

2023 级物理学期末串讲

李梓瑞

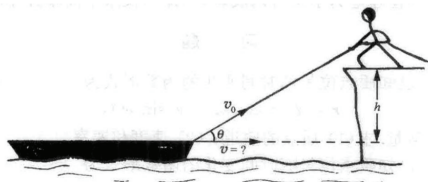
2024 年 6 月 8 日

- 1 力学
 - 质点组
 - 刚体 (简单定轴转动)
 - 流体
 - 例题
- 2 电磁学
 - 电
 - 磁
 - 电与磁
 - 例题
- 3 狭义相对论
 - 例题
- 4 关于物理学

自由度与坐标: 如何确定一个系统的位形? 状态?

思想: 选取最少的坐标, 表示整个系统

例: 直角坐标, 极坐标, 球坐标, 柱坐标, 自然坐标



习题 1.6

牛顿三定律:

- 牛顿第一定律: 惯性
- 牛顿第二定律: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (二阶微分方程)
- 牛顿第三定律: 反作用力

运动积分:

- 能量: $E = T + V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i^2 + V$, $\mathbf{F} = -\nabla V$
- 动量: $\mathbf{p} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ (三个分量)
- 角动量: $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$ (三个分量)

守恒量与对称性: 诺特定理

质心系中的守恒量

- 柯尼希定理: $T = T' + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_C^2$
- 质心系动量: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_C$
- 质心系角动量: $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}_C$

几个典型的保守力场:

- 平方反比力场
 - 引力: $\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\mathbf{\hat{r}}_{12}$, $V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$
 - 静电场: $\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\mathbf{\hat{r}}_{12}$, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}$
- 正比力场 (弹簧):

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r}, \quad V = \frac{1}{2}kx^2$$

相互作用系统——碰撞与散射

惯性系: 伽利略变换

非惯性系:

- 有加速度的平动

- 速度: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{a}t$

- 惯性力: $\mathbf{F}' = -m\mathbf{a}$

- 转动

- 速度: $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

- 加速度 (简单定轴转动):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}\omega^2 + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}$$

- 惯性力:

$$\mathbf{F}' = -m (\mathbf{a}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r} - \mathbf{r}\omega^2 + 2\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega})$$

转动惯量:

$$I = \int r^2 dm$$

平行轴定理: $I_O = I_C + md^2$, 垂直轴定理 (薄片): $I_z = I_x + I_y$
运动微分方程:

$$M = \frac{dL}{dt} = I\beta, \quad \text{where } M = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

运动积分:

- 能量: $E = T + V = \frac{1}{2}I\omega^2 + V$
- 角动量: $L = I\omega$

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较

质点的运动	刚体的定轴转动
速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
质量 m	转动惯量 $I = \int r^2 dm$
力 \vec{F}	力矩 M
运动规律 $\vec{F} = m\vec{a}$	转动定律 $M = I\beta$
动量 $\vec{p} = m\vec{v}$	动量 $\vec{p} = \sum \Delta m_i \vec{v}_i$
角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	角动量 $L = I\omega$
动量定理 $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$	角动量定理 $M = \frac{d(I\omega)}{dt}$

质点的运动规律与刚体的定轴转动规律的比较

质点的运动	刚体的定轴转动
动量守恒 $\sum F_i = 0$ 时 $\sum m_i v_i = \text{恒量}$	角动量守恒 $M = 0$ 时 $\sum I\omega = \text{恒量}$
力的功 $A_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$	力矩的功 $A_{ab} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$
动能 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$	转动动能 $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
动能定理 $A = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$	动能定理 $A = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$
重力势能 $E_p = mgh$	重力势能 $E_p = mgh_C$
机械能守恒 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$ 时 $E_k + E_p = \text{恒量}$	机械能守恒 $A_{\text{外}} + A_{\text{非保内}} = 0$ 时 $E_k + E_p = \text{恒量}$

