

理力大作业——煎饼的旋转

印子一, 李梓瑞, 刘泽宇, 王鸿, 王者

2024 年 6 月 16 日

引言

将一些球放在一个圆形容器中, 如果绕一个竖直轴移动容器, 球可以与容器运动方向同向移动, 也可以向容器运动方向的相反方向运动.

在第一部分中, 我们通过设计实验探究了粒子数、容器、转动频率对粒子整体运动方向的影响. 在第二部分中, 我们从理论角度出发建立了粒子(圆球)的运动模型和振子近似, 从热力学角度提出了固体类比和本征态热化假说两种可能能够解释这种现象的理论, 并且建立了格点系统模型, 引入量子对偶方法, 给出了一种从理论上可以计算出转变点的方法. 在第三部分中, 我们使用 comsol 多物理场仿真的多体动力学模块进行了数值模拟, 构建了二维模型并提出集群式运动的假设, 研究了某一小球在实验环境下的位移.

1 实验

1.1 实验设计

- 自变量: 粒子数, 容器相对粒子的大小, 容器形状, 粒子数密度, 转动频率
- 因变量: 粒子整体的运动方向, 可以选取单粒子平均角动量及其方向进行量化

- 实验仪器:20-30 个小球 (直径约为 10mm), 直径约为 60mm 的圆柱形容器.

实验步骤如下:

1. 将小球逐渐加入容器中, 实验者在平面按匀速圆周运动摇动容器, 在稳定后每次记录粒子整体的运动情况 (定性), 特别要注明粒子整体转动的剧烈程度. 采用最外层小球运动的周期来量化角动量的大小 (至少 10 圈). 此外, 记录转动的圈数.
2. 列表, 计算每次的粒子数密度和最外层粒子运动的平均角速度 ($\omega = 2\pi/(nT)$), 和转动的平均角速度.
3. 重复上述步骤, 完成实验.

1.2 实验过程

第一次实验过程: 在桌子上用铅笔画一个圆轨迹, 实验者手持圆盘在桌上沿轨迹转动, 另一实验者持手机在圆盘正上方录像. 保持圆盘旋转的半径大致不变, 一次实验中圆盘角速度大致不变. 每次实验在圆盘中装入不同数量小球, 由 16 个小球开始, 每次添加 2 个, 至装满 (30 个). 每次圆盘进行顺时针与逆时针两次实验.

记录数据如表1:

表 1: 实验数据

小球个数	圆盘转动方向	小球转动方向	小球圈数	圆盘圈数	时间 (s)
16	顺	顺	10	12	10
	逆	逆	10	10	8
18	顺	顺	10	11	7
	逆	逆	10	11	7
20	顺	顺	10	24	16
	逆	逆	10	41	30
22	无	无	无	无	无
	无	无	无	无	无

24	顺	逆	10	135	82
	逆	顺	10	136	84
26	顺	逆	10	118	69
	逆	顺	10	110	64
28	顺	逆	10	106	59
	逆	顺	10	101	58
30	顺	逆	10	229	122
	逆	顺	10	199	100

1.3 实验数据分析

小球个数为 16、18 个时, 圆盘面积有较大空余, 小球在转动过程中发生的碰撞不均匀, 在圆盘中的运动轨迹不是固定的圆, 更接近于外圈运动与内圈运动交替往复, 周期基本等同于圆盘周期.

小球个数增大为 20、22 个时, 小球碰撞更加频繁, 此时被多个球包围的小球的运动已观察不出明显的圆轨迹, 难以判断小球运动的周期;22 个小球时基本观察不到周期.

小球个数为 24、26、28 时, 小球碰撞更频繁, 且碰撞频率基本稳定, 小球之间的相对位置基本不变, 整体转动方向变为与圆盘转动相反, 且小球角速度与圆盘角速度之比随小球个数增加而增大, 呈线性相关.

小球个数为 30 时, 小球基本填满圆盘, 小球角速度与圆盘角速度之比骤减, 推测原因是此时摩擦力的影响增大.

2 理论

2.1 经典力学分析

作为数值模拟和实验设计的参考, 我们先从经典力学的角度分析粒子(圆球) 的运动.

