的解析多孤子解为

$$u_N(x,y,t)=12C_1\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\Phi(x,y,t)), \tag{17}$$

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{\mu=0,1}\exp\left(\sum_{i=1}^N\mu_i\eta_i+\sum_{1\le i<j\le N}\mu_i\mu_jA_{ij}\right), \tag{18}$$

其中

$$\eta_i=p_ix+r_iy-p_i^3\int g(t)\mathrm{d}t-\frac{r_i^2}{p_i}\int m(t)\mathrm{d}t-r_i\int n(t)\mathrm{d}t-p_i\int q(t)\mathrm{d}t+\eta_{i,0}, \tag{19}$$

$$a_{ij}=\mathrm{e}^{A_{ij}}=\frac{3g(t)p_i^2p_j^2\left(p_i-p_j\right)^2-m(t)\left(p_ir_j-p_jr_i\right)^2}{3g(t)p_i^2p_j^2\left(p_i+p_j\right)^2-m(t)\left(p_ir_j-p_jr_i\right)^2}, \tag{20}$$

对于 $i,j=1,2,\ldots,N$, 其中 N 表示 N 孤子解.$\sum_{\mu=0,1}$ 表示对所有可能的 $\mu_i=0,1(i=1,2,\ldots,N)$ 求和, $\sum_{1\le i<j\le N}$ 表示对所有可能的 N $(1\le i<j\le N)$ 求和. 常系数 $p_i\ne 0$ 和 $q_i(i=1,2,\ldots,N)$ 分别表示沿 x 和 y 方向的波数, 且 $\eta_{i,0}(i=1,2,\ldots,N)$ 表示初始相位.

3.2 单孤子解与双孤子解

注意另一个条件, 即由 (11) 式可得

$$m(t)=C_2f(t)\mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t} \tag{21}$$

其中 C_2 是任意非零常数. 上式必须满足 $N \geq 2$. 特别地, 我们有 (9) 式的单孤子解为

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t) &= 3C_1 p_1^2 \mathrm{e}^{-\int 1(t)\mathrm{d}t} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta_1}{2}\right) \\ &= 3C_1 p_1^2 \mathrm{e}^{-\int 1(t)\mathrm{d}t} \operatorname{sech}^2\left[\frac{p_1 x + r_1 y - \int\left(p_1^3 g(t) + p_1 q(t) + r_1 n(t) + \frac{r_1^2}{p_1} m(t)\right)\mathrm{d}t + \eta_{10}}{2}\right], \end{aligned}$$

和双孤子解

$$\begin{aligned} u_2(x,y,t) =& 12C_1 \mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\left\{2\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\left[\sqrt{\mathrm{e}^{A_{12}}}\cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2+A_{12}}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2}\right)\right]\right\}_{xx} \\ =& 12C_1 \mathrm{e}^{-\int l(t)\mathrm{d}t}\left\{-\left[\frac{(p_1+p_2)\,\mathrm{e}^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}+A_{12}} + 2\sqrt{p_1 p_2}\cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_2+\log(p_1/p_2)}{2}\right)}{2\left[\sqrt{\mathrm{e}^{A_{12}}}\cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2+A_{12}}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2}\right)\right]}\right]\right. \\ & \left. + \frac{(p_1+p_2)^2\,\mathrm{e}^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}+A_{12}} + 2p_1 p_2 \cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{2} + \log(p_1/p_2)\right)}{2\left[\sqrt{\mathrm{e}^{A_{12}}}\cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2+A_{12}}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\eta_1-\eta_{12}}{2}\right)\right]}\right\} \end{aligned}$$

经过符号计算的验证, 我们确实发现单孤子解符合方程条件, 且单孤子解不能用 N 孤子解的形式表示.

3.3 导出自 Bäcklund 变换和 Lax 对

Bǎcklund 变换来源于微分几何, 是将 NLEEs 的成对的解联系起来的变换. 特别是应用于由 Hirota 双线性方法导出的双线性方程的双线性形式的自 Bǎcklund 变换, 可以为原本的物理的方程提供解析孤子解、Lax 对、无穷守恒定律和逆散射变换.