常见刚体的转动惯量

刚体 (质量为 m)	转轴位置	转动惯量
细棒 (棒长为 l)	通过中心与棒垂直	$I_C = \frac{1}{12} ml^2$
	通过端点与棒垂直	$I_D = \frac{1}{3} ml^2$
细圆环 (半径为 R)	通过中心与环面垂直	$I_C = mR^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2$
薄圆盘 (半径为 R)	通过中心与盘面垂直	$I_C = \frac{1}{2} mR^2$
	直径	$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2$
空心圆柱 (内外半径为 R_1 和 R_2)	对称轴	$I_C = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
球壳 (半径为 R)	中心轴	$I_C = \frac{2}{3} mR^2$
球体 (半径为 R)	中心轴	$I_C = \frac{2}{5} mR^2$

- 粘性: $f = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S$
- * 连续性方程 (质量守恒): $\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- 伯努利方程 (能量守恒): $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gh(\text{势场项}) = \text{Constant}$
- 泊肃叶公式: $v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$, $Q = \frac{\pi}{8} \frac{p_1 - p_2}{\eta l} R^4$
- 斯托克斯公式: $f = 6\pi\eta r v$
- 雷诺数: $Re = \frac{\rho v l}{\eta}$

1.16 设将两物体 A 和 B 分别以初速 \boldsymbol{v}_A 和 \boldsymbol{v}_B 抛掷出去. \boldsymbol{v}_A 与水平面的夹角为 α , \boldsymbol{v}_B 与水平面的夹角为 β . 试证明: 在任何时刻物体 B 相对物体 A 的速度是常矢量.

2.14 一条均匀的绳子, 质量为 m , 长度为 l , 将它一头拴在转轴上, 以角速度 ω 旋转. 试证明: 略去重力时, 绳中的张力分布为

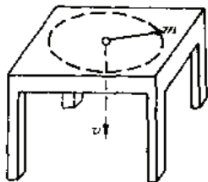
$$T(r) = \frac{m\omega^2}{2l}(l^2 - r^2),$$

式中 r 为绳元到转轴的距离.

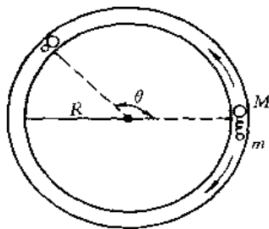
3.10 三只质量均为 M 的小船,一只跟着一只鱼贯而行,速率均为 v_0 ,由中间那只船上同时以水平速率 u (相对于船)把两个质量均为 m (设 m 不包括在 M 内)的物体抛到前后两只船上,当投入物体后三只船的速度如何?

3.12 一宇宙飞船以恒速 v 在空间飞行,飞行过程中遇到一股微尘粒子流,后者以 dm/dt 的速率沉积在飞船上. 尘粒在落到飞船之前的速度为 u ,在时刻 t 飞船的总质量为 $M(t)$,试问:要保持飞船匀速飞行,需要多大的力 F ?

5.5 一质量为 m 的物体, 绕一穿过光滑桌面上极小的圆孔的细绳旋转(见图). 开始时物体到中心的距离为 r_0 , 旋转角速度为 ω_0 . 若在 $t=0$ 时, 开始以固定的速度 v 拉绳子, 于是物体到中心的距离不断减小. 求(1) $\omega(t)$; (2) 拉绳子的力 F .



习题 5.5

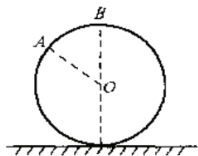


习题 5.6

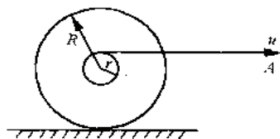
5.7 质量都是 m 的两个质点, 中间用长为 l 的绳子连在一起, 以角速度 ω 绕绳子的中点转动(设绳的质量可以略去不计).