首先考虑理想情况, 即无摩擦无滚动. 设圆筒半径为 R , 小球半径为 r_0 , 转轴和圆筒中心轴的距离为 (从圆筒中心指向转轴) L , 小球相对于圆筒中心的距离为 (从圆筒中心指向小球中心) $\mathbf{r}_i, \forall i = 1, 2, \dots, N$. 平面取极坐标 (r, θ) . 于是纯平动动能为

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m (\dot{r}_i^2 + r_i^2 \dot{\theta}_i^2) \quad (1)$$

转轴附加的动能为

$$T_{Rot} = \frac{1}{2} \sum_i m \Omega^2 L^2 = Constant \quad (2)$$

可以看出转轴附加的动能带来了一个常数标量场, 这对动力学没有贡献. 可以推断: 运动开始时, 旋转的原因应该是开始转动时的角加速度和碰撞引起的初速度分布; 在稳定运动 (平动) 时, 旋转的原因应该是粒子群与墙壁的摩擦和不均匀的碰撞. 在模拟的时候, 我们只需要给球一个初始的速度就可以了. 这也说明了外界摩擦力 (或碰撞) 在这个系统中起到了驱动力的作用, 不可忽视.

再考虑有摩擦无滚动的情况. 这在模拟时, 可以直接在软件中加入摩擦项, 并且合理的操作是: 先加入壁和球之间的摩擦, 再加入球和球之间的摩擦. 理论分析时, 可以在拉格朗日量中加入等效的耗散函数 \mathcal{F} , 使得耗散力为

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} \rightarrow \mathcal{F} \simeq \frac{1}{2} k \dot{q}^2 \quad (3)$$

则拉氏量与运动方程变为

$$L = T - V + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F} dt = L^{origin} + \mathcal{F} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^{origin}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L^{origin}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \quad (4)$$

最后我们考虑有摩擦有滚动的情况. 这在模拟时, 可以直接在软件模拟中加入滚动模拟. 理论分析时, 可以在拉格朗日量中加入滚动项, 并对角化

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_{i,\alpha\beta} \omega_i^\alpha \omega_i^\beta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} I_i \omega_i^2 \quad (5)$$

剩下的由位形限制产生的场可直接由软件模拟, 但是出于完整性和之后推导的考虑, 我们仍然将其显式地写出

$$V_{ij} = \begin{cases} \infty, \exists i, j (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < r_0) \\ 0, \forall i, j (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > r_0) \end{cases}, \quad V_i^{wall} = \begin{cases} \infty, \exists i (|r_i| > R) \\ 0, \forall i (|r_i| < R) \end{cases} \quad (6)$$

为了便于计算, 将这个势垒截断

$$V_{ij} = \begin{cases} V_0, \exists i, j (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < r_0) \\ 0, \forall i, j (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| > r_0) \end{cases}, \quad V_i^{wall} = \begin{cases} V_0, \exists i (|r_i| > R) \\ 0, \forall i (|r_i| < R) \end{cases} \quad (7)$$

未来, 可以将系统参数进行极坐标的傅里叶变换, 并在倒空间中考虑模态的选取和系统的动力学. 由于其数学操作很复杂, 以及本人的精力限制, 这里不给出细节.

2.2 小球体系的振动模型

在实验中注意到, 当小球系统发生反转时, 系统内部小球的相对位移很小, 此时小球的运动行为与固体中原子在平衡位置附近的振动十分相似. 因此我们仿照固体物理的处理方法, 对小球系统的能量进行近似, 提出了振动模型.

2.2.1 引理

在引入振动模型之前, 首先来证明, 在圆盘内只有单个小球运动时, 其绕自身的质心必然反转, 与球的大小无关.

如图1, 假定球壳在绕 O 点以 Ω 的角速度逆时针旋转. 每次碰撞发生时, 小球质心 C , 转轴 O 与圆盘中心 O' 相对位置如图所示. 此时, 器壁将对小球施加一个由 C 指向 O' 的冲量 I_r . 这个冲量将使小球的质心相对与 O 点有一个正的角动量, 即围绕 O 点逆时针运动. 随着碰撞不断进行, 小球质心的速度越来越快, 最终会导致 $v_{C\tau} > \Omega r$.