我们先介绍介绍一个引理 [1]. 考虑一般型的双线性 KdV 方程

$$F(D_t, D_x, D_y) f \cdot f = 0$$

的一个解 f 与同一双线性方程

$$F(D_t, D_x, D_y) f' \cdot f' = 0$$

的另一个解 f' 之间的 Bǎcklund 变换. 考虑

$$P \equiv \left[F(D_t, D_x, D_y) f' \cdot f'\right] f^2 - f'^2 \left[F(D_t, D_x, D_y) f \cdot f\right].$$

如果 $P = 0$, 则 f 满足 f 的双线性 KdV 方程当且仅当 f' 满足 f' 的双线性方程. 如果我们能从 $P = 0$ 中导出一对双线性方程

$$\begin{cases} F_1(D_t, D_x, D_y) f' \cdot f = 0, \\ F_2(D_t, D_x, D_y) f' \cdot f = 0, \end{cases}$$

那么上面的一对双线性方程就是我们要找的一个 Bǎcklund 变换.

接下来回到本文中的问题, 考虑双线性方程解之间的关系. 若 $\Phi(x,y,t)$ 和 $\Phi'(x,y,t)$ 被认为是双线性方程 (15) 的两个不同解, 则有如下的结果

$$\begin{aligned} P \equiv& \left\{\left[D_x D_t + g(t) D_x^4 + q(t) D_x^2 + n(t) D_x D_y + m(t) D_y^2\right] \Phi' \cdot \Phi'\right\} \Phi^2 \\ & - \Phi'^2 \left\{\left[D_x D_t + g(t) D_x^4 + q(t) D_x^2 + n(t) D_x D_y + m(t) D_y^2\right] \Phi \cdot \Phi\right\} = 0, \end{aligned}$$

可写成

$$
\begin{aligned}
P =& 2D_x\left(D_t\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' + 2g(t)D_x\left[\left(D_x^3\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' + 3\left(D_x^2\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\left(D_x\Phi\cdot\Phi'\right)\right] \\
&+ 2q(t)D_x\left(D_x\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' + 2n(t)D_x\left(D_y\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' + 2m(t)D_y\left(D_y\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' \\
=& \left[3a(t)D_x^2 - m(t)D_y - \lambda(t)\right]\Phi'\cdot\Phi + 2D_x\Big\{\Big[D_t + g(t)D_x^3 + q(t)D_x + n(t)D_y \\
&+ 3a(t)D_xD_y + \frac{\lambda(t)g(t)}{a(t)}D_x - \rho(t)\Big]\Phi'\cdot\Phi\Big\}\cdot\Phi\Phi' = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda(t),\rho(t)$ 都是关于 t 的任意函数, 且 $3a(t)^2 = g(t)m(t)$.

我们在这里只验证第一项的成立

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left[D_xD_t\left(\Phi'\cdot\Phi'\right)\right]\Phi^2 - \Phi'^2\left[D_xD_t\left(\Phi\cdot\Phi\right)\right] \\
&= 2\left(\Phi'_{xt}\Phi' - \Phi'_x\Phi'_t\right)\Phi^2 - 2\left(\Phi_{xt}\Phi - \Phi_x\Phi_t\right){\Phi'}^2
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R} &= 2D_x\left(D_t\Phi'\cdot\Phi\right)\cdot\Phi\Phi' = 2D_x\left[\left(\Phi'_t\Phi - \Phi'\Phi_t\right)\cdot\Phi\Phi'\right] \\
&= 2\left[\left(\Phi'_t\Phi - \Phi'\Phi_t\right)_x\Phi\Phi' - \left(\Phi'_t\Phi - \Phi'\Phi_t\right)\left(\Phi'_x\Phi + \Phi'\Phi_x\right)\right] \\
&= 2\left[\left(\Phi'_{xt}\Phi' - \Phi'_x\Phi'_t\right)\Phi^2 - \left(\Phi_{xt}\Phi - \Phi_x\Phi_t\right){\Phi'}^2\right]
\end{aligned}
$$

对比可知左右两式的第一项相等.

至此,(9) 式的双线性自 Bäcklund 变换可以被表示为

$$
\left[3a(t)D_x^2 - m(t)D_y\right]\Phi'\cdot\Phi = \lambda(t)\Phi\Phi', \tag{22}
$$

$$
\left[D_t + g(t)D_x^3 + q(t)D_x + n(t)D_y + 3a(t)D_xD_y + \frac{\lambda(t)g(t)}{a(t)}D_x\right]\Phi'\cdot\Phi = \rho(t)\Phi\Phi'. \tag{23}
$$