- (1) 求它们对质心的角动量;
- (2) 绳突然断了, 求绳断后它们对中点的角动量;
- (3) 绳断前后它们的角动量是否相等?

7.4 半径为 R 的轮子在水平面上作纯滚动, 轮中部绕线轴的



习题 7.3

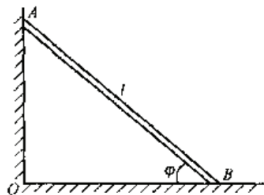


习题 7.4

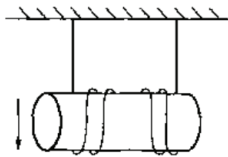
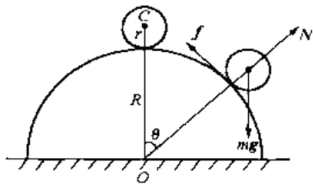
半径为 r , 线端点 A 以不变的速度 u 沿水平方向运动(见图), 求

- (1) 轮心的速度及轮子的转动角速度;
- (2) 轮子与平面接触点 B 的加速度.

7.6 寻找瞬心位置的几何方法是,在平面平行运动刚体上找出速度方向不同的两点 A, B , 分别作 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$ 方向的垂线, 两垂线的交点即为瞬心. 试据此求图示均匀直杆在墙和地面均光滑情况下滑倒时的瞬心.



7.24 如图所示, 质量为 m , 半径为 r 的小球从半径为 R 的固定圆柱面顶端自静止开始滚动. 为保证在 $\theta \leq 45^\circ$ 的范围内小球作纯滚动, 试求静摩擦因数 μ 的最小值.



麦克斯韦方程组 (微分形式)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

光速 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, 介质中的光速 $v = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$.

介质中的麦克斯韦方程组 (微分形式)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}$$

另有关系 (线性介质) $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$.

洛伦兹力: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

库仑定律 (非相对论近似):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

高斯定理 (积分形式):

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q/\epsilon_0$$

静电场条件: $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

能量与势:

$$W = q\phi, w_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}; \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

静电场中的介质

■ 导体:

- 内部场强为 0
- 内部电势处处相等
- 电场由边界条件唯一确定 (泊松方程)

■ 电介质:

- 极化 $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho'$ (多极矩), $\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$
- 线性磁介质 $\mathbf{M} = K_m \mathbf{B} = \chi_m \mathbf{H}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{D} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$
- $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$
- 边界条件: \mathbf{B} 法向连续, \mathbf{H} 切向连续 (无自由/传导电流)

物相: 铁磁、顺磁、反铁磁...

电感

- 定义: $C = Q/U$
- 串联: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$; 并联: $C = C_1 + C_2$
- 能量: $W = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$
- 几个典型系统的电容

安培定律与毕奥-萨伐尔定律 (非相对论近似):

$$\mathbf{F} = \int I d\mathbf{l} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

安培环路定理 (积分形式):

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

与电场不同, $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 恒成立 (无磁荷).

洛伦兹力

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

能量与势:

$$W = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}, w_E = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}; \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

静磁场中的介质

■ 电介质:

- 磁化 $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}', \mathbf{i}' = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$
- 线性电介质 $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$
- $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$
- 边界条件: \mathbf{D} 法向连续 (无自由电荷), \mathbf{E} 切向连续

电感

■ 自感:

- 定义: $L = \Psi / I$
- 串联: $L = L_1 + L_2$; 并联: $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$
- 能量: $W = \frac{1}{2} L I^2$

■ 互感:

- 定义: $M = \Psi_{12} / I$
- 能量: $W = M I_1 I_2$
- 关系: $M = K \sqrt{L_1 L_2}, K$ 为耦合系数

电磁感应

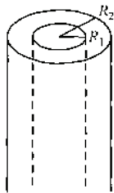
- $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, where $\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
- 楞次定律
- 动生电动势: $d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$
- 感生电动势: $d\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$