此时若再发生碰撞, 小球会受到与运动方向相反的冲量 I_r , 这是由器壁的摩擦引起的. 从而, 小球会绕着质心 C 顺时针方向转动, 即反转.

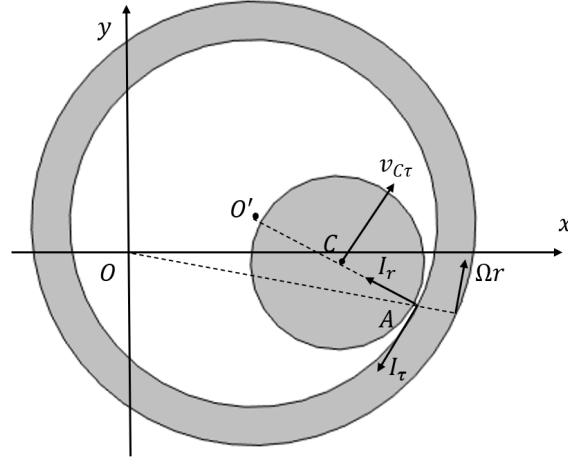


图 1: 碰撞过程

2.2.2 振动模型

将小球体系的动能写为

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{r}_i'^2 \quad (8)$$

式中的三项分别为整体质心平动, 整体绕质心的转动, 以及小球在“固连系”下偏离初始位置的动能. 可以发现, 当第三项类似于固体物理中粒子的振动. 当振动项可略时, 小球体系将等价于一个刚性体, 从而根据 2.2.1 中的引理, 体系将会反转. 接下来就来讨论如何对振动动能项进一步近似.

小球体系中最难处理的是不同球之间的碰撞. 根据之前的讨论, 碰撞相当于一个刚势场. 鉴于反转情况下球的相对运动很小, 我们引入一项固连系下定常的势场.

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \sum_i \left[\frac{1}{2}m_i \dot{r}_i'^2 + V_i(r_i') \right] \quad (9)$$

势场代替碰撞, 将小球约束在一个有限的范围内振动. 为了刻画小球的振动范围, 引入一个自由程

$$r_v = \frac{\pi R^2 - n\pi r^2}{2n\pi r} = \frac{R^2 - nr^2}{2nr} \quad (10)$$

式中 R, r 分别为圆盘和小球的半径. 用圆盘中的空余面积除以体系的总周长, 得到小球能够自由运动的距离. 根据刚势的特点, 在自由程以内, 其势能均取得极小值, 为一常数. 振动动能的量级与 r_v^2 相当, 当 $r_v \ll r$ 时, 振动动能影响变得微弱, 从而

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + V_0 + O(r_v^2) \quad (11)$$

此时的小球体系即接近于刚体.

2.2.3 讨论

根据自由程的表达式, 当粒子数增多时, 自由程减小. 而对于粒子数较少, 或者半径很小的体系, 其自由程相对较大, 系统近似于定域的理想气体. 此时小球的势场约束作用很弱, 实际情况中表现为小球之间碰撞的概率很小, 从而相互作用很弱, 每个小球的运动都符合引理中的情况, 即小球质心绕着转轴正转, 于是整个体系也是正转的.

总体来说, 小球体系中的粒子数和几何参数影响了自由程, 而自由程通过影响势场函数来约束小球体系的运动. 随着自由程的减小, 小球体系越来越趋于刚性体, 从而表现出从正转变为反转的现象.

更深入的说, 我们可以认为小球的自由程贡献了正转, 而小球的局域振动贡献了反转. 当小球增多时, 局域的自转角动量扩散到了整个系统, 使系统从正转的状态转变为反转的状态, 这个过程也是小球间的相互作用逐渐粗粒化成势场的过程.