如果我们取 $\rho(t) = 0$ 和 $\Phi'(x,y,t) = \Psi(x,y,t)\Phi(x,y,t)$, 我们可以从 (22)-(23) 推导得到 (9) 式的 Lax 对

$$
\begin{aligned}
&L = 3a(t)\partial_x^2 - m(t)\partial_y + \tfrac{a(t)f(t)}{2g(t)}u, \\
&M = -\left[4a(t)\partial_x\partial_y + n(t)\partial_y\right] - \left[q(t) + \tfrac{4\lambda(t)g(t)}{3a(t)} + \tfrac{f(t)}{3}u\right] + \tfrac{f(t)}{6g(t)}\left[g(t)\tfrac{\partial u}{\partial x} - 3a(t)\int\tfrac{\partial u}{\partial y}\ \mathrm{d}x\right],
\end{aligned}
$$

其中 $u = u(x,y,t)$ 是 (9) 式的解, $\Psi = \Psi(x,y,t)$ 是任意函数且算子 L 和 M 满足

$$
\begin{aligned}
L\Psi &= \lambda(t)\Psi, \\
M\Psi &= \tfrac{\partial\Psi}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

利用符号计算, 我们可以验证从双线性自 Bäcklund 变换到 Lax 对的结果的准确性 (见后四张截图).

4 结论与讨论

本文中, 我们参考了文献 [3],[4], 验证了 [2] 中关于广义变系数 KP 方程的多孤子解时的详细过程, 并给出了具体的推导过程和符号计算代码. 虽然验证出了大多数公式的正确性, 但还有几个公式我们未能验证出其正确性, 我们将在之后的学习中继续验证并解释其内容.

```
(*p1是Phi,p2是Phi'*)
u[x, y, t] = 12 C1 Exp[-Integrate[l[t], t]] D[Log[p1[x, y, t]], {x, 2}];
p2[x, y, t] = p[x, y, t] × p1[x, y, t];
a[x, y, t] = p1[x, y, t] × D[p2[x, y, t], {x, 2}] + p2[x, y, t] × D[p1[x, y, t], {x, 2}] -|2 D[p1[x, y, t], x] × D[p2[x, y, t], x];
b[x, y, t] = D[p1[x, y, t], x] × p2[x, y, t] - p1[x, y, t] × D[p2[x, y, t], x];
c[x, y, t] = D[p2[x, y, t], y] × p1[x, y, t] - p2[x, y, t] × D[p1[x, y, t], y];
d[x, y, t] = p1[x, y, t] × p2[x, y, t];
e[x, y, t] = 3 A[t] (D[p2[x, y, t], x, y] × p1[x, y, t] + D[p1[x, y, t], x, y] × p2[x, y, t] - D[p1[x, y, t], x] × D[p2[x, y, t], y] - D[p2[x, y, t], x] × D[p1[x, y, t], y]);
A[t] = Sqrt[(g[t] × m[t]) / 3];
eq1 = Simplify[3 A[t] × a[x, y, t] - m[t] × c[x, y, t]];
Lp = 3 A[t] × D[p[x, y, t], {x, 2}] - m[t] × D[p[x, y, t], y] + (A[t] / (2 C1 Exp[-Integrate[l[t], t]])) u[x, y, t] × p[x, y, t]
Simplify[eq1 / (p1[x, y, t])^2]
(*验证L成立*)
```

Out[∘]=
$$-m[t]\,p^{(0,1,0)}[x,y,t]+\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p^{(2,0,0)}[x,y,t]+2\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p[x,y,t]\left(-\frac{p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2}{p1[x,y,t]^2}+\frac{p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}\right)$$

```
f[t] = g[t] / (C1 Exp[-Integrate[l[t], t]]);
a2[x, y, t] = D[p2[x, y, t], t] × p1[x, y, t] - D[p1[x, y, t], t] × p2[x, y, t];
b2[x, y, t] = D[p2[x, y, t], {x, 3}] × p1[x, y, t] - 3 D[p2[x, y, t], {x, 2}] × D[p1[x, y, t], x] + 2 D[p2[x, y, t], x] × D[p1[x, y, t], {x, 2}] - p2[x, y, t] × D[p1[x, y, t], {x, 3}];
c2[x, y, t] = D[p2[x, y, t], x] × p1[x, y, t] - p2[x, y, t] × D[p1[x, y, t], x];
d2[x, y, t] = c[x, y, t];
e2[x, y, t] = D[p2[x, y, t], x, y] × p1[x, y, t] + D[p1[x, y, t], x, y] × p2[x, y, t] - D[p1[x, y, t], x] × D[p2[x, y, t], y] - D[p2[x, y, t], x] × D[p1[x, y, t], y];
eq2 = a2[x, y, t] + g[t] × b2[x, y, t] + q[t] × c2[x, y, t] + n[t] × d2[x, y, t] + 3 A[t] × e2[x, y, t] + (lamdba[t] × g[t] / A[t]) c2[x, y, t];
Mp = - (4 A[t] × D[p[x, y, t], x, y] + n[t] × D[p[x, y, t], y]) - (q[t] + 4 lamdba[t] × g[t] / (3 A[t]) + u[x, y, t] × f[t] / 3) p[x, y, t] +
    (2 g[t] × D[Log[p1[x, y, t]], {x, 3}] - 3 A[t] × Integrate[D[D[Log[p1[x, y, t]], {x, 2}], y], x]) p[x, y, t];
eq22 = Simplify[- (eq2 / (p1[x, y, t])^2 - D[p[x, y, t], t])]
Mp2 = Simplify[Mp]
rest = eq22 - Mp2
(*验证M成立*)
```

