北京航空航天大学

2022－2023 学年第一学期期末

试题册

A 卷

考试课程 理科数学分析 (I) 任课老师 ____________

班级__________学号___________姓名______________

题　号	一	二	三	四	五	六	七	总分
成　绩								
阅卷人								
校对人								

2022 年 12 月 23 日

一、判断题(在正确的命题后面打√, 在错误的命题后面打 ×, 每小题2分, 共10 分)

1. 对于数列 $\{x_n\},\{y_n\}$, 若 $\{x_ny_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 都收敛, 则 $\{y_n\}$ 收敛. (　　)

2. 若连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的函数值都是无理数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常值函数. (　　)

3. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内单调, 且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处有定义, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. (　　)

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数. (　　)

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, 若反常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则反常积分 $\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛. (　　)

二、填空题(每空 4分, 共 20 分)

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-1}=4$, 则 $a+b=$ __________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n^2)}=$ ______________.

3. 不定积分 $\int\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=$ ______________.

4. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=(x^3+1)\sqrt{1-x^2}+\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)=$ ________.

5. 曲线弧段 $y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t\,(x\in[0,\dfrac{\pi}{3}])$ 的弧长为 ______________.

三、计算题(每小题8分，共32分)

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)+2(\cos x-1)}{\sin^4 x}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{3y}+\int_0^{x+y}\cos(t^2)\mathrm{d}t=1$ 确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{(0,0)}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{(0,0)}$.

3. 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t$, 求 $I=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

4. 求不定积分: $I=\int\dfrac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

四、(12 分) 设函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

1. 求 $f(x)$ 的单调区间与极值;

2. 设 $f(x)$ 的两个不同的极值点分别为 x_1 与 x_2, 求曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = x_1$, $x = x_2$ 和 x 轴所围图形 D 的面积;

3. 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V.

五、(10分) 1. 设 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\,(x > 0, \alpha > 0)$, 证明存在常数 $a > 0$, 使得函数$f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上单调减少, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

2. 讨论反常积分 $I = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln x \cos x}{x^p} \mathrm{d}x$ 的收敛情况 (包括绝对收敛、条件收敛, 参数 $p > 0$).

六、(10分) 1. 叙述函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的 Lagrange 中值定理.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且有 $0 < |f'(x)| \leqslant M$, 证明:

$$\text{若 } f(b) = 0, \text{ 则 } \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{2}(b-a)^2;$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且有 $0 < |f'(x)| \leqslant M$, 证明: 对于任意的正整数 n, 成立

$$\left| \int_0^1 f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

七、(6分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对于任意的正实数 h, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nh)$ 存在, 试判断 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 是否存在, 并证明你的判断.