2.3 经典系统的热化

我们先简单介绍刘维尔定理和绝热不变量. 在热统课程中, 我们已经接触过系综理论. 在系统的相空间中, 我们有连续性方程, 即刘维尔定理:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \{\rho, H\} = 0 \quad (12)$$

其中 ρ 是相空间中参考点的密度. 接下来考虑这个系统的参数 λ , 且这个参数做非常缓慢的变化, 即: 在一个运动周期时间 T 内, $T \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda$. 当 λ 缓变, 系统能量 E 也会变化, 说明系统的缓变能量 E 依赖于 λ . 在一个运动周期

中, 有

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle \dot{\lambda} \quad (13)$$

其中

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{\oint (\partial H / \partial \lambda) dt}{\oint dt} = \frac{\oint (\partial H / \partial \lambda) (dq / \dot{q})}{\oint (dq / \dot{q})} = \frac{\oint (-\frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial H}{\partial p}) (dq / \frac{\partial H}{\partial p})}{\oint (dq / \frac{\partial H}{\partial p})} = -\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial H} dq} \quad (14)$$

代入可得

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\dot{\lambda} \frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial H} dq} \Rightarrow \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = \oint \left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle dq = 0 \quad (15)$$

这等价于

$$\left\langle \frac{dI}{dt} \right\rangle = 0, \quad I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq \quad (16)$$

其中 I 称为绝热不变量. 这个量在经典周期系统中会诱导出几何相位.

在统计力学中, 我们还有一条基于刘维尔定理的基础假设: 各态遍历假设, 更准确的说是准遍历假设. 由于这个假说的数学方面很复杂, 这里只作简单的论述. 这个假设简单来说就是指“系综平均等于时间平均”, 相轨道可以稠密的分布在能量曲面的邻域, 这意味这我们对系统测量时可以利用统计的方法做出预测. 然而, 这个假设明显让人难以信服, 而且有很多反例 (无论是实验还是理论). 在本例中, 我们容易看到这个假设不再成立, 换言之, 这个系统在粒子数密度变化时发生了“各态遍历破缺”. 由于本例中考虑的是小系统, 所以下面的本征态热化假说 (ETH) 应该更具解释性. 具体来说, 我们可以认为对该系统的测量的统计性质来源于外部的热源对该子系统的热化作用, 并使其趋于微正则系综的表达. 对于该系统的正转和反转的突变, 我们可以将其看成一类准动力学相变: 在粒子数增大时, 系统由混沌逐渐过渡为准周期系统, 此时该系统可以定义绝热不变量; 在这个过程中, 绝热不变量可能在某个点出现, 即以 I 为 detector 测出的奇点, 这个点将系统分为 ETH(热化) 态和 MBL(局域) 态, 即少粒子下束缚在自身的自转和准周期下的热化到全子系统的公转. 在这种观念下, 正转和反转的突变在理论上就可能会产生.

在下一小节, 我们将介绍一种可能的计算方法.

2.4 格点系统与量子对偶

2.4.1 格点系统简述

在这一部分, 我们不考虑由系统中粒子的广义坐标和广义动量定义的相空间中可能状态的连续体, 而是假设粒子位于某些格点上, 它们可以在其中移动并相互作用. 在这种描述下, 我们将用概率来完整描述系统. 在这里, 我们只需要考虑粒子从一个格点跳到另一个格点 (hopping). 因为这些概率不取决于系统的历史, 所以我们可以使用马尔可夫过程来描述系统. 从给定的初始状态开始, 系统可以在状态空间中采取许多不同的路径, 每条路径的概率是构成路径的所有基本移动之间的所有转移概率的乘积.

建模时考虑连续时间

$$\frac{d}{dt}P_\eta(t) = \sum_{\eta' \neq \eta, \eta' \in X} [w_{\eta' \rightarrow \eta}P_{\eta'}(t) - w_{\eta \rightarrow \eta'}P_\eta(t)] \quad (17)$$

这些速率满足 $0 \leq w_{\eta' \rightarrow \eta} < \infty$. 在这种连续时间描述中, 系统不改变其状态的概率以指数形式随时间衰减.

在本例中, 我们只需要考虑紧邻位置的转移, 并假设粒子以速率 $w_{x \rightarrow x+1} = D_R$ ($w_{x \rightarrow x-1} = D_L$) 向右 (向左) 跳跃

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = D_R \cdot P_{x-1}(t) + D_L \cdot P_{x+1}(t) - (D_L + D_R) \cdot P_x(t) \quad (18)$$

在对系统进行格点化操作之后, 不管是用计算机模拟, 还是在量子体系中解释, 都会变得更容易.

