

朗道相变理论

李梓瑞

2024 年 5 月 10 日

- 1 朗道范式引言
- 2 朗道平均场理论
 - 可观测量
 - 临界指数与标度律
- 3 金兹堡-朗道理论
 - 非均匀序参量
 - 平均场上的涨落
- 4 多分量情况
 - $O(2)$ 与 Goldstone 机制
 - Anderson-Higgs 机制
- 5 超越朗道范式

- 物质状态 = 有序性 (1933.Landau)
e.g. 固体 (长程序 long-ranged-order), 液、气 (短程序)
- 序参量 (order parameter)
序参量 = 0, 有序; 序参量非零, 无序 e.g. 磁化强度、宏观波函数
- 相变 = 对称性破缺 (symmetry breaking)
体系对称性降低 \rightarrow 有序 e.g. 铁磁、顺磁
局域对称 $>$ 整体对称; 分立对称、连续对称
相变导致物理系统状态的对称性小于系统哈密顿量的对称性

什么是自发对称性破缺 (spontaneous symmetry breaking)?



- 空间平移: 晶态固体 (crystal solid)
- 空间旋转: 液晶 (liquid crystal)
- 自旋旋转: 磁体, 铁磁 (ferromagnetism), 反铁磁 (antiferromagnetism)
- 规范对称: 超导 (superconductivity), 超流 (superfluid)
- 时间反演: 手型超导 (chiral superconductivity), 手性自旋液体 (chiral spin liquid), 圈电流 (loop current)
- 轨道对称: 锰氧化物和铁基超导的轨道有序
- 时间平移: 时间晶体 (time crystal), 由 Wilczek 建议.

常数场构型的贡献最大——saddle point 近似

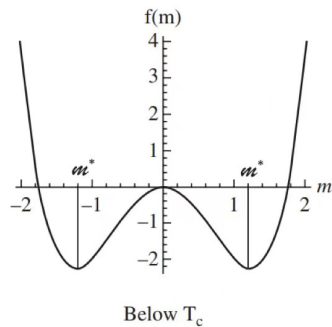
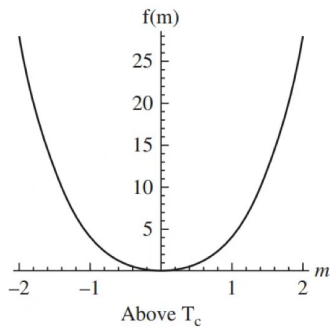
$$f_L[\Psi] = \frac{F[\Psi]}{V} = f_0 + \frac{r}{2}\Psi^2 + \frac{u}{4}\Psi^4 + \cdots, (\text{Z}_2 \text{ symmetry})$$

where $\Psi^* = \Psi, r = r(T), u > 0$.

$$r \equiv a(T - T_c), a > 0$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial \Psi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T > T_c, \Psi = 0 \\ T < T_c, \Psi = 0 \text{ or } \Psi = \pm \sqrt{\frac{-r}{u}} \end{cases}$$

$\text{Z}_2(\text{Ising})$ spontaneous symmetry breaking



取 $a = 1$

■ 热容 (单位体积)

$$C_v = -T \frac{\partial^2 f_L}{\partial T^2} \begin{cases} 0, T > T_c (\text{错误!}) \\ \frac{T}{2u}, T < T_c \end{cases} \Rightarrow \Delta C_v = \frac{T_c}{2u}$$

■ 外场 $f'_L = f_L - h\Psi$

$$\frac{\partial f_L}{\partial \Psi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Psi = h/r \text{ and } \chi = \frac{\partial \Psi}{\partial h}, \text{相变点附近} \\ \Psi = (h/u)^{1/3}, \text{相变点}(r = 0) \end{cases}$$

■ 幂律 (power-law) 行为与临界指数 (critical exponent)

$$C_v \propto |T - T_c|^{-\alpha}, \Psi \propto |T - T_c|^{\beta}, \chi \propto |T - T_c|^{-\gamma}, \Psi \propto |h|^{1/\delta}.$$

■ 标度律/关系 (scaling law/relation)

Rushbrooke 标度律: $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$

Griffiths 标度律: $\gamma = \beta(\delta - 1)$

Fisher 标度律: $(2 - \eta)\nu = \gamma$

* 超标度 (hyperscaling) 关系/Josephson 标度律:

$$2 - \alpha = \nu d \text{ (Landau, } d = 4)$$

d 是空间维数, ν 是关联长度 (correlation length) 的临界指数,
 η 是关联函数的反常维度 (anomalous dimension).