由麦克斯韦方程组出发, 可推出电磁波

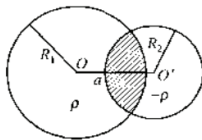
$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \mathbf{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \text{行波解}$$

- 电磁波是横波
- $E = vB$
- 能流密度 (坡印亭矢量): $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, 动量流密度 $\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$

1.16 如图为一无限长带电体系,其横截面由两个半径分别为 R_1 和 R_2 的圆相交而成,两圆中心相距为 a , $a < (R_1 + R_2)$,半径为 R_1 的区域内充满电荷体密度为 ρ 的均匀正电荷,半径为 R_2 的区域内充满电荷体密度为 $-\rho$ 的均匀负电荷.试求重叠区域内的电场强度.

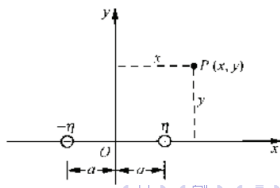


习题 1.15



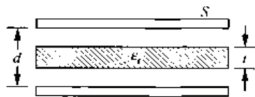
习题 1.16

1.25 如图,两条均匀带电的无穷长平行直线,电荷线密度分别为 η 和 $-\eta$,相距为 $2a$,两带电直线都与纸面垂直.试求空间任一点 $P(x, y)$ 的电势.



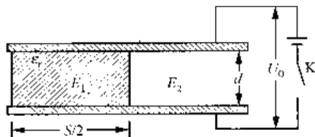
1.26 电量 q 均匀地分布在长

- 2.12** 如图,平行板电容器两极板相距为 d , 面积为 S , 电势差为 U , 其中放有一块厚为 l , 面积为 S , 相对介电常量为 ϵ_r 的介质板, 介质两边都是空气, 设空气的相对介电常数为 1, 忽略边缘效应. 试求: (1) 介质中的电场强度 \mathbf{E} , 极化强度 \mathbf{P} 和电位移矢量 \mathbf{D} ; (2) 极板上的电量 Q ; (3) 极板和介质间隙中的场强; (4) 电容 C .



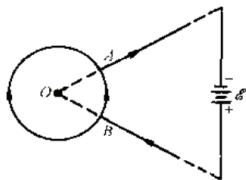
习题 2.12

2.21 如图,平行板电容器极板面积为 S , 两板间距为 d , 接电源,板间电压为 U_0 , 充电后不断开电源,插入相对介电常量为 ϵ_r 的均匀介质,并充满电容器的一半,忽略边缘效应,试求:(1) 电容器中的 $E_1, E_2, D_1, D_2, \sigma_1, \sigma_2$; (2) 与未插入介质时相比,系统能量的改变 ΔW ; (3) 在此过程中,电源做了多少功?



习题 2.21

4.3 如图,两根长直导线沿半径方向接到粗细均匀的金属圆环上的 A, B 两点,远处与电源相接.试求环中心 O 点的磁感应强度.

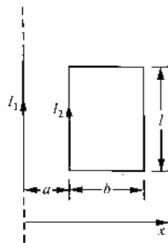


4.4 试证明:当一对电流元成镜像对称时,它们在对称面上任一点的合磁场

(2) 试证明: 当矩形线圈足够小时, 线圈受到的合力 F 的大小为

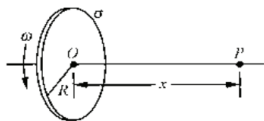
$$F = p_m \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x},$$

其中 p_m 为矩形线圈的磁矩, $\frac{\partial B}{\partial x}$ 为直导线产生的磁场沿垂直于直导线方向(图中 x 方向)上的磁场梯度.



习题 4.17

4.9 如图,半径为 R 的圆片上均匀带电,电荷面密度为 σ ,圆片以匀角速度 ω 绕它的中心轴旋转.试求:(1)轴线上与圆片中心 O 相距为 x 处 P 点的磁感应强度;(2)圆片转动时产生的磁矩.