Out[∘]=
$$-n[t]\,p^{(0,1,0)}[x,y,t]-q[t]\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]-\frac{1}{\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p1[x,y,t]^2}\,g[t]\Big(\sqrt{3}\,lamdba[t]\,p1[x,y,t]^2\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]+\sqrt{3}\,m[t]\big(p1[x,y,t]^2\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]+p[x,y,t]\big(-2\,p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]+2\,p1[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]\big)\big)+\sqrt{g[t]\times m[t]}\big(-p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]+p^{(1,0,0)}[x,y,t]\big(-6\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2+5\,p1[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]\big)+p1[x,y,t]^2\,p^{(3,0,0)}[x,y,t]\big)\Big)$$

Out[∘]=
$$-\frac{4\,g[t]\times lamdba[t]\times p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}}-p[x,y,t]\times q[t]-n[t]\,p^{(0,1,0)}[x,y,t]+\frac{\sqrt{g[t]\times m[t]}\big(-4\,p1[x,y,t]^2\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]+3\,p[x,y,t]\big(p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]-p1[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]\big)\big)}{\sqrt{3}\,p1[x,y,t]^2}+\frac{2\,g[t]\times p[x,y,t]\big(2\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^3+p1[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\big(2\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]-3\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]\big)+p1[x,y,t]^2\big(-2\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]+p1^{(3,0,0)}[x,y,t]\big)\big)}{p1[x,y,t]^3}$$

Out[∘]=
$$\frac{4\,g[t]\times lamdba[t]\times p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}}+p[x,y,t]\times q[t]-q[t]\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]-\frac{\sqrt{g[t]\times m[t]}\big(-4\,p1[x,y,t]^2\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]+3\,p[x,y,t]\big(p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]-p1[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]\big)\big)}{\sqrt{3}\,p1[x,y,t]^2}-\frac{1}{\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p1[x,y,t]^2}\,g[t]\Big(\sqrt{3}\,lamdba[t]\,p1[x,y,t]^2\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]+\sqrt{3}\,m[t]\big(p1[x,y,t]^2\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]+p[x,y,t]\big(-2\,p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]+2\,p1[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]\big)\big)+\sqrt{g[t]\times m[t]}\big(-p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]+p^{(1,0,0)}[x,y,t]\big(-6\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2+5\,p1[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]\big)+p1[x,y,t]^2\,p^{(3,0,0)}[x,y,t]\big)\Big)-\frac{2\,g[t]\times p[x,y,t]\big(2\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^3+p1[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\big(2\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]-3\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]\big)+p1[x,y,t]^2\big(-2\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]+p1^{(3,0,0)}[x,y,t]\big)\big)}{p1[x,y,t]^3}$$

In[∘]:= `Coefficient[eq22, g[t]]`
系数
`Coefficient[Mp2, g[t]]`
系数
`Coefficient[rest, g[t]]`
系数

Out[∘]= $$\frac{6\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2}{p1[x,y,t]^2}-\frac{5\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}+\frac{p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}-p^{(3,0,0)}[x,y,t]$$

Out[∘]= $$\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2}{p1[x,y,t]^2}+\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^3}{p1[x,y,t]^3}-\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}-\frac{6\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}+\frac{2\,p[x,y,t]\,p1^{(3,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}$$

Out[∘]= $$-\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2}{p1[x,y,t]^2}+\frac{6\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^2}{p1[x,y,t]^2}-\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]^3}{p1[x,y,t]^3}+\frac{4\,p[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}-\frac{5\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}+\frac{7\,p[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]\,p1^{(2,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}-p^{(3,0,0)}[x,y,t]-\frac{2\,p[x,y,t]\,p1^{(3,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}$$

In[∘]:= `Coefficient[eq22, q[t]]`
系数
`Coefficient[Mp2, q[t]]`
系数
`Coefficient[rest, q[t]]`
系数