表 12.1: 比较临界指数.

	Landau	$d = 2$	$d = 3$	$d = 4$
α	跃变	0^+	0.110	0^+
β	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0.326	$\frac{1}{2}$
γ	1	$\frac{7}{4}$	1.237	1
δ	3	15	5.1	3
ν	$\frac{1}{2}$	1	0.630	$\frac{1}{2}$
η	0	$\frac{1}{4}$	0.036	0

Ginzburg-Landau 理论 (空间变化的序参量)(3 个假设:symmetry, expansion*2)

$$F_{GL} = \int d^d x f_{GL}[\Psi(x)], \text{ where } \Psi_\alpha(x) \sim \sum_{i \in \mathcal{N}(x)} n_{i\alpha}$$

$$f_{GL} = \frac{s}{2}(\nabla \Psi)^2 + \frac{r}{2}\Psi^2 + \frac{u}{4}\Psi^4 - h\Psi, \quad s > 0$$

关联长度

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{s}{|r|}} \propto |T - T_c|^{-1/2} \rightarrow \nu = 1/2$$

对于 $\nu > 0$, 当系统接近相变点时, 关联长度将会发散, 此时系统唯一的长度尺度就是关联函数本身.

体系稳定时, 其自由能取极小值 (变分为零)

$$\delta F_{GL} = 0 \Rightarrow \text{Lagrangian 方程: } \frac{\partial f_{GL}}{\partial \Psi} - \nabla \frac{\partial f_{GL}}{\partial (\nabla \Psi)} = 0$$

由于 f_{GL} 只是 Ψ 的函数, 所以只需要 $\frac{\partial f_{GL}[\Psi(x)]}{\partial \Psi} = 0$.
 f_{GL} 差一个全微分不影响性质 (假定无穷远边界上序参量的空间梯度为零)

$$\begin{aligned} f_{GL}[\Psi] &= \frac{s}{2} [(\nabla \Psi)^2 - \nabla(\Psi \nabla \Psi)] + \frac{r}{2} \Psi^2 + \frac{u}{4} \Psi^4 - h \Psi \\ &= -\frac{s}{2} \Psi \nabla^2 \Psi + \frac{r}{2} \Psi^2 + \frac{u}{4} \Psi^4 - h \Psi \end{aligned}$$

代入稳定条件:

$$\begin{aligned} & -s \nabla^2 \Psi + r \Psi + u \Psi^3 - h = 0 \\ \Rightarrow & -s \nabla^2 \Psi + r \Psi = h, (T > T_c \text{ 时, } u \Psi^3 \text{ 足够小}) \quad (1) \end{aligned}$$

傅里叶变换 (Bloch's theorem):

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ikx} \Psi_k, h(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ikx} h_k$$

其中 k 是动量. 代入 (1) 并比较系数, 得

$$(sk^2 + r)\Psi_k = h_k \Rightarrow \Psi_k = \frac{h_k}{sk^2 + r}$$
$$\chi_k \equiv \frac{\Psi_k}{h_k} = \frac{1}{sk^2 + r} = \frac{1}{s(k^2 + \xi^{-2})}, T > T_c$$

- 均匀外场——零动量模式 ($k = 0$): $\chi_{k=0} = \frac{1}{r}$
- $T = T_c$ 时, $\xi^{-1} \rightarrow 0$, $\chi_k = \frac{1}{sk^2} \propto 1/k^2$
一般的, 取 $\chi_k \propto \frac{1}{k^2 - \eta}$
- 当 $u \neq 0$ 时, 也有解析解 (非平面波解), 如一维的孤子解
 $\Psi = \Psi_0 \tanh \frac{x-x_0}{\sqrt{2}\xi}$
- 非均匀序参量由 Ginzburg-Landau 理论描述, 序参量空间变化的特征长度尺度是关联长度, 其在相变点发散.