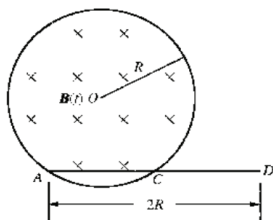


习题 1.9

5.5 一铁环中心线的周长为 30 cm , 横截面积为 1.0 cm^2 , 在环上密绕 300 匝表面绝缘的导线. 当导线中通有恒定电流 32 mA 时, 通过环横截面的磁通量为 $2.0 \times 10^{-6}\text{ Wb}$. 试求以下各物理量的值:

- (1) 铁环内部磁感应强度 B ;
- (2) 铁环内部磁场强度 H ;
- (3) 铁环的磁化强度 M ;
- (4) 相应的磁化率 χ_m 和相对磁导率 μ_r .

6.7 如图, 均匀磁场 B 处于半径为 R 的圆柱体内, 其方向与圆柱体的轴线平行, 且 B 随时间作均匀变化, 变化率 k 为常量, $k > 0$, 圆柱体之外无磁场. 有一长为 $2R$ 的金属细棒放在图示位置, 其一半位于磁场内部, 另一半在磁场外部, 试求棒两端的电势差 U_{DA} .

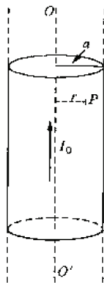


6.12 一根圆柱形的长直导线载有恒定电流 I , 电流均匀分布在它的横截面上, 试证明: 这导线内部单位长度的磁场能量为 $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$.

习题 8.3

8.4 如图为一无限长的圆柱形导体, 其半径为 a , 电阻率为 ρ , 载有均匀分布的电流 I_0 , 试求:

- (1) 体内与轴线相距为 r 的 P 点的 E 和 H 的大小和方向;
- (2) P 点的能流密度(坡印亭矢量) S 的大小和方向;
- (3) 计算长为 L , 半径为 r 的导体圆柱内消耗的能量, 说明能量从何而来.



习题 8.4

约定 $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$
洛伦兹变换与四维时空

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

庞加莱空间 (x, y, z, ict)

闵可夫斯基空间 $(+ - - -)$ or $(- + + +)$

- 尺缩: $l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$
- 钟慢: $t = \gamma t_0$
- 相对论性多普勒效应: $f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0$

相对论速度变换公式

$$\begin{cases} u'_x = (u_x - v) / (1 - \frac{v}{c^2} u_x) \\ u'_y = u_y / \gamma (1 - \frac{v}{c^2} u_x) \\ u'_z = u_z / \gamma (1 - \frac{v}{c^2} u_x) \end{cases}$$

能量, 动量, 质量

- 动质量: $m = \gamma m_0$
- 质能方程: $E = mc^2$
- 能量动量关系: $E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$

麦克斯韦和牛顿的矛盾: 理论的协变性?

1.7 一艘宇宙飞船以速度 $0.8c$ 中午飞经地球, 此时飞船上和地球上的观察者都把自己的时钟拨到 12 点.

(1) 按飞船上的时钟于午后 12:30 飞经一星际宇航站, 该站相对于地球固定, 其时钟指示的是地球时间. 按宇航站的时间, 飞船到达该站的时间是多少?

(2) 按地球上的坐标测量, 宇航站离地球多远?

(3) 在飞船时间午后 12:30 从飞船发送无线电信号到地球, 问地球何时(按地球时间)接收到信号?

(4) 若地球上的地面站在接收到信号后立即发出回答信号, 问飞船何时(按飞船时间)接收到回答信号?

1.13 有两个中子 A 和 B , 沿同一直线相向运动, 在实验室中测得每个中子的速率为 βc . 试证明在中子 A 的静止系中测得的中子 B 的总能量为

$$E = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} m_0 c^2,$$

其中 m_0 为中子的静质量.

- 物理学在研究什么?
- 物理本科生的课程
- 北航物理