Out[∘]= $-p^{(1,0,0)}[x,y,t]$

Out[∘]= $-p[x,y,t]$

Out[∘]= $p[x,y,t]-p^{(1,0,0)}[x,y,t]$

In[∘]:= `Coefficient[eq22, n[t]]`
系数
`Coefficient[Mp2, n[t]]`
系数
`Coefficient[rest, n[t]]`
系数

Out[∘]= $-p^{(0,1,0)}[x,y,t]$

Out[∘]= $-p^{(0,1,0)}[x,y,t]$

Out[∘]= 0

Out[∘]= $-p^{(0,1,0)}[x,y,t]$

Out[∘]= 0

In[∘]:= `Coefficient[eq22, lamdba[t]]`
系数
`Coefficient[Mp2, lamdba[t]]`
系数
`Coefficient[rest, lamdba[t]]`
系数

Out[∘]= $$-\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]}{m[t]}$$

Out[∘]= $$-\frac{4\,g[t]\times p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}}$$

Out[∘]= $$\frac{4\,\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,m[t]}-\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{g[t]\times m[t]}\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]}{m[t]}$$

In[∘]:= $\texttt{Coefficient}\left[eq22,\ \sqrt{g[t]\times m[t]}\right]$
系数
$\texttt{Coefficient}\left[Mp2,\ \sqrt{g[t]\times m[t]}\right]$
系数
$\texttt{Coefficient}\left[rest,\ \sqrt{g[t]\times m[t]}\right]$
系数

Out[∘]= $$-\frac{\sqrt{3}\,lamdba[t]\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]}{m[t]}+\frac{2\,\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}-\sqrt{3}\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]-\frac{2\,\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}$$

Out[∘]= $$-\frac{4\,lamdba[t]\times p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,m[t]}+\frac{\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}-\frac{4\,p^{(1,1,0)}[x,y,t]}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}$$

Out[∘]= $$\frac{4\,lamdba[t]\times p[x,y,t]}{\sqrt{3}\,m[t]}-\frac{\sqrt{3}\,lamdba[t]\,p^{(1,0,0)}[x,y,t]}{m[t]}+\frac{\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(0,1,0)}[x,y,t]\,p1^{(1,0,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]^2}+\frac{p^{(1,1,0)}[x,y,t]}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}\,p[x,y,t]\,p1^{(1,1,0)}[x,y,t]}{p1[x,y,t]}$$

参考文献

[1] (日) 广田良吾, 著; 王红艳等译; 胡星标校. 孤子理论中的直接方法 [M]. 北京：清华大学大学出版社, 2008.5.

[2] Yueqian Liang, Guangmei Wei, Xiaonan Li, Transformations and multi-solitonic solutions for a generalized variable-coefficient Kadomtsev – Petviashvili equation, Computers and Mathematics with Applications, Volume 61, Issue 11, 2011, Pages 3268-3277, ISSN 0898-1221, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.007.

[3] Bo Tian, Guang-Mei Wei, Chun-Yi Zhang, Wen-Rui Shan, Yi-Tian Gao, Transformations for a generalized variable-coefficient Korteweg – de Vries model from blood vessels, Bose – Einstein condensates, rods and positons with symbolic computation, Physics Letters A, Volume 356, Issue 1, 2006, Pages 8-16, ISSN 0375-9601, https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.03.080.

[4] Wei Guang-Mei and Gao Yi-Tian and Xu Tao and Meng Xiang-Hua and Zhang Chun-Yi, Painlevé Property and New Analytic Solutions for a Variable-Coefficient Kadomtsev–Petviashvili Equation with Symbolic Computation, Chinese Physics Letters, Volume 25, Issue 5, 2008, Pages 1599, ISSN 0256-307X, https://dx.doi.org/10.1088/0256-307X/25/5/021

The Detailed Process of the Multi-soliton Solutions for a Generalized Variable-coefficient Kadomtsev–Petviashvili Equation Studied LI Zi-rui

Abstract: The variable coefficient KP equation can describe many of the nonlinearities in fluid mechanics and plasma physics more realistically than the constant coefficient equation Phenomenon. Therefore, a class of generalized variable coefficient KP equations with nonlinearity, dispersion and perturbation terms are studied. Take advantage of the Painlevé integrability condition and the Hirota bilinear method to obtain the multi-soliton solution of the variable coefficient KP equation from the variable coefficient bilinear equation Bäcklund transform and Lax pair.
Keywords: KP equation, multiple soliton solutions, Painlevé integrability condition, Hirota bilinear method, self-Bäcklund transform, Lax pairs