2022—2023（1）理科高等代数（1） 期末考试试卷(A)

说明 1. 共九道大题，总分 100 分+附加题 10 分。

说明 2. 本试卷中用$E_n, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$分别表示 n 阶单位阵，实数域，有理数域。

一、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ 的根是______________________________。

2. A 为 n 阶方阵（$n>2$），A^*为 A 的伴随矩阵，则$(A^*)^*$=_____________（用 A 和 $\det A$ 表示）。

3. $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$, 且 $g(x)\neq 0$, $h(x)\neq 0$，则 $f(x)h(x)$ 除以 $g(x)h(x)$ 所得的商为_________，余式为_____________。

4. 设$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则$A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$。

5. A , B , C 均为 n 阶方阵，且 $B=E_n+AB$，$C=A+CA$，那么 $B-C$=________。

二、单选题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设A是 4 阶方矩阵，并且$A \xrightarrow{(2,3)} B \xrightarrow{-3(4)+(1)} C \xrightarrow{\frac{1}{2}(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 则$|A|=$(　　　　)。

   A. 3　　B. -3　　C. 12　　D. -12

2. 下列四个关于矩阵的逆的说法正确的有(　　　)。

   (1) 可逆对称矩阵的逆还是对称矩阵.　　(2) 可逆上三角矩阵的逆还是上三角矩阵.

   (3) 初等矩阵的逆还是初等矩阵.　　(4) 反对称矩阵一定不可逆.

   A. (1)(3)　　B. (1)(2)(3)　　C. (1)(3)(4)　　D. (1)(2)(3)(4)

3. 设$A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, 则下列矩阵中，与$A$相抵的是(　　　　)。

   A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 下列两个论断：（1）存在 3×2 矩阵A和 2×3 矩阵B，使得$AB=E_3$.（2）存在 2×3 矩阵A和 3×2 矩阵B，使得$AB=E_2$.　正确的是(　　　).

   A. 只有(1)正确　　B. 只有(2)正确　　C. (1)和(2)都正确.　　D. (1)和(2)都错误.

5. 下列关于不可约多项式的说法，正确的一共有(　　　)个.

   (1) $x^4-3x^3+9x-21$ 在$\mathbb{R}$上不可约.　　(2) $x^4-3x^3+9x-21$ 在$\mathbb{Q}$上不可约.

   (3) x^3+x^2-3x+2 在$\mathbb{Q}$上不可约.

   (4) 设$p(x)$，$f(x)\in\mathbb{Q}[x]\setminus\mathbb{Q}$。若$p(x)$不可约且和$f(x)$有公共复根，则$p(x)|f(x)$。

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

三. (10 分) 设 A 的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$。

（1）求 A.　　(2) 当$|A| < 0$ 时，求解矩阵方程$A^{-1}XA = XA + E_3$.

四.（10 分）已知$f(x) = 3x^3 - 4x + 5, g(x) = x^2 - 2x - 1$.

(1) 求$(f(x), g(x))$.　　(2) 求多项式$u(x), v(x)$使得$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$.

五.（10 分）设 n 为不小于 2 的自然数，A 为 n 阶方阵. 证明下列论断：

（1） A 不可逆时，A 的伴随阵 A*满足 rank（A*）≤ 1.

（2） $|A^*| = |A|^{n-1}$.

六.（10 分）证明下列论断：

(1) 设$F[x]$中的两个次数均大于 0 的多项式$f(x), g(x)$互素, 则存在一组$u(x), v(x) \in F[x]$使得$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$，且 $\deg u(x) < \deg g(x), \deg v(x) < \deg f(x)$ (这个结论不须证明）。请证明这样的$u(x), v(x) \in F[x]$是唯一的.

(2) 当$(f(x), g(x))$ =1 时证明$(f(x)^m, g(x)^n) = 1$ 对任意正整数 m, n 成立.

七.（10 分）设 A 为数域 F 上 n 阶方阵，若有正整数 k 使 $rank(A^k) = rank(A^{k+1})$，证明：必有 n 阶方阵 B 使得 $A^k = A^{k+1}B$。

八.（10 分） 是否存在区间[2022, 2023]上的四个实连续函数 $a_{ij}(t), i, j \in \{1, 2\}$，同时满足:

（1）对于任意 $t \in$[2022, 2023]，$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$ 可逆。

(2) $A(2022) = \begin{pmatrix} sin\,2022 & cos\,2022 \\ -cos\,2022 & sin\,2022 \end{pmatrix}$，　$A(2023) = \begin{pmatrix} -sin\,2023 & cos\,2023 \\ cos\,2023 & sin\,2023 \end{pmatrix}$。

九．附加题(10 分)．（1）选择下面两个问题之一加以论证（只猜出结论不得分）：

I） 用多项式理论确定含有$\sqrt[3]{2}$的最小数域。

II）设A, B, C分别是 $n \times n$，$1 \times n$，$n \times 1$ 矩阵，A^*为A的伴随矩阵. 证明：

$$\begin{vmatrix} 0 & B \\ C & A \end{vmatrix} = -BA^*C.$$

（2）任选一篇教材第 3-5 章中让自己查阅的文献，说明阅读后了解到的概念、性质或结论，并做相应论述。