只考虑相对于均匀序参量的涨落 $\Psi(x) = \Psi_0 + \delta\Psi(x)$

$$f_{GL} = \frac{r}{2}\Psi_0^2 + \frac{u}{4}\Psi_0^4 + \frac{s}{2}(\nabla\delta\Psi)^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{u}{4}(6\Psi_0^2)\right)(\delta\Psi)^2 + \mathcal{O}(\delta\Psi^3)$$

以上利用了 $r\Psi_0 + u\Psi_0^3 = 0$ 且只考虑二阶项. 代入 Boltzman 分布的配分函数 (巨正则系综)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\delta\Psi e^{-F_{GL}} \\ &= e^{-(\frac{r}{2}\Psi_0^2 + \frac{u}{4}\Psi_0^4)L^d} \int \mathcal{D}\delta\Psi e^{-\int d^d x \left[\frac{s}{2}(\nabla\delta\Psi)^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{u}{4}(6\Psi_0^2)\right)(\delta\Psi)^2 \right]} \end{aligned}$$

其中 \mathcal{D} 是对连续化的场 $\Psi(x)$ 的泛函积分.

再次对涨落部分做傅里叶变换 (分离 $k > 0$ 和 $k < 0$)

$$\begin{aligned}\delta\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k>0} \left(e^{ikx} \Psi(k) + e^{-ikx} \Psi(-k) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k>0} \left(e^{ikx} \Psi(k) + e^{-ikx} \Psi^*(k) \right)\end{aligned}$$

最后一步是因为 $\Psi(x)$ 是实函数. 这里需要将每个 $\Psi(k), \Psi^*(k)$ 看作独立的复函数.

于是, 原积分 $\int \mathcal{D}\delta\Psi e^{-\int d^d x \left[\frac{s}{2} (\nabla \delta\Psi)^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{u}{4} (6\Psi_0^2) \right) (\delta\Psi)^2 \right]}$ 化为

$$\mathcal{I} = \int \prod_k d\delta\Psi(k) e^{-\sum_k \left[\frac{s}{2} k^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{u}{4} (6\Psi_0^2) \right) \right] \delta\Psi(k) \delta\Psi(-k)}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= \prod_{k>0} \int_{-\infty}^{\infty} 2d[\operatorname{Re}\delta\Psi(k)]d[\operatorname{Im}\delta\Psi(k)] \\
 &\quad e^{-2\left[\frac{s}{2}k^2 + \left(\frac{r}{2} + \frac{u}{4}(6\Psi_0^2)\right)\right]\left[(\operatorname{Re}\delta\Psi(k))^2 + (\operatorname{Im}\delta\Psi(k))^2\right]} \\
 &= \prod_{k>0} 2 \left(\sqrt{\frac{\pi}{sk^2 + (r + 3u\Psi_0^2)}} \right)^2 \\
 &= \prod_k \sqrt{\frac{2\pi}{sk^2 + (r + 3u\Psi_0^2)}} \\
 &= \exp \left[\frac{1}{2} \sum_k \ln \frac{2\pi}{sk^2 + (r + 3u\Psi_0^2)} \right]
 \end{aligned}$$

自由能修正 ($\beta = 1$)

$$\Delta F_{GL} = -\frac{1}{2} \sum_k \ln \frac{2\pi}{sk^2 + (r + 3u\Psi_0^2)}$$

$$\Rightarrow F = \left(\frac{r}{2} \Psi_0^2 + \frac{u}{4} \Psi_0^4 \right) V + \frac{1}{2} \sum_k \ln(sk^2 + r + 3u\Psi_0^2)$$

已略去常数项, 并令空间体积 $V = L^d$. 考虑

$$0 = \frac{\partial f}{\partial \Psi_0} = (r\Psi_0 + u\Psi_0^3) + \frac{1}{2V} \sum_k \frac{6u\Psi_0}{sk^2 + r + 3u\Psi_0^2}$$

非零序参量:

$$r + u\Psi_0^2 + \frac{1}{2V} \sum_k \frac{6u}{sk^2 + r + 3u\Psi_0^2} = 0$$

相变点, $\Psi_0 \rightarrow 0, r \rightarrow 0$, 在热力学极限下可将求和化为积分:

$$\sum_k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^d} \int d^d k$$

$$\Sigma = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{3u/s}{k^2} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{3u}{s} \int_0^\Lambda k^{d-3} dk = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{3u}{s} \frac{k^{d-2}|_0^\Lambda}{d-2}$$

其中第二个等号对动量模式做了截断 (即” 红外截断”infrared cut-off).