2.4.2 量子对偶的实现 [1]

这种经典系统的随机描述与薛定谔方程之间有一些形式上的类比. 在量子力学中一样, 描述是概率性的, 并且时间演化由涉及概率分布的线性方程给出. 实际上, 主方程和期望值或概率分布一个方便的表示, 就是采用在量子力学中的希尔伯特空间和狄拉克符号. 通过这种方式, 概率分布会映射到一个线性空间中的以时间为自变量的矢量 $P(t)$, 而过程演化则被表示为概率分布的时间平移矩阵. 当然, 这些针对概率矢量的变换是幺正的 (unitary).

于是主方程变为

$$\frac{d}{dt} |P(t)\rangle = -H |P(t)\rangle \quad (19)$$

并且在离散时间假设中定义转移矩阵

$$|P(t + \Delta t)\rangle = T |P(t)\rangle, \quad T = 1 - H\Delta t \quad (20)$$

原经典系统中的转移概率就是转移矩阵的矩阵元.

在本例中, 我们可以选择二维 fermion-hubbard 模型 (在 x 方向是开放边界条件, 在 y 方向是周期性边界条件), 对应的哈密顿量为

$$H = - \sum_{ij,\sigma} (t_{i,j}^{(1)} c_{i+1,j,\sigma}^\dagger c_{i,j,\sigma} + t_{i,j}^{(2)} c_{i,j,\sigma}^\dagger c_{i+1,j,\sigma} + \dots) + \epsilon \sum_{ij,\sigma} c_{i,j,\sigma}^\dagger c_{i,j,\sigma} \quad (21)$$

其中系统自旋守恒并全为同一自旋方向. 利用费米子的泡利不相容定理, 我们可以更简单地表述出该系统, 并将其对偶回经典系统. 但是, 由于费米子的反对易性质, 其粒子数算符的本征值不属于实数或复数 (称其为 Grassmann 代数), 可以预计在模拟经典系统的概率分布时, 可能会出现符号问题 (sign problem). 这个问题在 Monte Carlo 模拟中经常出现, 其会导致无法解释的负概率. 因此, 我们选择另一个更合理的对偶方式.

我们可以通过将自旋向上视为空位, 自旋向下视为晶格位置上存在粒子, 可以将自旋模型看作是每个晶格位置最多只能被一个粒子占据的自旋系统. 从物理上讲, 这种经典排斥原理可以归因于粒子的硬核排斥, 或者是当两个粒子在同一个晶格位置相遇时的瞬时湮灭. 在与自旋系统的对应中, 我们将使用以下约定: 将自旋向下视为一个粒子, 自旋向上视为空位.

于是, 系统的哈密顿量可以按照周期性边界条件的二维 Ising 模型构造出来:

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i^x \sigma_j^x - \frac{b_\epsilon}{2} \sum_{\{0\}} \sigma_{\{0\}}^x \sigma_{\{0\}}^y + A \sin(\Omega t - kx) \quad (22)$$

其中第二项是边界的 duality defect 项, 用来描述粒子和墙壁的摩擦; 第三项描述附加碰撞的影响. 或者我们可以直接构造定义在圆域上的二维 Ising 模型, 但是其技术细节的水平要求较高, 这里不给出细节.

当然, 这套方法构造出来的哈密顿量不需要是厄密的. 这里这样构造只是因为其符合常识.

2.4.3 测量量子态

在本例中, 我们需要测量系统运动一个周期需要的时间. 这在对偶后称为“回波”(echo)

$$F_{echo} = |\langle \psi' | \psi \rangle|^2 \quad (23)$$

对于不同的粒子数密度, 我们可以采用蒙特卡洛等方法模拟 (粒子数过大难以对角化操作). 我们期望能在有限的粒子数密度测得 echo 的突变. 另外可以通过数值解出基态看出顺或逆.

一维平衡系统中短程相互作用不产生与长程有序性有关的相变. 此外, 在没有自发对称性破缺的情况下, 系统的整体状态与边界条件无关. 如果系统在外力作用下维持非平衡状态, 使系统产生某种“荷”的流, 那么上述情况就不一定成立——粒子输运与局部缺陷或不均匀性相互作用可能会产生各种类型的相变. 适当地选择边界条件可以代表此类缺陷在原本均质系统中的影响. 其中一些模型可以精确求解, 并允许详细研究其稳态特性, 如密度分布或密度相关性. 由于精力限制, 本人无法完成程序的编写, 只给出了理论的框架而没有提及技术细节.

3 模拟

3.1 模型的构建

考虑到时间以及硬件设备的限制, 本次仿真仅完成了经典力学模型的构建, 并且添加了一些关键的抽象方法如下:

- 二维模型: 将圆筒建模为刚性的圆环, 将小球建模为圆片, 体系在二维平面上运动. 这种模型忽略了小球的滚动, 但保留了小球绕垂直于纸面的转轴的自转.
- 集群式运动: 在导出数据时, 用其中一个小球在不同参照系的运动代替整个粒子 (小球) 群的运动. 这是因为在实验过程中发现不同小球的运动模式基本相同, 尽管群体的运动会受到小球数目与几何尺寸的影响, 但最后的结论是一致的. 此外, 限于设备算力, 本次仿真中没有完全参考实物实验的参数, 从而将小球数目的最大值控制在 20 左右.

这种建模方法降低了体系的自由度数目,从而大大降低了运算时间,并且对于实验现象没有明显的影响.

3.2 模拟方法

模拟使用了 comsol 多物理场仿真的多体动力学 (multibody dynamics) 模块.

实验的参数设定由表2中给出 (采用国际单位制).

摩擦系数	材料密度	碰撞恢复系数	小球半径	圆盘半径	圆盘角速度
0.2	7870	0.7	0.01	0.054	6

表 2: 参数设定

简要的实验设计

- 预实验组: 1 个小球, 用于验证 2.2.1 的引理.
- 实验组: 1,2 两组, 小球数目分别为 15, 20 个.
- 因变量: 某一小球的位移, 某一对相邻小球之间的相对位移

3.3 模拟结果

3.3.1 预实验

预实验中小球自转角度与圆盘旋转角度随时间变化的图像如图2. 不难看出小球的自转方向与圆盘是相反的.

3.3.2 实验数据

导出各实验组的位移数据表, 从而可计算出小球体系整体自转的角度 θ . 绘制运动轨迹以及 $\theta - t$ 曲线如图3.