Λ 是动量的截断尺度或者最大允许值, 物理上可以理解为当前理论适用的最大范围 (晶格大小 L); $S_d = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ 是 d 维的超球面面积.

- 对于 $d < 2$, 积分结果在积分下限 $k = 0$ 处发散, 这表明小的 Gauss 涨落会导致低维系统的 (长程) 有序性被破坏.
more generally, Mermin-Wagner-Hohenberg 定理 (场论, Coleman-Mermin-Wagner-Hohenberg 定理):
- Mermin-Wagner-Hohenberg 定理: 具有连续对称序参量的二维 (及以下) 系统在有限温度时不会出现真正的长程有序——有限温度下不可能发生有序相变
 - 在这类系统中序参量总是零.
 - 如果存在长程相互作用, 则可以不遵守该定理的限制. 通常把长程序不能存在的临界维度称作下临界维度 (lower critical dimension), 记为 d_L . 这里, $d_L = 2$.
 - 材料的三维性使得他们等效的二维或者一维结构得以稳定.

接下来计算自由能的形式和临界指数. 为了简单起见, 我们考虑 $T > T_c (\Psi_0 = 0)$ 并令 $s = 1$

$$\begin{aligned}\Delta F_{GL} &= \frac{1}{2} \sum_k \ln(k^2 + r) = \frac{1}{2} V \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln(k^2 + r) \\ &= \frac{S_d}{2(2\pi)^d} V \int k^{d-1} \ln(k^2 + r) dk\end{aligned}$$

利用分部积分改写上面的积分

$$\int_0^\Lambda k^{d-1} \ln(k^2 + r) dk \simeq \Lambda^d \ln(\Lambda^2 + r) - 2 \int_0^\Lambda \frac{k^{d+1} dk}{k^2 + r}$$

第一项在 $\Lambda \gg r$ 时仅依赖于 Λ , 而第二项在忽略对数项修正的情况下可以近似为

$$\int_0^\Lambda \frac{k^{d+1} dk}{k^2 + r} \simeq \int_{\sqrt{r}}^\Lambda k^{d-1} dk = \frac{1}{d} (\Lambda^d - r^{d/2})$$

代入涨落自由能表达式得

$$\Delta F_{GL} = \frac{S_d}{2(2\pi)^d} V \left[2\Lambda^d \ln \Lambda - \frac{2}{d} (\Lambda^d - r^{d/2}) \right] \propto |T - T_c|^{d/2}$$

对比朗道平均场自由能 ($\Psi = \sqrt{-r/u}$)

$$F_L = \left(\frac{r}{2} \Psi_0^2 + \frac{u}{4} \Psi_0^4 \right) V \propto \frac{r^2}{u} \propto |T - T_c|^2$$

- $d > 4$, Landau 平均场基本正确; $d < 4$, 涨落不可忽略
- 我们认为 $d = 4$ 也是平均场可以正确描述相变的维度. 通常称该维度为上临界维度 (upper critical dimension), 记为 d_u , 表示平均场在该维度以及以上可以正确描述相变物理.

■ $d = 4$

$$\Delta F_{GL} \propto r^2 \ln \frac{r}{\Lambda^2} \Rightarrow C_v \propto T \ln(T - T_c)$$

■ 虽然 $d = 1, 2$ 时系统并不存在有序态, 但是可以看成是相变温度 $T_c = 0$ 的情况

- $d = 1: \Delta f_{GL}^{d=1} \propto \sqrt{r} \propto \sqrt{T}$
- $d = 2: \Delta f_{GL}^{d=2} \propto r \ln \frac{\Lambda^2}{r} \propto T \ln \frac{\Lambda^2}{T}$

总结

- $d \geq 4$, Landau 理论正确
- $2 < d < 4$, 涨落效应对于相变描述很重要
- $d \leq 2$, 有序性消失
- Gauss 临界指数:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}, \beta = \frac{d-2}{4}, \gamma = 1, \delta = \frac{d+2}{d-2}, \nu = \frac{1}{2}, \eta = 0$$

Gauss 临界指数精确解 (Ising) 仍有很大差别. 进一步的微扰理论计算实际上依然无法消除这种差异 \rightarrow 标度与重整化群.