模型图中标蓝的小球是被选中代表体系运动的小球. 可以观察到, 15 球实验组中的体系在跟随圆盘逆时针转动. 图 1(c) 中角度的突变表示代表小

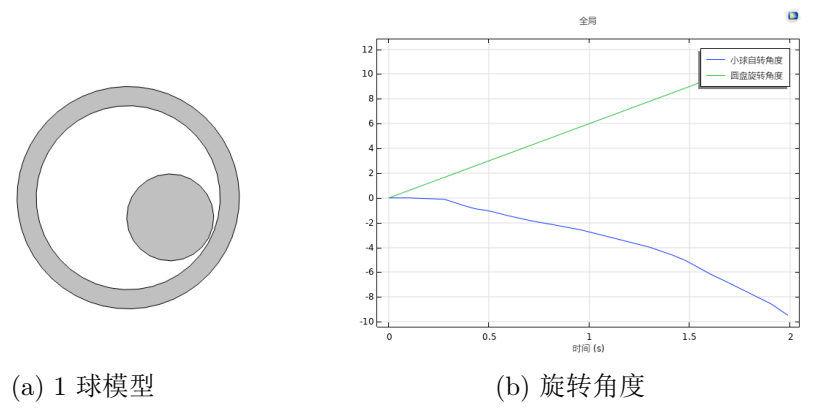


图 2: 预实验

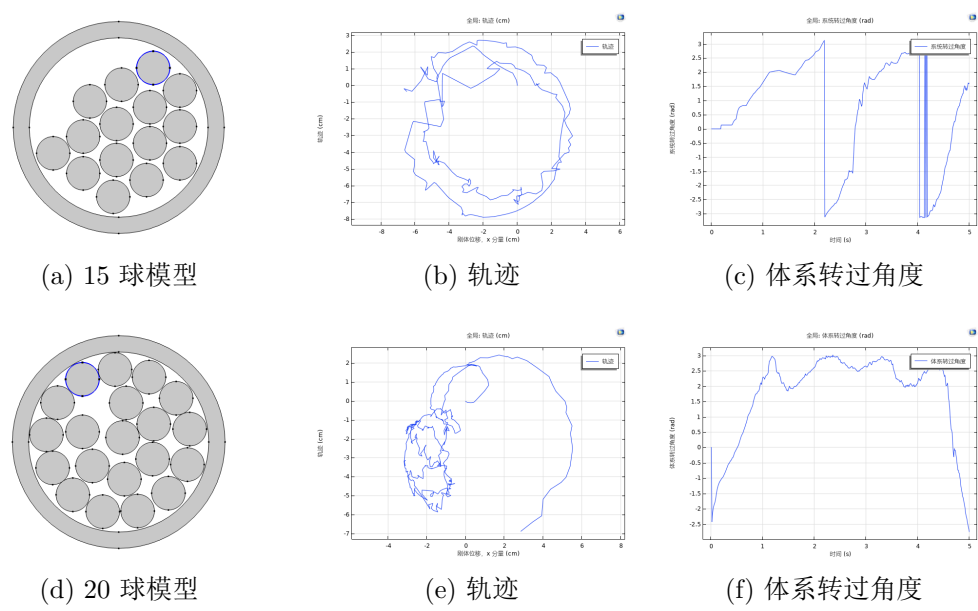


图 3: 实验数据

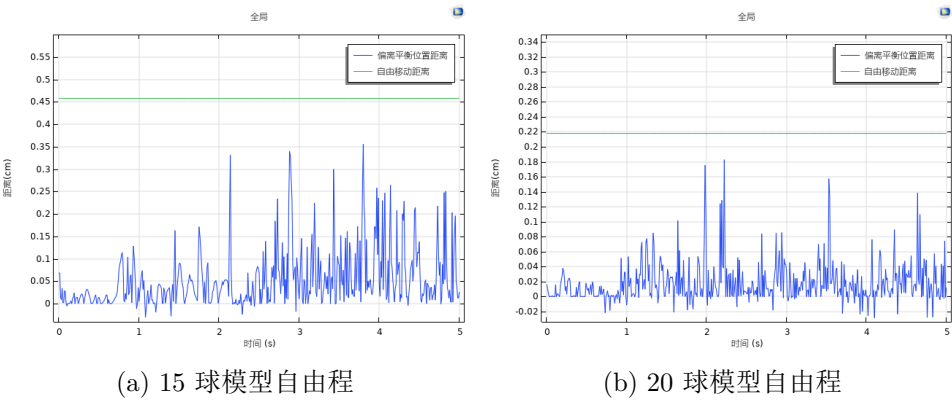


图 4: 自由程

球越过了极轴, 从而可知 15 球体系的角度近似是单调递增的. 相比之下, 20 球的组别开始时正转 (逆时针), 体系经过一段不稳定阶段后变为反转 (顺时针).

根据几何参数, 可以算出的 15 球模型与 20 球模型的自由程分别为 0.46cm 和 0.22cm, 比较体系中小球之间的相对运动距离 (见图4) 发现小球的运动的确被限制在自由程内.

4 结论

我们分别从实验、数值模拟和理论三方面分别说明. 从实验上我们测出正传与反转的转变点大概在小球面积占据率 66.7% 处, 数值模拟显示的转变点大概在小球面积占据率 68.6% 处, 可以认为准确. 此外, 我们发现小球的面积占据率能影响转变点. 从理论上, 我们从经典力学出发推出了系统的势能, 以此指导数值模拟, 并给出了两种能粗略地解释转变点成因的理论——对固体的类比和系统的热化, 最后给出了一种可行的从理论上计算转变点的方法.

5 后记

分工: 李梓瑞负责大部分理论和实验设计, 印子一负责数值模拟和小部分理论, 刘泽宇和王鸿负责小部分实验设计、实验过程、实验数据分析, 王者负责文章润色和引言的撰写.

参考文献

- [1] Gunter M. Schütz. Integrable stochastic many-body systems. Technical Report Juel-3555, Jülich, 1998.