由 N 个实分量构成的矢量序参量 $\vec{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$

$$f_L[\vec{\Psi}] = \frac{r}{2}(\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi}) + \frac{u}{4}(\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi})^2$$

$O(N)$ 不变理论: $f_L[\vec{\Psi}] = f_L[\mathcal{O}_{N \times N} \vec{\Psi}]$

- $O(1)$: Ising model
- $O(2)$: 超导或者超流的有效自由能
- $O(3)$: Heisenberg 经典磁性模型系统
- ...

Simplest:

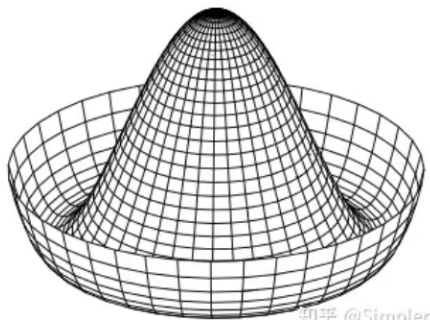
$$f_L[\vec{\Psi}] = r(\Psi_1^2 + \Psi_2^2) + \frac{u}{2}(\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^2$$

$$\text{or} \quad \Psi \equiv \Psi_1 + i\Psi_2 = |\Psi|e^{i\theta}, f_L[\vec{\Psi}] = r|\Psi|^2 + \frac{u}{2}(|\Psi|^2)^2$$

$$\mathcal{O}_{2 \times 2} \leftrightarrow e^{i\alpha}(\text{规范变换}); O(2) \leftrightarrow U(1).$$

$$\frac{\partial f_L}{\partial \Psi^*} = 0 \Rightarrow |\Psi|^2 = \begin{cases} 0, T > T_c \\ -r/u, T < T_c \end{cases}$$

Goldstone mode(bosonic mode)



连续对称性的自发破缺会产生 Goldstone boson, 比如晶格破坏了连续的平移对称性, 产生了无能隙的声子; 超流相破坏了 $U(1)$ 对称性而产生无能隙的声子.

while

$$f_{GL} = \frac{1}{2m} |\nabla \Psi|^2 + r|\Psi|^2 + \frac{u}{2} (|\Psi|^2)^2$$

$$\frac{\partial f_{GL}}{\partial \Psi^*} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi + r\Psi + u|\Psi|^2 \Psi = 0$$

more generally, Gross-Pitaevski 方程 (序参量随时间变化)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + r\Psi + u|\Psi|^2 \Psi,$$

where $\Psi = \langle \hat{\Psi} \rangle$ (Bose 场算符)

e.g. He-4 原子, 玻色型的超冷原子, He-3 超流, 通常超导体中的 Cooper 对

$$f_{O(2)} = |\nabla \Psi|^2 + r|\Psi|^2 + \frac{u}{2}(|\Psi|^2)^2$$

令 $\Psi = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$, 其中 θ 代表相位自由度, 而 ρ 表示振幅自由度, 在很多情况下也表示粒子数密度.

$$f_{O(2)} = (\nabla \sqrt{\rho})^2 + \rho(\nabla \theta)^2 + r\rho + \frac{u}{2}\rho^2$$

$$T < T_c, \rho_0 = \sqrt{-r/u} \Rightarrow f_{O(2)}^{T < T_c} = \rho_0(\nabla \theta)^2 + r\rho_0 + \frac{u}{2}\rho_0^2$$

当相位的变化足够小时, 其消耗的能量也足够小, 也就是说相位模式是无能隙模式.

- 仅当振幅模式 ρ 获得非零期望值时, 相位模式才变得无能隙——Goldstone 模式.
连续相位变换的破缺 \rightarrow 无能隙的 Goldstone 模式
- Goldstone 机制: 连续对称的自发破缺会产生无能隙的 Nambu-Goldstone 模式
Yoichiro Nambu(南部阳一郎)
- 计数 Goldstone 模式 e.g. $O(N)$: 1 个方向有序, 该方向的激发模式有能隙 (Higgs 模式) \rightarrow 另外 $N - 1$ 个方向激发模式都无能隙 ($N - 1$ 个 Goldstone 模式).
- 并不是所有的无能隙模式都由破缺连续对称性导致, e.g. 光子.

考虑序参量与简单的 $U(1)$ 规范场, 即电磁场的耦合.

$$f_{GL} = \left| (\nabla - iq\vec{A})\Psi \right|^2 + r|\Psi|^2 + \frac{u}{2}(|\Psi|^2)^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2$$

最小耦合 $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - iqA_\mu$, 只考虑空间部分.

- Ginzburg and Landau, 宏观唯像
- BCS 理论 (Gorkov): 序参量 Ψ 是 Cooper 对算符的统计平均值; 电荷 $q = 2e$ 表明序参量实际上是电子对而非单个电子.

振幅-相位分解:

$$f_{GL} = (\nabla \sqrt{\rho})^2 + \rho(\nabla \theta - q \vec{A})^2 + r\rho + \frac{u}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2$$

$$\vec{\tilde{A}} = \vec{A} - \frac{1}{q} \nabla \theta \Rightarrow \nabla \times \vec{\tilde{A}} = \nabla \times \vec{A} \quad (\theta \text{非奇异})$$

$$f_{GL} = (\nabla \sqrt{\rho})^2 + q^2 \rho (\vec{\tilde{A}})^2 + r\rho + \frac{u}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{\tilde{A}})^2$$

no θ now

假定 $T < T_c$, $\Psi = \Psi_0$, 即 $\rho = \Psi_0^2 = \text{Constant}$.

$$f_{GL} = q^2 \Psi_0^2 \vec{A}^2 + r \Psi_0^2 + \frac{u}{2} \Psi_0^4 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 \text{ (设 } \vec{\tilde{A}} = \vec{A})$$

对自由能取极小值 (Coulomb 规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial f_{GL}}{\partial \Psi_0} = 0 \Rightarrow r + u \Psi_0^2 + q^2 \vec{A}^2 = 0 \\ \frac{\partial f_{GL}}{\partial A_i} = 0 \Rightarrow 2q^2 \Psi_0^2 A_i - \nabla^2 A_i = 0 \end{cases}$$

这两个方程称为 Ginzburg-Landau 方程.

指数衰减的解:

$$\vec{A}(x) = \vec{A}_0 e^{-x/l}, \quad l = 1/\sqrt{2q^2\Psi_0^2}$$

其中 l 代表 London 穿透深度 (penetration depth), 表征电磁场在超导体中衰减的特征长度.

- 电磁场在有序态 (超导态) 获得了有限的质量 (能隙) $m^2 = q^2\Psi_0^2$ ——Anderson-Higgs 机制.
- Anderson-Higgs 机制: 当 Higgs 粒子凝聚时, 规范场吸收掉无质量的 Goldstone 模式获得有限质量.
- 在当前的凝聚态 GL 模型中, AH 机制表明振幅模式具有有限值时, 电磁场吸收掉相位模式而获得有限激发能隙, 产生 Meissner 效应. 在凝聚态物理中, 使规范场获得能隙的方案还有 Chern-Simons 机制, 此时体系破坏时间反演与空间反演对称性, 这实际上导致整数与分数量子霍尔效应.

超越朗道范式:

- 关联函数 \rightarrow 相变
- 拓扑序 (topological order), 量子信息交叉 (entanglement entropy, QF, QD, QC...)
- KT/BKT transition, DQCP, 分数化临界点...
- model: XY, toric-code, Kitaev, Su-Schrieffer-Heeger...

References I

1. 《热力学与统计物理》汪志诚
2. 知乎: 大黄猫, Simpler, 拉格朗日的忧郁, 浅斟低唱...
<https://www.zhihu.com/question/450612019>
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/514663915>
<https://www.zhihu.com/question/435008696/answer/1641257770>
3. 《统计力学》Pathria
4. 《Quantum Phase Transitions》Subir Sachdev
5. 《Quantum Field Theory and Condensed Matter》Shankar